Pubblicazione bimensile. *Roma 21 gennaio 1915.* **N. 1.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 *gennaio* 1915.

Volume XXIV°. — Fascicolo 1°

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

I. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

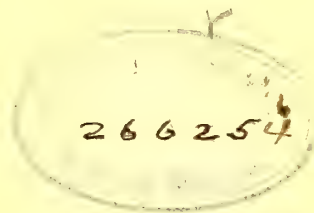
1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 gennaio 1915.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra una proprietà caratteristica delle congruenze rettilinee di rotolamento.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. Indico col nome di *congruenze di rotolamento* le congruenze rettilinee generate da una retta trascinata in sistema rigido da una superficie S_0, quando questa rotola sopra una superficie applicabile S. S'intende per altro escluso che le superficie applicabili siano ambedue rigate, perchè in questo caso (e in questo soltanto) la retta *satellite* assumerebbe solo una semplice infinità di posizioni, e descriverebbe quindi una superficie rigata, non una congruenza.

Allo studio dalle congruenze di rotolamento ho dedicato una Memoria, ora in corso di pubblicazione nei Rendiconti del Circolo matematico di Palermo (tomo 39°, 1915); ai risultati generali ivi stabiliti, faccio seguire nella presente Nota le dimostrazioni di alcune proprietà complementari.

Le congruenze di rotolamento sono congruenze rettilinee affatto speciali. I loro fuochi ed i piani focali sono sempre reali e godono dell'importante proprietà che le loro posizioni per ogni raggio della congruenza dipendono soltanto dalla superficie rotolante S_0, e non cangiano se varia comunque la superficie (applicabile) S di appoggio. Ne segue che se ogni raggio della congruenza s'immagina invariabilmente legato agli elementi del corrispondente piano tangente di S, e indi si deforma comunque per flessione questa superficie, i fuochi ed i piani focali restano fissi per ogni raggio.

Principale scopo di questa Nota è di provare che per le congruenze *a sviluppabili distinte* questa proprietà è *caratteristica* per le congruenze

di rotolamento. In pari tempo stabiliremo qui nuovamente le proprietà fondamentali di queste congruenze, per una via alquanto diversa da quella seguìta nella Memoria.

2. Al nostro studio sulla deformazione delle congruenze occorre premettere la risoluzione di un problema, già in sostanza contenuta in una Memoria di Ribaucour ([1]), ma che qui conviene riprendere seguendo i concetti introdotti da S. Lie ([2]) nella geometria infinitesimale.

Chiamiamo elemento piano o *faccetta* f l'insieme di un punto P e di un piano π incidenti, o più propriamente un intorno infinitesimo del punto P (centro di f) sul piano π. Consideriamo una superficie S come la totalità delle sue ∞^2 faccette f, ed insieme un'altra superficie S′ corrispondente punto per punto alla S, sicchè ad ogni faccetta f di S corrisponderà una determinata faccetta f' di S′. Ora immaginiamo di deformare comunque per flessione la S, e che ogni sua faccetta f trasporti seco, *in sistema invariabile*, la corrispondente faccetta f'. In generale accadrà che, dopo la deformazione, le ∞^2 faccette f' cesseranno di costituire una superficie; ora noi domandiamo di *trovare tutti i casi nei quali, dopo qualunque deformazione della* S, *le* ∞^2 *faccette trasformate* f' *costituiscono sempre una superficie.*

Dimostreremo che ciò avviene in due soli casi, e cioè:

a) *quando ogni faccetta* f' *è normale alla congiungente il suo centro* F′ *col centro* F *della faccetta corrispondente* f (caso di Beltrami);

b) *quando i piani* π, π' *di due faccette qualunque corrispondenti* f, f', *sono fra loro ortogonali, e inoltre il centro* F′ *della* f' *giace sul piano* π *della* f (caso di Ribaucour).

Per provare queste asserzioni, cominciamo dal riferire la superficie S, in una qualunque delle sue configurazioni, ad un sistema (u, v) di coordinate curvilinee qualsivoglia. Mantenendo le consuete notazioni della teoria generale, indichiamo con x', y', z' le coordinate del centro F′ della faccetta f', corrispondente alla faccetta $f \equiv (u, v)$ della S, e con X', Y', Z' i coseni di direzione della normale al piano π' della f'. Per esprimere che la f' è invariabilmente legata alla f, in qualunque deformazione della S, basterà scrivere x', y', z' ; X', Y', Z' sotto la forma

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= x + l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v} + nX \\ y' &= y + l\frac{\partial y}{\partial u} + m\frac{\partial y}{\partial v} + nY \\ z' &= z + l\frac{\partial z}{\partial u} + m\frac{\partial z}{\partial v} + nZ \end{aligned} \right.$$

([1]) Ved. *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes* (Journal de mathém., 4ème série, tom. VII, 1891), n. 92.

([2]) Cfr. le mie *Lezioni*, vol. III, § 39.

$$(2)\quad \begin{cases} X' = \lambda \dfrac{\partial x}{\partial u} + \mu \dfrac{\partial x}{\partial v} + \nu X \\ Y' = \lambda \dfrac{\partial y}{\partial u} + \mu \dfrac{\partial y}{\partial v} + \nu Y \\ Z' = \lambda \dfrac{\partial z}{\partial u} + \mu \dfrac{\partial z}{\partial v} + \nu Z , \end{cases}$$

dove i coefficienti l, m, n nelle (1), e gli altri λ, μ, ν nelle (2) sono tutti funzioni di u, v, *invariabili per flessione.*

Per ipotesi, per qualunque deformazione della S, debbono sussistere le due relazioni

$$(3)\quad \begin{cases} X' \dfrac{\partial x'}{\partial u} + Y' \dfrac{\partial y'}{\partial u} + Z' \dfrac{\partial z'}{\partial u} = 0 \\ X' \dfrac{\partial x'}{\partial v} + Y' \dfrac{\partial y'}{\partial v} + Z' \dfrac{\partial z'}{\partial v} = 0 . \end{cases}$$

le quali esprimono appunto che le ∞^2 faccette f' formano una superficie S'.

Ora dalle (1), derivando, con riguardo alle formole fondamentali della teoria, veniamo ad esprimere linearmente ed omogeneamente le derivate di x', y', z' per quelle di x, y, z, e per X, Y, Z, colle formole seguenti:

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial u} = \left(L + n \dfrac{FD' - GD}{EG - F^2}\right) \dfrac{\partial x}{\partial u} + \left(M + n \dfrac{FD - ED'}{EG - F^2}\right) \dfrac{\partial x}{\partial u} + \\ \qquad + \left(\dfrac{\partial n}{\partial u} + D\, l + D' m\right) X \\ \dfrac{\partial x'}{\partial v} = \left(P + n \dfrac{FD'' - GD'}{EG - F^2}\right) \dfrac{\partial x}{\partial u} + \left(Q + n \dfrac{FD' - ED''}{EG - F^2}\right) \dfrac{\partial x}{\partial v} + \\ \qquad + \left(\dfrac{\partial n}{\partial v} + D' l + D'' m\right) X . \end{cases}$$

ed analoghe per y', z', ove i coefficienti L, M P, Q hanno valori invariabili per flessione, e precisamente:

$$(5)\quad \begin{cases} L = \dfrac{\partial l}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} l + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} m + 1 \;, \quad P = \dfrac{\partial l}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} l + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} m \\ M = \dfrac{\partial m}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} l + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} m \;, \quad Q = \dfrac{\partial m}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} l + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} m + 1 . \end{cases}$$

Introducendo nelle (3) per X', Y', Z' i valori (2), e per $\frac{\partial x'}{\partial u}, \frac{\partial x'}{\partial v}$ i valori (4), otteniamo le due relazioni seguenti:

$$(6)\quad \begin{cases} (n\lambda - \nu l)\,D + (n\mu - \nu m)\,D' = \\ \qquad = \lambda(EL + FM) + \mu(FL + GM) + \nu \frac{\partial n}{\partial u}, \\ (n\lambda - \nu l)\,D' + (n\mu - \nu m)\,D'' = \\ \qquad = \lambda(EP + FQ) + \mu(FP + GQ) + \nu \frac{\partial n}{\partial v}, \end{cases}$$

nelle quali i secondi membri sono indipendenti dalle flessioni, mentre i primi contengono linearmente i coefficienti D, D', D'' che fissano la configurazione di S. Ora, affinchè le (6) si verifichino in tutte le deformazioni, come è supposto, occorre che le (6) risultino *identità* [1], ed avremo quindi necessariamente

$$(7)\qquad n\lambda = \nu l \quad , \quad n\mu = \nu m .$$

Viceversa, se sussistono queste due equazioni, ed in una *particolare* configurazione di S le ∞^2 faccette f' costituiscono una superficie, ciò avverrà in tutte le altre deformazioni, poichè si annulleranno nelle (6) anche i secondi membri. Ora le (7) portano a distinguere due casi, secondo che ν è diverso da zero, oppure zero.

1º caso: $\nu \neq 0$. Possiamo scrivere

$$l = n\frac{\lambda}{\nu} \quad , \quad m = n\frac{\mu}{\nu} ,$$

onde abbiamo

$$x' - x = \frac{n}{\nu}X' \quad , \quad y' - y = \frac{n}{\nu}Y' \quad , \quad z' - z = \frac{n}{\nu}Z' ;$$

queste esprimono che le faccette f' sono normali alle congiungenti FF' dei centri delle faccette corrispondenti, il che è appunto il caso a) di Beltrami.

2º caso: $\nu = 0$. Qui abbiamo

$$X'X + Y'Y + Z'Z = 0 ,$$

cioè i piani delle faccette corrispondenti sono normali fra loro. Ma inoltre dalle (7), non potendo essere insieme $\lambda = \mu = 0$, segue che necessariamente $n = 0$, vale a dire il centro F' di f' giace sul piano π di f, cioè sul piano tangente delle superficie S; ci troviamo dunque nel caso b) di Ribaucour. La proposizione enunciata è così stabilita.

[1] Cfr. *Lezioni*, vol. III. § 254.

3. Supponiamo, ora, che a ciascuna faccetta f della superficie S, flessibile ed inestendibile, sia coordinato un corrispondente raggio r di una congruenza (Γ); e mentre la S si deforma per flessione, ciascuna faccetta f trasporti seco invariabilmente il raggio corrispondente. In generale avverrà che, al deformarsi della S [o anche, diremo, al deformarsi della congruenza (Γ)] i due fuochi sul raggio ed i due piani focali attorno al raggio varieranno di posizione. Ora i risultati del n. 2 permettono di rispondere subito alla domanda:

In quali casi avviene che per la congruenza (Γ), *supposta a sviluppabili distinte, i due fuochi* F_1, F_2 *ed i due piani focali* π_1, π_2 *restano immobili per ogni raggio in qualunque deformazione della superficie* S, *o della congruenza* (Γ)?

In tal caso le due serie ∞^2 di faccette $f_1 \equiv (F_1, \pi_1)$, $f_2 \equiv (F_2, \pi_2)$, ciascuna costituita da un fuoco e dal relativo piano focale, restano invariabilmente legate alla corrispondente faccetta $f \equiv (F, \pi)$ della S, e, dopo qualunque deformazione, le f_1 costituiscono sempre la prima falda focale S_1, e le f_2 la seconda falda S_2. Secondo il n. 2, ciascuna di queste due faccette f_1, f_2 dovrà offrire o il caso a) di Beltrami, o quello b) di Ribaucour; ma poichè i due fuochi sono distinti, uno di essi, poniamo F_1, sarà nel punto (r, π) ove il raggio interseca il piano tangente π di S, ed allora il relativo piano focale π_1 sarà quello condotto per r normalmente a π. Dopo ciò, il secondo fuoco F_2 cadrà nel piede della perpendicolare abbassata da F sopra r, ed il relativo piano focale π_2 sarà quello condotto per r normalmente al piano (F, r).

Viceversa, se i fuochi ed i piani focali, in una particolare configurazione della S, offrono la disposizione descritta, essi la conserveranno, deformando comunque la S. Concludiamo, quindi, che la invariabilità dei fuochi e dei piani focali per ogni raggio di (Γ) avrà luogo allora, ed allora soltanto, che siano soddisfatte le condizioni seguenti:

c) *Ogni punto* F *della superficie* S *si trova sopra la normale nel punto corrispondente ad una delle due falde focali (distinto da questo punto), ed il piano tangente in* F *alla* S *passa per la normale all'altra falda focale.*

4. Le condizioni c), ora rilevate, sono quelle che, nella Memoria citata, assicurano trattarsi di una congruenza (Γ) di rotolamento. Di questa proposizione fondamentale darò ora un'altra dimostrazione, colla quale verranno a stabilirsi, per una via alquanto diversa, le proprietà delle congruenze di rotolamento a sviluppabili distinte.

Supponiamo, adunque, che ad ogni punto F della superficie S corrisponda un raggio r della congruenza (Γ), le cui superficie focali S_1, S_2 sono distinte; la normale alla S_2 in F_2 contenga il punto F, e quella alla S_1 in F_1 giaccia nel piano tangente in F alla S. Noi proveremo, allora, che esiste

una deformazione della S in una superficie applicabile S_0, tale che in questa configurazione S_0 tutti i raggi di (Γ), trascinati nella deformazione, vengono a raccogliersi in una sola retta a. Così, in effetto, quando si faccia rotolare S_0 sopra S, la retta a, rigidamente trascinata da S_0, verrà appunto a descrivere la congruenza (Γ).

Sia $F \equiv (x, y, z)$ un punto generico di S; $F_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ il punto ove il corrispondente raggio r di (Γ) incontra il piano π tangente alla S in F; e sia inoltre $F_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ il piede della perpendicolare abbassata da F sopra r. Riferiamo la S ad un sistema di coordinate curvilinee ortogonali (u, v), scelte in guisa che la tangente in F alla linea $u = \text{cost}$ sia normale al raggio r di (Γ). Ritenendo le consuete notazioni, avremo le formole:

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{E}\, X_1\,, \quad \frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_2 + \frac{D}{\sqrt{E}} X_3\,,\\
&\quad \frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_1 + \frac{D'}{\sqrt{G}} X_3\,, \quad \frac{\partial X_3}{\partial u} = -\frac{D}{\sqrt{E}} X_1 - \frac{D'}{\sqrt{G}} X_2\\
&\frac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{G}\, X_2\,, \quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial v} X_2 + \frac{D'}{\sqrt{E}} X_3\,,\\
&\quad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_1 + \frac{D''}{\sqrt{G}} X_3\,, \quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = -\frac{D'}{\sqrt{E}} X_1 - \frac{D''}{\sqrt{E}} X_2\,,
\end{aligned}
\right.
$$

dove i coefficienti D, D', D'' della seconda forma fondamentale di S dovranno soddisfare alla equazione di Gauss

$$
(G)\quad \frac{DD'' - D'^2}{\sqrt{EG}} = K\sqrt{EG} = -\left\{ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right) \right\},
$$

ed alle due equazioni di Codazzi

$$
(C)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D}{\sqrt{E}}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\right) = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\frac{D'}{\sqrt{G}} + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\frac{D''}{\sqrt{G}}\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{\sqrt{G}}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'}{\sqrt{G}}\right) = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\frac{D'}{\sqrt{E}}\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Se indichiamo con σ l'angolo d'inclinazione del raggio r sul piano tangente di S, e con X, Y, Z i coseni di direzione del raggio stesso, potremo porre

$$
(9)\qquad X = \cos\sigma\, X_1 + \operatorname{sen}\sigma\, X_3\,,
$$

colle formole analoghe per Y, Z. E per le coordinate x_1, y_1, z_1 del primo fuoco F_1 della congruenza, potremo scrivere le formole

$$x_1 = x + l X_1 + m X_2 , \tag{10}$$

colle analoghe per y_1, z_1, dove i coefficienti l, m sono convenienti funzioni di u, v, indipendenti *dalle flessioni*.

5. Ciò premesso, passiamo a scrivere le equazioni cui debbono soddisfare le funzioni σ, l, m di u, v, affinchè siano verificate, come supponiamo, le condizioni c) del n. 3.

I coseni di direzione della normale alla prima falda focale S_1 sono, per ipotesi, X_2, Y_2, Z_2, e debbono quindi sussistere le due relazioni

$$S X_2 \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0 \quad , \quad S X_2 \frac{\partial x_1}{\partial v} = 0 ,$$

le quali, calcolate mediante le (10) e le (8), forniscono le due equazioni:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial m}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \cdot l \\[2ex] \dfrac{\partial m}{\partial v} = -\dfrac{1}{\sqrt{E}} \dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \cdot l - \sqrt{G} . \end{cases}$$

Ora, per le coordinate x_2, y_2, z_2 del piede F_2 della perpendicolare abbassata da F sopra r (secondo fuoco), troviamo subito, dalle (9) e (10),

$$x_2 = x + l \operatorname{sen}^2 \sigma X_1 + m X_2 - l \operatorname{sen} \sigma \cos \sigma X_3 , \tag{11}$$

e analoghe per y_2, z_2. L'altra condizione c), che la normale alla S_2 in F_2 sia la retta FF_2, si esprime scrivendo le altre due condizioni

$$S(x_2 - x) \frac{\partial x_2}{\partial u} = 0 \quad , \quad S(x_2 - x) \frac{\partial x_2}{\partial v} = 0 . \tag{12}$$

Per calcolarle, osserviamo che dalle (11) si ha

$$S(x_2 - x)^2 = l^2 \operatorname{sen}^2 \sigma + m^2 ;$$

e per ciò, derivando,

$$\text{(13)} \quad \begin{cases} S(x_2 - x) \dfrac{\partial x_2}{\partial u} = S(x_2 - x) \dfrac{\partial x}{\partial u} + l \operatorname{sen} \sigma \dfrac{\partial}{\partial u} (l \operatorname{sen} \sigma) + m \dfrac{\partial m}{\partial u} , \\[2ex] S(x_2 - x) \dfrac{\partial x_2}{\partial v} = S(x_2 - x) \dfrac{\partial x}{\partial v} + l \operatorname{sen} \sigma \dfrac{\partial}{\partial v} (l \operatorname{sen} \sigma) + m \dfrac{\partial m}{\partial v} . \end{cases}$$

Siccome dalle (11) e dalle (8) segue

$$S(x_2 - x) \frac{\partial x}{\partial u} = l \operatorname{sen}^2 \sigma \sqrt{E} \quad , \quad S(x_2 - x) \frac{\partial x}{\partial v} = m \sqrt{G} ,$$

se sostituiamo nelle (13) questi valori, e per $\frac{\partial m}{\partial u}$, $\frac{\partial m}{\partial v}$ i valori (I), le (12) si riducono alle due seguenti:

$$(13^\star)\quad \begin{cases} l\cdot\left[\left(\sqrt{E}+\frac{\partial l}{\partial u}\right)\operatorname{sen}^2\sigma + l\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial u}+\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}m\right]=0,\\ l\cdot\left[\frac{\partial l}{\partial v}\operatorname{sen}^2\sigma + l\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial v}-\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}m\right]=0.\end{cases}$$

Il caso $l=0$ è escluso nelle nostre ipotesi, perchè con $l=0$ coinciderebbero, per le (10), (11), i fuochi F_1, F_2; e se escludiamo il caso $\operatorname{sen}\sigma=0$, le (12) si traducono nelle due condizioni

$$(II)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial u}(l\operatorname{sen}\sigma)=-\sqrt{E}\operatorname{sen}\sigma-\frac{m}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v},\\ \frac{\partial}{\partial v}(l\operatorname{sen}\sigma)=\frac{m}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}.\end{cases}$$

Il caso $\operatorname{sen}\sigma=0$ ora escluso, non ha realmente interesse alcuno, poichè allora, non potendo essere $m=0$ (altrimenti F_2 coinciderebbe con F_1), risulterebbe dalle (13*)

$$\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=0\quad,\quad\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}=0,$$

e potremmo fare $\sqrt{E}=\sqrt{G}=1$. La superficie S sarebbe una sviluppabile, ed i raggi della congruenza (Γ), avendo i coseni di direzione (X_1, Y_1, Z_1), e questi risultando costanti lungo ogni generatrice della sviluppabile, si ordinerebbero in sviluppabili cilindriche, ed uno dei fuochi sarebbe allontanato all'infinito.

Così, adunqùe, il verificarsi delle condizioni c) n. 3 viene tradotto nelle equazioni (I) e (II). Ma converrà ancora tener conto, per la dimostrazione, delle loro conseguenze differenziali. La condizione d'integrabilità delle (I),

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cdot l\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\,l\right)+\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}=0,$$

ci dà

$$(14)\qquad K\sqrt{EG}\cdot l=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial u}+\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial l}{\partial v}+\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u},$$

ovvero, avendo riguardo alle (II),

$$(14^\star)\qquad K\sqrt{EG}=-\cot\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}-\cot\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}.$$

In fine, costruendo la condizione d'integrabilità delle (II),

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{m}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{m}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{E}\operatorname{sen}\sigma\right)=0\,;$$

ed osservando le (I) e le (14*), resta semplicemente

$$\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cos\sigma=\sqrt{E}\operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial v}\,, \tag{15}$$

od anche

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{E}\cos\sigma\right)=0\,. \tag{15*}$$

6. Sviluppate così le formole che seguono dal supposto verificarsi delle condizioni c) n. 3, passiamo a provare che esiste una deformata S_0 della S per la quale tutti i raggi di $(\boldsymbol{\Gamma})$ verranno a confondersi in una sola retta. Per questo, cerchiamo quali valori D_0, D'_0, D''_0 dovranno assumere i coefficienti della seconda forma fondamentale nella S_0. Intanto è chiaro che questi valori dovranno essere tali che risultino soddisfatte le condizioni seguenti:

α) *i coseni di direzione* X, Y, Z *dei raggi della congruenza si riducano a costanti*;

β) *le derivate rapporto ad* u, *e quelle rapporto a* v, *di* x_1, y_1, z_1, *risultino proporzionali a* X, Y, Z.

Viceversa, se i valori D_0, D'_0, D''_0 saranno tali da soddisfare a queste condizioni α), β), e, insieme, alla (G) di Gauss ed alle (C) di Codazzi, i raggi r saranno raccolti nella configurazione S_0 in un'unica retta; poichè, per le α), tutti i raggi avranno la stessa direzione e, per le β), nel passaggio da un raggio ad un *qualunque* successivo il punto F_1 si sposterà sempre nella direzione del raggio stesso. Ora, derivando le (9) coll'osservare le (8), si ottiene

$$\tag{16}\left\{\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial u}&=\left(\frac{D}{\sqrt{E}}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)(-\operatorname{sen}\sigma X_1+\cos\sigma X_3)-\\&\qquad-\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma D'}{\sqrt{G}}+\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)X_2\\\frac{\partial X}{\partial v}&=\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}+\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)(-\operatorname{sen}\sigma X_1+\cos\sigma X_3)-\\&\qquad-\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma D''}{\sqrt{G}}-\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)X_2\,,\end{aligned}\right.$$

e le formole analoghe. Nella configurazione S_0, riducendosi X, Y, Z a co-

stanti, i secondi membri delle (16) dovranno annullarsi, e questo determina già univocamente i valori D_0, D_0', D_0'' colle formole

$$
\text{(III)}\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{D_0}{\sqrt{E}} = -\frac{\partial \sigma}{\partial u}, \qquad \frac{D_0'}{\sqrt{E}} = -\frac{\partial \sigma}{\partial v},\\
&\frac{D_0'}{\sqrt{G}} = -\frac{\cot \sigma}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}, \qquad \frac{D_0''}{\sqrt{G}} = \cot \sigma \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u},
\end{aligned}
\right.
$$

sulle quali è da osservarsi che le due espressioni scritte pel coefficiente medio D_0', in effetto, coincidono, a causa della (15).

Per esaminare le condizioni β), deriviamo rapporto ad u e v i valori (10) di x_1, y_1, z_1, il che dà

$$
(17)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial x_1}{\partial u} &= \left(\sqrt{E} + \frac{\partial l}{\partial u} + \frac{m}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right) X_1 + \left(\frac{\partial m}{\partial u} - \frac{l}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right) X_2 + \\
&\quad + \left(\frac{D}{\sqrt{E}}\, l + \frac{D'}{\sqrt{G}}\, m\right) X_3\\
\frac{\partial x_1}{\partial v} &= \left(\frac{\partial l}{\partial v} - \frac{m}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) X_1 + \left(\sqrt{G} + \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{l}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) X_2 + \\
&\quad + \left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\, l + \frac{D''}{\sqrt{G}}\, m\right) X_3 .
\end{aligned}
\right.
$$

Ma, a causa delle (I), spariscono nei secondi membri i termini in X_2; e ponendovi poi per $\frac{\partial l}{\partial u}, \frac{\partial l}{\partial v}$ i valori tratti dalle (II), troviamo

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial x_1}{\partial u} &= -\frac{1}{\operatorname{sen} \sigma}\left(l \frac{\partial \sigma}{\partial u} + \frac{m \cot \sigma}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right)(\cos \sigma X_1 + \operatorname{sen} \sigma X_3)\\
\frac{\partial x_1}{\partial v} &= -\frac{1}{\operatorname{sen} \sigma}\left(l \frac{\partial \sigma}{\partial v} - \frac{m \cot \sigma}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)(\cos \sigma X_1 + \operatorname{sen} \sigma X_3),
\end{aligned}
\right.
$$

sicchè le derivate di x_1, y_1, z_1 risultano proporzionali a X, Y, Z. Così adunque coi valori (III) di D_0, D_0', D_0'' sono soddisfatte, insieme colle condizioni α), anche le β), e resta solo da provare che questi valori (III) soddisfano anche alle equazioni di Gauss e di Codazzi.

Ora, se introduciamo i valori (III) nella (G) di Gauss, questa si cangia nella (14*), ed è quindi verificata. D'altronde, la prima equazione (C) di

Codazzi diventa un'identità; e la seconda, che diventa

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\cot\sigma\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\cot\sigma\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sigma}{\partial u}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial\sigma}{\partial v},$$

viene nuovamente a coincidere colla (14^*).

Abbiamo così dimostrato il teorema:

Ogni congruenza rettilinea a sviluppabili distinte, che soddisfi alle condizioni c) *n. 3, è una congruenza di rotolamento.*

7. In riguardo alla determinazione della superficie rotolante S_0, i risultati precedenti ne fissano *intrinsecamente* la forma, assegnando i valori (III) dei coefficienti della sua seconda forma fondamentale. Volendo trovare effettivamente questa configurazione S_0, rimarrebbe però da integrare una equazione differenziale del tipo di Riccati, complicata inoltre di immaginarii. Ma è facile vedere che, nel caso nostro, *con sole quadrature nel campo reale*, si può trovare in termini finiti la S_0.

E invero ricordiamo che nella configurazione S_0 i tre coseni X, Y, Z debbono ridursi a tre costanti, che possiamo supporre date da $(0, 0, 1)$, bastando, per questo, prendere per asse Oz la retta satellite.

Allora, da

$$\cos\sigma X_1+\operatorname{sen}\sigma X_3=0$$

$$\cos\sigma Y_1+\operatorname{sen}\sigma Y_3=0$$

$$\cos\sigma Z_1+\operatorname{sen}\sigma Z_3=1\,,$$

si trae

$$Z_1=\cos\sigma\quad,\quad Z_2=0\quad,\quad Z_3=\operatorname{sen}\sigma\,.$$

Le prime (8) dimostrano che l'ordinata $z=z(u,v)$ nella superficie S_0 sarà data, per quadrature, dalle formole

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\sqrt{E}\cos\sigma\quad,\quad\frac{\partial z}{\partial v}=0,$$

la ove è da osservarsi che la condizione d'integrabilità è soddisfatta per (15^*). Conosciuta così z con una quadratura, per determinare x, y abbiamo

$$dx^2+dy^2+dz^2=E\,du^2+G\,dv^2\,,$$

cioè

$$dx^2+dy^2=E\operatorname{sen}^2\sigma\,du^2+G\,dv^2\,.$$

Ma subito si riscontra che la forma differenziale del secondo membro ha in effetto nulla la curvatura, a causa delle (14*), (15*); sicchè bastano quadrature per trovare x, y,

Come ulteriore verifica, si può notare che i valori dei coefficienti della seconda forma fondamentale, calcolati dalle note formole

$$z_{11} = D Z_3 \quad , \quad z_{12} = D' Z_3 \quad , \quad z_{22} = D'' Z_3 \, ,$$

vengono appunto a combinare coi valori (III).

8. I calcoli eseguiti al n. 6 possono farsi servire a dimostrare inversamente che: *ogni congruenza di rotolamento (a sviluppabili distinte) soddisfa alle condizioni* c) *n. 3*.

E invero, se la congruenza (Γ) è di rotolamento, dovrà esistere una deformata S_0 per la quale i raggi r si raccolgano in una sola retta, e quindi X, Y, Z diventino tre costanti, e le derivate di x_1, y_1, z_1 risultino proporzionali a X, Y, Z. La prima condizione dà, per D_0, D'_0, D''_0, i valori (III), e conseguentemente la (15) dovrà essere verificata. E la (14*) ne seguirà ancora nuovamente esprimendo che D_0, D'_0, D''_0 soddisfano alle equazioni di Gauss e Codazzi.

La seconda condizione, che $\frac{\partial x_1}{\partial u}$, $\frac{\partial y_1}{\partial u}$, $\frac{\partial z_1}{\partial u}$, e similmente $\frac{\partial x_1}{\partial v}$, $\frac{\partial y_1}{\partial v}$, $\frac{\partial z_1}{\partial v}$, calcolati dalle (17), risultino proporzionali a X, Y, Z, torna a dare in primo luogo le (I), ed in secondo luogo le (II), sicchè le condizioni c) n. 3 vengono ad essere soddisfatte (n. 5).

Possiamo intanto concludere che: *Le congruenze a sviluppabili distinte per le quali i fuochi ed i piani focali si serbano immobili per ogni raggio, deformandosi la congruenza nel modo del n. 1, sono unicamente le congruenze di rotolamento.*

Aggiungiamo, però, subito, che, per le congruenze a sviluppabili coincidenti, l'immobilità del fuoco e del piano focale non è affatto caratteristica per le congruenze di rotolamento. E infatti, una qualunque congruenza a sviluppabili coincidenti è costituita dalle tangenti alle linee asintotiche di un sistema di una superficie Σ che rappresenta l'unica superficie focale. Ora se si considera la prima o la seconda falda focale della evoluta di Σ, ed alle faccette piane di questa superficie S si legano invariabilmente i relativi raggi delle congruenze, subito si vede che il fuoco ed il piano focale serbano posizione invariabile, deformando comunque S. Dunque, qualunque congruenza a sviluppabili coincidenti soddisfa alle dette condizioni d'immobilità. Invece la congruenza è di rotolamento soltanto quando, sulla superficie focale Σ, le linee, lungo le quali è costante la curvatura di Σ, sono linee di curvatura (ved. Memoria citata, § 5).

Ritornando alle congruenze generali di rotolamento a sviluppabili distinte, possiamo riassumere i risultati ottenuti colle seguenti costruzioni per i loro fuochi e piani focali: Supposto che sia r la posizione occupata dalla retta satellite, quando la superficie rotolante S_0 viene a contatto con quella S d'appoggio in un suo punto P, avremo:

1°) *Un fuoco* F_1 *è il punto ove il piano* π *tangente in* P *interseca* r, *e l'altro fuoco* F_2 *è il piede della perpendicolare abbassata da* P *sopra* r.

2°) *Il piano focale* π_1 *relativo al fuoco* F_1 *è il piano condotto per* r *normalmente a* π, *ed il secondo piano focale* π_2 *è il piano condotto per* r *normalmente al piano* (P, r).

9. Le costruzioni geometriche così semplici, ora formulate, dei fuochi e dei piani focali nelle congruenze di rotolamento, valgono anche nel caso delle congruenze a sviluppabili coincidenti, e qui da ultimo vogliamo confermarle in generale con brevi considerazioni geometriche. Per questo utilizzeremo le proposizioni elementari relative al rotolamento [1] di superficie applicabili: e particolarmente la nozione di direzioni *cinematicamente coniugate* dovuta a Beltrami.

Si sa che se la superficie rotolante S_0 passa dalla posizione attuale ad una successiva S_0', spostandosi il punto P di contatto colla superficie S di appoggio (centro istantaneo di rotazione) dalla posizione P alla infinitamente vicina P', il movimento rigido, infinitesimo, che porta S_0 in S_0', è puramente rotatorio, e l'*asse istantaneo di rotazione* è quella tangente in P che ha la direzione cinematicamente coniugata a quella PP' dello spostamento del centro di rotazione.

Essendo qui inoltre escluso il caso di rigate rotolanti, si sa che le coppie di direzioni cinematicamente coniugate attorno a P formano un'*involuzione propria*: sicchè l'asse istantaneo di rotazione può scegliersi ad arbitrio fra le tangenti in P, purchè lo spostamento del centro di rotazione si assuma nella direzione cinematicamente coniugata.

Ciò premesso, è facile di determinare le sviluppabili nella congruenza di rotolamento, ricercando per ogni raggio r quali sono le posizioni infinitamente vicine r' che lo incontrano. È evidente che la tangente t in P, che rappresenta l'asse istantaneo di rotazione, dovrà per questo offrire uno dei due casi seguenti: 1°) appoggiarsi in un punto a r; 2°) essere normale al raggio r. Ora appunto fra le tangenti in P ve ne è una, ed una sola, diciamo t, appoggiata ad r, e cioè nel punto (r, π) ove il piano tangente in P sega r; ed una seconda, t', normale ad r. Quando l'asse istantaneo si fa coincidere con t, il punto $F_1 \equiv (r, \pi)$ è altresì il punto ove r' inter-

[1] Cfr. Darboux, *Leçons*, Vème partie, chap. VI; e le mie *Lezioni*, vol. II, § 237.

seca r, e per ciò F_1 è uno dei fuochi. E se l'asse istantaneo coincide con t' il punto ove r è incontrato dalla sua posizione successiva r' è il piede F_2 della perpendicolare abbassata da P sopra r, onde F_2 è il secondo fuoco.

È poi manifesto che nel primo caso il piano rr' (secondo piano focale) è quello condotto per r normalmente al piano (P, r); e nel secondo caso, invece, il piano rr' (primo piano focale) è quello condotto per r normalmente al piano tangente π. Così restano dimostrate, per via geometrica, le costruzioni assegnate al n. 8 pei fuochi e pei piani focali nelle congruenze di rotolamento.

Ed ora completiamo queste considerazioni col determinare le sviluppabili della congruenza.

Per abbreviare, diamo il nome di *profili meridiani* della superficie rotolante S_0 alle sue sezioni piane con piani per la retta satellite, e chiamiamo *linee di livello* quelle fatte con piani normali alla retta stessa. Per quanto precede, possiamo allora dire che gli assi istantanei di rotazione, corrispondenti alle striscie elementari delle sviluppabili di una serie, inviluppano sulla superficie S d'appoggio le trasformate dei profili meridiani della S_0, mentre quelli corrispondenti alle sviluppabili dell'altra serie inviluppano invece le trasformate delle linee di livello. E poichè, ogni volta, lo spostamento del centro istantaneo di rotazione avviene nella direzione cinematicamente coniugata, possiamo enunciare il risultato finale:

In una congruenza di rotolamento, le sviluppabili di una serie corrispondono alle linee della superficie d'appoggio che sono cinematicamente coniugate alle trasformate dei profili meridiani della superficie rotolante; e, similmente, le sviluppabili dell'altra serie corrispondono alle linee cinematicamente coniugate alle trasformate delle linee di livello.

Questo risultato dimostra, in particolare, che la congruenza di rotolamento avrà sviluppabili coincidenti solo quando per la superficie rotolante S_0 le linee di livello coincidano coi profili meridiani; lo che accade manifestamente solo per le superficie conoidali rette, il cui asse sia la retta satellite:

Le congruenze di rotolamento a sviluppabili coincidenti sono tutte e sole quelle generate dall'asse di una superficie conoidale retta che rotola sopra una qualunque superficie (non rigata) applicabile.

E in fine, ritornando al caso generale di sviluppabili distinte, osserveremo che, se si cangia la retta satellite mantenendole la stessa direzione, le linee di livello nella superficie rotolante S_0 restano le stesse; e per ciò, quando la superficie d'appoggio S si mantenga la stessa, le sviluppabili della seconda serie nelle congruenze di rotolamento si corrispondono; onde concludiamo:

Se una superficie S_0 *rotola sopra una superficie applicabile* S, *rette parallele, come satelliti della* S_0, *generano congruenze le cui sviluppabili in una serie si corrispondono.*

Astronomia. — *Eclisse totale di sole, del 21 agosto 1914.* Relazione preliminare del Socio A. Riccò, per la missione italiana in Crimea.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Azioni chimiche della luce.* Nota XXX del Socio G. Ciamician e di P. Silber.

Recentemente il prof. Paternò ha riunito in un fascicolo le sue pubblicazioni sopra alcune azioni chimiche della luce, che erano comparse nella Gazzetta chimica nelle annate dal 1909 al 1914, e vi ha aggiunto una IX Nota (1) di considerazioni generali, dedicata specialmente a noi. Potremmo anche esimerci dal rispondere, perchè i nostri lavori sono abbastanza noti e non hanno bisogno di commenti; avendo peraltro riguardo ad alcune sue osservazioni, crediamo opportuno di dimostrargli che esse non sono giustificate.

Nel 1900, riprendendo vecchie esperienze (2), abbiamo intrapreso una serie di ricerche sistematiche sulle azioni chimiche della luce (ciò che, in questa misura, prima di noi non era stato tentato) per vedere quali erano le reazioni che la luce determina o favorisce nei diversi campi della chimica organica. Abbiamo iniziato i nostri studî prendendo naturalmente le mosse dalle nostre prime osservazioni sul chinone e sul nitrobenzolo. Volendo organizzare una simile vasta ricerca, non abbiamo stimato utile o necessario di esaurire in tutti i casi i singoli argomenti, ritenendo sufficiente di prenderne in certo modo possesso per ritornarvi sopra quando ne avremmo avuto l'opportunità. Così è avvenuto che parecchi dei nostri temi sono stati ripresi più volte, o sono anche rimasti apparentemente abbandonati.

Nel 1909 il prof. Paternò è entrato in questo campo di studî senza usare verso di noi quelle forme di cortesia che si sogliono seguire in simili circostanze, come hanno fatto tanti altri nostri colleghi quando ebbero occasione di occuparsi di argomenti da noi toccati; il prof. Paternò ha creduto che i casi da lui esaminati fossero essenzialmente diversi dai nostri, cercando di mettere in rilievo che, mentre noi ci eravamo occupati sopra tutto di fenomeni di ossidazione e riduzione, egli aveva intrapreso ricerche di indole sintetica. Potremmo fargli osservare, a questo proposito, che noi invece

(1) Gazzetta chimica, vol. 44, II, pag. 463.
(2) Vedi questi Rendiconti, 1886, 3 gennaio e 14 novembre.

non abbiamo ritenuto opportuno di fare questa distinzione: in fine la formazione di un pinacone è pure un processo di sintesi, e quella del glicole trifeniletilenico dal benzofenone e da alcool benzilico anche un processo di simultanea ossidazione e riduzione, in quanto che, in entrambe le reazioni, la luce determina il passaggio dell'idrogeno del gruppo alcoolico all'ossigeno del carbonile: il primo si ossida; l'altro si riduce. Il fatto essenziale è che la luce favorisce specialmente simili processi, per cui anche le reazioni studiate dal prof. Paternò possono in gran parte ricondursi a fenomeni di tale natura.

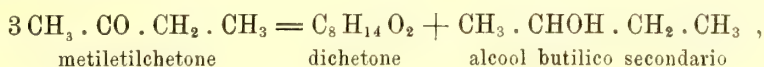
Con ciò, naturalmente, non crediamo di sollevare questioni di priorità, che sarebbero fuori luogo. Noi siamo ben lieti che altri cooperino con noi in un campo di studî nel quale c'è posto per tutti: saremo paghi se si vorrà riconoscere che la modesta opera nostra ebbe il merito di attirare la attenzione dei chimici sopra un argomento che era stato alquanto trascurato. E però speriamo che il prof. Paternò vorrà riconoscere che non potevamo avere l'intenzione di *presentare sotto falsa luce il suo lavoro* e, se egli ce lo permette, glielo dimostreremo ora, con maggiori particolari, nei singoli casi da lui riportati.

Già nella nostra prima Nota (¹) avevamo accennato che « il benzofenone « è un composto che si riduce per azione della luce con la massima facilità; « e non è soltanto l'alcool, ma molte altre sostanze organiche che lo tras- « formano in benzopinacone », per cui il prof. Paternò ha fatto benissimo a servirsi di questo composto per i suoi studî, che vennero così a completare i nostri. Egli peraltro ritiene a torto, rispetto alla reazione fra il cimolo ed il benzofenone, che ad essa si riferisca la nostra osservazione: che « non ci sembra giustificato il concetto che più o meno chiaramente « traspare dalle recenti pubblicazioni del prof. Paternò, che cioè le reazioni « da lui descritte sieno essenzialmente diverse dalle nostre ». No: in questo caso non si trattava di una esperienza *essenzialmente* diversa dalle nostre, ma della stessa esperienza che il prof. Paternò ha ripetuto senza ottenere nulla di più di quanto avevamo osservato noi. Difatti, nella nostra V Nota dicevamo che « per scoprire l'alterazione patita dal cimolo, bisognava ripe- « tere l'esperienza su assai più vasta scala »: il prof. Paternò l'ha ripetuta, ma, come noi, con 3 gr. di benzofenone e 10 di cimolo, e non ha potuto riconoscere il secondo prodotto che si forma accanto al benzopinacone. Riprendendo lo studio, con 50 gr. di ciascuno dei due composti, abbiamo trovato (Nota XVII) (²) che quel prodotto è un diciminile. Che noi abbiamo pubblicato questi risultati quindici mesi e mezzo dopo che era comparso il lavoro del prof. Paternò, è verissimo: egli, coi suoi studî, aveva richiamato

(¹) Questi Rendiconti, vol. X, I, pag. 98 (1901).
(²) Ibid., vol. XIX, I.

la nostra attenzione sulle nostre vecchie esperienze, e noi abbiamo cercato di completarle in quella parte in cui egli non l'aveva fatto. Così abbiamo pure ottenuto dal benzofenone e toluolo il dibenzile, che a lui era sfuggito.

Rispetto alla formazione del dichetone $C_8H_{14}O_2$ dal metiletilchetone, abbiamo detto che « essa è un resultato inaspettato e veramente notevole » perchè il metiletilchetone, a differenza dell'acetone, reagisce su se stesso secondo lo schema:

$$\underset{\text{metiletilchetone}}{3\,CH_3 . CO . CH_2 . CH_3} = \underset{\text{dichetone}}{C_8H_{14}O_2} + \underset{\text{alcool butilico secondario}}{CH_3 . CHOH . CH_2 . CH_3} ,$$

riducendosi ad alcool butilico secondario ed ossidandosi a dichetone ed anche perchè quest'ultimo è un composto interessante per le sue relazioni col tetrametilpirrolo. Di questo parere è stato pure il Willstätter ([1]).

Assai strana deve apparire l'osservazione del prof. Paternò relativa alla fondamentale reazione che ha luogo fra il benzofenone e l'alcool benzilico nella formazione del glicole trifenil-etilenico. Egli dice: « a prova che non « avevano (noi) chiaro il concetto della reazione, soggiungono, che la stessa « formola del trifenilglicol aveva bisogno di ulteriori prove sperimentali per « essere accettata ». Ora, questo nostro riserbo è stato determinato da una svista bibliografica, perchè ci era sfuggito che il trifenilglicole era già noto; difatti nelle estesa Memoria pubblicata poi nella Gazzetta chimica ([2]), dicevamo in proposito: « Questa sostanza è assai probabilmente identica a « quella ottenuta e descritta da A. Gardeur, a la quale questo autore attribuisce « il punto di fusione 164° (noi avevamo trovato 168°). Tanto dalle sue, « quanto dalle nostre esperienze, risulta evidente che ad essa spetta la co- « stituzione del trifenilglicol, la di cui formazione alla luce per condensa- « zione del benzofenone coll'alcool benzilico è un fatto interessante, sebbene « prevedibile in seguito ai nostri studî ». Si sarebbe quasi tentati di applicare al prof. Paternò le parole a noi rivolte, « di cercare, con artifizî, di pre- « sentare sotto falsa luce il nostro lavoro ».

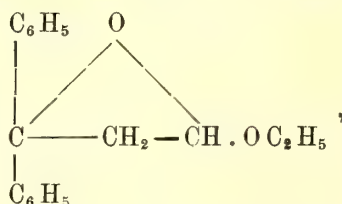
Il prof. Paternò non deve però meravigliarsi se, dopo la pubblicazione di molti altri casi dello stesso tipo da parte sua, noi abbiamo ripreso i nostri studî sulle condensazioni aldoliche o enoliche, come egli le chiama: eravamo nel nostro pieno diritto, ed è a questo proposito che noi scrivevamo (ciò che è riportato più sopra) che le reazioni fotochimiche da lui descritte non erano essenzialmente diverse dalle nostre; siamo stati, ci pare, assai modesti.

Rispetto alla reazione fra benzofenone ed etere, noi ci siamo astenuti dal ricordare le relative esperienze del prof. Paternò, per diverse ragioni.

([1]) Berichte, vol. 47, pag. 293 (1914).

([2]) Gazzetta chimica, vol. 34, II, pag. 133 [illegible]

Anzitutto perchè egli non ha menzionato le nostre, fatte nel 1901 [1]; in queste avevamo dimostrato che il benzofenone si trasforma in pinacone ed in una sostanza resinosa, della quale dicevamo di non averla potuta ottenere allo stato di sufficiente purezza, ma che peraltro l'etere entrava a far parte della medesima. Il prof. Paternò, ripetendo alla distanza di 9 anni la stessa esperienza, non ottenne essenzialmente nulla di più, perchè la sua resina, a cui egli attribuisce con riserva la costituzione

$$\begin{array}{l} C_6H_5 \quad\;\; O \\ \;| \qquad\; / \quad \backslash \\ \;| \quad\; / \qquad\quad \backslash \\ C \text{———} CH_2 - CH \, . \, O\,C_2H_5 \, , \\ \;| \\ C_6H_5 \end{array}$$

dà 12,3 per cento di ossietile, mentre quella formola ne richiede 17,7. Il suo peso molecolare sarebbe 254, mentre egli trova 310. Egli stesso però dice che questi risultati « provano che la sostanza non era del tutto pura « e che conteneva ancora del benzopinacone ».

Noi [2], riprendendo la nostra vecchia esperienza, abbiamo trovato, oltre al benzopinacone e alla resina, un prodotto cristallino, che fonde a 51°, che al prof. Paternò è sfuggito: ed è a questo che noi attribuiamo la formola $C_{17}H_{20}O_2$, cioè quella di un prodotto di addizione. Rispetto alla resina ci siamo limitati a dire che la sua formazione deve essere collegata a quella del benzopinacone, senza proporne una formola, sebbene avessimo determinato il peso molecolare (363-372) ed il per cento in ossietile (14,80).

A noi, che abbiamo meno confidenza con le resine, ci sembra almeno prematura la formola proposta dal prof. Paternò; e fu anche per non fare tutte queste osservazioni, che noi ci siamo astenuti dall'accennare a quel suo lavoro.

Le resine — come appunto lo dimostrano le nostre ripetute ricerche sulla polimerizzazione dell'aldeide benzoica, che il prof. Paternò cita con evidente compiacenza — presentano ben note difficoltà; ma noi vogliamo ricordargli che, nella nostra prima pubblicazione [3] su tale argomento, dicevamo: « si do- « vrebbe attribuirle la formola $4(C_{14}H_{14}O_4)$. Noi però non osiamo fare ciò; « e non escludiamo che la coincidenza dei numeri possa essere fortuita ». Le ulteriori ricerche [4] costituiscono una regolare ripresa di uno studio, di cui nessuno può farci rimprovero. Creda pure il prof. Paternò che la ragione,

[1] Vedi la nostra I Memoria negli Atti della R. Accademia delle scienze di Bologna, 1901; e nella Gazzetta chimica, vol. 32, I, pp. 241-242.

[2] Questi Rendiconti, vol. XX, I, pag. 723; e Berichte vol. 44, pag. 1557.

[3] Questi Rendiconti, 1901, I, pag. 99.

[4] Ibid., 1903, I, pag. 236; e 1909, I, pag. 216.

per cui ci trovammo in collisione, non è causata « dall'argomento tanto « fecondo di risultati » (l'ironia è qui fuori di luogo) ma bensì dal fatto che le sue ricerche si muovono in un campo di studî che è talvolta troppo vicino al nostro.

Infine vogliamo completare una osservazione che gli abbiamo rivolto nella nostra ultima Nota (1). Si tratta dell'azione della luce sul miscuglio di *alcool etilico* ed *aldeide acetica* dai quali, secondo quanto avevamo preveduto in un precedente lavoro (2), doveva formarsi il glicole dimetiletilenico.

Il prof. Paternò, insieme con G. Peret (3), ha eseguito questa esperienza, senza arrivare ad una definitiva conclusione.

Abbiamo esposto in tubi il miscuglio delle due sostanze, composto di 345 cc. d'alcool e 55 cc. d'aldeide acetica, dal marzo al settembre 1914. Il prodotto venne da prima distillato a b. m. e poi col vapore acqueo. Dal residuo della distillazione (24 gr.), colorato in giallo, si separa, per salatura con carbonato potassico, un liquido oleoso (13 gr.) dello stesso colore, che a 26 mm. passa fra 100 e 110°. Le prime porzioni contengono piccole quantità di *diacetile*, che venne riconosciuto alla sua diossima, dal punto di fusione 240°.

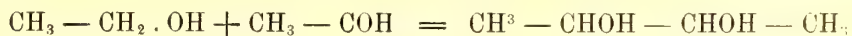
La porzione principale che, a pressione ordinaria, venne raccolta fra 178 e 185°, bollente in massima parte a 182°, è costituita dal *glicole dimetiletilenico*, di cui è dato il punto di ebollizione a 183-184° (4).

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_4H_{10}O_2$
C	53,67	53,33
H	10,81	11,11

Per accertarne l'identità, l'abbiamo ossidato con acqua di bromo alla luce; ed abbiamo ottenuto il diacetile, che fu riconosciuto per mezzo della sua diossima, dal punto di fusione 240°, che dà il caratteristico sale di nickel (5).

La reazione avviene dunque realmente — come noi avevamo preveduto, e come, dopo, il prof. Paternò aveva reso probabile, secondo lo schema

$$CH_3 - CH_2 . OH + CH_3 - COH = CH^3 - CHOH - CHOH - CH_3$$

e così è completato il quadro delle reazioni che alla luce si compiono fra l'alcool etilico e l'acetone (6).

(1) Ibid., 1914, I, pp. 864-865.
(2) Ibid., 1911, I, pag. 715.
(3) Gazzetta chimica, vol. 44, I, pag. 152 (1914).
(4) Beilstein, III ediz., vol. 1°, pag. 262.
(5) Vedi Tshugaeff, Berichte, vol. 38, pag. 2520.
(6) Questi Rendiconti, vol. XX, I, pag. 720 (1911).

Fisica. — *Emissione ed assorbimento del gas residuo nei tubi del Röntgen, ed emissione dei raggi X.* Nota del Corrispondente P. Cardani.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Petrografia. — *Su alcune rocce della Terra del Fuoco. I. Rocce eruttive* [1]. Nota del Corrispondente Federico Millosevich.

Le rocce che sono oggetto del presente studio furono raccolte dal dottor G. B. De Gasperi durante il viaggio di esplorazione dei ghiacciai della Terra del Fuoco, compiuto dalla spedizione De Agostini nel 1913 [2], e furono da lui donate al Museo geologico di Firenze. L'illustre collega C. De Stefani volle gentilmente affidarmene lo studio, e di ciò vivamente lo ringrazio.

La descrizione delle rocce è condotta in modo succinto e piuttosto sommario, come si conviene ad una collezione raccolta da un naturalista viaggiatore in lontane contrade e quindi costituita da un solo o da pochissimi campioni per ogni tipo e località. Tuttavia non credo che debba riuscire del tutto priva di interesse scientifico, poichè si tratta di materiale assolutamente vergine e di regione pochissimo conosciuta sotto l'aspetto geologico generale, e quasi punto sotto l'aspetto particolare litologico.

Granitite anfibolica.

Loc. Seno tranquillo, fiord Negri. — Loc. Morena frontale del ghiacciaio Negri.

Roccia granitoide a grossi elementi feldspatici e quarzosi e con materiale laminare verde e nero relativamente scarso, sebbene in quantità variabile da campione a campione.

Al microscopio si osservano i seguenti minerali:

Ortoclasio: in individui lamellari con i caratteri normali, spesso geminati con la legge di Baveno. Per alterazione si sono prodotti, in seno ad essi, aggregati epidotici-muscovitici con prevalenza di quest'ultimo minerale.

Feldspato calcico-sodico abbastanza frequente e in grossi individui lamellari. È riferibile, per i suoi caratteri ottici, ad un oligoclasio basico

[1] Lavoro eseguito nel Gabinetto di mineralogia del R. Istituto di studî superiori di Firenze.

[2] Per l'itinerario, e per i nomi delle località qui citate vedasi resoconto sommario di tale spedizione nella Rivista geografica italiana, XX, 1913, pag. 423.

con 30 % circa di An. Si trova in istato di freschezza maggiore che il feldspato alcalino.

Quarzo, in masse più o meno estese, allotriomorfe, con estinzione ondulosa.

Anfibolo, che è il più abbondante fra gli elementi colorati e che si presenta in cristalli nettamente idiomorfi con i caratteri ottici della comune orneblenda; pleocroismo $\mathfrak{a}$ verde gialliccio, $\mathfrak{b}$ verde bruno, $\mathfrak{c}$ verde oliva cupo; angolo $c\,\mathfrak{c}$ 15° in media.

Meno abbondante la mica (biotite) con i normali caratteri e sempre con un processo di cloritizzazione più o meno avanzato.

Abbastanza comune è l'epidoto derivante dalla trasformazione del feldspato in granuli incolori o giallognoli e, in tal caso, con lieve pleocroismo.

Apatite, zircone e magnetite puramente accessorî. La struttura è la granitica tipica, cioè ipidiomorfa granosa.

Aplite.

Loc. Morena frontale del ghiacciaio Negri. — Roccia uniformemente granulare, giallo-rossiccia in causa di pigmento limonitico.

A microscopio mostra la struttura aplitica tipica, cioè panidiomorfa granosa con prevalenti feldspato alcalino e quarzo in granuli di dimensioni uguali.

Il quarzo è in granuli, con tendenza talora a contorno cristallino ben definito; tra i feldspati prevale l'ortoclasio tipico; più raro è un oligoclasio acido.

Il materiale micaceo è in gran parte muscovite in lamine e anche in aggregati a rosetta. Non manca peraltro la biotite e spesso le due miche formano aggregati in comune. In complesso, però, la quantità del materiale micaceo è scarsa.

Pochissima magnetite e rari granuli di zircone sono assolutamente accessorii.

Pegmatite granitica.

Loc. Morena frontale del ghiacciaio Negri. — Roccia di aspetto grossolanamente granitico, bianca, con pochissimo elemento colorato.

Al microscopio rivela un aggregato di grossi individui feldspatici con quarzo in quantità un po' minore, non concresciuto col feldspato come nello Schriftgranit tipico.

Il feldspato alcalino è predominante, ed è in gran parte ortoclasio tipico; in parte minore, microclino. Non manca, per altro, anche un feldspato calcico-sodico rappresentato da individui che per i caratteri ottici corrispondono ad un oligoclasio normale con 20 % circa di An.

Il materiale lamellare è rappresentato da poca biotite e da pochissima muscovite; in alcune piccole cavità miarolitiche della massa sporgono minuti aghetti di apatite, che si trova anche racchiusa nel materiale feldspatico.

Pegmatite sienitico-dioritica.

Loc. Morena frontale del ghiacciaio Negri. — Roccia, per l'aspetto esterno, simile alla precedente, e corrispondente ad essa anche nella struttura.

Al microscopio invece si nota che il feldspato, assai prevalente, è calcico-sodico, appartenente ad una miscela oligoclasico-andesinica. In minor quantità sono l'ortoclasio e il microclino.

L'elemento colorato, assai scarso, è la comune orneblenda e, in minor quantità, anche biotite.

Il quarzo, in queste pegmatiti, è elemento accessorio.

La struttura pegmatitica, la scarsità del quarzo, la prevalenza del materiale feldspatico e in ispecial modo di quello calcico-sodico, la natura dell'elemento colorato predominante fanno ritenere la roccia come una *facies* pegmatitica di un tipo intermedio fra le sieniti e le dioriti.

Diorite anfibolica.

Loc. Morena frontale del ghiacciaio Negri. — Roccia grigio-verde, compatta, finamente granulare.

L'esame microscopico mostra che gli elementi essenziali sono: feldispato calcico-sodico e anfibolo.

Il feldspato forma individui tabulari di non grandi dimensioni, tutti con geminazione albitica distinta: i caratteri della rifrazione e quelli dell'estinzione simmetrica anche nei varî geminati doppî albite-Carlsbad lo rivelano appartenente ad una miscela andesinica basica con 45 °/₀ circa di An.

Spesso è alterato in un aggregato di caolino e calcite con poca mica muscovite. Anche dei granuli di epidoto, che si trovano sparsi nella roccia, sembrano provenire da un processo di alterazione del feldspato.

L'anfibolo orneblenda è abbondante e costituisce, insieme con poca clorite, l'elemento colorato della roccia; forma cristalli prismatici con spiccato grado di idiomorfismo, per la maggior parte geminati secondo (100). I suoi caratteri ottici sono i normali: $c\,\mathfrak{c} = 15°$ in media; pleocroismo $\mathfrak{a}$ verde giallognolo, $\mathfrak{b}$ verde, $\mathfrak{c}$ verde oliva.

Elementi accessorii sono: titanite, apatite e magnetite.

La struttura è quasi panidiomorfa, perchè il grado di idiomorfismo è presso a poco uguale nel feldspato e nell'anfibolo, come accade di frequente nelle dioriti meno acide, in cui l'elemento feldspatico non è sovrabbondante.

Porfirite.

Loc. Seno tranquillo, fiord Negri. — Roccia porfirica con massa fondamentale grigio-verde uniforme, con scarsi cristalli porfirici di feldspato.

Al microscopio tutti gli interclusi porfirici si rivelano costituiti, almeno originariamente, da feldspato calcico-sodico, in istato però di tale alterazione da esserne impossibile una esatta determinazione. Sono, per lo più, prismatici allungati e mostrano in seno alla loro massa numerosi prodotti secondarî, fra i quali prevalgono l'epidoto, la clorite e la calcite. Altri minerali, come interclusi porfirici propriamente detti, non si riscontrano.

La massa fondamentale è costituita da un aggregato di microliti feldspatiche e di lamine cloritiche, molto probabilmente di derivazione augitica con una piccola quantità di base vetrosa o microfelsitica.

Porfiritica augitica.

Loc. Morena frontale del ghiacciaio Negri. — Roccia grigio-verde scura, compatta, con interclusi porfirici di feldspato vitreo e di augite nera.

Gli interclusi feldspatici, che variano di dimensioni e per abbondanza nei diversi campioni, all'esame microscopico si rivelano di natura differente.

Alcuni freschissimi, nettamente microtinici e ben sviluppati, si prestano bene ad esatte determinazioni ottiche, anche perchè quasi tutti presentano ben chiare e distinte le due geminazioni di Carlsbad e dell'albite.

I valori massimi delle estinzioni simmetriche che raggiungono i 18°, e quelli delle differenze Δ di 10°, portano ad una miscela andesinica con circa 35 $^0/_0$ di An.

Altri, più opachi, ricchi di inclusioni e meno freschi, appartengono ad una labradorite con poco più di 50 $^0/_0$ di An.

Gli interclusi pirossenici appartengono in parte alla comune augite basaltica verdina; sono dei netti prismi ben cristallizzati e geminati secondo (100).

Altri, che hanno birifrazione meno forte e color roseo chiaro, sembrano da riferirsi a quella varietà che dicesi enstatite-augite.

La massa fondamentale è olocristallina e ne fa parte un feldspato calcico-sodico di seconda generazione in individui piccoli laminari e raramente in microliti: ad esso si uniscono poche lamine augitiche, pure di seconda generazione, e squame di clorite. Non abbondanti, e non in tutti i campioni, trovansi granuli di olivina.

Nella massa si trovano immersi numerosi cristalli di orneblenda basaltica con pleocroismo dal giallo chiaro al verde bruniccio e con angolo c c di circa 10°, i quali, sebbene abbiano dimensioni assai più piccole di quelle degli interclusi pirossenici, pure, per il loro perfetto idiomorfismo, sono da considerarsi anch'essi come di prima segregazione.

Di conseguenza, la roccia presenta dei caratteri intermedî fra le vere porfiriti augitiche e quelle orneblendiche.

Diabase uralitico.

Loc. Monte Garibaldi, fiord Negri. — Roccia grigio verde scuro, finamente granulare.

I componenti essenziali della roccia sono il pirosseno o, meglio, il suo derivato uralitico e il feldspato calcico-sodico. Il processo di metamorfismo che si rivela nella trasformazione uralitica del pirosseno è stato subìto anche dal feldspato il quale non si presenta col solito aspetto di individui tabulari o listiformi, più o meno idiomorfi e nettamente geminati. A ciascuno di questi individui si è sostituito un aggregato granofirico di cristalletti tondeggianti e senza contorno definito e che spesso non presentano traccie di geminazioni. In tal caso, solo il valore dei loro indici di rifrazione, nettamente superiori a quello della collolite (1,535), li fa attribuire ad una miscela calcico-sodica di media o bassa acidità. Tale processo di metamorfismo e di ricristallizzazione è presentato in talune sezioni nei suoi stadii intermedî, quando cioè le nuove parti formatesi per frantumazione del cristallo primitivo sono ancora tutte isorientate. In altri campioni è dato ancora di osservare gli individui feldspatici non trasformati con i loro caratteri tipici: e in tal caso si possono determinare come appartenenti ad una miscela labradoritica.

Il pirosseno abbondante è quasi tutto uralite: solo in minima parte le pseudomorfosi uralitiche presentano tracce della originaria augite. Si tratta di individui laminari, di dimensioni non grandi e con i caratteri ottici della uralite tipica. A differenza di ciò che accade nei pirosseni diabasici, essi hanno uno spiccato grado di idiomorfismo, cosicchè, per il fatto anche che contemporaneamente la maggior parte del feldspato ha perduto la sua individualità distinta, la struttura non è la normale diabasica ma quella olocristallina porfirica propria delle porfiriti diabasiche.

La cloritizzazione rappresenta un ulteriore stadio di trasformazione del pirosseno primitivo, e infatti taluni campioni di questo giacimento presentano la clorite di gran lunga più abbondante che non l'uralite.

Epidoto, olivina, magnetite, ecc., sono elementi accessorii.

Peridotite diallagica con quarzo
(Wehrlite quarzosa).

Loc. Monte Garibaldi, fiord Negri. — Roccia di color verde scuro a grana piuttosto grossa, che anche all'esame superficiale esterno si dimostra costituita da olivina, da diallagio e da quarzo.

Sono infatti questi i tre elementi principali.

L'olivina si presenta sotto forma di aggregati granulari incolori o appena verdini.

Il diallagio è in lamine estese, con i normali caratteri, ed è sostituito soltanto in parte da augite e da pirosseno trimetrico (bronzite).

Abbastanza comune è una varietà di orneblenda bruno-rossiccia.

Un elemento che ben di raro si rinviene in rocce di tale famiglia è il quarzo che si presenta in quantità notevole e sotto forma di aggregati di granuli tondeggianti di dimensioni variabili, ma in generale non molto grandi, che si insinuano irregolarmente fra gli altri minerali della roccia.

Come elemento accessorio è da notarsi clorite derivata evidentemente dai pirosseni o dagli anfiboli o anche dal granato che si riscontra pure in distinti e abbastanza frequenti cristalli rombododecaedrici. Masserelle di magnetite e cristallini di uno spinello nero (picotite) non sono molto abbondanti.

La roccia, per l'associazione di olivina e diallagio con orneblenda accessoria, appartiene a quel gruppo di peridotiti che prendono il nome di wehrliti; ma la presenza di quarzo ne costituisce una varietà speciale e, finora, nuova. Mi riservo di approfondire anche col sussidio dell'analisi chimica lo studio di tale roccia interessantissima, che, purtroppo, nella collezione del De Gasperi è rappresentata da un solo campione. Sarà difficile quindi accertare se, come sembra probabile, la presenza del quarzo rappresenti un fenomeno secondario e posteriore all'emissione della roccia e sopratutto stabilire in quali proporzioni tale fenomeno si è esercitato sopra la roccia, cioè se in tutta la sua massa o in parte soltanto di essa.

Fisiologia. — *Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci di animali omeoterni.* Nota III (part. 2ª): *La fatica studiata nel preparato frenico-diaframmatico*, del Corrisp. FILIPPO BOTTAZZI [1].

Avendo studiato la fatica delle giunzioni neuro-muscolari, vediamo come si comporta il preparato diaframmatico quando è stimolato direttamente.

3. *Curve di fatica muscolare.* — Nelle figg. 4 e 5 sono riprodotte alcune porzioni di due lunghe curve di fatica muscolare: nella fig. 4, la sola parte iniziale (*a*, *b*, *c*); nella fig. 5, le parti iniziale e terminale Il tratto *a*, *b*, *c*, di tutte e due le curve differisce notevolmente da quello delle curve riprodotte nelle figg. 1 e 2 della Nota precedente [2]. Il fenomeno della scala è più accentuato nella fig. 4, dove corrisponde al tratto *bb'*;

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di fisiologia di Napoli.

[2] La presente Nota è continuazione di quella precedentemente pubblicata in questi Rendiconti, vol. XXIII, 2° sem. 1914.

l' « uncino », più nella fig. 5. La porzione terminale (B) della curva della fig. 5 rappresenta una cospicua « contrattura terminale », la cui comparsa è stata accelerata dall'asfissia; essa si continua indistintamente con l'accorciamento da rigidità del muscolo.

Queste curve di fatica muscolare somigliano moltissimo, nei tratti fondamentali, a quelle ottenute dagli autori che hanno sperimentato su muscoli isolati dal corpo di animali pecilotermi, e per ciò credo superfluo di indugiarmi a parlarne particolarmente.

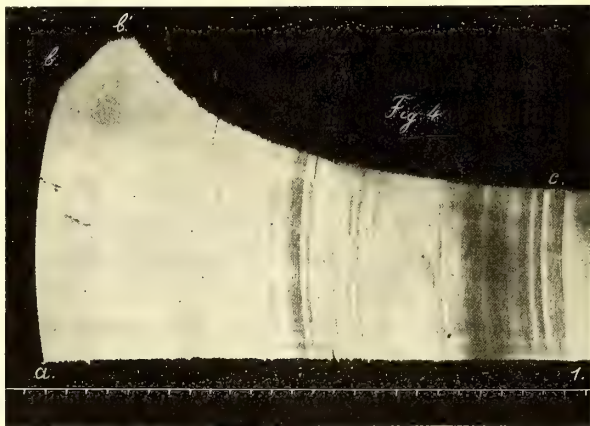



Fig. 4. — 29 aprile 1914. Prepar. fren.-diafr. di canino giovanissimo. Stimol. ritmica del muscolo: 2 accum., $DR = 150$ mm.; frequenza degli stimoli: 34 per minuto. — Temper.: 32° C. Tempo: 1'. Peso: gr. 3 (Riduz. fotografica).

4. *Azione dell'acido lattico e di altri acidi organici sulla fatica del preparato frenico-diaframmatico.* — Date le odierne conoscenze sulla formazione dell'acido lattico nei muscoli e sulla sua importanza per quanto riguarda l'attività normale di essi e lo stato di fatica, si può agevolmente prevedere l'effetto dell'aggiunta di acidi al liquido di Ringer in cui si trova immerso il preparato neuro-muscolare.

Dobbiamo ammettere che questo, specialmente se appartiene ad animali omeotermi, si trova fin dal principio del periodo di sopravvivenza in condizioni tali, che ogni eccitamento vi deve provocare la formazione di una certa quantità di acido lattico, la quale non può scomparire interamente negl'intervalli di riposo tra le successive contrazioni, e deve necessariamente in parte accumularvisi. È chiaro, quindi, che ogni minima aggiunta di acido lattico o di altri acidi (per es., degli acidi formico, propionico, butirrico, valerianico, caproico e tricloracetico, che io ho sperimentati), non può se non accelerare l'avvento della fatica, e lo stabilirsi del blocco in corrispondenza delle giunzioni neuro-muscolari; abbreviare le curve di fatica, sia di queste sia

dello stesso muscolo; provocare la contrattura di esso e la rigidità muscolare etc.

Ciò dimostrano evidentemente le seguenti figure 6 e 7, che riproducono alcuni dei molti tracciati da me ottenuti.

Come si vede, l'acido caproico (fig. 7) è altrettanto potente che l'acido lattico (fig. 6); e gli altri acidi grassi sperimentati si comportano approssimativameute nello stesso modo.

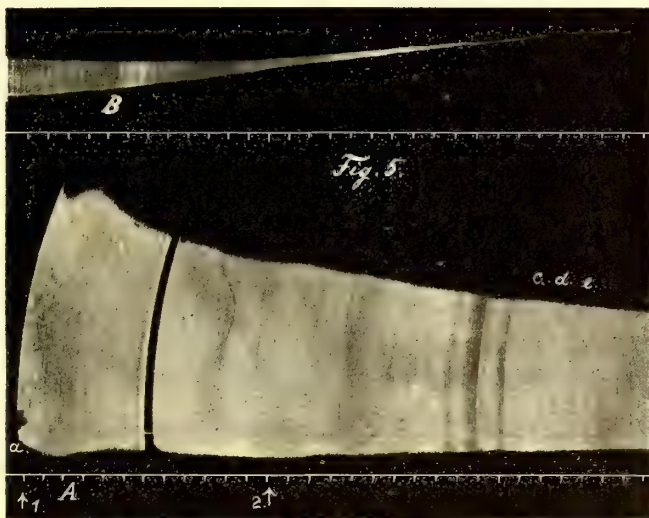



Fig. 5. — 30 aprile 1914. Prepar. fren.-diafr. destro di cane. Stimol. ritmica del muscolo: 2 accum., $DR = 150$ mm.; frequenza degli stimoli: 44 per minuto. — Temper.: 31° C. Tempo: 1'. Peso: gr. 3. — Da 1 a 2 l'ossigeno gorgoglia per il liquido di Ringer; da 2 in poi, non più. — La curva *B*, è il tratto terminale della curva *A*,: non è riprodotto un lungo tratto intermedio (Riduz. fotografica).

5. *Considerazioni generali sulle curve di fatica delle giunzioni neuromuscolari e dei muscoli.* — Ho detto quali sono le differenze principali fra le porzioni iniziali delle curve di fatica neuro-muscolare e quelle delle curve di fatica mnscolare propriamente detta. Ma le differenze non si limitano alle dette porzioni.

La durata dell' intera curva di fatica delle giunzioni neuro-muscolari è variabilissima; ma in generale, almeno per quanto riguarda i preparati separati dal corpo degli animali omeotermi, è minore di quella della curva di fatica del muscolo, contrariamente a ciò che, secondo Boehm [1], si osserverebbe nei preparati neuro-muscolari di rana. Secondo questo autore, infatti,

[1] R. Boehm, *Einige Beobachtungen über die Nervenendwirkung des Curarin.* Arch. f. exper. Path. und Pharmak. 35, pag. 16 (1895).

« am unvergifteten Thiere (râna) ist der Muskel leichter ermüdbar, als der Nervenapparat. Die Nervenermüdung kann also nicht beobachtet werden. Bei der Curarinvergiftung dreht sich das Verhältniss um,... ».

La durata delle curve di fatica, tanto delle giunzioni neuro-muscolari quanto del muscolo stimolato direttamente, è tanto maggiore quanto minori sono la frequenza degli stimoli e la temperatura alla quale si fa l'esperimento,

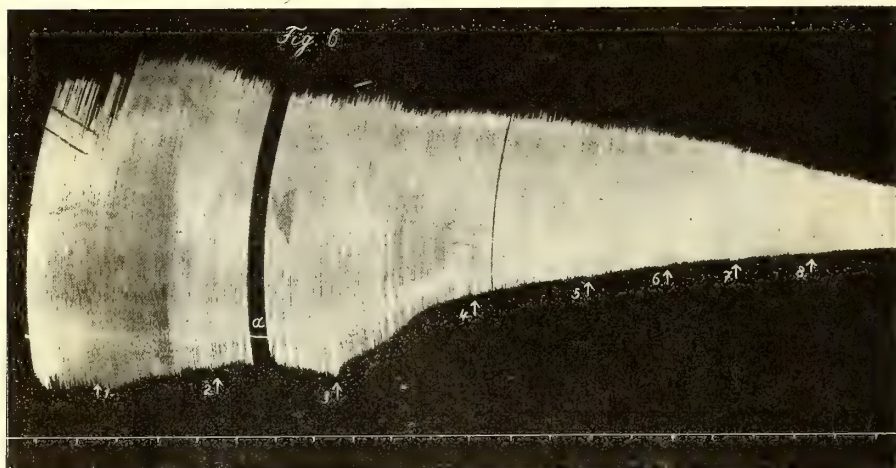



Fig. 6. — 16 febbraio 1914. Prepar. fren.-diafr. di cane. — La conduttività neuro-muscolare è abolita. — Stimolazioni dirette del muscolo immerso in 50 cm.^{3} di liq. di Ringer: 2 accum., $DR = 100$ mm.; frequenza: 46 stimoli al minuto. — Temper: 35° C. Tempo: 1' (Riduz. fotografica).

In 1. si aggiungono 0,1 cm.^{3} soluz. 0,1 n acido lattico
» 2. » 0,1 » » »
» 3. » 1 goccia di acido lattico puro
» 4. » 1 » » » »
» 5. » 1 » » » »
» 6. » 2 gocce » » »
» 7. » 3 » » » »
» 8. » 3 » » » »

(In a, breve riposo del muscolo). — La prima goccia di acido lattico puro provoca una cospicua contrattura, che non è poi molto intensificata dalle successive aggiunte. Il tratto terminale, non riprodotto, della curva, presenta l'accorciamento da rigidità. — La prima aggiunta (in 1) della soluzione diluita di acido determina un piccolo aumento della altezza delle contrazioni muscolari.

purchè questa non sia abnormemente bassa (per es., inferiore a 29°-30° C). Anche l'eccessiva intensità degli stimoli elettrici ha per effetto un più rapido affaticamento dal preparato.

I periodi di riposo, intercalati nel corso di una lunga serie di stimolazioni ritmiche, hanno per effetto una restaurazione della capacità funzio-

nale del preparato, sia che si stimoli il nervo o il muscolo: di guisa che, dopo il riposo, le contrazioni ritmiche sono più alte delle ultime del periodo precedente di attività, e spesso si presentano disposte come nella parte iniziale di una nuova curva di fatica (« scala » etc.).

Le periodiche diminuzioni di frequenza degli stimoli, nel corso di una curva di fatica, equivalgono, negli effetti, a un relativo riposo: infatti, ad esse corrispondono contrazioni più alte; ripristinata poi la frequenza maggiore, le contrazioni tornano gradatamente a diminuire di altezza.

Se gli stimoli non sono massimali, un aumento della loro intensità ha sempre per effetto un aumento dell'altezza delle contrazioni, la frequenza rimanendo la stessa. Se l'intensità degli stimoli è molto inferiore alla massimale, raggiunto con essa il termine della curva di fatica, si può ottenere una nuova curva di fatica, con tutti i periodi che in essa sogliono essere distinti, aumentando l'intensità degli stimoli.

L'aspetto di una curva di fatica, dunque, specialmente per quanto riguarda la sua durata totale, l'altezza delle singole contrazioni nei varî periodi di essa, il decorso e la durata dei varî tratti della curva, non è qualche cosa di assoluto e di immutabile, ma anzi è sempre relativo principalmente alla frequenza e alla intensità degli stimoli, ammettendo come press'a poco eguale la capacità funzionale dei preparati neuro-muscolari o muscolari. Solo la *forma* della curva di fatica, specialmente se la si considera nei suoi tratti fondamentali (*a b*, *b c*, *c*...), apparisce come una costante, trattisi di fatica delle giunzioni neuro-muscolari o del muscolo, e per quanto varii la durata dei detti tratti di curva e l'altezza delle contrazioni componenti ciascuno di essi. Ciò si spiega, del resto, facilmente, se si pensa che la forma della curva è determinata da proprietà generali delle strutture eccitabili, che io non ho bisogno di richiamare alla memoria del lettore.

È noto, e resulta anche evidentemente dalle curve sopra riprodotte, che a partire dal punto *c* la curva di fatica, così delle giunzioni neuro-muscolari come del muscolo, non solo può avere una grandissima durata, ma presenta di solito anche un decorso molto regolare e uniforme, tanto piccola è, da *c* in poi, quella che Kronecker chiamò (loc. cit.) « differenza di fatica ». Nel tratto precedente il punto *c*, invece, le contrazioni prima aumentano (« fenomeno della scala ») e poi diminuiscono più o meno rapidamente di altezza, fino a raggiungere quell'altezza che, da *c* in poi, rimane per molto tempo apparentemente costante.

Il fenomeno della scala ricorda, secondo Brailsford Robertson (1), il decorso dell'aumento iniziale di velocità delle reazioni autocatalitiche; mentre la diminuzione progressiva dell'altezza delle contrazioni, seguenti alla cima

(1) F. Brailsford Robertson, *On the biochemical relationship between the « staircase » phenomenon and fatigue*. Bioch. Zeit. 2, pag. 287 (1908).

della scala, somiglierebbe alla diminuzione di velocità che in un secondo tempo subiscono quelle medesime reazioni, come effetto dell'accumularsi, entro la sfera della reazione, del catalizzatore in quantità eccessiva. Nel caso nostro, il catalizzatore sarebbe l'acido lattico, che è un prodotto normale dell'attività muscolare. Il suo accumularsi in piccola quantità nel muscolo, porta, secondo Mines [1], la concentrazione degli idrogenioni gradatamente

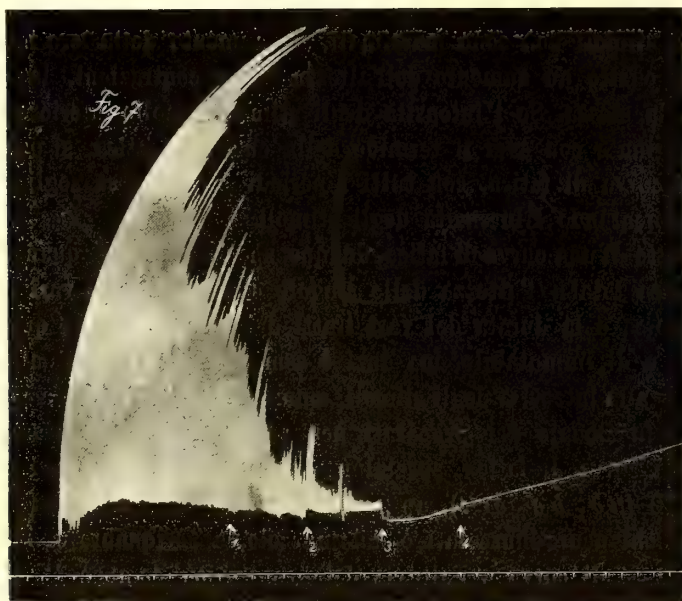



Fig. 7. — 5 marzo 1914. Prepar. fren.-diafr. di cane. — La conduttività neuro-muscolare è abolita. — Stimolaz. diretta del muscolo: 1 accum., $DR = 100$ mm.; frequenza: 46 al minuto. — Temper.: 35° C. Tempo: 1′ (Riduz. fotografica).

In 1. si aggiungono, a 60 cm.³ di liq. di Ringer, 5 cm.³ sol. 0,0694 *n* ac. caproico.
» 2. » altri 5 cm.³ della stessa soluzione.
» 3. » 2 gocce di acido caproico puro.
» 4. » » » » »

a quel valore *optimum*, cui corrispondono le più alte contrazioni. « Consequently we have the condition familiar in the *Treppe*, the condition of increased excitability and contractility which is the first result of activity of the muscle..... If the excitations are continued so that the optimal C_H. is exceeded, the effect is of course depression. It is to be noted that these ideas are most strongly borne out by observations on the effects of a rest during a prolonged series of excitations of muscle ».

[1] G. R. Mines, *On the summation of contractions*. Journ. of Physiol. 46, pag. 1 (1913).

Con ciò non mi sembra che si possa spiegare, però, come mai le contrazioni, rimanendo invariata l'intensità degli stimoli, diminuiscono di altezza rapidamente solo fino a un certo punto, per poi continuare a diminuire per molto tempo, cioè per tutto il periodo più lungo della curva di fatica, tanto lentamente da sembrare di altezza eguale in brevi tratti della curva, tanto piccola è la « differenza di fatica » fra le successive contrazioni.

Ora, se si considera che una differenza fra il tratto iniziale *a*, *b*, *c*, e tutto il resto della curva di fatica esiste profonda solo nelle curve di fatica delle « giunzioni neuro-muscolari », mentre è, generalmente, poco rilevabile in quelle di fatica muscolare propriamente detta (e meno rilevabile ancòra sarebbe se il preparato muscolare fosse curarizzato), non sarà difficile persuadersi che *la peculiare forma del tratto a, b, c, nelle curve di fatica neuro-muscolare è l'espressione caratteristica della fatica delle giunzioni neuro-muscolari*. Queste non sono colpite da fatica a gruppi, perchè, se così fosse, otterremmo delle curve a gradini, simili a quelle pubblicate dal Mines (loc. cit.: per es., fig. 2). Esse sono colpite tutte insieme, ma gradatamente, dalla fatica, come dall'azione della curarina (ved. Boehm, loc. cit.) o dell'acido lattico.

Ma mentre sotto l'influenza della curarina o degli acidi, entro un tempo relativamente breve, si stabilisce il blocco assoluto nelle giunzioni neuro-muscolari; nel preparato frenico-diaframmatico, come ho detto, la pervietà delle giunzioni agli eccitamenti nervei diminuisce, più o meno rapidamente, durante il tratto *b*, c, ma un blocco assoluto non si stabilisce se non dopo molto tempo. L'acido lattico che si forma nel preparato, si accumula in quantità tale da esercitare un'azione curarica relativa, ma non assoluta. Solo quando se ne aggiunge dell'altro dall'esterno, si ottiene l'assoluta impervietà delle giunzioni. Bisogna quindi ammettere, in queste giunzioni, almeno due meccanismi d'eccitamento locale e di conduzione: uno *A*, più eccitabile ma più labile, e che per ciò più presto anche si affatica e diviene inattivo; l'altro *B*, meno eccitabile, più resistente, che è quello che rimane attivo dopo il punto *c* della curva di fatica, cioè mentre il muscolo eseguisce le numerose contrazioni del tratto più lungo di questa curva. La pluralità delle sostanze eccitabili o ricettrici (e quindi, implicitamente, dei mezzi di conduzione), nelle giunzioni neuro-muscolari, già ammessa da Langley (¹) e da Lucas (²), in base a ricerche di genere del tutto diverso, troverebbe dunque nuova conferma in questi miei esperimenti sulla fatica.

(¹) J. N. Langley, Journ. of Physiol. *33*, pag. 374 (1905-06); Proced. Roy. Soc. London (B) *78*, pag. 170 (1906); Arch. intern. de physiol., *5* (Compt. Rend. du VIIme Congr. intern. de physiol.), pag. 115 (1907).

(²) K. Lucas, Journ. of. Physiol. *34*, pag. 372 (1906); ibid. *35*, pag. 103 e 310 (1906-7); ibid. *36*, pag. 113 (1907).

Meccanica. — *Sistemi astatici equivalenti a due forze astaticamente irriducibili.* Nota I di Matteo Bottasso, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

Nei numerosi studî sulla astatica, iniziati colle belle ricerche di Minding ([1]) e Möbius ([2]), pur comprendendo non solamente le Memorie fondamentali [fra le quali è particolarmente importante quella del Darboux ([3])] ma anche gli altri svariati e noti lavori recenti sull'argomento, non si trova mai studiato con qualche larghezza il caso notevole in cui il dato sistema è astaticamente equivalente a due sole forze, astaticamente irriducibili. Tale è, per esempio, un sistema astatico di forze tutte parallele ad un piano, quale s'incontra in un corpo magnetico e pesante, che è pure il primo esempio fisico importante in cui si sono riconosciute soddisfatte le condizioni che definiscono i sistemi astatici. Nondimeno, per questo caso non si trovano se non cenni limitati, o al più è trattata completamente per esso qualche ricerca particolare di astatica ([4]), ovvero si ha l'affermazione che tutti i casi particolari possono dedursi facilmente dal caso generale, in cui il sistema non può ridursi astaticamente a meno di tre forze. Ciò è detto in un cenno finale dal Darboux (loc. cit., § XIV, pag. 65), ed altrettanto è accennato dal Da Silva ([5]), che pure diede per primo varie importanti proprietà, ritrovate poi dal Darboux, trattando specialmente dei diversi casi di riduzione, e relative condizioni, in una poderosa Memoria rimasta lungamente ignorata ai più, e sulla quale è stata richiamata l'attenzione da F. G. Teixeira e da F. de Vasconcellos ([6]).

([1]) E. F. Minding, *Untersuchung betreffend die Frage nach einem Mittelpuncte nicht paralleler Kräfte,* Journal f. d. r. u. angew. Math., 14 (1835), pp. 289-315; *Ueber den Ort sämmtlichen Resultanten u. s. w.*, ibidem, 15 (1836), pp. 27-38.

([2]) A. F. Möbius, *Ueber den Mittelpuncte nicht paralleler Kräfte,* Journal f. d. r. u. angew. Math., 16 (1837), pp. 1-10; *Lehrbuch der Statik,* 1, Leipzig 1837.

([3]) G. Darboux, *Mémoire sur l'équilibre astatique et sur l'effet que peuvent produire des forces de grandeurs et de directions constantes,* etc., Mém. de la Soc. des sciences de Bordeaux (2ª), tom. II (1878), pp. 1-65. Vedi pure la mia Nota *Sull'equilibrio astatico* ecc. in questi Rendiconti (serie 5ª) XXXIII (2° sem. 1914).

([4]) Così, ad es., nel *Lehrbuch der Statik,* §§ 140 e seg., il Möbius fa la ricerca degli *assi principali di rotazione,* introduce la *retta centrale,* ecc. Il Michin (*On astatic equilibrium,* Proceedings of the London Math. Soc., tom. 9, an. 1878) trova l'*involuzione della retta centrale.*

([5]) D. A. Da Silva, *Memoria sobre a rotação das forças em torno dos pontos d'applicação,* Mem. da Ac. Real das scienc. de Lisboa (2ª), tom. III, parte I (1851), pp. 61-233.

([6]) F. de Vasconcellos, *Sur la rotation des forces autour de leurs points d'application et l'équilibre astatique,* Annaes da Ac. Polytechnica do Porto, tom. VII (1912), pp. 5-45, 65-83, 129-159.

Ora, ove si volesse ammettere senz'altro, in generale, tale asserita facilità di deduzione, non si comprenderebbe come per certe questioni fondamentali, ad es. per il teorema di Minding, non sia mai stata indicata la forma assunta, nel caso in esame, dalle proprietà dimostrate nel caso generale. D'altra parte, è ben noto che nei casi particolari è quasi sempre possibile di ampliare e completare le proprietà che valgono anche per il caso generale, e di stabilirne delle nuove.

È ciò che accade qui, per es., per il complesso degli assi centrali di Poinsot, che può essere molto meglio studiato e precisato che non nel caso generale, ove nondimeno ci si riferisce all'ampio studio del Painvin, sullo speciale complesso quadratico da questi investigato.

Credo perciò interessante di esporre qui rapidamente le principali proprietà da me ricavate e svolte, per questo caso particolare, in un volume sulla astatica in corso di stampa ([1]), e che, nel complesso, non sono affatto conseguenze ovvie del caso generale. Fra queste ritengo siano specialmente notevoli l'espressione (10) dell'asse centrale, in una configurazione arbitraria, e la costruzione del complesso di questi assi nei nn. 7, 8 e 9; la proposizione che sostituisce il teorema di Minding del caso generale (n. 11); l'identificazione del complesso suddetto a quello delle rette d'intersezione delle coppie di piani ortogonali, tangenti ad un dato iperboloide ad una falda, o a due iperboloidi associati d'un sistema di quadriche omofocali (n. 13). Mi sembra pure degno di nota l'aver dimostrato (n. 14) che le coppie di piani ortogonali, uscenti dalle rette del complesso e tangenti all'iperboloide indicato, sono sempre reali, avendosi così un'*altra costruzione reale* di tutte le rette del complesso. Infine, ho mostrato come si ottengano le direzioni principali di ogni punto (n. 16), le quali permettono di ottenere tutti gli elementi astatici invariabilmente legati al corpo.

Sulle varie forme di riduzione del sistema dato e proprietà relative.

1. Ricorderemo che un sistema astatico è formato da un corpo rigido **C**, di cui ogni punto P_i, in ogni posizione del corpo, è sollecitato da una forza di vettore $\mathbf{f}_i$ (che per alcuni dei punti P_i può esser nullo), tale che, comunque si sposti il corpo, ogni vettore $\mathbf{f}_i$ rimane invariabile. Invece di muovere il corpo **C**, si può supporre che questo rimanga fisso, e assoggettare invece tutti i vettori delle forze ad una medesima rotazione arbitraria.

([1]) M. Bottasso, *Analyse vectorielle générale*, tom. IV : *Astatique*, Pavia, Mattei & C., 1915. Nel seguito s'indicherà, per brevità, questo volume con « *Astat.* », richiamando del pari i volumi precedenti della stessa Collezione con « *A. V.* » seguito dal numero del volume stesso.

Un tale sistema va quindi riguardato come insieme delle coppie $(P_i, \mathbf{f}_i)$; e si ha una sua *configurazione* quando si considera una data posizione del corpo e dei vettori delle forze.

Nello studio del sistema astatico $(P_i, \mathbf{f}_i)$ si riconosce utilissima la considerazione dell'omografia vettoriale

$$(1) \qquad \sigma_A = \Sigma_i \mathrm{H}(P_i - A, \mathbf{f}_i),$$

funzione tanto della configurazione considerata quanto del punto A (*origine* dell'omografia). Così essa permette di dimostrare che (*Astat.*, cap. I, § 5):

Affinchè il dato sistema $(P_i, \mathbf{f}_i)$ *sia astaticamente equivalente a due sole forze, astaticamente irriducibili, occorre e basta che l'omografia* σ_A, *relativa ad un punto generico A del corpo, sia semplicemente singolare, cioè* (*A. V.*, I, pag. 12; ed *Append.*, pp. 164 e seg.) $\mathrm{I}_3\sigma_A = 0$, $\mathrm{R}\sigma_A \neq 0$, *ed il vettore del sistema, espresso da* $\mathbf{f} = \Sigma_i \mathbf{f}_i$, *non sia nullo e soddisfi alla condizione* $\mathrm{KR}\sigma_A \mathbf{f} = 0$.

Se queste condizioni sono soddisfatte, il sistema può ridursi astaticamente in ∞^2 modi a due forze, i cui vettori non paralleli $\mathbf{h}_1$ ed $\mathbf{h}_2$ devono esclusivamente verificare le relazioni:

$$(2) \qquad \mathrm{KR}\sigma_A \mathbf{h}_1 = 0 \quad , \quad \mathrm{KR}\sigma_A \mathbf{h}_2 = 0 \quad , \quad \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 = \mathbf{f},$$

e son quindi perpendicolari al vettore di direzione costante $\mathrm{R}\sigma_A \mathbf{x}$, per $\mathbf{x}$ vettore arbitrario.

I punti d'applicazione di tali forze, al variare dei vettori $\mathbf{h}_1$ ed $\mathbf{h}_2$, variano sopra una retta, che è la RETTA CENTRALE del sistema. In particolare, se i due vettori $\mathbf{h}_1$ ed $\mathbf{h}_2$ sono perpendicolari (cioè $\mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2 = 0$), detti punti d'applicazione sono:

$$(3) \qquad P = A + \frac{1}{\mathbf{h}_1^2} \mathrm{K}\sigma_A \mathbf{h}_1, \qquad Q = A + \frac{1}{\mathbf{h}_2^2} \mathrm{K}\sigma_A \mathbf{h}_2.$$

A tale retta appartiene il PUNTO CENTRALE di Minding, il quale è espresso da (*Astat.*, nn. 30 e 35)

$$(4) \qquad G = A + \frac{1}{f^2} \mathrm{K}\sigma_A \mathbf{f},$$

ove si è posto $f = \mathrm{mod}\,\mathbf{f}$. L'omografia con origine in G s'indicherà semplicemente con σ; essa, come quella relativa ad ogni altro punto della retta centrale, è *doppiamente singolare*.

Inoltre (*Astat.*, nn. 22 e 30), la retta centrale, del nostro sistema $(P_i, \mathbf{f}_i)$, ed il punto centrale di Minding sono invariabilmente legati al corpo $\mathbf{C}$, e quindi non variano quando — restando fisso il corpo — tutti i vettori $\mathbf{f}_i$

delle forze subiscono una rotazione arbitraria: cioè sono delle *figure geometriche astatiche rispetto al corpo.*

2. Si ha, pure, che *la retta centrale d'un sistema* $(P_i, \mathbf{f}_i)$ *astaticamente riducibile a due sole forze, è il sostegno d'una involuzione ellittica (di Michin) formata da tutte le coppie di punti d'applicazione delle coppie di forze perpendicolari fra loro, e formanti un sistema astaticamente equivalente al sistema dato.*

Questa involuzione della retta centrale *ha come centro il punto centrale G del sistema; come potenza,*

$$(5) \qquad -p^2 = -\frac{1}{f^2} \mathrm{I}_1(\mathrm{K}\sigma . \sigma) = -\frac{1}{f^2} [(\mathrm{I}_1\sigma)^2 + 4(\mathrm{V}\sigma)^2],$$

ed è essa pure un elemento, del sistema dato, astatico rispetto al corpo.

Indicando con $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$ una terna unitario-ortogonale-destrogira di vettori, dei quali i due ultimi siano rispettivamente paralleli ad $\mathrm{R}\sigma_A \times$ ed $\mathbf{f}$ (perpendicolari fra loro), tutte le coppie di vettori ortogonali $\mathbf{h}_1$ ed $\mathbf{h}_2$, sodisfacenti alle (2), si ottengono facendo variare comunque θ nelle espressioni

$$(6) \qquad \mathbf{h}_1 = f \cos\theta(\cos\theta \mathbf{j}_3 + \operatorname{sen}\theta \mathbf{j}_1) \ , \ \mathbf{h}_2 = f \operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}\theta \mathbf{j}_3 - \cos\theta \mathbf{j}_1);$$

da cui segue facilmente, per le (3) e (4), $(P - G) \times (Q - G) = -\frac{1}{f^2}(\mathrm{K}\sigma\mathbf{j}_1)^2$, che dimostra la prima parte della proposizione enunciata.

3. Fra tutte le possibili coppie di vettori (6) possiamo considerare, in particolare, quella formata da vettori equiinclinati sopra $\mathbf{f} = f\mathbf{j}_3$, corrispondenti a $\theta = \frac{\pi}{4}$ nelle (6): e così si ha che *il sistema dato* $(\mathrm{P}_i, \mathbf{f}_i)$ *è astaticamente equivalente a due forze d'uguale intensità* $f/\sqrt{2}$, *i cui vettori* $f(\mathbf{j}_3 + \mathbf{j}_1)/2$, $f(\mathbf{j}_3 - \mathbf{j}_1)/2$ *sono ortogonali ed i cui punti di applicazione* $P_0 = G + \frac{1}{f}\mathrm{K}\sigma\mathbf{j}_1$, $Q_0 = G - \frac{1}{f}\mathrm{K}\sigma\mathbf{j}_1$ *sono i due punti coniugati dell'involuzione della retta centrale, simmetrici rispetto al centro G.*

Se $p = \frac{1}{f} \operatorname{mod} \mathrm{K}\sigma\mathbf{j}_1$ è la distanza di P_0 (o Q_0) da G (cioè $-p^2$ è la potenza dell'involuzione della retta centrale), e con $\mathbf{i}_1$ s'indica il vettore unitario parallelo a questa retta e dello stesso senso di $\mathrm{K}\sigma\mathbf{j}_1$, dalla (1) si ha:

$$(7) \qquad \sigma = \frac{1}{2} pf [\mathrm{H}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_3 + \mathbf{j}_1) - \mathrm{H}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_3 - \mathbf{j}_1)] = pf\, \mathrm{H}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1),$$

da cui (*A. V.*, I, pag. 28 [3], pag. 48 [2]):

$$(8) \qquad \mathrm{K}\sigma = pf\,\mathrm{H}(\mathbf{j}_1, \mathbf{i}_1) \ , \ \mathrm{K}\sigma . \sigma = p^2 f^2\, \mathrm{H}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_1) \ , \ \mathrm{I}_1(\mathrm{K}\sigma . \sigma) = p^2 f^2 ,$$

e ne segue così (*A. V.*, I, pag. 167, pag. 28 [3]) la (5). Questa poi mostra che tale involuzione è un elemento astatico rispetto al corpo, perchè si può facilmente riconoscere (*Astat.*, n. 12) che *la dilatazione* $K\sigma_A . \sigma_A$, *relativa ad un punto arbitrario A del corpo, è un operatore o funzione astatica rispetto al corpo, mentre la dilatazione* $\sigma_A . K\sigma_A$ *è astatica rispetto alle forze del sistema dato* [1].

Complesso degli assi centrali.

4. In una configurazione arbitraria del sistema $(P_i, \mathbf{f}_i)$ possiamo considerare la *forza motrice del sistema statico di forze*, cioè la formazione di 2ª specie di Grassmann-Peano (*Astat.*, pag. 2) $s = \Sigma_i P_i \mathbf{f}_i$, la quale rappresenta completamente il *wrench* di R. S. Ball.

Per $\mathbf{f} \neq 0$, l'*asse centrale* [2] di questa formazione s è il bipunto $r = s - \frac{3ss}{f^2} | \mathbf{f}$, che rappresenta l'asse centrale (di Poinsot) del sistema statico di forze. Perchè questo sistema (nella configurazione considerata per il sistema astatico) possa esser sostituito da una forza unica, occorre e basta che l'invariante (od automomento) di s, cioè ss, sia nullo; ed allora s è un bipunto coincidente con r.

Se consideriamo la speciale riduzione astatica del nostro sistema $(P_i, \mathbf{f}_i)$, indicata nel n. 3, si ha:

$$s = \frac{f}{2}[P_0(\mathbf{j}_3 + \mathbf{j}_1) + Q_0(\mathbf{j}_3 - \mathbf{j}_1)] = f(G\mathbf{j}_3 + p\,\mathbf{i}_1\mathbf{j}_1)\,. \tag{9}$$

ed il suo invariante è [3] $ss = 2f^2p\,G\mathbf{j}_3\mathbf{i}_1\mathbf{j}_1 = -\frac{1}{3}f^2p\,\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_2$. Perciò il sistema statico di forze, formato dal sistema $(P_i, \mathbf{f}_i)$ nella configurazione considerata, ha come asse centrale la retta (bipunto) $r = f(G\mathbf{j}_3 + p\mathbf{i}_1\mathbf{j}_1 + p\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_1 . | \mathbf{j}_3)$; e siccome, per l'identità fondamentale [*Éléments*, pag. 38 (12)] e le proprietà del prodotto alternato, è $\mathbf{i}_1\mathbf{j}_1 + \mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_2 . | \mathbf{j}_3 = (\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_2 . \mathbf{j}_2)\mathbf{j}_1 = \mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3 . \mathbf{j}_3\mathbf{j}_1$, si ha pure:

$$r = f(G - p\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3 . \mathbf{j}_1)\mathbf{j}_3\,. \tag{10}$$

[1] Gli AA. ricordati chiamano, in generale, *astatico* ogni elemento del sistema invariabilmente legato al corpo; e, volendo pure considerare le figure (od elementi) variabili solamente col variare la direzione delle forze del sistema, è necessario il distinguere le *due diverse forme di astaticità* (*Astat.*, pag. 4) rispetto al corpo, od ai vettori delle forze, cosa che non ho trovato fatta da altri.

[2] C. Burali-Forti, *Lezioni di geometria metrico-proiettiva*, Torino, Bocca (1904), pag. 91.

[3] C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Éléments de calcul vectoriel* etc., Paris, Hermann, 1910, pag. 36 (6). Nel seguito, quest'opera si indicherà brevemente con « *Éléments* ».

5. Il *complesso degli assi centrali* è formato dagli assi centrali corrispondenti a tutte le ∞^3 configurazioni del sistema $(P_i, \mathbf{f}_i)$, che si hanno mantenendo fisso il corpo in una posizione determinata, facendo rotare i vettori $\mathbf{f}_i$ e, con essi, i vettori $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$, invariabilmente legati alle forze. Quindi, una qualsiasi di tali configurazioni si potrà ottenere con una rotazione (corrispondente) dei vettori delle forze, a partire da una configurazione fissata (ad arbitrio) come *iniziale*. Noi riguarderemo come tale una fra quelle in cui il bivettore $\mathbf{j}_2 \mathbf{j}_3$ è normale alla retta centrale del sistema, $G\mathbf{i}_1$.

Precisamente, se $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ è una terna unitaria-ortogonale-destrogira invariabilmente legata al corpo $\mathbf{C}$, la configurazione iniziale sarà completamente determinata supponendo che, in essa, i tre vettori $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$ (invariabilmente legati alle forze) coincidano rispettivamente con i vettori $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$. In tal modo le due forze applicate nei punti $P_0 = G + p\mathbf{i}_1$, $Q_0 = G - p\mathbf{i}_1$, ed equivalenti astaticamente al nostro sistema, agiscono secondo due rette che nella configurazione iniziale sono

$$(G + p\mathbf{i}_1)(\mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_1) = (G - p\mathbf{i}_3)(\mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_1),$$
$$(G - p\mathbf{i}_1)(\mathbf{i}_3 - \mathbf{i}_1) = (G - p\mathbf{i}_3)(\mathbf{i}_3 - \mathbf{i}_1),$$

ed hanno quindi in comune il punto $G - p\mathbf{i}_3$. Così *le forze del sistema sono allora staticamente equivalenti ad una forza unica di vettore* $\mathbf{f} = f\mathbf{j}_3$, *perpendicolare alla retta centrale e passante per il punto centrale.* La stessa forza è ancora ovviamente la risultante unica del sistema, nella configurazione ottenuta con una rotazione di mezzo giro intorno ad $\mathbf{i}_3$ (il che corrisponde a far coincidere la terna $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$ con la terna $-\mathbf{i}_1, -\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$). Ed è chiaro che in ognuna delle ∞^1 configurazioni ottenute, dalle due ora indicate, mediante una rotazione arbitraria (dei vettori delle forze) intorno alla retta centrale, le forze del sistema potranno sempre sostituirsi con una forza unica, agente secondo una retta del fascio di centro G e giacente nel piano normale alla retta centrale.

6. La (10) ci rappresenta tutte le rette del complesso degli assi centrali che si ottengono facendo variare i due vettori, unitarî ed ortogonali, $\mathbf{j}_1$ e $\mathbf{j}_3$ (invariabilmente legati ai vettori delle forze, con $\mathbf{j}_2$), in tutti i modi possibili. Un tale complesso contiene la congruenza delle rette, ciascuna delle quali è il sostegno d'una risultante unica del sistema di forze, in una conveniente configurazione. E questa congruenza è determinata da tutte le forme s, che si riducono ad un bipunto, cioè (essendo $\mathbf{f} \neq 0$) soddisfano alla condizione $ss = 0$; ossia è l'insieme dei bipunti r, o delle s, che soddisfano alla

$$\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_2 = 0. \tag{11}$$

T e o r e m a. *Il complesso degli assi centrali* (10) *è quadratico. Le rette di questo complesso, passanti per un punto* (*proprio*) *arbitrario A, sono le generatrici del cono asintoto delle quadriche indicatrici, con centro*

in A, della dilatazione $K\sigma_A . \sigma_A - f^2(G-A)^2$; *cioè son le rette AP, luogo dei punti P che soddisfano all'equazione*:

$$(12) \qquad (P-A) \times [K\sigma_A . \sigma_A - f^2(G-A)^2](P-A) = 0 .$$

Infatti, perchè il bipunto r passi per A, occorre e basta che la formazione di 3ª specie (di Grassmann-Peano) Ar sia identicamente nulla, cioè sia $GAj_3 + pi_1 \times j_3 . Aj_1 j_3 = 0$; ossia, dev'essere (*Éléments*, pag. 181 [4])

$$(G-O) \times (A-O) \wedge j_3 - pi_1 \times j_3 . (A-O) \times j_2 = 0 ,$$

qualunque sia il punto O. Ponendo, per es., successivamente, $A + j_1$, $A + j_2$, al posto di O, si ottiene subito:

$$(13) \qquad (G-A) \times j_2 = 0 , \quad (G-A) \times j_1 = pi_1 \times j_3 ;$$

da cui, per l'identità fondamentale che lega $G-A$ alle sue componenti secondo j_1, j_2, j_3, si ha:

$$(G-A)^2 = p^2 (i_1 \times j_3)^2 + [(G-A) \times j_3]^2 .$$

D'altra parte, se P è un punto qualsiasi d'un asse centrale r, essendo questo parallelo al corrispondente vettore j_3, è $P - A = \pm \operatorname{mod}(P-A) . j_3$, e quindi l'ultima relazione può scriversi:

$$(G-A)^2 . (P-A)^2 = p^2 [i_1 \times (P-A)]^2 + [(G-A) \times (P-A)]^2 ,$$

la quale equivale alla (12) perchè, com'è facile riconoscere, si ha (cfr. *Astat.*, pag. 55):

$$(14) \quad \sigma_A = \sigma + f H(G-A, j_3) , \quad K\sigma_A . \sigma_A = K\sigma . \sigma + f^2 H(G-A, G-A) .$$

In particolare, siccome $K\sigma . \sigma$ trasforma ogni vettore in un vettore parallelo alla retta centrale [vedi le (8)], gli assi centrali uscenti dal punto centrale G formano il fascio delle rette per G, normale alla retta centrale.

7. Io ho chiamato PIANO MEDIANO (milieu), del sistema considerato, il piano normale alla retta centrale condotto per il punto centrale; e, per analogia con le focali di Minding, ho chiamato CIRCOLO FOCALE il circolo di tale piano con centro in G e raggio p (essendo $-p^2$ la potenza dell'involuzione della retta centrale). Ne risulta che *il piano mediano ed il circolo focale sono figure astatiche rispetto al corpo*; inoltre: *il circolo focale è il luogo dei punti, da cui, proiettando l'involuzione della retta centrale, si ottiene un'involuzione circolare.* Si ha pure il

Teorema. *La sezione col piano mediano del cono formato dagli assi centrali passanti per un punto A, fuori di tale piano e della retta centrale, è un'ellisse bitangente internamente al circolo focale, nei punti (opposti) d'incontro di questo circolo col piano del punto A e della retta centrale. L'asse minore dell'ellisse (normale al diametro di contatto col*

circolo) è il prodotto del diametro ($2p$) *del circolo focale per il coseno dell'angolo che la retta centrale forma con la retta* (AG) *congiungente il vertice del cono con il punto centrale. — Gli assi centrali uscenti da un punto arbitrario della retta centrale, formano il cono rotondo che ha per direttrice il circolo focale.*

Infatti, per le note formole [1] del prodotto regressivo fra due forme di 2ª e 3ª specie (di Grassmann-Peano), l'intersezione del bipunto r (10) col piano mediano $G\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ è [*Éléments*, pag. 182, n. 3; pag. 34 (2); cfr. *Astat.*, pag. 60]:

$$(15)\quad \frac{6}{f}G\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3 \,.\, r = 6G\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3\mathbf{j}_3 \,.\, G + 6p\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3(G\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3\mathbf{j}_1 \,.\, \mathbf{j}_3 - G\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3\mathbf{j}_3 \,.\, \mathbf{j}_1) =$$
$$= \mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3[G + p(\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_1 \,.\, \mathbf{j}_3 - \mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3 \,.\, \mathbf{j}_1)] = \mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3(G + p\mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{j}_2)\,.$$

Quindi, se $\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3 = 0$, la retta $A\mathbf{j}_3$ appartiene al piano mediano; ed inoltre, per le (13), il vettore GA risulta parallelo a $\mathbf{j}_3$; perciò, finchè A è fuori del piano mediano $G\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$, si ha $\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3 \neq 0$. Allora la (15) mostra che una retta r, per A, è tagliata dal piano $G\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ nel punto $Q = G + p\mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{j}_2$, ove il vettore unitario $\mathbf{j}_2$ può variare comunque, conservandosi però, per la 1ª delle (13), normale alla retta GA. Perciò G è il centro della conica descritta da Q (potendosi cambiare $\mathbf{j}_2$ in $-\mathbf{j}_2$). Inoltre mod $(Q - G)$ è costante ed uguale a p quando, e solo quando, il punto A sta sulla retta centrale, chè solo allora $\mathbf{j}_2$ è sempre normale ad $\mathbf{i}_1$. Per A fuori della retta centrale $G\mathbf{i}_1$, il vettore $\mathbf{j}_2$ è normale ad $\mathbf{i}_1$ solo quando $\mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{j}_2$ è parallelo all'intersezione dei due piani $G\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ ed $AG\mathbf{i}_1$; ed allora detto mod $(Q - G)$ assume il suo valore massimo p. Il minimo valore della stessa distanza di Q da G si ha quando $\mathbf{j}_2$, normale a GA, è parallelo al piano $GA\mathbf{i}_1$, cioè quando $Q - G$ è normale a questo piano ed il suo modulo è quindi $\pm p\,\mathrm{sen}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_2) = \pm p \cos(\mathbf{i}_1, G - A)$.

c. d. d.

Corollario. *Gli assi centrali che incontrano una retta arbitraria uscente dal punto centrale, e che non giace nel piano centrale, sono tutte (e sole) le rette che si appoggiano alla retta data e ad un'ellisse del piano mediano, bitangente, negli estremi del suo asse focale, al circolo focale.*

[1] Ved., per es., C. Burali-Forti, *Corso di geometria analitico-proiettiva*, Torino, G. B. Petrini, 1912, pag. 165 [1].

Meccanica. — *Nuovi tipi di onde periodiche permanenti e rotazionali.* Nota II di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Matematica. — *Sulla definizione di arco di una curva e dell'integrale di Weierstrass, che si presenta nel calcolo delle variazioni.* Nota di Guido Fubini, presentata dal Corrispondente O. Tedone.

Le Note precedenti saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

Fisica. — *Nuove ricerche sulla dirigibilità delle onde elettriche* (1). Nota del prof. Alessandro Artom, presentata dal Socio P. Blaserna.

Fin dall'inizio della radiotelegrafia, mi sono proposto di risolvere alcune questioni le cui soluzioni potevano meglio assicurare la continuità e l'indipendenza di funzionamento delle stazioni radiotelegrafiche. Mi occupai principalmente del modo di dirigere le onde elettriche, essendo questa, a parer mio, una delle proprietà più importanti per ottenere che le comunicazioni radiotelegrafiche fra varie stazioni possano compiersi senza reciproco disturbo.

Proposi diversi metodi per ottenere la dirigibilità delle onde elettriche, metodi che sperimentai, con risultati perfettamente corrispondenti alle previsioni teoriche, col concorso della marina italiana, come ho esposto nelle mie precedenti Note (2).

Nella Nota del 17 giugno 1906 mettevo in rilievo la capitale importanza, per la dirigibilità delle onde elettriche, della forma degli aerei, della posizione relativa e della situazione di essi, rispetto alla terra.

Scopo della presente Nota si è di descrivere alcune semplici ma assai notevoli forme di aerei radiotelegrafici dirigibili, da me ideati e sperimentati fra stazioni poste anche a qualche centinaio di chilometri fra loro.

(1) Lavoro eseguito nel R. Politecnico di Torino.

(2) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, A. Artom: 15 marzo 1903, 5 febbraio 1905, 17 giugno 1906.

Le forme di aerei radiotelegrafici da me ideati, sono in generale composte da due o più conduttori inclinati, simmetricamente disposti rispetto ad un piano verticale; oppure da circuiti oscillanti di forme opportune.

1. Una forma semplice di aereo radiotelegrafico è quella della fig. 1, costituita da un triangolo isoscele aperto in alto e da me ideata fin dal 1902.

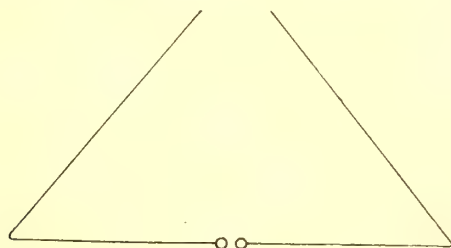
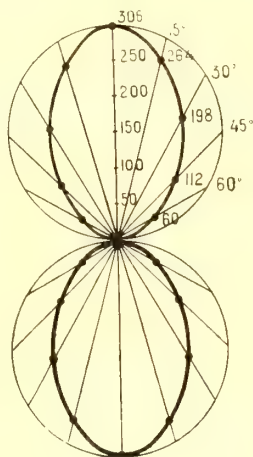



Fig. 1.

Quando i due rami dell'aereo sono alimentati da correnti di fasi opposte, il diagramma di dirigibilità delle onde elettriche irradiate, è quello rappresentato nella fig. 2.

È questo un caso particolare del metodo generale da me indicato nelle precedenti Note e fondato sull'impiego di due oscillazioni elettriche spostate di fase. La teoria nel metodo è stata confermata più tardi dall'Eccles, dal Garbasso [1] e da altri.

Fig. 2.

Le curve di dirigibilità furono più tardi anche determinate misurando le intensità di radiazione, nelle diverse direzioni, col termogalvanometro Duddell. Queste curve, come mostra la figura 2, hanno forma di due ellissi tangenti il cui asse maggiore giace nel piano dell'aereo triangolare e di cui la base del triangolo è coincidente con l'asse comune dei due ellissi.

In altri termini, la radiazione si estende tutta nella direzione del piano dell'aereo radiotelegrafico, tanto dalla parte destra quanto dalla parte sinistra. Nella direzione perpendicolare al piano dell'aereo la radiazione è praticamente nulla.

Così, per ricordare un esempio pratico: nella direzione del piano dell'aereo ed in quelle prossime ad essa, si possono inviare radiotelegrammi a distanza di quattrocento e più chilometri, colla spesa di energia inferiore a quella impiegata nelle ordinarie stazioni radiotelegrafiche, mentre nella di-

[1] Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, A. Garbasso, 5 giugno 1910.

rezione perpendicolare al piano dell'aereo ed in quelle comprese in un assai ampio settore, già ad un chilometro di distanza la radiazione è praticamente nulla.

Lo stesso aereo triangolare adoperato come aereo ricevente, fig. 3, gode di proprietà identiche rispetto al ricevimento dei radiotelegrammi.

Tale aereo riceve benissimo i radiotelegrammi dalle stazioni radiotelegrafiche che sono situate nella direzione del piano dell'aereo ed in quelle prossime ad esso. Ciò perchè le onde elettriche, che provengono da quelle direzioni, colpiscono gli aerei in istanti di tempo successivi e generano correnti differenti di fasi, le quali direttamente o per induzione sono trasmesse all'apparato rivelatore di onde elettriche, che potrà essere del tipo a cristalli, o di qualunque altro.

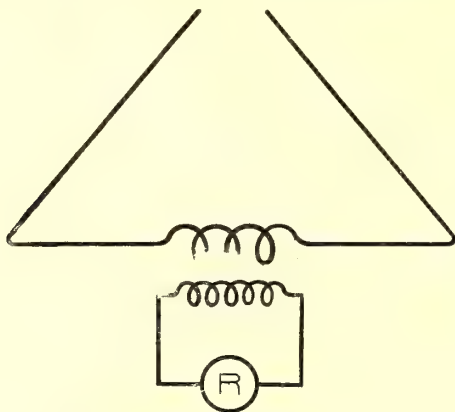



Fig. 3.

Le oscillazioni elettriche provenienti dalle stazioni radiotelegrafiche situate prossimamente nel piano di simmetria perpendicolare al piano dell'aereo, colpiscono i due rami dell'aereo sensibilmente negli stessi istanti, e provocano nell'apparato ricevitore effetti differenziali, cioè correnti contrarie, ed in questo caso sensibilmente uguali, e colla stessa fase: il che è quanto dire che le stazioni radiotelegrafiche, situate nelle posizioni sopra accennate, non influenzano l'apparato ricevitore.

Ciò è praticamente assai importante, perchè in grazia di questa proprietà, il servizio radiotelegrafico si può rendere indipendente dai disturbi delle stazioni colle quali non si desidera comunicare.

2. Una assai notevole proprietà di questa forma di aereo radiotelegrafico dirigibile è quella da me descritta nel gennaio 1907, ed attuata con pieno successo, poco dopo, nelle stazioni della Regia Marina sulle coste del mare Adriatico.

Immaginiamo di far ruotare attorno all'asse verticale di simmetria uno dei due triangoli rettangoli in cui il triangolo isoscele si può scomporre tracciando l'altezza del triangolo.

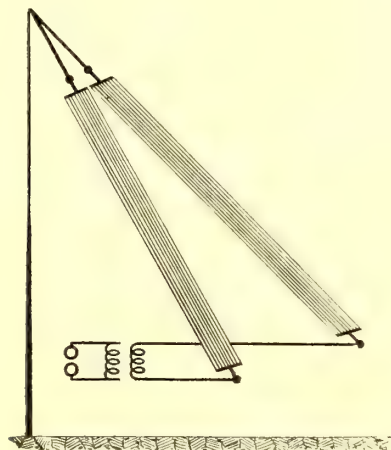



Fig. 4.

Ne risulta un aereo (fig. 4) costituito dalla ipotenusa e da un cateto di due triangoli rettangoli i cui piani formano fra loro un angolo diedro.

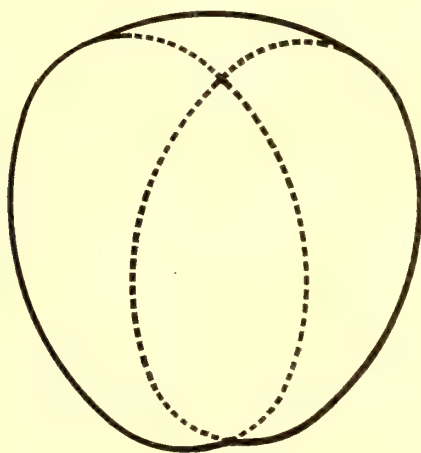



Fig. 5.

Variando il valore dell'angolo diedro, si possono creare diagrammi (fig. 5) della distribuzione dell'energia irradiata, tali da soddisfare alle più difficili esigenze della pratica.

Così, ad esempio, diminuendo il valore dell'angolo diedro compreso fra i due rami dell'aereo, la curva di dirigibilità riesce assai più ristretta ed allungata.

Si può, in altri termini, fare in modo, come l'esperimento ha provato, che i radiotelegrammi giungano esclusivamente in determinate regioni, evitando completamente che essi possano essere intercettati dagli apparati situati fuori da quei prestabiliti territorii.

È importante di ricordare, a questo punto, quanto ho indicato già fin dal 1904, cioè che le proprietà direttive di questi aerei possono essere rese anche più perfette, facendo agire insieme, tenendo conto delle fasi delle correnti oscillatorie, parecchie coppie di tali aerei. Essi possono allora disporsi o nello stesso piano od in piani paralleli, cosicchè le loro azioni vengano a sommarsi nelle direzioni desiderate.

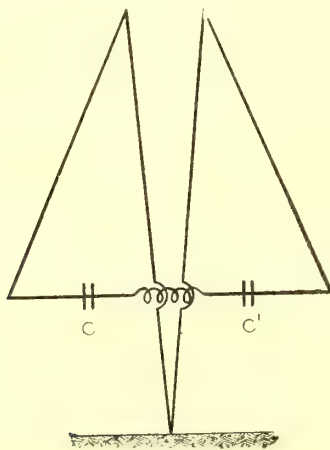



Fig. 6.

3. Un altro aereo radiotelegrafico dirigibile ho pure sperimentato con buoni risultati, allo scopo di assicurare la continuità e la indipendenza di funzionamento degli apparati radiotelegrafici dai nocivi effetti della elettricità atmosferica e di quelli dovuti alle oscillazioni elettriche irradiate dalle stazioni con le quali non si desidera di comunicare.

Tale aereo radiotelegrafico è rappresentato nella fig. 6. In questo aereo le estremità superiori del triangolo della fig. 1 sono ripiegate e messe a terra per mezzo di due conduttori.

L'apparato ricevente è riunito, coll'intermediario di un circuito indotto, colla parte centrale del conduttore orizzontale.

Come l'aereo della fig. 3, esso rende l'apparato ricevitore sensibile alle trasmissioni che arrivano dalle stazioni situate prossimamente nel piano dell'aereo, ed esclude le ricezioni provenienti dalle stazioni situate fuori del piano dell'aereo.

In questo caso l'antenna, invece di essere parzialmente chiusa, costituisce un circuito interamente metallico, interrotto solo da condensatori. La sua azione come aereo ricevente è dovuta alle forze elettromotrici generate dalla variazione del flusso magnetico che attraversa la superficie racchiusa dall'aereo.

L'aereo di questa forma si presta bene, come l'esperimento di parecchi anni ha dimostrato, per diminuire notevolmente gli effetti nocivi della elettricità atmosferica sul ricevitore. È pure singolarmente adatto per poter ottenere effetti sintonici con onde elettriche di grande lunghezza, senza dover troppo aumentare la superficie dell'aereo.

*
* *

Nelle stazioni radiotelegrafiche dirigibili, volendo trasmettere e ricevere radiotelegrammi secondo diverse direzioni dell'azimut, sono disposti parecchi aerei dirigibili attorno ad un unico palo o supporto, dal quale sono sostenuti.

Nel loro complesso, le stazioni radiotelegrafiche dirigibili, del tipo da me ideato, vengono ad assumere l'aspetto esterno di un grande cono col vertice in alto, e di cui le generatrici sono costituite dai fili inclinati dei diversi aerei che servono ad operare nelle varie direzioni.

Le proprietà direttive e selettive degli aerei dirigibili così disposti, possono essere utilizzate adoperando detti aerei indipendentemente l'uno dall'altro: ed allora gli estremi di ciascun aereo fanno capo ad opportuni commutatori che li mettono in comunicazione rispettivamente coi circuiti generatori ovvero coi circuiti dei rivelatori di onde elettriche.

Nelle stazioni dirigibili sopradescritte, i diversi aerei possono essere collegati invece tra loro in modo da utilizzare gli effetti di composizione oppure di interferenza delle onde irradiate o ricevute.

In entrambi i modi di utilizzare le proprietà direttive e selettive di questi aerei, si può determinare con esattezza la posizione in cui si trova la stazione radiotelegrafica che trasmette i radiotelegrammi.

Geografia fisica. — *Quarta relazione della spedizione scientifica nel Karakoram orientale*, trasmessa al PRESIDENTE dal capo della spedizione dott. FILIPPO DE FILIPPI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica terrestre. — *La distribuzione della forza magnetica terrestre nella media Eritrea.* Nota di L. Palazzo, presentata dal Socio E. Millosevich.

1. — Prima del 1913 non erano state fatte, nella nostra colonia Eritrea, misure assolute e complete dei tre elementi che definiscono il campo magnetico terrestre, se non a Massaua ed in pochi altri punti della costa e delle isole del mar Rosso. Per Massaua si possedevano i valori magnetici determinati dagli ufficiali della R. Nave idrografica « Staffetta » nel marzo 1911, quelli trovati dall'americano W. H. Sligh della *Carnegie Institution* nell'aprile dello stesso 1911, e quelli ottenuti dall'austriaco alfiere di vascello C. Rössler assai tempo prima, cioè sul finire del 1897; è pure a quest'ultimo che si dovevano i valori per l'isola Nocra del gruppo delle Dàhalak, per l'isolotto Harmil e pei punti costieri Daramsas, Abàyil, Assab, nei quali aveva fatto scalo la i. e r. nave-trasporto « Pola » durante la campagna oceanografica intrapresa nel summentovato anno 1897. Nessuna stazione magnetica era mai stata fatta nell'interno dell'Eritrea; conoscevasi bensì un valore della declinazione osservato a Chèren nel 1861, mediante bussola, dai viaggiatori Kinzelbach e von Heuglin; ma un dato così isolato, e relativo ad un solo elemento, nulla diceva per la conoscenza del regime magnetico della regione. Pertanto un rilevamento magnetico, che si fosse sistematicamente eseguito per l'Eritrea, avrebbe presentato non piccolo interesse.

2. — Tale lavoro di rilievo magnetico ebbi appunto occasione di compiere nell'estate 1913, allorchè mi recai nell'Eritrea, chiamatovi dal Governo coloniale per l'impianto di un'osservatorio sismico in Asmara e per lo studio dei terremoti che, cominciati nel gennaio di quell'anno e continuando con straordinaria frequenza, tenevano in viva apprensione gli abitatori della colonia. Dovendo andare in giro per visitare i luoghi più battuti dai terremoti e per raccogliere informazioni sui fatti geodinamici, mi parve opportuno di associare alle indagini sismologiche anche l'esplorazione magnetica della regione percorsa. Grazie alle molte facilitazioni concessemi, nei mezzi di trasporto, dal Governo, ed alla cortesia degli ottimi funzionarii, qua e là residenti, che andarono a gara nel favorire la mia intrapresa, potei in brevissimo tempo, cioè dal 7 giugno al 7 agosto, fare una magnifica serie, compatta ed omogenea, di misure dei tre elementi geomagnetici I punti di osservazione sono 16 in tutto, di cui 11 sull'altipiano, ad un livello medio di circa 2000 m. (Asmara, Debàroa, Adi Ugri, Chenafenà, Coatìt, Adi Caièh, Addi Adid, Saganeiti, Uochertì, Az Teclesàn, Chèren), 1 a mezza costa (Ghinda, 910 m.), 4 a livello del mare (Massaua, Zula, Aràfali lungo il litorale, e poi l'isola di Nocra). Il poligono avente al contorno questi punti è ben lontano dal raggiungere in estensione tutta quanta l'Eritrea; esso non ne copre che

una modesta parte, che è la regione media per latitudine e più orientale, comprendente i centri abitati più importanti; per definire meglio, diremo che i punti, distribuiti in verità non molto uniformemente, sono contenuti entro un trapezio limitato dai meridiani 38° 25′ e 40° 0′ (est da Greenwich) e dai paralleli 14° 45′ e 15° 50′ (nord). Un trapezio siffatto ha l'area di 20200 kmq., e quindi la nostra rete magnetica viene ad avere una densità media di 1 stazione per ogni 1260 kmq [1].

3. — I risultati delle misure da me eseguite in Eritrea nel 1913 si troveranno esposti, per estenso e con molti particolari, in una Memoria che vedrà presto la luce nel volume XXXV, parte 1ª, degli *Annali del R. Ufficio centrale di meteorologia e geodinamica*; frattanto mi pregio di far qui conoscere, all'Accademia, in breve riassunto, i risultati stessi. Riporto in una tabella i valori dei tre elementi magnetici direttamente osservati: declinazione δ, inclinazione i ed intensità orizzontale H; e poi i valori della forza totale T e delle sue componenti ortogonali X, Y, Z, che dai tre primi dati, con semplici calcoli, si deducono.

Valori degli elementi magnetici determinati in Eritrea, intorno all'epoca 1913, 5.

Stazioni	Coordinate geografiche			Elementi magnetici direttamente osservati			Elementi dedotti			
	φ bor.	λ orien.	h	δ occ.	i bor.	H	X	Y	Z	T
	° ′ ″	° ′ ″	m	° ′	° ′	Γ				
Asmara ...	15.20.10	38.55.50	2330	1.40,4	12.08,9	0,34827	0,34812	— 0,01017	0,07497	0,35625
Debàroa ...	15.05 35	38.50.20	1930	1.43,4	11.34,5	0,34897	0,34881	— 0,01049	0,07147	0,35621
Adi Ugri ..	14.52.45	38.49.00	1980	1.48,2	11.15,8	0,34928	0,34911	— 0,01099	0,06956	0,35614
Chenafenà .	14.47.20	39.01.10	1630	1.45,5	10.51,2	0,34900	0,34883	— 0,01071	0,06691	0,35536
Coatìt	14.48.20	39.13.30	1900	1.39,5	10.55,8	0,34890	0,34875	— 0,01010	0,06738	0,35535
Adi Caièh .	14 50.45	39.22.25	2410	1.37,3	10.59,6	0,34929	0,34915	— 0,00988	0,06785	0,35582
Addi Adid .	14.57.25	39.13.35	1950	1.38,8	11.16,8	0,34927	0,34913	— 0,01004	0,06966	0,35615
Saganeiti ..	15.03.15	39.10.55	2160	1.39,5	11.33,7	0,34842	0,34827	— 0,01008	0,07128	0,35564
Uochertì ...	15.10 35	38.59.50	2200	1.42,0	11.51,3	0,34823	0,34808	— 0,01033	0,07310	0,35582
Az Teclesàn	15.34 00	38.46.45	2250	1.44,0	12.41,3	0,34804	0,34788	— 0,01053	0,07836	0,35675
Chèren	15.46.45	38.27.15	1400	1.53,9	13.12,9	0,34788	0,34769	— 0,01152	0,08169	0,35734
Ghinda	15.26.30	39.06.05	910	1.34,6	12 20,1	0,34842	0,34829	— 0,00959	0,07619	0,35665
Massaua ...	15.35.50	39.27.50	2	1.31,8	12.54,2	0,34819	0,34807	— 0,00930	0,07977	0,35721
Zula	15 15.10	39.42.55	1	1.37,9	11.49,8	0,34970	0,34956	— 0,00996	0,07325	0,35729
Aràfali	15.05.10	39.44.55	1	1.39,1	11.37,0	0,35071	0,35056	— 0,01011	0,07210	0,35804
Nocra	15.43.20	39.56.40	2	1.27,0	13.05,7	0,34807	0,34796	— 0,00881	0,08097	0,35736

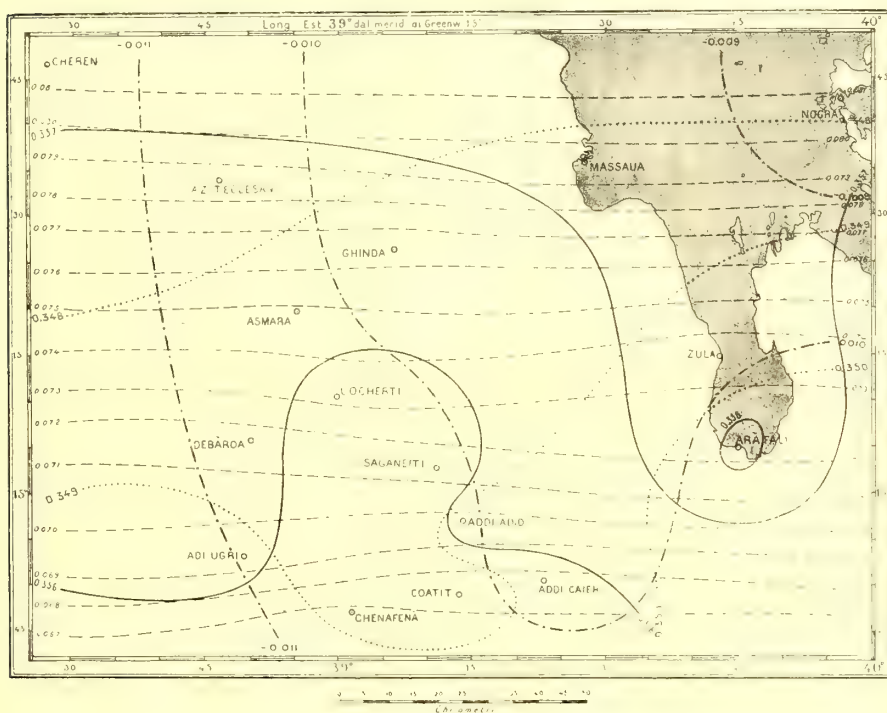
[1] La densità delle stazioni nella carta magnetica d'Italia è solo di 1 per ogni 1500 kmq.

4. — Le osservazioni fatte non sono, nè potevano essere, rigorosamente coeve; manca d'altra parte il mezzo di ricondurle ad un'epoca fissa, comune, non esistendo, in più o meno grande vicinanza all'Eritrea, alcun osservatorio magnetico, di cui si posseggano registrazioni magnetografiche atte a servire di riferimento per consimili riduzioni, come farebbesi in Europa. È stata però nostra cura di scegliere, in generale, per l'osservazione degli elementi maggiormente variabili, quali la declinazione e l'intensità, quelle ore del giorno in cui il rispettivo elemento assume presso a poco il suo valor medio giornaliero; cosicchè i dati osservati, in sostanza, ben poco devono risentire l'effetto della variabilità diurna. Inoltre tutte le osservazioni cadono entro un ristretto termine di tempo che s'aggira intorno al punto di mezzo dell'anno 1913, e perciò i dati raccolti si possono sensibilmente considerare tutti come riferibili all'epoca comune 1913, 5. Ciò posto, mi è stato possibile di costruire la carta magnetica per la media Eritrea e per la suddetta epoca 1913, 5, col tracciamento delle tre specie di linee isomagnetiche corrispondenti ai tre elementi osservati, cioè le isogone, le isocline e le isodinamiche della componente orizzontale. Tale carta, alla scala di 1:600.000, è annessa alla Memoria che si pubblica negli *Annali*, ove sono anche commentate le varie particolarità di forma e di andamento delle linee suddette, su di che io qui sorvolo. Invece, per dare un'idea della distribuzione della forza magnetica terrestre sulla media Eritrea, presento qui una cartina, in scala ridottissima, col disegno delle linee di eguale forza totale, nonchè delle isodiname per ciascuna delle tre componenti: sud-nord, ovest-est e verticale.

Dall'esame della cartina, a chiunque appare manifesto che, mentre nella porzione superiore, o più settentrionale, le varie linee mantengono un andamento relativamente regolare, nella metà meridionale della carta, ed in ispecie verso sud-est, si hanno invece le maggiori anomalie. Sopratutto si mostrano irregolari i percorsi delle isodiname della forza totale T e delle componenti X e Y; un punto singolare, per la forza totale, si ha in Aràfali, che abbiamo circuìto con l'isodinama del valore 0,358. Al contrario, i valori della componente verticale Z sono distribuiti con assai maggiore regolarità su tutta l'estensione della carta; essi si scalano fra di loro molto rapidamente ed ordinatamente, dando luogo ad una serie di isodiname di Z pressochè equidistanti e parallele ai paralleli geografici; è la stessa cosa che avviene per le linee isocline, cioè di eguale inclinazione.

La causa delle anomalie magnetiche, così evidenti nella regione meridionale, è da ricercarsi — io penso — nella speciale costituzione geologica del suolo, cioè nella presenza delle rocce eruttive, e più specialmente dei cosiddetti *trappi*, diffusi un po' dovunque nell'altipiano, ma che per l'appunto maggiormente si sviluppano verso il sud. Aràfali poi giace al piede di un cono vulcanico, il Dòla, che è il primo di una numerosissima serie di crateri spenti, salvo qualche manifestazione di fumarole o di sorgenti termali,

disseminate sugli estesi campi di lava della zona vulcanica dell'Alid. È ben vero che io ho cercato di evitare, in genere, il collocamento degli strumenti magnetici direttamente su suolo lavico (trachiti e basalti); ma si appalesa pur sempre l'azione a distanza di tali rocce.

Carta magnetica delle isodinamiche sulla media Eritrea per l'epoca 1913, 5.

È poi anche doveroso far osservare che la rappresentazione grafica relativa agli elementi non direttamente osservati X, Y, Z e T, non sempre rispecchia, assolutamente e per intero, la reale distribuzione della forza magnetica, in quanto che essa rappresentazione può facilmente risentire, talora in misura non lieve, l'influenza degli ordinarii errori commessi negli elementi di osservazione diretta; tali errori, anche se piccoli in se stessi, possono per avventura, nel calcolo degli elementi derivati X, Y, Z e T, congiungersi in modo da originare errori assai più sensibili nei rispettivi prodotti. Infatti, dalle note relazioni

$$X = H \cos \delta, \quad Y = H \operatorname{sen} \delta, \quad Z = H \operatorname{tg} i, \quad T = H \sec i,$$

si hanno i rispettivi differenziali:

$$dX = \cos \delta . dH - H \operatorname{sen} \delta . d\delta, \qquad dY = \operatorname{sen} \delta . dH + H \cos \delta . d\delta,$$

$$dZ = \operatorname{tg} i . dH + \frac{H}{\cos^2 i} di, \qquad dT = \frac{1}{\cos i} dH + \frac{H \operatorname{sen} i}{\cos^2 i} di.$$

In generale, si può ritenere esatto δ entro $\pm 1'$, i entro $\pm 2'$, H entro $\pm 10\gamma$; ma qui, oltre agli abituali errori delle osservazioni di campagna, si devono considerare quelli derivanti, nella collettività dei valori utilizzati per la rappresentazione grafica, dalla mancata od imperfetta riduzione all'epoca comune di riferimento. Pertanto ammettiamo che nelle nostre misure eritree gli errori $d\delta, di, dH$ possano avere valori anche doppî o tripli di quelli su assegnati. Ora, a seconda dei segni, in X, Y, Z, T possono gli errori provenienti da δ e H, ovvero da i e H, combinarsi per differenza o per addizione, cioè tendere ad elidersi a vicenda ovvero a sommarsi. A vero dire, data la piccolezza dell'angolo di declinazione δ nell'Eritrea, l'errore dX dipende quasi esclusivamente dall'errore dH; l'errore dY è subordinato invece essenzialmente all'errore $d\delta$; ma in Z e T, l'eventuale combinazione degli errori di e dH può dar luogo ad errori amplificati, ed indurre quindi il disegnatore della carta a distorsioni di linee simulanti anomalie, le quali non sono che apparenti. Nell'Eritrea però si ha la favorevole circostanza che l'inclinazione i non è molto grande (tra 10° e 13°), e pertanto risultano relativamente impiccioliti i termini di dZ e dT aventi a fattori $\operatorname{tg} i$ o $\operatorname{sen} i$, ed a divisori $\cos i$ o $\cos^2 i$. Inoltre, nel sistema delle isodiname di Z, data la grande rapidità con cui varia i, e quindi Z, nelle latitudini eritree, gli errori, di cui parliamo, si pronunciano meno nella rappresentazione grafica; ma nelle isodiname di T, la quale varia assai lentamente nell'àmbito della carta, le anomalie apparenti, cioè dovute all'accidentale esaltamento suddetto degli errori, possono rendersi assai più spiccate.

Tutto questo ho voluto dire, affinchè la cartina da noi offerta non venga intesa come espressione vera ed assoluta del fenomeno della distribuzione della forza geomagnetica nell'Eritrea, ma sia considerata al suo giusto, modesto valore e con le dovute riserve.

5. — Il rilevamento magnetico dell'Eritrea presenta il fatto, non frequentemente incontrato in rilievi congeneri, che una parte delle stazioni, le quali hanno servito di base alla carta, giacciono al livello del mare, ed altre stazioni, a non grande distanza orizzontale dalle prime, si trovano ad un dislivello di oltre 2000 metri. Ci si offre pertanto qui l'opportunità di ricercare quale azione eserciti siffatta differenza d'altitudine sulla forza magnetica terrestre. Il raffronto fra i risultati ottenuti nelle stazioni basse ed in quelle elevate riesce però piuttosto complicato in causa delle anomalie magnetiche di cui sopra abbiamo discorso; esse, sovrapponendosi all'effetto dell'altezza, di per sè assai piccolo, possono del tutto mascherarlo. Tuttavia abbiamo voluto tentare la prova, valendoci delle stazioni della metà superiore della carta, ove meno manifeste sono le anomalie. Nella Memoria preparata per gli *Annali di Meteorologia* abbiamo fatto il calcolo della variazione coll'altezza per la componente orizzontale H; qui lo faremo invece per l'intensità totale T. Scegliendo le stazioni di Chèren, Az Teclesàn ed Asmara sull'altipiano, e quelle di Massaua e Nocra sul mare, ho stabilito un sistema di equazioni, risolvendo le quali sono riuscito a determinare, ad un tempo, le variazioni della forza T (considerata come funzione lineare ed omogenea della latitudine φ, della longitudine λ e dell'altitudine h) rispettivamente per 1° di φ, per 1° di λ (crescente verso E) e per 1 km. di h. Non m'indugio

sull'impostamento e sulla condotta del calcolo, e dò senz'altro i valori trovati pei suddetti rapporti:

$$f'_\varphi = + 0{,}00210\,,\quad f'_\lambda = - 0{,}00002\,,\quad f'_h = - 0{,}00015{\cdot}7.$$

Dalle misure eritree si rileverebbe, adunque, che l'intensità T diminuisce, coll'altezza, in ragione di 15,7 unità γ per ogni chilometro di dislivello. Questo valore della diminuzione di T coll'altezza è solo di poco inferiore a quello previsto dalla teoria di Gauss, e che nel caso dell'Eritrea è espresso numericamente da 16,8 γ [1]. Mediante un procedimento, analogo bensì, ma non identico, nella summenzionata Memoria avevamo trovato che la variazione della componente H per chilometro d'altezza è $-$ 7,7 γ, numero pur esso inferiore, ma notevolmente di più, al valore $-$ 16,4 dato dalla teoria.

Non è da attribuire molta importanza ai valori numerici dei gradienti di T e di H in altezza da noi trovati, poichè troppo scarse sono, e forse anche non scevre da difetti, le osservazioni che hanno servito di base al nostro calcolo; questo, in verità, non è da considerarsi se non come una semplice punta d'assaggio (« eine Stichprobe » direbbero i Tedeschi) effettuata sul materiale di dati magnetici da noi raccolti. Tuttavia, il fatto che quei valori sono risultati più bassi dei rispettivi valori teorici, può essere interpretato con l'esistenza di forze magnetiche esteriori alla superficie della Terra, quali sarebbero correnti elettriche (trasporto di ioni con prevalenza d'un determinato segno) attraverso all'atmosfera, la cui azione sull'ago calamitato si compone con l'azione del campo magnetico propriamente dovuto alla litosfera. Che esistano siffatte correnti elettriche in seno all'atmosfera, è ormai accertato; e non è detto che queste debbano agire ovunque nel medesimo senso, chè anzi il loro sistema, nelle varie zone della Terra, appare connesso con le correnti d'aria costituenti la circolazione generale atmosferica. È chiaro che, a seconda del senso, l'azione delle correnti elettriche, di cui parliamo, può ritardare od accelerare la diminuzione che deve verificarsi nell'intensità magnetica coll'allontanamento dalla superficie della litosfera (al livello medio), sede del magnetismo terrestre. Pertanto la or ora ricordata relazione fra le correnti elettriche e la circolazione generale atmosferica, potrebbe per l'appunto invocarsi a spiegare perchè nell'Eritrea, paese della zona tropicale, il rapporto della variazione della forza magnetica alla differenza d'altezza verticale si sia trovato inferiore al valore teorico, mentre nei paesi d'Europa, di più elevate latitudini, si è riscontrato, in generale, il fenomeno inverso, cioè una diminuzione della forza coll'altezza

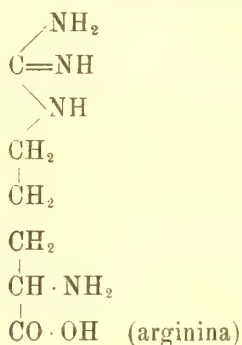
[1] Infatti, se nell'espressione generale $dT_h = -3\frac{h}{R}\,T_0$ (ove T_h e T_0 sono le forze totali all'altezza h ed al livello del mare, e R è il raggio medio terrestre) poniamo $h = 1$, $R = 6371$, e $T_0 = 0{,}357$ che è il valor medio di T in Eritrea, otteniamo: $dT_h = -16\gamma{,}8$.

maggiore, anche di cinque volte tanto, al valore dedotto dalla teoria gaussiana.

6. — Data la ristrettezza dell'area magneticamente esplorata e dato il piccolo numero delle stazioni della carta Eritrea, non mi è stato possibile di spingermi ulteriormente su questa interessante via di ricerche, indagando, per esempio, se le forze magnetiche esterne, di cui parlammo sopra, siano di quelle che ammettono un potenziale (come avverrebbe nel caso di correnti elettriche che percorressero l'atmosfera parallelamente alla superficie del geoide), ovvero se parte di esse forze non abbiano potenziale (tali sono le correnti elettriche verticali nell'atmosfera che, dirette o dal basso all'alto, o dall'alto al basso, defluiscono perpendicolarmente alla superficie terrestre). Come criterio per stabilire se si verifichi o l'uno o l'altro caso, serve l'integrale che si ottiene quando lungo una curva qualsiasi, chiusa, sulla superficie della Terra, si moltiplica ciascun elemento della curva per la componente della forza magnetica che agisce nella direzione dell'elemento stesso, e si sommano i prodotti così calcolati sopra l'intera curva. Se questo sommatorio od integrale (o, come si potrebbe dire, il valor medio della forza magnetica lungo la curva) si annulla, allora non vi sono correnti che attraversino in direzione verticale l'area chiusa dalla curva; se invece l'integrale risulta diverso da zero, allora le dette correnti verticali esistono. Si comprende che, come curva o poligono chiuso pel calcolo dell'integrale, conviene scegliere il contorno del trapezio sferico compreso fra due meridiani e due paralleli; così, lungo i meridiani non si hanno da considerare che i valori della componente X della forza magnetica, e lungo i paralleli i valori della componente Y. Tale metodo fu già applicato in parecchi casi, e, tra gli altri, dal Liznar al rilevamento magnetico dell'Austria-Ungheria (*Meteorologische Zeitschrift*, 1898, pag. 175); ma il Trabert giustamente osserva (ibidem, pag. 403) che mettendo in calcolo simili porzioni, relativamente piccole, della superficie terrestre, non riesce definitiva e sicura alcuna conclusione sull'esistenza, o meno, delle correnti verticali. A più forte ragione, non era da attendersi successo intraprendendo siffatte laboriose computazioni per il trapezio della nostra carta limitata alla media Eritrea.

Chimica-fisiologica. — *Introduzione del nucleo guanidinico nella molecola dei polipeptidi e sua importanza fisiologica.* Nota del dott. ANTONINO CLEMENTI [1], presentata dal Socio L. LUCIANI.

Schultze e Winterstein [2], ottenendo per sintesi l'arginina dalla cianamide e dall'ornitina, ne misero in evidenza la formula di struttura e dimodimostrarono che parte integrante della molecola di questo diamino acido (che insieme con la lisina e con l'istidina forma il gruppo delle cosidette basi esoniche di Kossel) è il nucleo guanidinico: l'arginina è infatti acido α-amino-δ-guanido-valerianico, ed ha questa costituzione:

$$
\begin{array}{l}
\diagup NH_2 \\
C{=}NH \\
\diagdown NH \\
\diagup \\
CH_2 \\
| \\
CH_2 \\
CH_2 \\
| \\
CH \cdot NH_2 \\
| \\
CO \cdot OH \quad \text{(arginina)}
\end{array}
$$

Le classiche ricerche di A. Kossel e della sua scuola dimostravano, frattanto, che l'arginina è la più importante e la più costante pietra strutturale dell'edificio molecolare dei corpi proteici; e che anzi esiste una classe di proteine ben individualizzate, da Kossel denominate protamine, la cui molecola risulta costituita in modo preponderante da diaminoacidi e più specialmente da arginina.

L'importanza fisiologica del nucleo guanidinico come costituente della molecola proteica, che risulta dalle ricerche suaccennate, è diventata ancora più grande dopo la scoperta, fatta da Kossel e Dakin [3], dell'esistenza, nell'organismo e specialmente nel fegato, di un fermento imidolitico, l'arginasi,

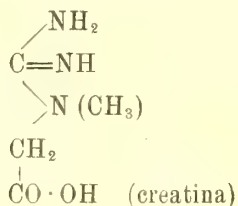
[1] Ricerche eseguite nell'Istituto di fisiologia dell'Università di Heidelberg, diretto dal prof. Albrecht Kossel.

[2] Schultze und Winterstein, *Ueber die bildung von Ornithin bei der Spaltung des Arginins und über die Konstitution dieser beide basen* (Zeitschr. f. Physiol. Chem., Bd. 26, s. 1, an. 1898; Bd. 34, s. 128, an. 1901).

[3] Kossel und Dakin, *Ueber die Arginase* (Zeitschr. f. Physiol. Chemie., Bd. 41, s. 324, an. 1904); id., *Weitere Untersuchungen über Harnstoff bildung*, Bd. 42, s. 181, an. 1904.

capace di idrolizzare la molecola dell'arginina, staccarne il nucleo guanidinico e trasformarlo in urea e dopo che è stato dimostrato dalla ricerca sistematica dell'arginasi nell'organismo della serie dei vertebrati, che nel fegato degli uccelli e della maggioranza dei rettili, presso cui l'acido urico occupa nel catabolismo il posto dell' urea, l' arginasi è assente, mentre è presente nel fegato dei mammiferi, degli anfibii e dei pesci (Clementi) (¹).

L'importanza fisiologica del nucleo guanidinico risulta anche dal fatto che esso prende parte alla costituzione della molecola di uno dei costituenti azotati dell' urina più importanti, dopo l'urea e l'acido urico, cioè della creatinina e della creatina che, come è noto, è acido metilguanidoacetico

$$
\begin{array}{l}
\quad\diagup NH_2 \\
C{=}NH \\
\quad\diagdown N\,(CH_3) \\
CH_2 \\
\,| \\
CO \cdot OH \quad \text{(creatina)}
\end{array}
$$

Quando d'altra parte si pensi al posto che negli ultimi anni occupano i polipeptidi nell'indagine della costituzione e del metabolismo dei proteici, risulterà evidente l'interesse fisiologico che presenta il problema della preparazione e dello studio biologico di polipeptidi portanti legato alla loro catena il nucleo guanidinico. La risoluzione di tale problema non è stata ritentata, dopo che fallirono i tentativi fatti da E. Fischer (²) diretti a fare la sintesi del dipeptide arginilarginina, che è il guanidopolipeptide che esisterebbe, secondo gli studî di A Kossel (³), allo stato naturale nella molecola delle protamine.

Io mi sono proposto di tentare per ora la sintesi di guanidopolipeptidi più semplici seguendo un procedimento diverso da quello di E. Fischer, cioè unendo direttamente il nucleo guanidinico con la molecola di polipeptidi della glicocolla.

Le prime ricerche in tal senso compiute con la glicilglicina, mi hanno dato risultato positivo. Infatti, facendo reagire cianamide e glicilglicina in quantità proporzionali ai loro pesi molecolari, ho ottenuto un nuovo corpo che cristallizza in bellissimi aghi, insolubili in alcool ed etere, poco solubili in acqua fredda, che a 218°-220° imbruniscono, a 235° circa si scompongono

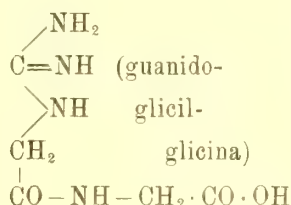
(¹) A. Clementi, *Ueber die Verbreitung der Arginase im Tierwelt.* IXème Congrès international des fisiologistes de Groninge, 2-6 septembre 1913.

(²) E. Fischer, *Untersuchungen über Aminosauren, Polipeptide und Proteine.* Berlin 1906.

(³) Kossel A., *Sitzungsber. d. Hielelberger Akad. d. Wissenschaft.* Math.-Naturw. Klasse, Ath. 1913.

dopo annerimento, e alla analisi elementare dimostrano possedere la formula grezza $C_5 H_{10} O_3 N_4$.

Tale formula grezza corrisponde a quella della guanidoglicilglicina, a cui, dato il meccanismo per cui se ne è ottenuta la sintesi, spetta la seguente formula di costituzione:

$$\begin{array}{l} \diagup NH_2 \\ C{=}NH \quad \text{(guanido-} \\ \diagdown NH \quad \text{glicil-} \\ CH_2 \qquad \text{glicina)} \\ | \\ CO-NH-CH_2\cdot CO\cdot OH \end{array}$$

La guanidoglicilglina (glicociamilglicina) è il più semplice e il primo rappresentante, di tutta una nuova classe di polipeptidi, la cui sintesi e il cui studio biologico mi riserbo di condurre a termine.

Chimica. — *Sul metabolismo degli aminoacidi nell'organismo.* Nota I: *Azione del tessuto muscolare sugli aminoacidi aggiunti al sangue circolante*, del dott. Ugo Lombroso, presentata dal Socio L. Luciani.

Dopo che le nostre conoscenze sulla digestione delle sostanze proteiche sono venute, per opera particolarmente di Conheim ed Abderalden, a modificarsi così profondamente, è entrato nella convinzione della maggioranza degli studiosi il concetto che le sostanze proteiche vengano idrolizzate completamente sino allo stato di aminoacidi nel tubo digerente. Si sono quindi formulate varie ipotesi, tuttavia in discussione, rispetto al destino che tali aminoacidi avrebbero nel ricambio intermedio e finale delle sostanze azotate. Principalmente si dibattono le seguenti ipotesi: se avvenga cioè una ricostruzione della complessa sostanza proteica negli epitelii intestinali (similmente a quanto avviene nella digestione dei grassi), ovvero se gli aminoacidi penetrino in circolo serbando poi le loro ulteriori modificazioni (ricostituzione nelle albumine specifiche di ogni singolo organo, oppure combustione definitiva) in seno agli elementi dei varii tessuti dell'organismo.

Non entro in maggiori dettagli rispetto a questa ipotesi, tanto più che io non sottoscrivo, per ragioni che spiegherò in prossime pubblicazioni, al concetto fondamentale dell'idrolisi così completa delle sostanze proteiche, prima del loro assorbimento.

Ma ho voluto farne cenno, in quanto quest'ultima ipotesi è il punto di partenza di alcune ricerche che voglio ora menzionare, ricerche che furono dirette a risolvere il seguente problema:

Ammesso che, per via sanguigna, aminoacidi giungano a contatto di diversi tessuti, quale sarà il loro comportamento?

Per rispondere a questa domanda, apparentemente così semplice, già si richiede una complicata serie di esperienze e ricerche, la più elementare delle quali si rivolge alla seguente indagine: come si modifica il contenuto in aminoacidi di una determinata quantità di sangue circolante in un determinato organo?

A questo problema, assai interessante, pochi contributi furono portati: e buona parte soltanto indirettamente.

Nella numerosa serie di lavori eseguiti da Embden (1) e dai suoi collaboratori, facendo circolare nel fegato varie sostanze, e fra queste molti aminoacidi, indirettamente venne sfiorato tale problema. Infatti Embden dimostrò che, condizionatamente alla presenza di aminoacidi nel sangue usato per la circolazione artificiale del fegato, avvertivasi la produzione di acetone, acido lattico, ecc. Egli però non si preoccupò di determinare direttamente la diminuzione od eventuale scomparsa degli aminoacidi.

Altre notizie più dirette si possono trarre dalle interessanti comunicazioni del v. Slyke (2) e collaboratori. Questi studiosi, in una diligente serie di ricerche, verificarono il comportamento dei varii tessuti a varie distanze di tempo dopo iniezioni di soluzioni concentrate di aminoacidi o mescolanze di essi.

Da queste ricerche risultò che, più o meno, tutti i tessuti aumentano in tali condizioni il loro contenuto di aminoacidi, ed in modo particolare il fegato. Inoltre in queste esperienze constatarono che non soltanto il fegato è capace di raddoppiare e più il suo contenuto di aminoacidi, ma è anche quello che se ne libera più rapidamente di tutti gli altri organi.

Siccome quest'ultimo fenomeno è accompagnato da aumento di urea nel sangue, essi ritengono probabile che la scomparsa degli aminoacidi si debba alla loro ossidazione.

Negli altri organi gli aminoacidi assorbiti spariscono meno rapidamente; ed i muscoli che con minore quantità di aminoacidi raggiungono il punto di saturazione, se ne liberano più lentamente.

La sparizione degli aminoacidi in tutti gli organi avverrebbe, secondo v. Slyke, per opera del fegato, il quale, distruggendo rapidamente gli aminoacidi assorbiti, li sottrae continuamente alla circolazione e quindi ai tessuti che, non essendo capaci di utilizzarli, li riversano in circolo.

(1) Zeitschrift f. die gesammte Biochemie, VIII, Heft 3/4 1906.

(2) Journ. of. Biolog. Chem., XII, 399, 1913.

Quando la penetrazione degli aminoacidi in circolo è troppo rapida, il rene (che, come il fegato, è capace di assorbire la maggior copia di aminoacidi, ma da esso se ne differenzia perchè non atto a distruggerli) aiuta l'organismo a liberarsene, eliminandoli immutati.

Contrarii all'ipotesi di v. Slyke, della elettiva azione epatica nella disanimazione, sono Rattevos e Nelson [1], i quali ritengono che tale proprietà sia comune a tutti i tessuti viventi. Per dimostrare questa tesi, gli autori citati praticarono iniezioni di miscugli di aminoacidi in animali ai quali avevano esportato tutto il fegato, salvo quel piccolo pezzo che circonda la cava; e videro aumentare l'azoto ammoniacale nelle orine, segno che la decomposizione era avvenuta. Però gli stessi autori dovettero riconoscere che le loro esperienze non erano conclusive, perchè si verificava anche un aumento nella eliminazione dell'urea tale da dimostrare non essere annullata l'azione del fegato.

Tutte le ricerche di cui abbiam fatto cenno, e particolarmente quelle dirette da v. Slyke, se hanno portato preziosi contributi alla conoscenza del metabolismo degli aminoacidi, lasciano però insoluto il quesito se e quanto i varii tessuti siano di per sè capaci di utilizzare gli aminoacidi circolanti nel sangue. E ciò perchè, essendo stati eseguiti nell'organismo *in toto*, nel quale viene mantenuta fra i diversi organi la possibilità di scambiarsi le varie sostanze nel sangue circolante, riesce impossibile di distinguere esattamente l'azione che si deve attribuire ai singoli organi in riguardo al metabolismo generale.

Indagini che sfuggirebbero a questa obiezione furono eseguite da due ricercatori il Buglia [2] e il Lanzillotti [3].

Il Buglia sottopose all'esperimento una affermazione formulata in via di ipotesi dal Lussana, che avendo più volte fatto ricerche sul cuore isolato nutrito con liquidi a cui erano stati aggiunti aminoacidi, sosteneva che detti aminoacidi non erano ulteriormente metabolizzati.

Risultò, da tali ricerche del Buglia (eseguite facendo circolare in cuore isolato di coniglio una soluzione fisiologica cui erano stati aggiunti diversi aminoacidi) che, anche prolungando per molte ore l'esperimento, non si verifica mai una diminuzione di aminoacidi. Al contrario, in qualche caso si ha anche un aumento di aminoacidi, dovuto al riversarsi, nel liquido circolante, degli aminoacidi proprii del tessuto muscolare.

Un risultato invece completamente positivo avrebbe avuto il Lanzillotti, esperimentando col rene di cane. In queste indagini, nelle quali l'autore, come il Buglia, per liquido circolante aveva usato soluzione fisiologica

(1) Journal of Biol. Chemistry, XIX, 229, 1914.
(2) Arch. di farmacol. sperimen. e scienze affini, XVII, 277, 1914.
(3) Archivio di fisiologia, XII, 429, 1915.

del Ringer, si era verificata una diminuzione di aminoacidi che raggiunse perfino il 20 %.

* * *

Volendo contribuire a tale complesso problema, io ho iniziato, in collaborazione anche di C. Artom, una serie di ricerche sistematiche sul comportamento dei varii tessuti in rapporto agli aminoacidi in essi circolanti.

In questa Nota riferisco le indagini eseguite esperimentando con tessuto muscolare. Io mi sono anzitutto proposto di rispondere a queste domande:

1) facendo circolare sangue unito a vari aminoacidi per il tessuto muscolare, quali variazioni si riscontrano nel suo contenuto di aminoacidi dopo un determinato periodo di circolazione?

2) e quale modificazione subisce il contenuto in aminoacidi del testessuto muscolare?

3) a una eventuale diminuzione degli aminoacidi nel sangue, corrisponde la presenza di sostanze (NH_3, acetone) che indichino la loro combustione?

4) infine (dopo il risultato ottenuto nelle prime ricerche) ho esteso anche al tessuto muscolare la determinazione dell'NH_3.

Tutte queste varie ricerche apparivano ugualmente necessarie in quanto l'una coll'altra si completava ed integrava. Infatti, una diminuzione degli aminoacidi del sangue non ci dimostra di per sè sola una utilizzazione di essi, potendosi giustificare con un corrispondente loro aumento nel tessuto muscolare. E, d'altra parte, soltanto la dimostrazione diretta dei prodotti della loro ulteriore combustione può assicurarci che effettivamente di ossidazione si tratti e non di una sintesi di tali aminoacidi.

* * *

Per eseguire le presenti ricerche, dissanguavo rapidamente l'animale di esperimento, e, liberato della cute un arto posteriore, lo ponevo nell'apparecchio per la circolazione Lind, che facevo funzionare usando il sangue defibrinato dell'animale stesso. Per ragione di praticità, non veniva l'apparecchio smontato dopo ogni esperienza, ma lavato *in toto* col passaggio di liquido di Ringer, piccola parte del quale rimane aderente alle palline di vetro dell'ossigenatore, ed al serpentino. Per ciò, per avere un esatto confronto fra le sostanze titolabili al formolo, prima e dopo la circolazione del muscolo, facevo circolare a vuoto, nell'apparecchio, il sangue a cui avevo aggiunto gli aminoacidi in modo che si mescolasse col liquido di Ringer rimasto; prelevavo un campione, e subito dopo procedevo all'innesto nell'arteria femorale.

Il dosaggio degli aminoacidi del sangue si eseguiva dopo aver trattato il sangue e gli estratti idroalcoolici del tessuto con ferro colloidale, previa

estrazione dell'NH_3 col metodo del Sörensen. Ricerche di controllo mi dimostrarono che la precipitazione col ferro colloidale non disturba sensibilmente il dosaggio degli aminoacidi se questi sono disciolti in acqua. Invece una certa diminuzione si avverte quando gli aminoacidi sono sciolti nel sangue. Perciò i dati raccolti nelle osservazioni che riferisco hanno valore più comparativo che assoluto, ed io riporto semplicemente i cc. Na OH $^1/_{10}\,n$ adoperati per la formoltitolazione.

I.

Cane maschio kg. 7,300. — L'arto posteriore pesa 560 gr. (di cui, 140 rappresentano tessuto osseo). Si inizia la circolazione con 420 cc. sangue + 4 gr. glicocolla sciolti in 80 cc. liquido di Ringer. La pressione vien tenuta fra 150-180 mm. mercurio. Dopo 3 ore di circolazione, l'arto pesa gr. 555.

Per 10 cc. sangue la formoltitolazione richiede	9,1 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$
» » dopo circolaz. la formoltitolazione richiede	7,0 » »
Per 50 gr. muscolo la formoltitolazione richiede	5.2 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$
» » dopo circolaz. la formoltitolazione richiede	12,2 » »
NH_3 per 100 cc. sangue.	2,8 H_2SO_4 $^1/_{50}\,n$
» » » dopo circolazione	19,6 H_2SO_4 $^1/_{50}\,n$
NH_3 per 50 gr. muscolo.	22,4 H_2SO_4 $^1/_{50}\,n$
» » » dopo circolazione	14,8 H_2SO_4 $^1/_{50}\,n$

Complessivamente sono mancanti nel liquido circolato tante sostanze titolabili col formolo, da richiedere 105,0 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$. Se ne trovano in più nel muscolo tante da richiedere 81 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$. Il *deficit* assoluto corrisponde quindi a 24 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$.

II.

Cane maschio kg. 5. — L'arto posteriore pesa 380 gr. (dei quali, 94 rappresentano tessuto osseo). Si inizia la circolazione con 360 cc. sangue + 4 gr. glicocolla sciolti in 140 cc. liquido di Ringer. La pressione vien tenuta fra 140-180 mm. mercurio. Dopo 2 ore di circolazione, l'arto pesa 420 gr.

Per 15 cc. sangue la formoltitolazione richiede . . .	14,2 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$
» » dopo circolaz. la formoltitolazione richiede	11,2 » »
NH_3 per 100 cc. sangue.	3,6 cc. H_9SO_4 $^1/_{50}\,n$
» » » dopo circolazione	12,9 cc. H_2SO_4 $^1/_{15}\,n$
Per 50 gr. muscolo la formoltitolazione richiede . . .	19,5 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$
» dopo circolaz. la formoltitolazione richiede	20,4 » »
NH_3 per 50 gr. muscolo	13 cc. H_2SO_4 $^1/_{50}\,n$
» » » dopo circolazione.	16,2 » »

Complessivamente sono mancanti nel liquido circolato tante sostanze titolabill col formolo, da richiedere 99,9 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$. Se ne trovano in più nel muscolo tanti da richiedere 61,3 cc. Na OH $^1/_{10}$. Il *deficit* assoluto corrisponde quindi a 38,6 cc. Na OH.

III.

Cane maschio kg. 5,5. — L'arto posteriore pesa 390 gr. (di cui. 100 rappresentano tessuto osseo). Sangue, diluito con Ringer, cc. 520 + 4 gr. di α alanina. La pressione vien tenuta fra 150-200 mm. mercurio. Dopo 1,45 ore, l'arto pesa 450 gr.

Per 15 cc. sangue la formoltitolazione richiede . . .	6 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*	
» » dopo circolaz. la formoltitolazione richiede	5.5 »	»
Per 50 gr. muscolo normale la formoltitol. richiede . .	15,5 cc. Na OH $^1/_{15}$ *n*	
» » dopo circolaz. la formoltitolazione richiede	17,0 »	»
NH_3 su 100 cc. sangue	perduto	
» » » circolato.	8 cc. H_2SO_4 $^1/_{50}$ *n*	
NH_3 per 50 gr. muscolo	22 cc. H_2SO_4 $^1/_{50}$ *n*	
» » » dopo circolazione	18 »	»

Complessivamente sono mancanti nel liquido circolante tante sostanze titolabili col formolo, da richiedere 39,3 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. Se ne trovarono in più nel muscolo tante da richiedere 29,1 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. Il *deficit* assoluto corrisponde quindi a 10.2 cc Na OH $^1/_{10}$ *n*.

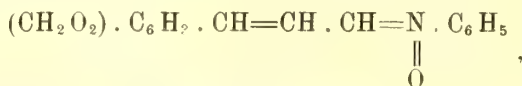
Dalle presenti ricerche risulta che:

Facendo circolare, nel muscolo di cane, sangue contenente in forte dose (sino all'1 %) aminoacidi, si avverte sempre una diminuzione degli aminoacidi dopo la circolazione. Di questi aminoacidi, una parte, la maggiore, si ritrova depositata immutata nel tessuto; della rimanente, una parte viene bruciata (come dimostra l'aumento dell'NH_3), e un'altra deve venir utilizzata a formare corpi non titolabili col formolo.

Sul significato e sulle deduzioni che da questi risultati si possono trarre, esporrò nella Nota che segue, allo scopo di poter fare gli opportuni raffronti coi risultati ottenuti usando, quale liquido circolante, la soluzione di Ringer, in luogo del sangue.

Chimica. — *Nuove ricerche intorno all'azione dei nitroso-derivati sui composti non saturi* [1]. Nota del dott. Luigi Alessandri, presentata dal Socio A. Angeli.

Lo studio intorno all'azione del nitrosobenzolo sui composti non saturi fu iniziato nel 1910 da A. Angeli, L. Alessandri e R. Pegna [2]; e per i composti aromatici a catena laterale allilica, più precisamente per il safrolo, venne allora dimostrato come il prodotto cristallino, principale, della reazione, possiede la struttura seguente:

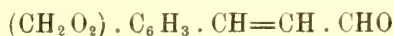
$$(CH_2O_2) \, . \, C_6H_? \, . \, CH{=}CH \, . \, \underset{\underset{\displaystyle O}{\|}}{CH{=}N} \, . \, C_6H_5 \,,$$

cioè di etere N-fenilico della ossima

$$(CH_2O_2) \, . \, C_6H_3 \, . \, CH{=}CH \, . \, CH{=}NOH$$

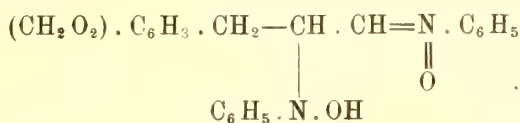
(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica farmaceutica del R. Istituto di studî superiori di Firenze.

(2) Questi Rendiconti, vol. XIX, 1° sem., pag. 650.

alla quale infatti si pervenne per azione dell'idrossilammina sul composto primitivo. Da tale ossima si passò poi facilmente alla aldeide

$$(CH_2O_2) . C_6H_3 . CH{=}CH . CHO$$

identica alla piperonalacroleina già conosciuta; e da questa infine, per condensazione con fenilidrossilammina, si potè riottenere un prodotto identico a quello formatosi per l'azione diretta del nitrosobenzolo sul safrolo.

Per quel che riguarda il meccanismo di questa reazione, si ritenne come più probabile che, reagendo dapprima il nitrosobenzolo nella sua forma bimolecolare sul safrolo, dia origine ad un composto intermedio di addizione, della forma

$$\begin{array}{l} (CH_2O_2) . C_6H_3 . CH_2{-}\underset{\displaystyle C_6H_5 . N . OH}{\underset{|}{CH}} . \underset{\displaystyle O}{\underset{\|}{CH{=}N}} . C_6H_5 \end{array}$$

e da questo, in una fase successiva, si arrivi al prodotto finale sopraindicato, per eliminazione di una molecola di fenilidrossilammina. Quest'ultima poi, reagendo col nitrosobenzolo presente, formerebbe l'azossibenzolo, del quale infatti si ottengono insieme notevoli quantità.

Continuando fino da allora lo studio di questa reazione, ho potuto confermare la verisimiglianza di tale supposizione, poichè accertai che il rendimento in prodotto greggio, che è del 20 % circa quando si uniscono pesi equimolecolari di safrolo e di nitrosobenzolo, sale al 40 % circa quando si fa reagire una molecola del composto allilico con tre molecole di nitrosobenzolo.

In seguito a questo resultato e dovendo anche tener conto che alcune delle sostanze impiegate sono difficilmente accessibili, nelle esperienze ulteriori, che feci per verificare la generalità della reazione ed estenderla ad altri composti non saturi, ho impiegato tre molecole del nitroso-composto per una delle sostanze in esame.

Ho fatto reagire il nitrosobenzolo in tali proporzioni con l'estragolo [1], la miristicina [2] ed il metileugenolo: ed ho ottenuto tre bei prodotti gialli, rispettivamente col p. f. 165°, 180° e 154°, i quali han senza dubbio la struttura analoga a quella del derivato safrolico, sia per i resultati analitici, sia per le proprietà.

[1] Un campione di questo prodotto mi fu gentilmente regalato dal prof. E. Rimini, cui porgo sentiti ringraziamenti.

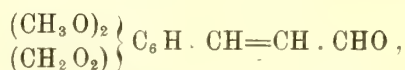
[2] Una notevole quantità di essa mi venne regalata dalla Casa Schimmel, che ringrazio qui pubblicamente.

Accenno qui che anche essi, come quello, per azione della luce solare si decompongono assai rapidamente [1].

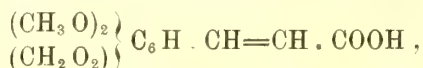
In modo non del tutto analogo procede l'azione del nitrosobenzolo sopra l'apiolo del prezzemolo. Infatti, in alcune esperienze preliminari eseguite con esso, ottenni una sostanza col p. f. 137° circa e che ha qualche rassomiglianza con i prodotti preparati dagli altri composti allilici: è colorata ad esempio in giallo, ed è poco stabile al permanganato potassico (reazione di Baeyer); ma non contiene azoto.

La scarsezza del rendimento e di prodotto abbastanza puro, che consumai in parte per la determinazione dell'azoto, per ora mi ha permesso di stabilire soltanto che esso reagisce con la idrossilammina, fornendo un derivato p. f. 172°, che all'analisi ha mostrato di avere una percentuale di azoto corrispondente alla formula $C_{12}H_{13}NO_5$.

Per quanto riguarda la struttura del composto giallo p. f. 137°, soltanto analisi e ricerche ulteriori potranno determinarla con tutta sicurezza: mi sembra però che i resultati sopra esposti rendano già assai verisimile la ipotesi, che il prodotto in questione sia da identificarsi con l'aldeide, che potrà chiamarsi apiolacroleina:

$$\left.\begin{matrix}(CH_3O)_2\\(CH_2O_2)\end{matrix}\right\} C_6H \, . \, CH{=}CH \, . \, CHO \, ,$$

l'ossima della quale ha in realtà il contenuto di azoto trovato pel composto p. f. 172°

In appoggio a tale ipotesi sta pure il fatto che anche l'acido corrispondente a questa aldeide, e che permetterà forse di identificarla,

$$\left.\begin{matrix}(CH_3O)_2\\(CH_2O_2)\end{matrix}\right\} C_6H \, . \, CH{=}CH \, . \, COOH \, ,$$

possiede, secondo Ciamician e Silber [2], una colorazione gialla.

[1] A questo proposito posso ora far rilevare, in primo luogo, come dalle osservazioni già pubblicate e da altre fatte da me in seguito, risulti che il carattere dell'instabilità alla luce è veramente generale per gli eteri N-alchilici non solo delle aldossime, ma anche delle chetossime [cfr. questi Rendiconti, vol. XIX (1910), 1° sem., pag. 651; ibidem, vol. XIX, 2° sem., pag. 122 e seguenti; ibidem, vol. XXIII (1914), 2° sem., pag. 132 e pag. 135]; in secondo luogo, che dal confronto delle strutture di alcune di tali sostanze, tipiche, riducibili ai due schemi $\underset{\displaystyle O}{\overset{}{R{-}\underset{\|}{N}{=}C}}{<}^{H}_{R'}$ e $\underset{\displaystyle O}{\overset{}{R{-}\underset{\|}{N}{=}C}}{<}^{R'}_{R''}$ (dove R, R', R'' rappresentano i diversi radicali alifatici ed aromatici presi in esame) l'instabilità alla luce, constatata in esse, si delinea già come propria del gruppo $\underset{\displaystyle O}{{-}\underset{\|}{N}{=}C{<}}$.

[2] Berliner Berichte, *22*, pag. 2485.

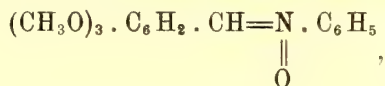
La formazione di una tale aldeide acquista anche maggior verisimiglianza per il fatto che assieme ad essa ho isolato, fra i prodotti della reazione, anche un composto incoloro, p. f. 100° circa, che si può estrarre anche con bisolfito sodico e che con ogni probabilità sarà identificato per aldeide apiolica.

Ma la più convincente conferma della giustezza di queste ipotesi dovevo trovarla nelle esperienze eseguite col nitrosobenzolo sopra alcuni dei derivati aromatici a catena laterale propenilica, alle quali preludevano i saggi, fatti fino dal 1910, con l'isosafrolo e l'anetolo. Però, a differenza di quanto verificammo allora per quei derivati (che cioè non davano origine a prodotti cristallini e quindi facilmente caratterizzabili), trovai che dall'asarone, per azione del nitrosobenzolo, si perviene con tutta facilità e discreto rendimento ad un prodotto cristallino, giallo-chiaro, assai somigliante a quelli ottenuti dai derivati allilici, sia per le proprietà fisiche, sia per l'instabilità alla luce: con permanganato potassico anch'esso svolge nitrosobenzolo.

Potei presto accorgermi che in alcuni casi esso si separa anche in cristalli contenenti solvente, di forma e p. f. poco netto e diversi fra loro, in modo da far credere dapprima ad una mescolanza di prodotti: ma infine accertai che effettivamente si trattava di un'unica sostanza che, pura e secca, fonde a 125°. Sottoposta in questo stato alle determinazioni di carbonio, idrogeno ed azoto, dette numeri che conducono alla formula $C_{16}H_{17}NO_4$.

Allo scopo di definirne la struttura, prima ancora di determinare il suo peso molecolare, applicai il procedimento, già impiegato per il composto ottenuto dal safrolo, cui ho accennato da principio. Il derivato asaronico venne cioè fatto reagire con idrossilammina, e dette origine ad un prodotto incoloro, col p. f. 137°, molto vicino al p. f. 138°,3 assegnato all'asarilaldossima [1], della quale all'analisi dimostrò aver la composizione. D'altra parte, il derivato asaronico primitivo, per idrolisi con acido diluito, condusse ad un prodotto che fuse a 112°-113° e che possiede anche tutti gli altri caratteri dell'aldeide asarilica: quest'ultima infine, fatta reagire con fenilidrossilammina, riprodusse una sostanza identica a quella ottenuta direttamente dall'asarone col nitrosobenzolo.

Rimane così dimostrato senz'altro, che al derivato asaronico giallo p. f. 125° spetta la struttura di etere N-fenilico dell'asarilaldossima:

$$(CH_3O)_3 . C_6H_2 . CH{=}\underset{\displaystyle \overset{\|}{O}}{N} . C_6H_5 ,$$

come indicavano già i resultati analitici.

Fra i prodotti secondarî della reazione ho riscontrato anche dell'aldeide asarilica, oltre a notevoli quantità di azossibenzolo.

[1] Fabinyi, Zeitschrift für phys. Chemie, XII, pag. 578.

Una reazione analoga riscontrò già nel 1893 Fabinyi [1] fra l'asarone stesso e l'acido nitroso che egli faceva svolgere fra nitrito alchilico ed acido cloridrico. Il prodotto finale della reazione, a seconda delle condizioni nelle quali egli operava, era il cloridrato dell'asarilaldossima o l'asarilaldeide libera: in questo ultimo caso si sviluppava una gran quantità di gas, certamente protossido di azoto (N_2O), che corrisponde all'azossibenzolo, da me trovato fra i prodotti secondarî, nello stesso modo come nell'altro caso l'asarilaldossima corrisponde all'etere N-fenilico dell'ossima medesima, da me ottenuto. Anzi è da ritenere che, ponendo a reagire tutto insieme l'eccesso di nitrosobenzolo con i derivati allilici o propenilici (ambedue i casi infatti si riducono al medesimo, poichè abbiam visto che nella reazione la catena allilica si trasforma anche essa in propenilica), avvengano diverse di tali reazioni secondarie, specialmente quando i prodotti, perchè sono solubili, non si sottraggono agli altri reagenti.

È probabilmente per questa ragione che, facendo reagire il nitrosobenzolo sull'isosafrolo, non ho potuto finora isolare il composto che dovrebbe formarsi, analogamente a quanto avviene per l'asarone: cioè l'etere N-fenilico del piperonalio, già conosciuto. Anche in questo caso avviene bensì lo spezzamento della catena laterale, giacchè mediante idrossilammina ho potuto isolare dall'olio rosso-bruno, che si forma, alquanta piperonalossima; ma oltre ad una porzione di isosafrolo inalterato [2], che passa dapprima distillando in corrente di vapore, vi sono, nell'olio meno volatile, azossibenzolo ed anche una sostanza che per ebollizione con acido diluito dà anilina.

Da tutto ciò si comprende che la reazione può complicarsi assai, dando origine a numerosi e svariati prodotti, alcuni dei quali di ossidazione.

Tali complicazioni, senza dubbio, sono la causa dei resultati ancora non abbastanza netti e costanti, ottenuti per ora nelle ricerche preliminari intorno all'azione del nitrosobenzolo sulla gomma elastica, iniziate parecchi anni addietro dal prof. Angeli.

Per le considerazioni sul probabile andamento della reazione, svolte in principio, ho cominciato a studiare il prodotto, che si ottiene unendo ad un peso molecolare di gomma elastica, calcolato in base alla formula semplice $C_{10}H_{16}$, sei pesi molecolari di nitrosobenzolo.

Mescolando quest'ultimo, ben polverizzato, alla gomma elastica, fatta rigonfiare in un volume non grande di benzolo, esso si sciolse dapprima col caratteristico color verde-smeraldo e con notevole raffreddamento. Il color del miscuglio passò poi successivamente al verde-bottiglia, al verde-bruno, al rosso-bruno: infine, in quelle condizioni di concentrazione, una parte del nuovo prodotto colorato in giallo-rosso rimase indisciolta come massa gelatinosa.

(1) Zeitschrift für phys. Chemie, XII, pag. 578.

(2) L'ho identificato trasformandolo nella caratteristica anidride del nitrosito (cfr. Angeli, Gazzetta chim. italiana, anno 1892, II, pag. 336).

Il liquido pure giallo-rosso, separato per decantazione e diluito con eccesso di ligroina, dette dei fiocchetti amorfi di color giallo-ocra: la parte indisciolta, ripresa pure con ligroina, si trasformò in una massa friabile, che dette una polvere amorfa, di colore e di aspetto molto somigliante alla precedente.

Ambedue le porzioni di prodotto si sciolgono abbastanza bene in cloroformio, un po' meno in benzolo, pochissimo in solfuro di carbonio, ligroina ed etere solforico; sono insolubili in acqua; riscaldate in tubetto per p. f., si rammolliscono fra 135° e 140°, decomponendosi poi con vivace sviluppo gassoso.

Due piccoli campioni delle due porzioni, lavati ripetutamente con solfuro di carbonio ed ogni volta lasciati a lungo con esso, allo scopo di eliminare il caucciù inalterato, vennero infine disciolti in cloroformio, riprecipitati con ligroina dalla soluzione filtrata, e ben seccati. All'analisi ambedue dettero numeri concordanti fra loro: e cioè C % 71,49 e 71,38, H % 6,46 e 6,44, ed N % 7,34 e 7,36; dimostrando che nella reazione aveva avuto origine un unico prodotto.

Il calcolo in base a questi numeri condurrebbe ad una formula $C_{58}H_{61}N_5O_9$, nella quale il numero di atomi di ossigeno è superiore a quello degli atomi di azoto: questa percentuale di ossigeno (15 % circa) crebbe fino al 19 % circa, bollendo a più riprese con etere solforico un poco del prodotto, già lavato col solfuro di carbonio ([1]).

Il prodotto greggio, precipitato successivamente due volte con ligroina dalla soluzione cloroformica, all'analisi fornì numeri alquanto diversi dai soprascritti, e più vicini a quelli calcolati per la condensazione di una molecola di gomma elastica con due molecole di nitrosobenzolo.

Anche questo prodotto dall'azione del nitrosobenzolo sulla gomma elastica con permanganato potassico svolge nitrosobenzolo e odore di isonitrile, ma non sembra molto sensibile all'azione della luce.

Per quanto questi primi resultati non appaiano fino da ora abbastanza significativi, ci riserbiamo di studiare sia i diversi prodotti che si ottengono variando le proporzioni dei composti reagenti, sia l'azione del nitrosobenzolo sulle diverse qualità di gomma elastica e sulla guttaperca, e di accertare se la reazione sia applicabile per la demolizione delle molecole della gomma elastica e la determinazione della sua struttura, nonchè per l'esame qualitativo e quantitativo in genere di questi interessanti prodotti naturali.

Pubblicherò prossimamente nella Gazzetta chimica italiana la descrizione particolareggiata delle esperienze, che si riferiscono alla presente Nota.

([1]) Provai ciò, allo scopo di sciogliere i prodotti, che con nitrosobenzolo avessero formato le resine eventualmente presenti (cfr., in proposito, Harries, *Sopra il presente stato della chimica della gomma elastica*. Gummi Zeitung, XXIV, 1910).

Fisiologia. — *Azione dell'intestino sugli aminoacidi.* — *Azione del rene sugli aminoacidi.* Note del dott. C. Artom, presentate dal Socio L. Luciani.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Biologia vegetale. — *Sulla biologia fiorale del Pesco.* Nota preventiva di C. Campbell, presentata dal Socio R. Pirotta.

Si hanno nel pesco caratteristiche fiorali su cui, ch'io sappia, non si è fermata completamente l'attenzione dei botanici, mentre offrono il maggiore interesse, sia dal lato biologico e dal sistematico, sia da quello agrario.

Dal lato botanico non si ha che il cenno dato dal Darwin, sulla diversa grandezza dei fiori e sulla diversa colorazione dei petali, per quanto riguarda il fiore, perchè sul pesco, sulla sua origine e sulla sua affinità col pesco a buccia liscia, il Darwin, oltre numerose citazioni, fa le più interessanti considerazioni [1].

Gli agronomi che si sono occupati del Pesco, si sono limitati a distinguere i diversi aggruppamenti delle gemme fiorali, a cui fu dato per molto tempo un diverso valore di fronte alla produzione, diverso valore che viene negato oggigiorno.

Si hanno infatti nel pesco:

gemme fiorali isolate;

gemme fiorali abbinate, più raramente associate in numero maggiore;

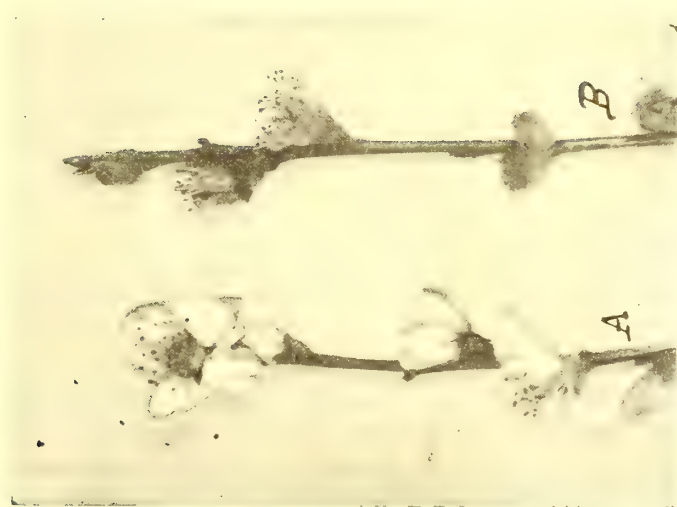
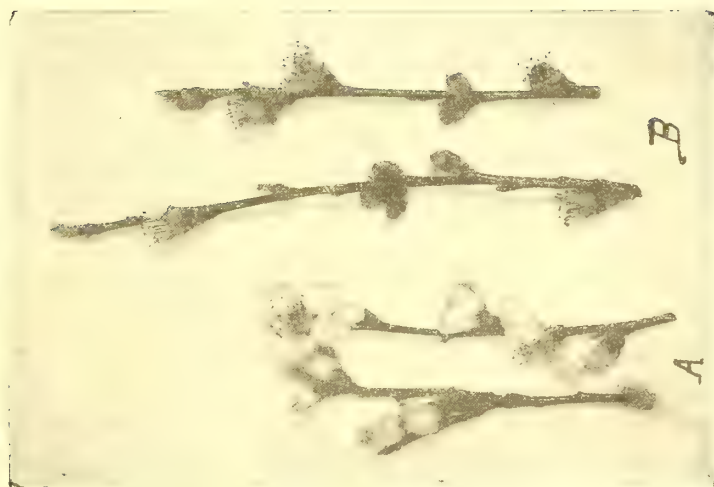
gemme fiorali accoppiate a gemma da legno;

gemme fiorali abbinate, nel cui mezzo si trova una gemma da legno;

più raramente gruppi di gemme terminali — come nel mandorlo — accompagnate o meno da gemma da legno.

Si ritenne, un tempo, che le gemme fruttifere del pesco fossero esclusivamente quelle accompagnate da gemma da legno, e più precisamente quelle abbinate accompagnate da gemma legnosa, credenza che permane tuttora tra i pratici di qualche regione.

L'osservazione di frutticoltori, che gemme fruttifere isolate od abbinate, non accompagnate da gemma da legno, potevano dare egualmente ottima produzione, fece *a priori* negare la vecchia credenza.

[1] Ch. Darwin, *The variation of Animal and Plants under Domestication.* London, 2 vol. (1868).

A Rametti con fiori longipetali e gemma terminale da fiore. *B* Rametti con fiore brevipetali e gemma terminale da legno.

Nell'uno e nell'altro caso vennero a mancare rigorose ricerche ed esperienze, tenendo conto principalmente della varietà e delle condizioni di ambiente.

Che la gemma da legno possa esercitare una benefica influenza, specie in terreni aridi, attirando la linfa bruta, niun dubbio, e per tale ragione sono più produttivi i rametti fruttiferi che terminano con gemma da legno anzichè da fiore; ma per dare un diverso valore od eguale a gemme accompagnate o meno da gemma legnosa, bisognava approfondire le superficiali osservazioni.

Anzitutto, nel pesco bisogna distinguere due forme fiorali ben differenziate morfologicamente e biologicamente, distinzione non ancora rilevata, a quanto io sappia.

In una forma i petali sono, come nel mandorlo, ben sviluppati e appariscenti, e la loro lunghezza supera quella degli stami.

Un'altra forma ha petali brevi, la cui lunghezza non supera quasi mai della metà quella degli stami.

Chiamerò, per distinguere le due forme, *longipetala* la prima, *brevipetala* la seconda.

Alle due forme corrisponde la ben nota divisione delle pesche in spiccaiole e duracine: e, precisamente, la forma longipetala è propria delle pesche spiccaiole; la brevipetala, delle duracine.

Biologicamente, le due forme restano ancora distinte, in quanto lo sviluppo del petalo ed il suo colorito, nelle spiccaiole, ha per effetto il richiamo dei pronubi e quindi la impollinazione e la fecondazione incrociata; nelle duracine brevipetali l'azione dei pronubi è nulla od accidentale. La prova di tale osservazione si ha dalle piante che si ottengono per seme dalle due forme, in quantochè, mentre nella forma brevipetala, con la semina, si ottengono piante che quasi nella totalità mantengono immutati i caratteri proprî, nella forma longipetala dalla semina si hanno piante che difficilmente riportano i caratteri della pianta madre.

Tale distinzione fa ancora cadere la ipotesi che il pesco non sia che un mandorlo modificato dalla coltura, in quanto che, se tale affermazione può sostenersi per la forma longipetala, non può reggersi per la brevipetala, così ben differenziata dal mandorlo.

È forse più logico di ritenere una ipotesi che sorge spontanea e che ricerche sperimentali potranno in seguito affermare o distruggere: e che cioè il pesco longipetalo sia un ibrido tra il mandorlo ed il pesco brevipetalo, dai coltivatori conservato e selezionato.

Tra la forma longipetala e quella brevipetala non è difficile di trovarne una intermedia, che, mentre ricorda nella struttura la brevipetala, ha petali più sviluppati, e la caratteristica, quasi sempre, del frutto duracino.

Anche il colorito dei petali, come già aveva osservato il Darwin, è nelle due forme ben distinto. Mentre nella forma longipetala il petalo tende ad avere un colorito più intenso verso il centro, per divenire più sbiadito, quasi bianco o leggermente roseo alla periferia, nella forma brevipetala il petalo ha un colorito più intenso nel suo contorno, carattere che tende a conservarsi nella forma intermedia.

Ibrida deve ancora considerarsi, quasi certamente, la pesca a buccia liscia, forse con l'albicocco.

Comunque sia, le due forme di pesco devono venire distintamente considerate, in quanto le differenze tra esse sono troppo sensibili perchè possano ragionevolmente rimanere unite, sia sistematicamente, sia, e più, dal lato biologico; e perchè ricerche in questo senso potranno chiarire la tanto discussa origine del pesco coltivato.

*
* *

Nei fiori brevipetali, quanto meno in quelli delle piante e varietà che ho avuto agio di potere studiare, non si hanno sensibili differenze negli stami e nel pistillo delle diverse gemme fiorali, e nei fiori delle diverse varietà o piante. Gli stami di varia lunghezza hanno le antère che vengono a trovarsi in parte sopra ed in parte sotto lo stimma: forma biologica che si dimostra la più propria alla impollinazione autogama, cosa del resto dimostrata nel riprodursi, nelle piante da seme, dei caratteri delle piante madri. Non così uniformi sono invece i fiori longipetali, dove si notano differenze da pianta a pianta, da varietà a varietà, e nei fiori della stessa pianta, per cui uno studio accurato delle singole varietà sarebbe utilissimo anche dal lato pratico, in quanto si verrebbero a spiegare le cause della alternanza di produzione e la parziale infecondità, più o meno costante, di varietà o piante.

Interessante è la presenza di fiori staminiferi, in cui manca qualsiasi traccia di pistillo, ed a cui sembra corrispondere un maggiore numero di stami, con un maggiore, per quanto appena sensibile, sviluppo delle antere. Tali fiori non hanno nella pianta una speciale disposizione, per quanto tendano a mostrarsi verso l'estremità del rametto fruttifero, trovandosi isolati od accompagnati da fiore non staminifero.

Ho notato aggruppamenti di due gemme, in cui l'una era staminifera, e l'altra completa mediostila.

Variazioni si hanno ancora nella lunghezza dello stilo, ciò che fa avvicinare ancora più il pesco longipetalo al mandorlo, per quanto nelle piante domestiche coltivate non abbia potuto riscontrare quelle caratteristiche così ben definite che si hanno nel mandorlo, e che potranno aversi più palesi in piante inselvatichite.

Le gemme aggruppate non presentano sempre gli stessi caratteri. Qualche volta una delle gemme è staminifera; od ancora una a fiore longistilo, e l'altra a fiore brevistilo.

In generale però le notate variazioni non sono molto frequenti, e la forma fiorale più comune è la mediostila, così da potersi ritenere che rappresenti quella normale.

Anche nel polline si notano differenze che vanno rilevate.

Nei fiori brevipetali non si osservano differenze sensibili nella forma e germinabilità del polline, mentre differenze come nel mandorlo si hanno nei fiori longipetali. Come nel mandorlo, il polline, a forma più elittica, in soluzione di saccarosio al 10 % in goccia pendente, si gonfia ma emette difficilmente il tubetto pollinico, ed in proporzione sempre bassissima.

Un polline prepotente sembra invece aversi nei fiori staminiferi. Questo, infatti, nelle stesse condizioni, dopo due ore inizia l'emissione del tubetto pollinico; e dopo sei, l'85 % dei granuli pollincii è germinato, con un tubo pollinico che raggiunge una lunghezza circa 10 volte il diametro del granulo pollinico. Polline di fiori della stessa pianta, ma monoclini, germina, ma più lentamente — 6 ore circa — e l'accrescimento del tubo pollinico è proporzionatamente più lento.

Dette ricerche sono state fatte sui fiori di un'unica pianta e varietà, e mi propongo di estenderle in seguito.

Riesce, così, evidente come il valore del polline, anche in fiori di una medesima pianta, non sia eguale, per quanto sembri che differenze sensibili non esistano per fiori egualmente costituiti, o posti in aggruppamenti diversi sulla medesima pianta o sul medesimo ramo.

Le ricerche sul polline devono in ogni caso essere precedute e completate da quelle sul fiore, per stabilire la relativa importanza, in ogni varietà, di ogni singola forma del fiore, e per poterne definire il valore biologico.

Interessanti ricerche sul polline — e che mi propongo di continuare — sono quelle della influenza che sulla germinabilità possono esercitare la luce diffusa, l'oscurità, o un maggiore o minore grado di intensità luminosa, in quanto si potrà forse spiegare l'influenza del fattore luce sopra una più o meno facile impollinazione e quindi allegagione, e venire così a spiegare nel processo fecondativo l'influenza delle esterne condizioni.

I tessuti dell'ovario e dello stilo sono talora glabri, talora pubescenti; e tale caratteristica deve essere propria di determinate varietà, e il tenerla presente può essere di aiuto nell'identificare le varietà stesse. A tale proposito devo notare come le mie osservazioni non sieno state fatte sopra la pesca a buccia liscia, dove la caratteristica di ovario o stilo glabro deve essere costante.

*
* *

Non mancano ancora nel pesco fiori anormali, su cui spero potere in seguito seguire l'andamento.

Nel pesco longipetalo ho trovato fiori con due ovarî distinti e separati, stilo e stimma ben conformati e di eguale lunghezza. In un fiore, tre ovarî nelle identiche condizioni, ma due laterali a stilo lungo e uno mediano a stilo breve.

Una anomalia più comune è quella di due stili che sembrano nascere da un unico ovario, mentre nascono da due ovarî più o meno congiunti tra loro, che dànno poi luogo a frutti gemelli, come gli ovarî, da cui hanno avuto origine, più o meno saldati tra loro. Una tale anomalia è abbastanza comune anche nel Pesco brevipetalo.

Fra i numerosissimi fiori osservati, uno solo ho trovato con l'aborto del pistillo.

Da tali cenni sommarî e preventivi, parmi risalti evidente l'importanza della premessa: Lo studio delle varietà coltivate, tenendole, distinte secondo la conformazione del fiore, in brevipetali e longipetali, considerando a parte le forme evidentemente ibride, sia per l'interesse sistematico-botanico ed agrario, sia per quello biologico.

Mineralogia. — *Lo zolfo dell'antimonite alterata di Selva presso Casal di Pari* (Grosseto) [1]. Nota di E. Quercigh, presentata dal Socio G. Struever.

Lo studio dei cristallini di zolfo originati dall'alterazione di solfuri metallici come la galena, la blenda, l'antimonite, ecc., si è dimostrato sempre particolarmente interessante per la ricchezza di forme che essi generalmente presentano; ed anche in Italia se n'ebbero begli esempî nello zolfo prodotto dall'alterazione della stibina delle Cetine di Cotorniano (Siena), nel quale il Pelloux [2] rinvenne 18 forme, e meglio in quello trovato, accanto ad anglesite, sulla galena blendosa di Maltidano presso Buggerru dal Millosevich [3], nel quale egli rinvenne ben 27 forme, delle quali tre nuove per lo zolfo.

Perciò mi parve utile lo studio di alcuni cristalli provenienti da un'altra località italiana, la miniera di Selva, presso Casal di Pari (Grosseto), ove lo zolfo trovasi come prodotto d'alterazione dell'antimonite, ed accettai con piacere alcuni campioncini che il prof. Zambonini a tale scopo mi offerse, e dei quali mi è grato ringraziarlo di nuovo sentitamente.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di mineralogia della R. Università di Torino, diretto dal prof. Ferruccio Zambonini.

[2] A. Pelloux, *Appunti sopra alcuni minerali delle Cetine di Cotorniano presso Rosia*. Rend. Acc. Lincei X (1901), II, 12.

[3] F. Millosevich, *Zolfo ed altri minerali della miniera di Malfidano presso Buggerru*. Rend. Acc. Lincei VII (1898), II, 250.

Lo zolfo, che ricopre spesso i cristalli di antimonite alterata di Selva, o si trova nelle cavità lasciate dai diversi gruppi di cristalli, come già ebbe ad osservare il De Angelis d'Ossat [1] al quale si deve un interessante descrizione del giacimento, si presenta generalmente in nitidi cristallini di color giallo citrino, abbastanza ricchi di facce; essi talvolta raggiungono, secondo il De Angelis d'Ossat, anche i tre mm. nella massima dimensione, mentre quelli da me visti non sorpassano mm. 1.5, ma, per la bellezza delle loro facce, si prestano molto bene alle misure.

In essi mi fu possibile identificare le seguenti forme:

a {100}; *b* {010}; *c* {001}
m {110}
ω {117}; *t* {115}; *o* {114}; *s* {113}; *y* {112}; *p* {111}; *γ* {331}
β {315}; *r* {311}
q {131}; *x* {133}; *z* {135}
n {011}; *v* {013}
e {101}; *u* {103}.

A queste venti forme va aggiunta, come incertamente determinata, la *ψ* {119}, riscontrata una sola volta, ma in condizioni sfavorevoli per avere una buona misura.

I cristalli esaminati presentano talvolta un aspetto globulare, ma più di frequente sono più o meno tabulari secondo la base; alcuni si riducono a tavolette abbastanza sottili.

Nei cristallini completamente misurati, le forme suddette si riscontrano sempre, ad eccezione di *ω* e di *z* che talvolta mancano; *ψ* fu osservata con una faccettina così sottile che la determinazione non può essere sicura.

Nella zona $[001 \frown 110]$ le forme più sviluppate sono costantemente *p* {111}, *γ* {331} e *m* {110}; le altre hanno grandezza variabile. Notevole è il fatto che *t* {115} talvolta è grande quanto *p*; delle restanti forme: {100} è spesso abbastanza grande; {010} è ora molto sviluppata, ora, invece, piccolissima; {101} si presenta frequentemente grande; {103} è, al contrario, sempre pochissimo estesa; {011} è sempre piccolina, e {013} lo è ancora maggiormente. Costantemente con faccie grandicelle si presenta {311}; molto subordinata è invece {315}; caratteristico è il grande sviluppo che in tutti i cristalli ha {131}, mentre le altre forme della zona $[001 \frown 131]$ sono, in generale, piccole.

Questi cristalli di zolfo di Selva sono quasi sempre conformati molto irregolarmente; in modo da avere in generale un aspetto spiccatamente asimmetrico.

[1] G. De Angelis d'Ossat, *Appunti sopra alcuni minerali di Casal di Pari*. Rend. Acc. Lincei XI (1902), I, 551.

Parecchie forme presentano in essi una parte soltanto delle loro faccie. La fig. 1 rappresenta uno di tali cristalli ridotto a modello:

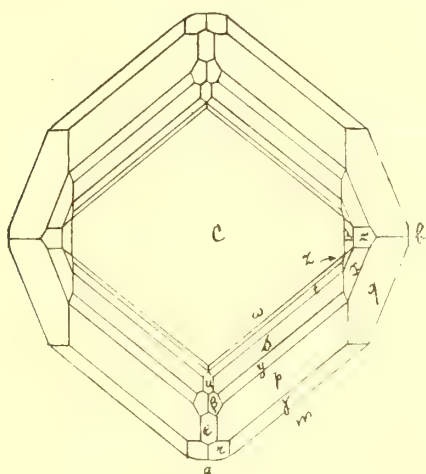



Fig. 1.

Esso presenta la combinazione delle seguenti forme: *a*, *b*, *c*, *m*, *ω*. *t*, *s*, *y*, *p*, *γ*, *β*, *r*, *q*, *x*, *z*, *n*, *v*, *e*, *u*.

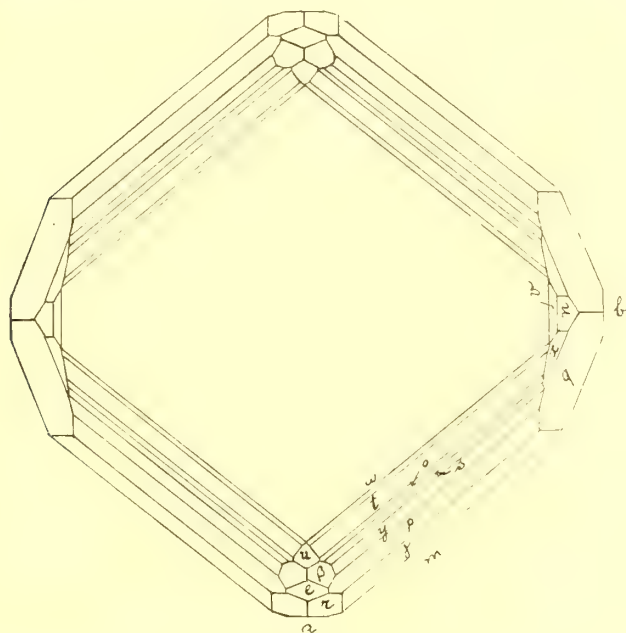



Fig. 2.

Nella fig. 2 è effigiato analogamente un cristallo di *habitus* diverso e che presenta la combinazione di tutte forme rinvenute per questa località:

Nella seguente tabella I sono raccolti gli angoli misurati, in confronto a quelli calcolati in base alle costanti di Kokscharow; l'accordo, come si vede, è assai soddisfacente.

TABELLA I.

Angoli	Numero delle misure	Limiti osservati	Medie	Valori calcolati colle cost. di Kokscharow	Differenze
(001):(119)?	1	—	20° circa	18°32′	
(001):(117)	1	—	23°20′	23 19	1′
(001):(115)	8	30°55′-31°16′	31 4	31 6 1/2	2 1/2
(001):(114)	7	36 55-37 17	37 7	37 7	5
(001):(113)	5	45 5-45 17	45 11	45 10	1
(001):(112)	8	56 21-56 32	56 25 1/2	56 27 1/2	2
(001):(111)	8	71 36-71 43	71 39 3/4	71 40	0 1/4
(001):(331)	7	83 36-83 45	83 41	83 42	1
(001):(110)	4	89 57-90 1	89 59	90 0	1
(111):(11$\bar{1}$)	3	36 40-36 42	36 41	36 40	1
(111):(331)	3	12 2-12 5	12 3	12 2	1
(001):(315)	4	55 23-55 39	55 30 1/2	55 30	0 1/2
(001):(311)	5	82 1-82 9	82 4 1/2	82 10	5 1/2
(315):(311)	1	—	26 40	26 40	0
(001):(101)	7	66 42-66 56	66 51	66 52	1
(001):(103)	2	38 7-37 49	37 58	37 58	0
(101):(10$\bar{1}$)	2	46 16-46 19	46 17 1/2	46 16	1 1/2
(001):(100)	1	—	90 0 1/2	90 0	0 1/2
(001):(131)	12	80 40-80 55	80 47 1/2	80 47 3/4	0 1/4
(131):(13$\bar{1}$)	4	18 22-18 32	18 23	18 25	2
(001):(133)	4	64 1-64 6	64 4	64 4 1/2	0 1/2
(001):(135)	2	51 2-51 4	51 3	50 59	5
(001):(011)	3	62 17-62 26	62 21	62 17	4
(001):(013)	2	32 28-32 33	32 30 1/2	32 23 1/2	7
(011):(01$\bar{1}$)	1	—	55 23 1/2	55 26	2 1/2
(011):(013)	1	—	29 53	29 53 1/2	0 1/2

Come si vede, lo zolfo che accompagna l'antimonite di Selva assomiglia molto, per la ricchezza di forme, oltre a quelli ricordati della galena di Malfidano e dell'antimonite di Cetine, ad altri cristalli provenienti pure dall'alterazione di solfuri metallici, come ad esempio a quelli che si rin-

vengono nelle cavità della galena di Bassick (Stati Uniti), nei quali il Busz ([1]) rinvenne le forme *a b c n v e u m γ δ p f y g s t ψ r q x z*.

Notevole è il fatto che lo zolfo proveniente dalla scomposizione di detti solfuri fu, in generale, poco studiato, nonostante che abbia dato alle volte buoni risultati col rinvenimento di forme nuove per la specie, come le φ {305}, λ {155}, μ {319} e la χ {122}.

Cristalli formatisi dall'antimonite alterata furono descritti — oltre che dal Pelloux, per quanto riguarda il giacimento di Cetine — dal Foullon ([2]), provenienti da Allchar presso Rozdan (Macedonia), e da Pelikan ([3]), provenienti da località non ben precisata della stessa Macedonia, ma che con tutta probabilità è la stessa dei cristalli di Foullon; poi da Eakle ([4]) per un campione del Museo di Monaco di cui non potè conoscere la provenienza; ed ultimamente da Šimek ([5]), per la località di Kostajnik in Serbia.

Non credo privo d'interesse il riportare nella seguente tabella II il riassunto delle forme trovate finore in cristalli di tale origine, allo scopo di metterne senz'altro in evidenza le analogie:

([1]) K. Busz, *Schwefel von Bassick*. Zeitschr. f. Kryst *17* (1890), 549.

([2]) Foullon, Verh. geol. Reichsanst *40* (1890), 318; *42* (1892), 175: in C Hintze, *Handbuch d. Mineralchemie* I (1898), 85.

([3]) Pelikan, *Schwefel von Allchar in Macedonien*. Tschermak Mitt. *N F* XII (1891), 344.

([4]) A. S. Eakle, *Sekundäre Mineralbildungen auf Antimonit*. Zeitschr. f. Krist. *24* (1895), 586.

([5]) A. Šimek, *Ueber den Schwefel von Kostajnik in Serbien*. Rozpravy böm. Akad. Prag (1908), Ref. Zeitschr. f. Kryst. *50* (1912) 639.

TABELLA II.

Forme dello zolfo proveniente da antimonite alterata.

SERBIA	MACEDONIA		?	ITALIA	
KOSTAJNIK (Šimek)	ALLCHAR (Foullon)	ALLCHAR ? (Pelikan)	(Eakle)	CETINE (Pelloux)	SELVA (Quercigh)
a {100}	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*
b {010}	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*
c {001}	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
m {110}	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*
n {011}	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*
v {013}	*v*	*v*	*v*	*v*	*v*
e {101}	*e*	*e*	*e*	*e*	*e*
u {103}	*u*	*u*	*u*	*u*	*u*
ψ {119}	*ψ*	*ψ*	—	*ψ*	*ψ* ?
ω {117}	—	*ω*	—	—	*ω*
τ {116}	—	—	—	—	—
t {115}	*t*	*t*	*t*	*t*	*t*
o {114}	—	—	*o*	*o*	*o*
s {113}	*s*	*s*	*s*	*s*	*s*
y {112}	*y*	*y*	*y*	*y*	*y*
p {111}	*p*	*p*	*p*	*p*	*p*
f {335}	—	—	—	—	—
δ {221}	—	*δ*	—	—	—
γ {331}	*γ*	*γ*	*γ*	*γ*	*γ*
ε {551}	—	—	—	—	—
r {321}	—	*r*	—	—	*r*
α {313}	—	*α*	—	—	—
β {315}	—	—	—	—	*β*
q {131}	*q*	*q*	*q*	*q*	*q*
x {133}	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*
z {135}	*z*	*z*	*z*	*z*	*z*
χ {122}	—	*χ*	—	—	—
TOTALE . . . 27	17	22	16	18	21

Noterò che tali cristalli sono in generale piccoli (1-3 mm.); hanno *habitus* molto vario, presentandosi essi, talvolta anche nel medesimo giacimento, con aspetto globulare o cilindrico in alcuni individui, bisfenoidico, piramidale oppure tabulare in altri; per conseguenza varia in essi, entro certi

limiti, l'enstensione relativa delle diverse forme, che sono però sempre numerose in ogni cristallo.

In quanto allo sviluppo delle varie forme, va notato che in generale predomina, come in quelli di Selva, la zona delle bipiramidi $\{h\,h\,l\}$, tra le quali $p\,\{111\}$ possiede la maggiore estensione; seguono poi $s\,\{113\}$ e $\gamma\,\{331\}$. Pure in generale, abbastanza estesa è $q\,\{131\}$, che compare in tutti i giacimenti insieme con $x\,\{133\}$ e $z\,\{135\}$ le quali sono in generale più piccole, tranne che a Kostajnik, ove Šimek riscontrò un discreto equilibrio fra queste tre forme.

Si riscontrò costantemente la presenza dei tre pinacoidi a, b, c; fra i prismi $\{h\,k\,o\}$ compare sempre soltanto $m\,\{110\}$.

Come forme rare per lo zolfo proveniente dall'alterazione dell'antimonite si possono considerare le $\tau\,\{116\}$ ed $\varepsilon\,\{551\}$, rinvenute solo nei cristalli di Kostajnik, che sono i più ricchi di facce.

Rara invece per lo zolfo, in generale, è la $\chi\,\{122\}$, trovata per la prima volta da Pelikan nei cristalli della Macedonia e confermata in seguito da Šimek su quelli di Kostajnik.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà il triste annuncio della morte del Corrispondente prof. Adolfo Venturi, mancato ai vivi il 28 dicembre 1914; apparteneva il defunto all'Accademia per la *Meccanica*, sino dal 13 luglio 1902.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario Millosevich presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle del Socio Taramelli; dei Corrispondenti Di Stefano, Pascal e Silvestri; del Socio straniero Goebel, e dei signori De Angelis d'Ossat e Villani.

Il Corrisp. Reina fa omaggio, a nome della Società italiana pel progresso delle scienze, del primo fascicolo del *Bollettino* del Comitato glaciologico italiano, che si pubblica sotto gli auspicî della Società predetta e del Club alpino italiano; e dà notizia degli scopi che il Comitato si propone, e dei lavori che nel fascicolo testè apparso sono contenuti.

Il Presidente Blaserna presenta l'*Annuario* accademico pel 1915.

CONCORSI A PREMI

Il Segretario MILLOSEVICH comunica il seguente:

Elenco dei concorrenti al premio Reale per l'*Astronomia.*
(Scadenza 31 dicembre 1914. — Premio L. 10.000).

1. ARMELLINI LUIGI « Le Comete-Larva » (st.). — 2. PORCARI GABRIELE « Genesi, natura, previsione e cronologia dei terremoti ecc. » (ms.). 3. VIARO BORTOLO « Posizioni medie per il 1900.0 di 1645 stelle ecc. » (st.).

Lo stesso SEGRETARIO annuncia che al premio *Carpi* scaduto col 31 dicembre 1914, si è presentato il dottor:

ZAPPA GIOVANNI « Studio di un nuovo metodo per la determinazione della latitudine » (ms.).

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL' ACCADEMIA

presentate nella seduta del 3 gennaio 1915.

Bottino-Barzizza G. — Sui limiti nord e sud di una eclisse di sole. (Estr. dai « Rendic. del R. Istituto lombardo di scienze e lettere ». vol. XLVII). Pavia, 1914. 8°.

De Angelis d'Ossat G. — Applicazioni della geologia XIII-XVIII. (Estr. dalla « Rivista di ingegneria sanitaria », vol. X). Torino, 1914. 4°.

Ivaldi G. — Le leggi della natura. Parte I-VIII. Sampierdarena, 1914. 8°.

Lebon E. — Théorie des nombres. Sur une nouvelle table de diviseurs des nombres. (Extr. d. « Comptes rendus de l'Acad. des sciences »; t. 159). Paris, 1914. 8°.

Longo B. — Delectus sporarum-seminum-fructuum anno MCMXIV collectorum quae Hortus botanicus senensis pro mutua commutatione offert. Semy, 1914, 8°.

Longo B. — Note di morfologia floreale (tav. VI). (Estr. dagli « Annali di botanica», vol. XIII). Roma, 1914. 8°.

Longo B. — Variazione di gemma in una Quercia (tav. V). (Estr. dagli « Annali di botanica», vol. XIII). Roma, 1914. 8°.

Pascal E. — Determinanti a scala. (Estr. dal « Rendic. della R. Accad. delle scienze fis. e mat. di Napoli », vol. XX). Napoli, 1914. 8°.

Pascal N. — Su di una classe di determinanti. (Estr. dal « Rendic. della R. Accad. delle scienze fis. e mat. di Napoli », vol. XX). Napoli, 1914. 8°.

Silvestri F. — Viaggio in Eritrea per cercare parassiti della mosca delle olive. (Estr. dal « Bollettino del laboratorio di Zoologia gener. e agraria di Portici », vol. IX). Portici, 1914, 8°.

Spegazzini C. — Primo contributo alla conoscenza delle Laboulbeniali italiane. (Estr. dal « Redia », vol. X). Firenze, 1914, 8°.

Sterilizzazione (la) con l'Ozono delle acque del R. Arsenale militare marittimo di Spezia (Ministero della Marina). Roma, 1914. 8°

Taramelli T. — Appunti per la storia geologica del Lago di Varese. (Estr. dai « Rendic. del R. Istituto lomb. di scienze e lett. », vol. XLVII). Pavia, 1914. 8°.

Villani N. — L'equazione di Fermat $X^n + Y^n = Z^n$ con dimostrazione generale. Lanciano, 1914, 8°.

RENDICONTI — Gennaio 1915.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 gennaio 1915.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Segue in terza pagina.

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 30 gennaio 1915.* **N. 2.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 gennaio 1915.

Volume XXIV°. — Fascicolo 2°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 gennaio 1915.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — *Eclisse totale di sole, del 21 agosto 1914.* Relazione preliminare del Socio A. Riccò, per la missione italiana in Crimea.

Di grande importanza per gli studii solari era certamente l'eclisse totale di sole del 1914; e gli osservatorii e gli astronomi delle varie nazioni si erano preparati da lunga pezza all'osservazione del fenomeno. Infatti, al Congresso tenutosi a Bonn nel luglio-agosto 1913 dalla *International Union for solar Research*, erano state annunziate circa venti missioni per lo studio dell'eclisse, che si presentava in condizione favorevole per la stagione e facilmente accessibile, specialmente agli europei; poichè la zona percorsa dall'ombra della luna andava dall'estrema America settentrionale, attraversava l'Atlantico, la penisola Scandinava, la Russia da Riga a Teodosia (Crimea), il mar Nero, l'Asia minore, e andava a finire nell'India inglese: la zona dell'ombra, ossia della totalità, era larga circa 180 km. Si aveva dunque in Europa un esteso e comodo spazio per l'osservazione.

L'interesse per lo studio di quest'eclisse era aumentato dal fatto che, in Europa, più non si avrà alcun eclisse totale di sole sino al 1927, ed anche allora sarà visibile soltanto nella parte più settentrionale dell'Europa, ove il clima è poco favorevole; nel 1919 ve ne sarà uno visibile nell'Africa occidentale e nell'America meridionale. Soltanto nel 1961 vi sarà un eclisse totale, visibile in Italia.

Ma l'eclisse totale del 1914 aveva una durata breve, al massimo di 2^m 14^s tra Vilna e Minsk. Per la maggiore probabilità di buon tempo era indicata Teodosia, dove la media dell'annuvolamento in agosto è solamente del 24 %; perciò, quantunque ivi la durata fosse soltanto di 2^m 8^s, pure quivi era la maggiore affluenza degli astronomi. Infatti vi erano due missioni francesi, una inglese, una argentina, quattro russe, una spagnuola ed una italiana.

Missione italiana. — La nostra missione scelse dunque come stazione Teodosia, per la detta probabilità di bel tempo, ed anche perchè essendovi linee di navigazione italiane che vanno dall'Italia ad Odessa, il viaggio poteva farsi per mare dall'Italia a Teodosia, con un solo trasbordo ad Odessa, dalla nave italiana ad una russa: il che era molto importante, non solo dal punto di vista dell'economia, ma ancora dell'integrità dei numerosi, importanti e delicati strumenti che si intendeva di trasportare.

La detta spedizione italiana — che il Ministero della istruzione pubblica, accogliendo benevolmente la proposta dello scrivente, validamente appoggiata dal sen. prof. V. Volterra e dal prof. E. Millosevich, direttore dell'Osservatorio al Collegio Romano, inviava per l'eclisse — originariamente era formata da Riccò, e dal signor Luigi Taffara (già assistente all'Osservatorio di Catania, attualmente incaricato all'Osservatorio al Collegio Romano e compilatore all'Ufficio centrale di meteorologia e geodinamica) come assistente fotografo. Poi ad essa si associò il prof. L. Palazzo, direttore del R. Ufficio centrale di meteorologia e geodinamica, il quale, dovendo recarsi a Pietrogrado circa all'epoca dell'eclisse, per la riunione dell'*Associazione internazionale sismologica*, come delegato dell'Italia, aveva opportunamente pensato di approfittare del viaggio in Russia per farvi anche osservazioni e studii circa l'influenza dell'eclisse sui fenomeni meteorici e magnetici della terra, come aveva fatto nel 1905 a Tripoli. Inoltre il prof. G. Mengarini (che aveva già osservato l'eclisse del 1905 in Spagna), pure desiderò di fare parte della missione, a sue spese, assieme alla figlia, signorina Fausta, come assistente, ed alla signorina C. Modigliani, pittrice; col proposito di studiare direttamente, e colla fotografia autocromica, le interessanti colorazioni dell'eclisse. S. E. il contrammiraglio E. Millo, allora Ministro della marina, accogliendo con illuminata benevolenza la domanda di Riccò, aveva concesso che la regia nave « Archimede », stazionaria a Costantinopoli, si recasse a Teodosia per partecipare, col personale di bordo, ai lavori della missione italiana.

Programma. — Così, senza aumento di spesa per lo Stato, la missione italiana era accresciuta, ed il suo programma veniva allargato, comprendendo osservazioni visuali dirette e spettroscopiche della cromosfera e delle protuberanze (Riccò); fotografie spettrali della cromosfera, delle protuberanze, dello strato invertente (Taffara); disegni e fotografie monocromatiche ed a luce completa, della corona (F. Mengarini); fotografie autocromiche del-

l'eclisse totale (G. Mengarini); quadro dell'eclisse a colori (C. Modigliani); osservazioni meteorologiche e magnetiche complete, dirette, e registrate prima, durante e dopo l'eclisse (L. Palazzo).

Strumenti. — Gli strumenti che la missione portava con sè, erano:

un equatoriale *Cooke* di 223 cm. lunghezza focale e 15 cm apertura, munito di spettroscopio *Zeiss*;

un equatoriale Frannhofer di 300 cm. lunghezza focale e 18 cm. apertura (gentilmente prestato dal prof. A. Bemporad, direttore del R. Osservatorio di Capodimonte), cui si era applicata alla estremità oculare una camera *Reflex Mentor*;

una *quadruplice camera*, o *coronagrafo*, con quattro obbiettivi di 200 cm. lunghezza focale e 8 cm. apertura (cortesemente prestata dal professor Mengarini), munita davanti allo *châssis*, per un compartimento, di un filtro di luce rossa presso la riga C, e di un filtro di luce verde presso la riga coronale per un altro compartimento; al terzo compartimento si applicava una lastra sensibile ai raggi più rifrangibili; al quarto una lastra pancromatica. Questo coronagrafo era pure montato parallatticamente, e fornito di motore e regolatore gentilmente prestati dal prof. Millosevich;

una *camera prismatica* di 126 cm. lunghezza focale e 10 $^1/_2$ cm. apertura, con prisma di *flint* pesante, coll'angolo rifrangente di 20°. Questa camera era montata (come per l'eclisse del 1905) sul manicotto dell'asse di declinazione del *Cooke*, mediante apposita sella con cui la camera si poteva dirigere e fissare a declinazioni varie;

un *equatoriale Steinheil* portatile, con lunghezza focale 124 cm., apertura 8 cm., coll'oculare d'ingrandimento 40, cui era stato applicato un congegno col quale si poteva portare davanti all'oculare sia un oscuratore graduato, sia uno spettroscopio oculare *Abbe*, mentre una fessura andava a collocarsi nel fuoco anteriore dell'oculare;

un *cannocchiale terrestre Watson*, di 120 cm. di lunghezza focale, e 8 cm. di apertura, fornito dal prof. Mengarini;

un *cronografo fotografico* costruito dal prof. Mengarini, composto di un apparecchio atto ad impressionare « films » cinematografiche, innanzi al cui obbiettivo erano disposti un cronometro a secondi e due lampadine elettriche. Chiudendo un contatto elettrico, le lampadine davano un lampo brevissimo, la pellicola fotografava la posizione degli indici del cronometro e, cessato il lampo, si spostava, pronta per una nuova impressione. In questo modo, chiudendo un contatto elettrico, ciò che avveniva automaticamente mediante lo scatto dell'otturatore fotografico, si poteva ottenere la esatta riproduzione dei tempi. Disgraziatamente, dopo la prima registrazione, l'orologio che spostava la pellicola si incantò e fu dovuto rimettere in moto bruscamente, sicchè le successive registrazioni non riuscirono sicure.

una serie completa di *strumenti meteorologici* per le osservazioni e le registrazioni della pressione, della temperatura dell'aria e del suolo, e dell'umidità; il pireliometro di Angström per la radiazione solare; l'elettrometro di Wulf per lo studio della radiazione penetrante; i variometri con l'apparecchio a registrazione fotografica per la declinazione, la forza verticale e la forza orizzontale magnetica; il magnetometro e l'inclinometro per l'osservazione diretta degli elementi magnetici.

Inoltre, parecchie camere fotografiche e strumenti accessorii.

Viaggio. — Questi strumenti in 26 casse, del peso complessivo di circa tre tonnellate, furono riuniti tutti in Catania, donde con esse partirono, il 28 luglio, Riccò, Palazzo e Taffara sul piroscafo *Porto di Smirne* della Società marittima italiana; il quale, toccando Siracusa, la Canea, il Pireo, Chio, Smirne, Costantinopoli, li portava ad Odessa, ove giungeva il 7 agosto; e là, il giorno 8 si imbarcavano sul piroscafo russo *Lazarew*, col quale arrivavano il giorno 10 a Teodosia.

Il prof. Mengarini con le sue compagne si era imbarcato a Brindisi, ed aveva raggiunto la missione a Costantinopoli, viaggiando con la linea diretta.

Stazione a Teodosia. — Per il cortese interessamento del viceconsole d'Italia in Teodosia, signor F. Durante, e del signor T. Rinesi, addetto al Consolato medesimo, la missione ebbe presso Teodosia, circa a due km. ad ovest della città, una villetta per alloggiare, l'attiguo giardino per impiantarvi gli strumenti astronomici e meteorologici, una stanza per la fotografia, una stanza per gli strumenti magnetici registratori.

Preparativi. — Veramente, negli undici giorni che precedettero l'eclisse la stagione non si mostrò propizia: all'arrivo vi fu una pioggia torrenziale, ed un'altra al giorno 17 agosto, e frequentemente si ebbero nubi e venti forti; ma si ebbero anche frequenti periodi di cielo purissimo e di straordinaria trasparenza, cosicchè si potè presto costruire una grande baracca in legno e tela, ed i pilastri in muratura per gli strumenti principali e montare questi; ed il 13 Riccò potè cominciare con l'equatoriale *Cooke* le osservazioni spettroscopiche quotidiane delle protuberanze solari, mentre si continuava la collocazione e la rettifica degli altri apparati, con osservazioni astronomiche e fotografiche.

Col 16 agosto il prof. Palazzo aveva terminato di mettere in ordine il magnetografo, il quale cominciò a registrare regolarmente dal giorno suddetto, sino a tutto il 28 agosto.

Alla vigilia dell'eclisse, tutti gli strumenti erano pronti e si potè fare la prova generale *in bianco* di tutte le operazioni da eseguire per l'eclisse. Il sig. T. Rinesi assunse di contare i secondi a voce alta, seguendo le battute di un metronomo.

Al mattino del 21 il cielo era sereno: Riccò osservò le protuberanze, che erano bellissime, ma poche.

Si fecero gli ultimi preparativi con grandi speranze. Però verso mezzodì cominciarono a comparire nubi che si fecero sempre più dense ed oscure. La missione era pronta, ma in grande angoscia. Si decise di svolgere egualmente il nostro programma, anche malgrado le nubi. Fortunatamente, pochi minuti prima della totalità, cioè a circa 3^h 19^m di tempo locale, 0^h 58^m di tempo medio di Greenwich, nelle nubi oscure si formò uno squarcio di cielo puro, e le osservazioni poterono compiersi secondo il programma; pochi secondi dopo la fine della totalità tornarono le nubi.

Dopo l'eclisse. — Nei giorni seguenti, aspettando il piroscafo italiano che da Odessa avrebbe ricondotto in Italia la missione, il signor Taffara sviluppò accuratamente le fotografie, si smontarono e si imballarono gli strumenti che più non servivano, e si continuarono ancora per alcuni giorni le osservazioni spettroscopiche delle protuberanze e le osservazioni meteorologiche, attinometriche e magnetiche; si visitò la città, i suoi istituti e monumenti, di cui parecchi della dominazione genovese. Verso la mezzanotte del 30 la missione s'imbarcò sul piroscafo russo « principessa Eugenia Oldemburg », che il primo settembre al mattino arrivò ad Odessa; ed alla sera la missione ripartì col piroscafo « Favignana » della marittima italiana che con lo stesso itinerario, come per l'andata, ma con alcune peripezie, la riportò in Italia.

Il còmpito della missione è stato facilitato e reso gradevole dai molti aiuti, informazioni, cortesie, che ha ricevute: dal R. Console generale d'Italia ad Odessa cav. uff. G. Rosset e dal viceconsole cav. S. G. Cozzio, dal Console di Teodosia sig. F. Durante e dall'addetto al consolato sig. T. Rinesi, dal Direttore dell'Osservatorio meteorologico centrale per la Crimea prof. Sarandinaki, dal principe Léon Galitzine, dalla « Compagnie de navigation à vapeur et de commerce » di Odessa, dalla Società marittima italiana, dalla Società di servizii marittimi. A tutti la missione professa viva riconoscenza.

Le condizioni politiche non hanno permesso alla regia nave « Archimede » di recarsi a Teodosia, ed al personale di bordo di prendere parte ai lavori della missione: ma questa è pur sempre grata a S. E. Millo della buona intenzione di aiutarla.

Risultati. — Le osservazioni spettroscopiche fatte a Teodosia da Riccò dal 13 al 23 agosto (eccettuato il 17, per cattivo tempo) dimostrarono che il fenomeno delle protuberanze solari era in decrescimento di numero e di grandezza, talchè al 23 non ve n'era più che una piccolissima; al mattine dell'eclisse, cioè del 21, ve ne erano soltanto tre, di cui una alta 69″, cioè $^7/_{100}$ del raggio solare, ma assai debole, una mediocre ed un'altra piccolissima.

Nell'osservazione diretta delle protuberanze con lo Steinheil durante la totalità, cioè nel pomeriggio, Riccò ha osservato una protuberanza rosea traente un poco al violetto, complessa, grande, delicata, corrispondente per posizione alla maggiore osservata prima con lo spettroscopio; ma la protu-

beranza durante la totalità, quantunque ancora debole, fu stimata alta quasi tre volte di quanto si era vista con lo spettroscopio.

Anche la protuberanza mediocre nella osservazione spettroscopica, era più grande nella diretta, circa nella stessa proporzione, ed era di color roseo e di forma molto diversa; inoltre Riccò ha osservato direttamente un'altra protuberanza, o meglio un gruppo di fiamme diritte, lucidissime, di color roseo chiaro, le quali non avevano corrispondenza nell'osservazione spettroscopica del mattino. Certamente queste fiamme si sono formate dopo l'osservazione spettroscopica; e così pure le differenze di forma nelle protuberanze delle due sorta d'osservazioni, certamente dipendono da variazioni intervenute nel tempo scorso fra esse osservazioni. Anche nelle fotografie della *prismatic camera*, prese dal sig. Taffara, ed in quella della quadruplice camera, prese dalla signorina Mengarini, le protuberanze sono più grandi e più numerose che nella osservazione spettroscopica. Anche il prof. Mengarini colla visione a mezzo del cercatore del Fraunhofer le ha segnate in uno schizzo, fissato subito dopo l'eclisse, di dimensioni assai maggiori rispetto al raggio solare.

In una delle dette fotografie, fatte colla camera prismatica prima della totalità, quando la fotosfera visibile era ridotta ad un sottilissimo filetto, si vedono righe nere di Fraunhofer, di cui poche si prolungano appena fuori dei lembi dello spettro continuo con cuspidi finissime, lucide; nella fotografia seguente, fatta quando il filetto fotosferico cominciava ad interrompersi, un maggior numero di righe fraunhoferiane si vedono invertite oltre gli orli dello spettro continuo, in forma di filetti acuti, lucidi e più numerosi: sono le principali righe lucide della cromosfera. La fotografia successiva dà lo spettro del *flash*, ossia dello strato invertente al principio della totalità; le altre fotografie dànno quello della cromosfera e della corona; la penultima dà il secondo *flash* alla fine della totalità: l'ultima fotografia, dopo la totalità, non è utilizzabile.

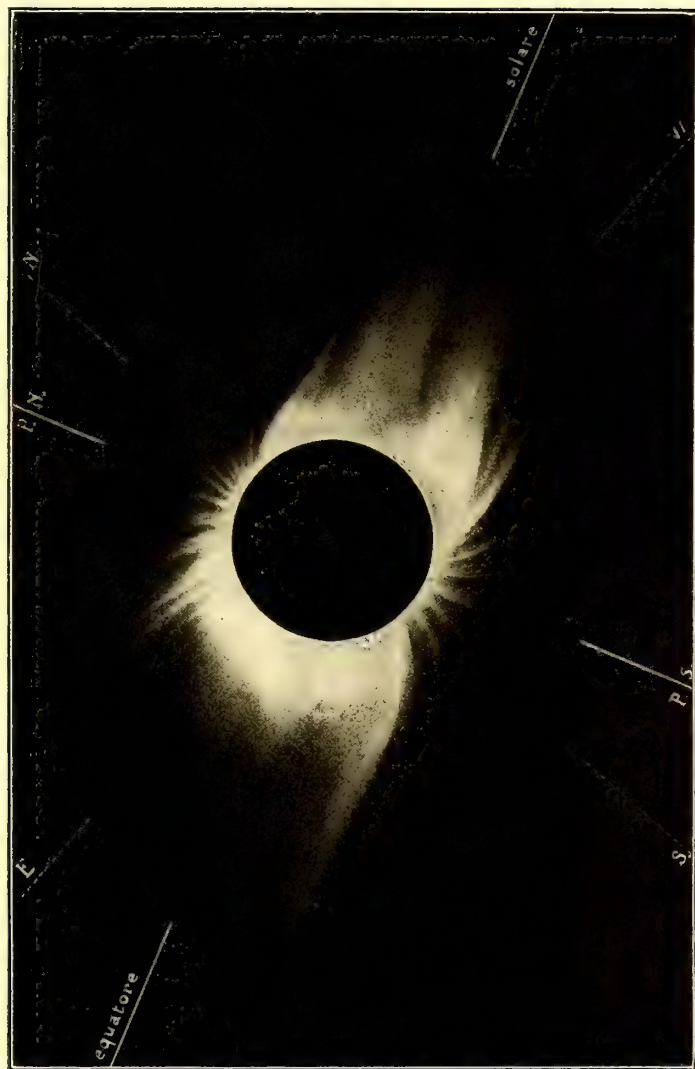
In nessuna di queste fotografie si vede traccia della riga verde coronale, $\lambda = 5310$, mentre essa si ottenne nell'eclisse del 1905; invece vi si osserva una riga rossa, coronale, $\lambda = 6374$, che non si ebbe nel 1905.

Queste fotografie spettrali, quando saranno misurate e studiate completamente, daranno altri risultati interessanti.

Gli abbozzi della corona fatti dal prof. Palazzo, dal prof. Mengarini, dal sig. Taffara, dalla signorina Mengarini e dalla signorina Modigliani, dànno con sufficiente accordo la posizione e la forma della corona solare, cioè brevi raggi divergenti dai poli del sole e due ali che si staccano dalle regioni equatoriali: a ponente una semplice, limitata da due pennacchi; a levante un'altra più larga, costituita da tre pennacchi principali, estesa sino alla distanza di poco più di due diametri solari.

Questa forma è presso a poco quella tipica del minimo dell'attività solare, in cui la corona ha due ali equatoriali semplici, come fu nell'eclisse

del 1900; ma questa del 1914 è stata alquanto più complicata. Effettivamente il minimo dell'attività solare era passato da un anno.

Delle otto fotografie prese con la quadruplice camera dalla signorina engarini con l'aiuto della signorina Larissa Viaceslavona Norisina, sono

Corona e Protuberanze solari.

Disegno del sig. L. Taffara, ottenuto geometricamente da fotografie e secondo le osservazioni della missione italiana per l'eclisse totale di sole del 21 agosto 1914, osservato in Teodosia (Crimea).

riuscite più complete quelle fatte con lastre sensibili al verde e con filtro di luce verde: vi si osservano le particolarità della corona vista ad occhio nudo, ed anche le protuberanze principali.

Le quattro fotografie, fatte durante la totalità dal prof. Mengarini su lastre autocromiche, e ben riuscite, dànno in modo notevole l'impressione

dell'eclisse visto ad occhio nudo, con le belle sue colorazioni, concordanti con la pittura che ne ha fatto la signorina Modigliani.

Il dott. K. Truschkovsky, che gentilmente ha aiutato la missione in tutti i suoi preparativi, si è incaricato della osservazione e del disegno delle cosiddette *ombre volanti*, che egli ha ben osservato prima del principio della totalità e dopo la fine, col solito aspetto di striscie ondeggianti, parallele, ed alternate, oscure e chiare; ed ha notato in esse pure la colorazione spettrale, che pochi osservatori hanno rilevata.

L'oscurità durante la totalità è stata notevole, assai maggiore che nel 1905, circa come a 40 minuti dopo il tramonto: il prof. Palazzo ha visto la stella *Regolo* nella costellazione del *Leone*.

Dalle osservazioni meteorologiche e magnetiche, quantunque disturbate dal tempo cattivo, il prof. Palazzo ha potuto rilevare che durante l'eclisse vi fu un forte abbassamento di temperatura dello strato superficiale del suolo, e che non vi è stata alcuna sensibile variazione speciale del magnetismo terrestre.

Il prof. Palazzo ha pure determinato gli elementi del magnetismo terrestre in Teodosia: è da notare che la declinazione è risultata orientale di circa un grado.

Chimica. — *Azioni chimiche della luce.* Nota XXXI del Socio C. Ciamician e di P. Silber.

Autossidazioni VIII.

Ci sembrò interessante di conoscere il contegno di alcuni alcaloidi, ed abbiamo iniziato lo studio con la nicotina e la piperidina.

Nicotina. Vennero esposti alla luce 3 matracci da 5 litri, pieni di ossigeno, contenenti ciascuno 12 gr. di nicotina e 100 d'acqua, dal maggio al novembre. Alla fine dell'insolazione il liquido, che s'era fatto leggermente giallastro, aveva lieve reazione acida; nei palloni l'ossigeno era quasi scomparso. Dopo parecchi tentativi preliminari, abbiamo adottato per la elaborazione il seguente processo:

Il prodotto, diluito con acqua, venne trattato con 20 gr. di carbonato baritico e distillato in corrente di vapore acqueo; il distillato alcalino venne saturato con acido cloridrico e portato a secco nel vuoto. Si ebbero, così, 5,3 gr. di cloridrati.

Per accertare la natura delle basi presenti in questa parte del prodotto, i suddetti cloridrati furono trasformati in cloroaurati separando in questo modo la nicotina rimasta inalterata: Il precipitato ottenuto col cloruro d'oro,

purificato dall'acqua, fondeva a 194° ed aveva la composizione del cloroaurato di nicotina.

Analisi:

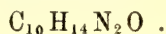
	Trovato		Calcolato per $C_{10}H_{14}N_2 . 2HAuCl_4$
Au	47,15		46,79

Dalle acque madri non si potè avere un prodotto unico; vennero perciò liberate dall'oro, ed i cloridrati ottenuti vennero trasformati in cloroplatinati: così si tolsero piccole quantità di ammoniaca allo stato di cloroplatinato ammonico. Convenne ritornare ai cloroaurati: e però il liquido, liberato dal platino, venne trattato nuovamente col cloruro d'oro. Si ebbero dei cristalli gialli, aghiformi, che furono riconosciuti per il cloroaurato di *metilammina*.

Analisi:

	Trovato		Calcolato per $CH_3NH_2 . HAuCl_4 + H_2O$
H_2O	4,46		4,63
			Calcolato per $CH_3NH_2 . HAuCl_4$
C	3,33		2,92
H	1,89		1,46
Au	53,04	53,07	53,15

La parte del prodotto primitivo, che rimane indietro nella distillazione con carbonato baritico, fu liberata a caldo dall'eccesso di quest'ultimo portata a secco per distillazione nel vuoto. Il residuo aveva l'aspetto di una massa bruna e resinosa. Essa venne ripresa con alcool assoluto; e per questo trattamento rimase indietro una polvere giallastra, costituita da sali baritici, i quali si poterono separare, inoltre, aggiungendo molto etere alla soluzione alcoolica concentrata. Liberata così dai sali barici per ripetuti trattamenti con etere, la soluzione alcoolico-eterea lasciò per svaporamento uno sciroppo bruno, che costituiva la maggiore parte del prodotto, circa 30 gr. La sua purificazione presentava peraltro le maggiori difficoltà; dopo varî tentativi, ci risolvemmo di separare allo stato di picrato la base in esso contenuta. Lo sciroppo, in proporzioni di 10 gr. per volta, sciolto in acqua (1 $^1/_2$ litro), venne trattato con una soluzione satura acquosa d'acido picrico (1 $^1/_2$ litro). Si forma un precipitato resinoso, brunastro, che resta aderente alle pareti del vaso, mentre dal liquido, di apparenza lattiginosa, si può far separare, sbattendolo in un agitatore meccanico, un secondo precipitato giallo, di aspetto assai migliore. Quest'ultimo, purificato ripetutamente dall'alcool, si presentò in prismetti o in mammelloni, che fondevano a 168°. La sua composizione corrisponderebbe al picrato d'una base dalla formola

$$C_{10}H_{14}N_2O \; .$$

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_{22}H_{20}O_{15}N_8$
C	41,45	41,51
H	3,31	3,14

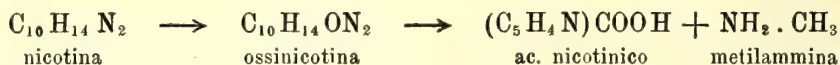
Questo prodotto ha la composizione della *ossinicotina* ottenuta da Pinner e Wolffenstein [1] per ossidazione della nicotina con acqua ossigenata. Il punto di fusione del picrato, che questi autori indicano a 154-158°, è, per altro, alquanto inferiore a quello da noi trovato. Volendo accertare la natura del composto da noi avuto, bisognerebbe riprenderne lo studio.

Il sale baritico, insolubile nell'alcool e nell'etere, sopra menzionato, venne anzitutto purificato in soluzione acquosa con nero animale ed indi trattato con la quantità voluta di acido solforico. Svaporando il liquido, separato dal solfato baritico, si ebbe uno sciroppo brunastro da cui si depositarono dei cristalli che furono purificati dall'acqua. La sostanza così ottenuta si presentava in aghetti raggruppati, fusibili a 234°; e fu riconosciuta per l'*acido nicotinico*. La sua quantità era, peraltro, assai esigua (1 gr. da 36 di nicotina); ad essa corrisponde la piccola quantità di metilammina summenzionata.

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_6H_5O_2N$
C	58,72	58,53
H	4,06	4,06

L'autossidazione della nicotina alla luce dà, assieme con molta resina, come prodotto principale la suddetta ossinicotina; e, per ulteriore autossidazione di questa, l'acido nicotinico e la metilammina. Il processo si potrebbe rappresentare con il seguente schema, che per altro è incerto in quanto riguarda la costituzione dell'ossinicotina. I prodotti di ossidazione dell'acido pirrolidinico della nicotina potrebbero essere stati anidride carbonica ed acido formico.

$$\underset{\text{nicotina}}{C_{10}H_{14}N_2} \longrightarrow \underset{\text{ossinicotina}}{C_{10}H_{14}ON_2} \longrightarrow \underset{\text{ac. nicotinico}}{(C_5H_4N)COOH} + \underset{\text{metilammina}}{NH_2 . CH_3}$$

Come si vede, la nicotina viene ossidata alla luce, in parte, assai profondamente.

Piperidina. Vennero esposti alla luce, dal maggio al novembre, complessivamente 40 gr. di questa base sciolti in 400 cc. d'acqua. Risultò un liquido ancora alcalino, giallo-brunastro; l'ossigeno nei matracci era quasi scomparso.

L'elaborazione venne fatta in modo analogo alla precedente esperienza. Il prodotto venne anzi tutto distillato in corrente di vapore per eliminare la base libera. Si ebbero 24 gr. di cloridrati, che furono cristallizzati dall'alcool. Il punto di fusione 240° (Ladenburg trovò 237°) trovato, è quello del cloridrato di piperidina. Con la parte rimasta disciolta si preparò il cloroaurato, ma anche questo dimostrò trattarsi della stessa base; fondeva a 216°.

[1] Berichte, vol. 24, pag. 64; ibid., vol. 25, pag. 1428; ibid., vol. 28, pag. 460; ibid., vol. 34, pag. 2412; Beilstein, vol. IV, pag. 858.

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_5H_{11}N.HAuCl_4$
Au	46,86	46,40

Il liquido rimasto indietro nella precedente distillazione, venne trattato con carbonato baritico, e nuovamente distillato. La base raccolta dette 8,2 gr. di cloridrato di piperidina. Dei 40 gr. della piperidina impiegata, si riebbero dunque 32 gr. di cloridrato.

La soluzione rimasta indietro, venne liberata a caldo dall'eccesso di carbonato baritico, portata a secco nel vuoto; ed il residuo, colorato in bruno e di aspetto resinoso, venne trattato. come nella precedente esperienza con alcool ed etere. I sali baritici insolubili furono così separati: dal liquido alcoolico etereo si ebbe una materia sciropposa (15,9 gr.), che alla ulteriore ricerca presentò non lievi difficoltà. Una parte di essa venne salificata con acido cloridrico e trasformata successivamente in cloroaurato ed in cloroplatinato. Il primo si dimostrò nuovamente per quello di piperidina dal punto di fusione 219°.

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_5H_{11}N.HAuCl_3$
C	14,30	14,11
H	3,08	2,82
Au	45,98	46,40

Il secondo, preparato dalle acque madri del primo e separato dal cloroplatinato ammonico pure presente, fondeva a 200° e dette all'analisi numeri che farebbero supporre la presenza di una base ossigenata, della formola $C_5H_{11}ON$ [1].

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $(C_5H_{11}ON)_2H_2PtCl_6$
Pt	31,27	31,88

La quantità di questo sale era, peraltro, insufficiente per un ulteriore esame.

Un'altra parte del prodotto resinoso suddetto, venne distillata con soda caustica per eliminare le basi, e, dopo questo, acidificata con acido solforico ed esaurita con etere. Si ebbero molto acido formico ed un piccolo residuo cristallino, che, purificato dall'acqua, fondeva a 92-96°. La sua piccola quantità non consentiva un ulteriore esame; ma potrebbe darsi si trattasse di acido glutarico, che fonde a 97°,5.

[1] È probabile che si tratti dell'aldeide aminovalerianica. Vedi Wolffenstein, Berichte, vol. 25, pag. 2781; 26, pag. 2991 e Haase e Wolffenstein, Berichte, vol. 37, pag. 3228; e poi Beilstein I, pag. 949, e Supplemento I, pag. 480.

I sali baritici sopra menzionati contenevano una parte facilmente solubile nell'acqua calda, ed una assai poco solubile. Dalla prima si ebbero, dopo avere eliminato il bario con acido solforico e successiva distillazione, notevoli quantità di acido formico. Il residuo della distillazione venne unito al liquido che si ebbe dopo avere precipitato il bario della porzione meno solubile. Questa soluzione dette, per concentrazione, delle croste cristalline, che, purificate dall'acqua, fondevano a 185-186° e furono riconosciute per *acido succinico*. Ne abbiamo analizzato il sale argentico.

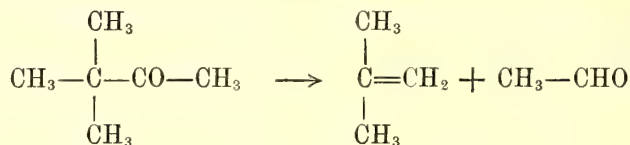
Analisi:

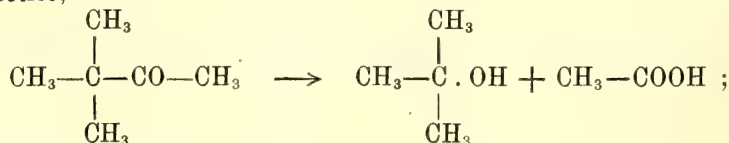
	Trovato	Calcolato per $C_4H_4O_4Ag_2$
Ag	64,85	65,06

La piperidina si autossida, alla luce, in minore misura della nicotina; ma anche essa, per quanto si altera, va soggetta ad una ossidazione profonda. Si forma, anche in questo caso, come primo prodotto, una base ossigenata, che non abbiamo potuto identificare; ma non è improbabile si tratti del composto ottenuto, per la prima volta, da R. Wolffenstein, per ossidazione della piperidina con acqua ossigenata, che è un ossido isomero della aldeide δ-aminovalerianica. Quest'ultima per ossidazione con acido nitrico, dà l'acido succinico [1], che noi pure abbiamo trovato per i prodotti dell'autossidazione.

Aggiungeremo a questa Nota, quale appendice, i risultati dell'autossidazione della

Pinacolina. Dai nostri studî sulla scissione di questo interessante chetone alla luce [2], appariva assai probabile che esso si scomponesse secondo lo schema

$$CH_3-\overset{\displaystyle CH_3}{\underset{\displaystyle CH_3}{\overset{|}{\underset{|}{C}}}}-CO-CH_3 \longrightarrow \overset{\displaystyle CH_3}{\underset{\displaystyle CH_3}{\overset{|}{\underset{|}{C}}}}=CH_2 + CH_3-CHO$$

in butilene ed aldeide acetica, analogamente alla scissione aldeidica dei ciclochetoni. Siccome l'autossidazione di questi ultimi corrisponde sempre alla scissione idrolitica, così abbiamo pensato che, studiando l'autossidazione della pinacolina alla luce, si poteva trovare una conferma del processo suddetto. Così avviene di fatto; ed i prodotti ora ottenuti sono: trimetilcarbinolo ed acido acetico,

$$CH_3-\overset{\displaystyle CH_3}{\underset{\displaystyle CH_3}{\overset{|}{\underset{|}{C}}}}-CO-CH_3 \longrightarrow CH_3-\overset{\displaystyle CH_3}{\underset{\displaystyle CH_3}{\overset{|}{\underset{|}{C}}}}.OH + CH_3-COOH\ ;$$

(1) Beilstein, Supplemento, I vol., pag. 480.

(2) Questi Rendiconti, vol. 19, I, pag. 539 (1910); e Berichte, vol. 43, pag. 1349.

il primo dà, poi, per ulteriore ossidazione, acetone, formaldeide, acido formico e carbonico. Per ossidazione della pinacolina con permanganato o con acido cromico si ottiene invece rispettivamente l'acido trimetilpiruvico [1] o l'acido trimetilacetico.

Alla luce vennero esposti 7 palloni, di 3 litri, pieni d'ossigeno, contenenti ciascuno 5 gr. di pinacolina e 100 d'acqua, dal giugno al novembre. Aprendo i matracci, si svolse anidride carbonica. Il contenuto dei medesimi venne neutralizzato con carbonato sodico, impiegando 160 cc. della soluzione normale, e distillato.

Il residuo della distillazione contiene molta *aldeide formica*, che venne riconosciuta al suo composto con la p-difenildiidrazina, che fonde a 220°; per eliminare l'aldeide, si portò a secco a b. m. in corrente di anidride carbonica. Il residuo salino non reagisce con la fenilidrazina, ciò che prova l'assenza dell'acido trimetilpiruvico menzionato più sopra. Una parte del sale venne trattata col nitrato d'argento: si ebbe, a caldo, un forte annerimento causato dalla presenza di *acido formico*; e l'ebollizione venne protratta fino a completa ossidazione di quest'ultimo. Dal filtrato si ebbero gli aghi bianchi di *acetato argentico*.

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_2H_3O_2Ag$
Ag	64,14	64,66

Il distillato ottenuto più sopra, che aveva spiccato l'odore di acetone e dell'alcool butilico terziario, ridotto per ulteriore rettificazione a 75 c., dette, per salatura con carbonato potassico, 17 gr. di un liquido oleoso. Per separare l'*acetone* in esso contenuto, lo abbiamo trattato a freddo con 15 gr. di cloridrato di semicarbazide in una soluzione di 15 gr. d'acetato potassico in 40 d'acqua. Dopo qualche giorno venne raccolto il precipitato (8,4 gr.) del semicarbazone dell'acetone, che, purificato dell'alcool metilico, fondeva a 190-191° [2].

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_4H_9ON_3$
N	36,61	36,54

Il filtrato dal semicarbazone dell'acetone venne distillato; e dal liquido passato si separò, per salatura con carbonato potassico, l'alcool butilico terziario. Per togliere le ultime traccie di acetone, il trattamento con la semicarbazide venne ripetuto. Si ebbe così un liquido che, seccato sull'ossido di bario, bolliva a 81-83°. Per l'analisi venne raccolta la porzione bollente

(1) Vedi Glücksmann, Monatshefte für Chemie, 1889, pag. 773.

(2) Questo è il vero punto di fusione del semicarbazone dell'acetone. Thiele e Stange trovarono 187°. (Berichte, vol. 27, pag. 32).

a 82°, che si solidificò. Fondeva a 25°. Queste sono le costanti del *trimetilcarbinolo* (¹).

Analisi :

	Trovato	Calcolato per $C_4H_{10}O$
C	64,86	64,86
H	13,36	13,51

L'autossidazione della pinacolina era completa. Il contegno di questa sostanza tanto alla scissione aldedica quanto nell'autossidazione, invoglia a studiare il comportamento, alla luce, di altri composti del genere.

Infine vogliamo ricordare il valido aiuto che durante queste ricerche ci hanno prestato, prima il dott. G. B. Bernardis, e poi il dott. Emilio Sernagiotto.

Chimica. — *Azioni chimiche della luce.* Nota XXXII del Socio G. Ciamician e di P. Silber.

Le esperienze che descriviamo in questa Nota sono state fatte in seguito ad una comunicazione del dott. Eugenio Bernhard di Schwanheim sul Meno. Egli ci scriveva gentilmente, circa un anno fa (nel dicembre 1913), di avere osservato che, esponendo alla luce aldeide benzoica contenente benzoato di rame, si forma un deposito speculare di rame metallico sulle pareti del vaso, che all'oscuro scompare. Questo contegno non è limitato al benzoato di rame, perchè anche quello di piombo mostra un analogo comportamento. Egli mise a nostra disposizione queste sue osservazioni, per cui noi vivamente lo ringraziamo.

Per esaminare più attentamente questi processi, abbiamo da prima eseguito la seguente esperienza, operando in soluzione benzolica per evitare l'impiego dell'aldeide benzoica come solvente che, essendo presente in eccesso, avrebbe dato luogo alla formazione dei suoi prodotti di polimerizzazione.

Benzoato rameico ed *aldeide benzoica.* Alla luce vennero esposti, dal marzo al settembre, 7 tubi contenenti ciascuno 6 gr. di benzoato di rame e 2 gr. di benzaldeide sciolta in 50 c. di benzolo. Durante l'insolazione la polvere azzurra si raggruma e prende un colore brunastro, mentre sulle pareti del tubo comparisce lo specchio metallico; in fine si trova nel tubo una massa cristallina grigia, ed accanto ad essa una polvere bruna commista ad alcuni cristalli azzurri, sospeso il tutto in un liquido giallo-brunastro.

La parte solida venne raccolta in filtro; pesava 10 gr. ed era formata, per la parte maggiore, da prismetti lunghi dai 2 ai 5 mm. e dalla menzio-

(¹) Vedi Butlerow, Liebigs Annalen der Chemie, vol. 162, pag. 232.

nata polvere bruna metallica. La separazione presentava da principio grandi difficoltà, perchè la sostanza cristallina si alterava assai facilmente per trattamento coi varî solventi di uso ordinario; siamo riusciti invece abbastanza bene ad asportare i cristalli dal miscuglio per mezzo di una bacchetta elettrizzata di ebanite, sulla quale essi venivano di preferenza a fissarsi. Ripetendo più volte l'operazione, abbiamo ottenuto un prodotto abbastanza omogeneo. Esso appariva formato da piccoli cristalli senza colore, che, peraltro, in massa avevano un colore grigio; nell'acqua erano insolubili; si scioglievano invece nell'acido cloridrico concentrato, dando un liquido senza colore, da cui, per aggiunta di acqua, si separava l'acido benzoico, e per trattamento con potassa un precipitato rosso di ossido rameoso. Non ostante i numeri imperfetti dell'analisi, crediamo che la sostanza in parola fosse *benzoato rameoso*.

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_6H_5COO\,Cu$
C	44,61	45,50
H	2,79	2,73
Cu	35,08	34,42

Il rimanente del prodotto venne liberato da questo sale per trattamento con ammoniaca, in cui il benzoato rameoso si scioglie facilmente: escludendo l'aria, si ottiene un liquido senza colore, che altrimenti diventa intensamente azzurro. Il residuo è una polvere bruna formata in grande prevalenza da *rame metallico*.

La soluzione benzolica, colorata in giallo brunastro, all'aria, si fece verde intensa, ciò che prova che essa conteneva ancora del sale rameoso. Svaporando il solvente, rimase indietro una massa cristallina, che aveva l'odore della benzaldeide. Ripresa con etere petrolico, restarono indietro dei cristalli azzurri (2,9 gr.), evidentemente di benzoato rameoso. La parte solubile nell'etere petrolico, liberata dal solvente (29 gr.), era formata precipuamente da *acido benzoico*, che venne tolto con carbonato sodico. Il resto (9 gr.) conteneva ancora dell'aldeide benzoica, che fu eliminata col bisolfito, ed una parte oleoso-resinosa (3,2), che non venne ulteriormente esaminata.

Il benzoato rameico, per azione dell'aldeide benzoica alla luce, viene dunque ridotto a benzoato rameoso ed a rame metallico, mentre si forma acido benzoico; la reazione appartiene però alle reciproche riduzioni ed ossidazioni che la luce favorisce di preferenza. È assai probabile che l'acqua intervenga in tale processo; ma per poter affermare questo con sicurezza, converrà ripetere l'esperienza escludendo ogni traccia di umidità, ciò che ci proponiamo di fare in seguito. Intanto pubblichiamo anche una seconda esperienza fatta col benzoato di rame ed aldeide acetica.

Benzoato rameico ed *aldeide acetica*. Per questa prova preliminare abbiamo esposto al sole, dal maggio al dicembre, 5 gr. di benzoato rameico

sospeso in 50 c. d'aldeide acetica. La massa azzurra del primo imbrunisce a poco a poco, e in fine si trasforma in una polvere rosso-bruna, mentre sulla parete del tubo comparisce lo specchio di rame. Il liquido si mantiene senza colore.

Per l'elaborazione si filtrò; il deposito solido venne analizzato,

Analisi:

C 0,77 H 0,63 Cu 98,91

e risultò formato da rame metallico a cui aderiva poca materia organica. Venne dosato tutto il rame, che si era liberato per azione della luce, tanto quello raccolto in filtro, quanto quello aderente al tubo; e se ne ebbero 0,951 gr., da cui risulta che il 91,5 per cento del benzoato impiegato era stato ridotto a rame metallico.

Svaporando l'aldeide acetica, impiegata in eccesso, restò indietro un residuo cristallino, che aveva odore di paraldeide e di *acido acetico*. Ripreso con etere petrolico, dopo essere stato nel vuoto sulla soda, si asportò l'*acido benzoico* formatosi nella riduzione. Il residuo insolubile, di colore verdognolo, dava, con potassa in soluzione acquosa, un precipitato rosso di protossido di rame. Erano però presenti piccole quantità di sale rameoso.

Il benzoato rameoso viene dunque ridotto, alla luce, dall'aldeide acetica, prevalentemente a rame metallico, mentre si libera acido benzoico ed evidentemente si forma acido acetico. Anche questa reazione verrà ripresa; ed è pure nostra intenzione di studiare il contegno di altri sali metallici alla luce, in presenza di aldeidi e di chetoni.

Infine porgiamo i nostri ringraziamenti al dott. Emilio Sernagiotto, che ebbe efficacemente a coadiuvarci in questa breve ricerca.

Patologia vegetale. — *Il mal dell'inchiostro nelle giovani pianticelle dei castagneti e dei semenzai.* Nuova Nota del Socio Giovanni Briosi e di Rodolfo Farneti [1].

Allorquando in un castagneto il *male dell'inchiostro* (morìa) piglia piede ed infierisce, si formano di frequente in esso delle chiazze più o meno estese ove gli alberi in gruppo muoiono producendo delle radure, che veggonsi talora interamente spoglie di alberi, tal'altra disseminate di tronchi secchi, residui delle piante morte ma non abbattute.

[1] Note precedenti:

Briosi G. e Farneti R., *Sulla morìa dei castagni* (*male dell'inchiostro*): prima Nota (Atti Istituto botanico di Pavia, vol. XIII, pag. 291-298, con 1 tav. litogr.), anno 1908; *Intorno alla causa della morìa dei castagni* (*male dell'inchiostro*) *ed ai mezzi per combatterla* (ibid., vol. XIV, pag. 47-51); *La morìa dei castagni* (*male dell'inchiostro*): *osservazioni critiche ad una Nota dei sigg. Griffon e Maublanc* (ibid., vol. XV,

In questi spiazzi, se, per disseminazione naturale, nascono dei castagnoli, essi non rimangono a lungo in vita, come non riescono ad attecchirvi le pianticelle che artificialmente ivi si ripiantino. A poco a poco gli uni e le altre muoiono: ed in capo a due o tre anni, o, tutt'al più, dopo cinque o sei, delle nuove pianticelle nessuna rimane viva.

Quando il ripiantamento vien fatto con alberelli adulti rivestiti di forte corteccia, se essi riescono ad attecchire (il che non sempre avviene), resistono qualche anno di più, ma non tanto da poter ripopolare la radura.

È per tale ragione che gli spiazzi formatisi nei castagneti attaccati dalla *morìa* più non si ripiantano e rivestono, come non si sostituiscono nella selva gli alberi che isolatamente il male qua e là uccide.

Che nel luogo stesso, ove un albero spontaneamente muore, non se ne debba subito ripiantare un altro, è cosa *ab antiquo* risaputa, poichè esso non vi attecchisce o presto muore. Ciò è dovuto alla presenza di rizomorfe o d'altri micelii fungini nemici che la pianta che muore abbandona nel terreno: micelii i quali dapprima vivono come saprofiti sulle radici della pianta perita; di poi, come parassiti sopra le radici vive della pianta sostituitavi.

In egual modo peraltro non si può spiegare la morte delle giovani piantine nelle radure prodotte dal *male dell'inchiostro*, poichè sulle radici delle piante che questo morbo uccide non si trovano di solito nè rizomorfe, nè altri micelii patogeni. Altre spiegazioni quindi si sono escogitate, diverse e varie fra loro ma tutte partenti dal concetto che la causa del male va ricercata nel terreno.

Così, alcuni sostengono che le piante muoiono perchè il terreno più non contiene in quantità sufficiente alcuni degli elementi minerali che sono ad esse indispensabili, o perchè esso difetta dell'*humus* necessario alla vita delle piante stesse. Altri ritengono che trattasi del parassitismo di micelii che per speciali condizioni sviluppansi nel terreno ed invadono le ultime barbicelle delle radici che restano uccise (Ducomet). Altri, partendo dal presupposto che le micorizze siano indispensabili alla vita dei castagni, fanno risalire la causa della *morìa* ad un micromicete (*Mycelophagus*) che attaccherebbe e distruggerebbe i micelii micorizzici e, di conseguenza, anche le micorizze (Mangin). Altri invece, riconoscendo che i castagni possono vivere e prosperare anche senza le micorizze, ritengono che gli stessi micelii, che in condizioni normali concorrono alla formazione di queste vivendo con le radici in consorzio mutualistico, quando invece nel suolo l'*humus* difetta, non trovando nel terreno

pagg. 43-51); *Nuove osservazioni intorno alla morìa dei castagni (male dell'inchiostro) e sua riproduzione artificiale* (ibid., vol. XIV, pagg. 327-334); *A proposito d'una Nota del dott. Leonello Petri sulla morìa dei castagni (male dell'inchiostro)*, in Rendic. Accad. Lincei, vol. XXII, ser. 5ª, 1° sem., fasc. 6; *Ancora sulla morìa del castagno (male dell'inchiostro), in risposta al sig. dott. L. Petri* (Rendic. Accad. Lincei, vol. XXII, ser. 5ª, II sem., fasc. 2°).

le sostanze organiche delle quali abbisognano, le sottraggono alle radici stesse trasformandosi in veri parassiti di queste, ed uccidendo le piante (Delacroix). Infine, non manca chi attribuisce la morte a misteriose e mal definite sostanze tossiche escrete ed abbandonate nel terreno dalle piante malate che muoiono.

Le osservazioni ed i fatti che qui sotto esporremo serviranno a portar nuova luce in questo intricato contrasto di ipotesi ed opinioni, ed a riconfermare ancora una volta quanto noi abbiamo dimostrato e sostenuto nelle nostre precedenti Note e Memorie: cioè che la causa del male non risiede nel terreno e non sale dalle radici alle parti aeree della pianta, ma, viceversa, da queste a quelle discende; e che è semplicemente l'opera del parassitismo di un micete epigeo.

* * *

Nella scorsa primavera, in alcuni castagneti della valle del Serchio in provincia di Lucca, la *morìa* delle giovani pianticelle di castagno era frequente: onde la nostra attenzione fu rivolta in modo speciale a ricercarne la causa. Eravamo ai primi di maggio, e molte piante da poco germinate avevano appena spiegato le prime fogliole. Apparentemente la maggior parte di esse era vegeta e prosperosa; ma un attento esame mostrava in parecchie, sul fusticino, delle macchiuzze o delle brevi striscie longitudinali livide con necrosi del tessuto la quale interessava l'intero spessore della corteccia; ed il microscopio rivelava in esse (in sezioni tangenziali) un micelio fungino, non ancora sporificato.

Trattavasi di minuti cancri incipienti che erano sparsi sul fusticino, tanto nella parte soprastante ai cotiledoni, quanto nell'ipocotile, benchè quivi in minore quantità.

Estendendo l'esame alle pianticelle dell'anno precedente, nate cioè nella primavera del 1913, trovammo pure dei piccoli cancri sull'ipocotile, alcuni dei quali formanti pustole costituite da stromi immaturi. In pianticelle di tre anni, malate ma non morte, il fatto si ripeteva; cancri trovavansi tanto verso la base dell'ipocotile quanto nella regione del colletto. In uno di questi castagnoli di tre anni il cancro basale, anzi, era già disceso, con larga striscia nerastra, nel fittone della radice, mentre altri castagnoli trovammo di già morti in seguito a forte attacco del male, avvenuto nella parte inferiore del fusto: infine, alcuni castagnoli di cinque anni erano morti per attacco nella regione del colletto.

In tutti questi cancri trovavasi sempre un micelio, spesso con stromi non peranco differenziati, o sporificati sotto forme di *Fusicoccum* o di *Cytosporella*.

* * *

Ai primi dello scorso luglio, dal vivaio forestale di Gozzano in provincia di Novara, ci furono mandate delle piantine di castagno malate, per ricercare la causa del deperimento loro. Recatici sul luogo, trovammo che le pianti-

celle sofferenti, o morte, erano affètte da cancri simili a quelli dei castagnoli della valle del Serchio, anzi in uno stadio più avanzato.

Il vivaio di Gozzano contava circa duecentomila pianticelle, tutte nate nella primavera da castagne seminate nel precedente autunno. Di questi castagnoli, circa diecimila erano di già morti, e gli altri vedevansi morenti o fortemente compromessi.

Dall'inchiesta fatta sul luogo emerse:

1) che il vivaio di Gozzano si trovava a notevole distanza da qualunque castagneto;

2) che anche negli anni scorsi si seminarono, nello stesso terreno, delle castagne, e si ebbero castagnoli sani, senza mortalità;

3) che il vivaio era fatto a regola d'arte e trovavasi in ottime condizioni poichè il terreno era sciolto, profondo, provveduto di regolari canali di scolo, con aiuole rialzate e senza ristagno o infiltrazione di acqua. Inoltre il terreno era fertilissimo e ricco di *humus*, sicchè le piante in poco tempo avevano raggiunto un grande sviluppo, arrivando e sorpassando un metro d'altezza;

4) che nel vivaio si coltivavano diverse altre essenze, ma solo quella del castagno era malata.

Allora, non sapendo come orientarci, sospettammo che il male potesse provenire dalle castagne che avevano servito per la semina. Ed infatti, dalle informazioni da noi prese risultò che queste eransi avute in parte da castagneti del comune di Armeno. Ci recammo ad Armeno, ed una accurata ispezione assodò che, purtroppo, in questi castagneti eranvi molti alberi attaccati dal *male dell'inchiostro*, tanto nei rami, quanto nel tronco e nelle radici. Era quindi evidente che nel vivaio la malattia era stata portata per mezzo delle castagne che avevano servito per la semina.

*
* *

Nel vivaio di Gozzano, il male si manifestava con gli stessi caratteri di quelli dei castagneti della valle del Serchio (caratteri che sono identici a quelli di tutti i castagni, qualunque sia la loro età, che muoiono per *male dell'inchiostro*: in tutti si hanno i cancri caratteristici prodotti da micosi). Anche nei castagnoli di Gozzano il male aveva preso non solo le parti aeree ma, talora, anche le radici. E le foglie disseccavano contemporaneamente al fusto, o prima di esso, rimanendo secche attaccate alla pianta; precisamente come avviene nei grossi alberi attaccati dal *male dell'inchiostro*, quando muoiono della cosiddetta forma *apopletica*.

Nel vivaio scegliemmo, prendendole dalle diverse aiuole, oltre un centinaio di piantine in tutti i gradi di sofferenza, con tutte le loro radici e la terra che vi aderiva, e le portammo al Laboratorio per sottoporle ad esame più accurato e minuto.

Nelle centoventidue piantine esaminate, ne trovammo centodiciotto che presentavano cancri più o meno sviluppati, o sul fusto, o nella regione emersa dell' ipocotile.

Delle quattro che non avevano cancri nella parte aerea, una era sana, e le altre tre erano malate nella radice.

I cancri si manifestavano come depressioni o lividure della corteccia, di vario aspetto, generalmente elissoidali-allungate o lineari, cioè sotto forma di striscie più o meno appariscenti nel fusto ancor verde; spesso il cancro abbracciava l' intera circonferenza del fusticino, ed allora vi produceva una specie di strozzatura anulare.

Frequentemente nei cancri eranvi delle pustole, a forma di verruchette dovute allo sviluppo di uno stroma fungino, subcorticale, non ancora differenziato, nè sporificato: in alcuni, per altro, si intravvedeva di già una struttura irregolarmente valsoidea. Questi stromi esaminati più tardi, sopra piantine morte raccolte nello stesso vivaio nel mese di novembre, si trovarono in parte sporificati, come nel Lucchese, sotto forma di *Fusicoccum* e *Cytosporella.* Erano peraltro diversi dal *Fusicoccum* da noi altrove descritto, e più vicini, se non identici, alle forme spermogoniche descritte dal Fuckel come appartenenti al ciclo evolutivo della *Melanconis modonia* Tul., e simili altresì ad alcune forme conidiche da noi ottenute in coltura, od osservate in alcuni stadii di sviluppo della nostra *Melanconis perniciosa.*

Non intendiamo peraltro dedurre, da queste apparenze, che tali forme spermogoniche siano identiche alle forme del parassita da noi studiato e descritto nelle nostre precedenti Note, poichè ce ne manca ancora la conferma colturale e sperimentale.

*
* *

Studiamo ora attentamente l'origine ed il percorso delle infezioni.

Per rispetto all'origine, le infezioni si potevano distinguere, topograficamente, in *aeree* (sul fusto) ed in *radicali* (sulla radice). Delle prime, alcune erano *basali* o *cotiledonali*, cioè alla base del fusto in corrispondenza all' inserzione dei cotiledoni; altre trovavansi nell' ipocotile.

Ora, dei centoventidue castagnoli presi in esame in Laboratorio, uno, come si disse sopra, mostravasi perfettamente sano; centodiciotto presentavano infezioni aeree; tre, infezioni radicali. Tra le prime, quarantatrè erano basali o cotiledonali, e le piantine con infezioni basali o cotiledonali, generalmente, avevano altresì una o più infezioni (non di rado le più gravi) nella parte superiore del fusto. In molti casi queste infezioni basali provenivano dal seme, ed erano state trasmesse al fusticino direttamente dal seme stesso per mezzo del picciuolo dei cotiledoni.

L'esame delle tre piantine con infezioni radicali rivelò quanto segue: in una l' infezione si era iniziata a fior di terra, da dove era scesa alla radice; e la pianta mostrava anche una seconda infezione alla base del fusto, che

non comunicava colla prima. Che l'infezione della radice provenisse dal fusticino e vi si fosse propagata in direzione discendente, lo dimostravano lo stato di necrosi dei tessuti e il degradare della loro colorazione patologica che si estingueva a un terzo della radice lasciando perfettamente sani i due terzi inferiori.

In un'altra delle dette pianticelle l'infezione si era iniziata a circa sei centimetri di profondità dalla superficie del terreno, ed aveva proceduto parimenti con direzione discendente, degradando verso l'estremità della radice, che mantenevasi tuttora sana.

Nella terza, la radice era mozzata a due terzi della sua lunghezza, probabilmente per opera di qualche larva d'insetto. Nella corrispondente ferita non cicatrizzata si scorgeva un processo infettivo con percorso ascendente, che aveva risalito la radice fino a raggiungere l'ipocotile dove s'insinuava nel legno nel quale aveva prodotto delle striature brune. In corrispondenza di queste striature, l'esame microscopico mostrava numerose colonie di bacterii, che non si osservavano nei casi precedenti, sicchè questo si può ritenere come un caso eccezionale di marciume dovuto ad accidentale infezione bacterica della ferita, completamente estraneo quindi alla causa della mortalità delle altre piantine del vivaio.

Per rispetto al decorso del male ed agli effetti da esso prodotti, si rilevò che, dei centoventidue castagnoli sottoposti a studio, quarantaquattro avevano il fusto tuttora verde o solo in parte secco, ed in settantaquattro il fusticino era completamente morto. Di queste ultime settantaquattro piantine, in cinquantadue era morta anche tutta la radice la quale mostravasi più o meno marcescente per tutta la sua lunghezza (con intensità peraltro decrescente dall'alto al basso); in sette, una porzione di radice verso l'estremità inferiore era ancora sana (da tre a dieci centimetri); in cinque era sana l'intera metà inferiore della radice, ed in dieci tutta la radice sana era sino al colletto.

Delle quarantaquattro piantine dal fusto ancor verde, ventitrè avevano la radice perfettamente sana (cosa naturale, perchè non avevano cancri alla base del fusto o solo incipienti e leggieri); tre avevano cancri nell'ipocotile e nel fusto, i quali discendevano sino alla radice ed in essa si prolungavano; ne avevano uccisa di già la parte superiore, ma sana era tuttora la parte inferiore.

Tutte le radici e le porzioni di radici ancora sane, portavano barbe e barbicelle pure sane.

In dieci castagnoli che avevano alla base del fusticino cancri abbraccianti e discendenti nelle radici, queste erano interamente morte e, in alcuni casi, anche marcescenti.

Questi diversi casi non erano, come si potrebbe sospettare, stadii successivi della malattia; poichè le loro differenze derivavano evidentemente dal punto iniziale del processo infettivo e dalla gravità dell'infezione.

Spesso a produrre la marcescenza della radice aveva altresì contribuito grandemente la presenza di gallerie longitudinali scavate da insetti nel fittone.

Anche nei castagnoli avveniva quanto si verifica nei grossi castagni: cioè, quando il cancro raggiunge la radice, in questa si espande e discende con maggiore rapidità che non nel fusto, onde la morte della radice non di rado precede quella della parte aerea della pianta che muore poi d'un tratto della forma così detta *apopletica*.

Avvertiamo, ancora, che nel vivaio di Gozzano, oltre i castagnoli che presentavano i caratteri del *male dell' inchiostro*, alcuni se ne trovavano che, pure avendo senza cancri e più o meno vegeta e sana tutta la parte aerea, avevano la radice mutilata, probabilmente per opera delle larve di *Melolontha vulgaris* o delle *Grillotalpe*; ed altresì, altri che presentavano il fittone della radice scavato longitudinalmente da gallerie di larve d'insetti. Alcune di queste gallerie erano invase da micelii fungini che ne avevano provocato la marcescenza. Nei castagnoli a radice mutilata le ferite eransi cicatrizzate, e le piante vivevano tuttora.

I castagnoli con galleria longitudinale nel fittone radicale erano quasi tutti morti, senza che nel fusto i cancri si fossero formati.

Notiamo, da ultimo, che, allorquando nei mesi di agosto e settembre rivisitammo il vivaio, si trovò che nelle aiuole (circa cinquecento metri quadrati), nelle quali si erano lasciate le piantine malate, quelle di esse con cancri erano tutte morte senza che la malattia si fosse, almeno apparentemente, propagata alle sane contigue: il che si può spiegare col fatto che sopra queste piante malate il parassita non aveva ancora cominciato a sporificare, ciò che avvenne solo nel tardo autunno.

Conclusioni.

Da quanto abbiamo sopra esposto, emerge:

1) che non solo gli alberi adulti ma anche le piante giovanissime ed altresì i semi germinanti possono essere attaccati dal *male dell' inchiostro*, e possonsi avere larghe epidemie di *male dell' inchiostro* anche nei semenzai, ciò che finora non si era avvertito;

2) che i sintomi ed i caratteri, coi quali muoiono i castagnoli, sono identici a quelli che si manifestano negli alberi che per tale morbo scompaiono dalle selve;

3) che i semenzai ed i vivai vanno attentamente sorvegliati, e le pianticelle loro non debbonsi distribuire se non si è sicuri che siano perfettamente sane, cioè anche senza macchie sospette e cancri i quali spesso, per essere minutissimi e poco appariscenti, facilmente sfuggono all'osservazione superficiale;

4) che quello che avviene nei castagnoli e nei semenzai pure conferma che il *male dell' inchiostro* non si inizia nelle radici e non segue un andamento centripeto: che esso è prodotto da una micosi od infezione crittogamica che attacca da prima le parti aeree della pianta (rami e fusti), poi scende alle radici: che talora l'attacco può aver luogo anche direttamente nell' ipocotile stesso, ed altresì nella parte superiore della radice del seme germinante;

5) che il male non si può attribuire ad esaurimento del terreno;

6) che non occorre l'opera di uno speciale micromicete, il *Mycelophagus*, che attacchi e distrugga le micorizze, come vuole Mangin;

7) che nemmeno il male è prodotto dai micelii micorizzici divenuti parassiti per deficienza di *humus* nel terreno, come pensa Delacroix;

8) che nemmeno fa d'uopo di pensare all'esistenza di sostanze misteriose e tossiche, prodotte ed abbandonate nel terreno dalle piante che muoiono.

La quistione micologica non è di capitale importanza per la patogenesi, la profilassi e la cura del male. Essa verrà interamente chiarita e risolta più tardi, quando le ricerche in proposito saranno compiute e tutti i lati del problema micologico studiati. Sino da ora possiamo peraltro affermare che, quando anche si riuscisse a dimostrare che non un solo fungillo ma parecchi concorrono a produrre il complesso delle alterazioni che vanno sotto il nome di *morìa* o di *male dell' inchiostro* del castagno, ciò non infirmerebbe quanto noi abbiamo ripetutamente affermato nelle nostre precedenti pubblicazioni e che anche le attuali ricerche sull' infezione dei castagnoli e dei vivai riconfermano.

Fisica. — *Emissione ed assorbimento del gas residuo nei tubi del Röntgen, ed emissione dei raggi X* [1]. Nota del Corrispondente P. Cardani.

È noto che i tubi del Röntgen, per raggiungere le migliori condizioni per l'emissione dei raggi x, devono subire un lungo processo di esaurimento, allo scopo di eliminare i gas che si trovano occlusi negli elettrodi o nelle pareti di vetro: e siccome questi gas non si sprigionano liberamente neppure con le rarefazioni più spinte, si sa ancora che, per ottenere l'esaurimento è necessario di circondare i tubi con speciali involucri, per es. di amianto, e portarli ad elevate temperature, mandando anche attraverso i medesimi una corrente sufficientemente intensa, sapendosi che la scarica elettrica facilita notevolmente l'emissione dei gas occlusi. Ed è altresì noto che, per evitare lo

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di fisica della R. Università di Parma.

annerimento dei tubi per la polverizzazione del platino anticatodico, i costruttori aggiungono un terzo elettrodo, che serve appunto da anodo nel processo di esaurimento, mentre si ha cura di mantenere isolato l'anticatodo.

Sul gas che viene emesso dagli elettrodi, sono già state fatte alcune interessanti ricerche. Lo Skinner (1) ha per es. osservato che il gas che si svolge dal catodo, formato di metalli differenti, è idrogeno; ed ha dimostrato che l'emissione di questo gas dal catodo è accompagnata da un assorbimento che si produce all'anodo; ed ha anche trovato che questa emissione riprende, lasciando per qualche tempo gli elettrodi in riposo: il che indica la grande difficoltà incontrata dal gas occluso per portarsi dagli strati più profondi alla superficie. Nello stesso modo osservò l'emissione e l'assorbimento dell'azoto da catodi ed anodi formati da dischetti di carbone. Le sue esperienze vennero però eseguite a pressioni tra 1 e 3 mm. di mercurio e con la scarica a forma di fiocco. Esperienze analoghe per l'assorbimento dell'idrogeno e dell'azoto da parte di anodi diversi per il passaggio delle scariche furono fatte dal Chrisler (2), sempre con pressioni del gas superiori a 2 mm. di mercurio. Altre ricerche sui gas occlusi nelle pareti di vetro dei tubi a vuoto furono fatte dallo Swinton e dal Pohl (3).

Particolarmente degne di nota sono le ricerche di Hirsch e Soddy (4) sul gas che alle rarefazioni, alle quali avviene la emissione dei raggi X, viene dato dagli elettrodi di alluminio: gas, la cui formazione essi ritengono connessa con la presenza di tracce di sodio negli elettrodi e di cui la natura non è ben precisata.

D'altra parte, il fatto che i tubi del Röntgen, per il loro uso continuato, tendono ad indurirsi, sta a dimostrare che gli elettrodi devono riassorbire il gas contenuto nell'ampolla, ed è pure noto che in certe condizioni si può ottenere con le scariche una autorarefazione del tubo, la quale può raggiungere limiti elevatissimi.

Ciò posto, è manifesto che molti punti restano ancora da chiarire su questo argomento: resta così da chiarire come proceda l'emissione del gas con le scariche durante il periodo di esaurimento dei tubi Röntgen; come vi influisca l'innalzamento della temperatura; come, quando l'esaurimento è sufficientemente progredito, avvenga il fenomeno inverso dell'autorarefazione del tubo, e come si raggiungano quelle condizioni di grande stabilità che presentano i tubi forniti dalle fabbriche. Vi è inoltre da approfondire lo studio di quel gas che in determinate condizioni viene emesso dagli elettrodi e in altre riassorbito.

(1) Physikalische Zeitschrift, 1905, pag. 610; e Philosophical Magazine, 1906, pag. 481.

(2) Physikalische Zeitschrift, 1909, pag. 746.

(3) Beiblätter zu den Annalen der Physik, vol. 33, an. 1909, pag. 1382.

(4) Philosophical Magazine, 1907, pag. 779.

Lo scopo delle presenti ricerche è quello di portare un nuovo contributo alla risoluzione di tali questioni estremamente complesse, in modo da poter chiarire i fenomeni che avvengono nelle estreme rarefazioni dei tubi del Röntgen e conoscere le condizioni necessarie per il loro migliore funzionamento: esse però non costituiscono se non uno studio preliminare per poter in seguito stabilire le condizioni interne del tubo dalle quali dipende l'emissione dei raggi x, in particolar modo in rapporto alla pressione, perchè quelle da me pubblicate nel 1904 riguardavano il caso di tubi non esauriti, nei quali per ciò la scarica doveva esser accompagnata da un'abbondante emissione dei gas residui.

Evidentemente, per raggiungere lo scopo propostomi, le ricerche dovevano esser rivolte da una parte alla misura delle pressioni del gas contenuto nel tubo attraversato dalle scariche, e dall'altra alla misura della ionizzazione prodotta.

I tubi adoperati provenivano da fabbriche tedesche: dopo aver sperimentato il loro perfetto funzionamento, sia radioscopicamente sia per la ionizzazione che producevano, essi venivano aperti e subito saldati ad un tubo di vetro che conduceva ad una provetta di Mach Leod e alla pompa Gaede. Ho fatto uso di tubi di diametri diversi, muniti sempre di anticatodo di platino: il catodo e l'anodo erano, al solito, di alluminio. Un rubinetto normale, tipo Leybold, a perfetta tenuta, era inserito tra il tubo Röntgen e il manometro: un secondo rubinetto identico era invece inserito tra il manometro e la pompa Gaede. Nel tubo di vetro di comunicazione tra il manometro e questo secondo rubinetto, ho inoltre saldato un tubo Geissler senza elettrodi, per analizzare per mezzo di uno spettroscopio il gas contenuto: due larghe striscie di stagnola, incollate esternamente nelle parti più larghe del tubo Geissler, servivano per rendere luminoso il gas contenutovi, collegandole con i poli di un rocchetto.

Il tubo Röntgen era disposto orizzontale, e la comunicazione col manometro partiva dal tubo laterale adiacente al catodo ed era rivolta verso l'alto.

Siccome per esaurire il tubo dal gas occluso si doveva riscaldarlo a temperatura elevata, esso era appoggiato sulle parti opportunamente ripiegate di due bacchette di vetro le quali erano superiormente fissate a robusti sostegni. Con questa disposizione era facile di circondare dal basso il tubo Röntgen con una scatola di amianto e chiudere questa scatola con un coperchio, pure di amianto, che doveva naturalmente portare delle fenditure in corrispondenza delle bacchette di vetro che reggevano il tubo medesimo e del tubo di vetro che stabiliva la comunicazione col manometro: una serie di 10 fiamme sottostanti permetteva di raggiungere una temperatura di oltre 300°.

La pompa Gaede comunicava a sua volta con una pompa ad olio Gerik; e nel tubo di comunicazione era inserito un rubinetto a tre vie, per poter

introdurre nella pompa Gaede, nel manometro e nel tubo Röntgen, gas differenti.

Per misurare la ionizzazione prodotta dai raggi X, ho disposto il tubo Röntgen in modo che l'emissione avvenisse in direzione di una finestra rettangolare praticata in una spessa parete. Questa finestra era chiusa da una lastra di piombo che portava un'apertura circolare di 9 cm. di diametro: l'anticatodo del tubo distava 22 cm. da questa apertura; la disposizione era tale che il centro dell'anticatodo e il centro dell'apertura si trovavano sulla stessa retta orizzontale. L'apertura della lastra di piombo era protetta da una sottilissima lastra di alluminio, che ne distava circa 2 mm., accuratamente isolata con supporti di ebanite e mantenuta costantemente carica da 400 elementi Volta: un elettrometro di Exner e Geitel indicava il buon funzionamento di questa pila.

Nel vano della parete, e ad una distanza di 1 cm. dalla lastrina di alluminio, era collocato un disco di rame annerito, di diametro un po' maggiore dell'apertura esistente nella lastra di piombo, accuratamente isolato e comunicante con l'ago di un elettrometro del Mascart. Questo elettrometro, appoggiato sopra un piano coperto da lastra di zinco, si trovava dunque nella stanza attigua a quella del tubo Röntgen: sullo stesso piano si trovavano le cassette di pile per la carica dei quadranti, una pila campione con uno dei poli isolati, e un interruttore. Una grande cassa di legno tappezzata di stagnola, senza fondo ed aperta dal lato che si addossava alla parete, copriva l'elettrometro, le cassette delle pile di carica, la pila campione e l'interruttore: e poichè anche il vano della parete, a partire dalla lastra di piombo, ed il tratto di muro, a cui si addossava la cassa di legno, erano pure tappezzati di stagnola, è chiaro che tutti questi apparecchi venivano a trovarsi protetti da ogni azione elettrostatica.

L'interruttore, che si manovrava dall'esterno, permetteva o di stabilire la comunicazione dell'ago dell'elettrometro col suolo, o di isolarlo, o di farlo comunicare col polo isolato della pila campione: quest'ultima serviva per controllare le condizioni di sensibilità dell'elettrometro. Un'apertura praticata nella cassa di legno lasciava visibile lo specchietto dell'ago dell'elettrometro, le cui deviazioni si leggevano con cannocchiale a scala.

Gli elettrodi del tubo comunicavano con i poli di un rocchetto di circa 15 cm. di scintilla con interruttore rotante: ho avuto sempre cura che il motore dell'interruttore ruotasse con velocità costante. L'intensità della corrente primaria, fornita da accumulatori, si misurava prima e dopo di ogni serie: essa si mantenne quasi sempre eguale ad 8 ampères. Volendo procedere ad una misura di ionizzazione, si isolava il sistema formato dall'ago dell'elettrometro e dal disco annerito, e si faceva agire il rocchetto o per 2 o per 5 secondi, ovvero si lasciava isolato l'elettrometro finchè raggiungeva la posizione di equilibrio: indi si leggeva la deviazione ottenuta per la ca-

rica portata per la ionizzazione dell'aria dalla lamina di alluminio sul disco di rame.

Nella provetta del Mac Leod, l'ampolla ed il cannello avevano la capacità complessiva di 12,000 mm.^{3}: il cannello aveva la sezione di 1 mm.^{2} e la graduazione in mm. Le misure si facevano in modo che il mercurio nel ramo esterno arrivasse al livello dello zero del cannello graduato, e leggendo la divisione alla quale arrivava il mercurio dentro il cannello medesimo: così che questo numero w di divisioni rappresentava nello stesso tempo il dislivello in mm. tra i due rami della provetta, e il numero dei mm^3. ai quali era ridotto il volume del gas inizialmente contenuto nell'ampolla; la pressione del gas nel tubo si aveva così a meno di una differenza trascurabile, dividendo w^2 per 12000.

L'apparecchio, naturalmente, teneva il vuoto in modo perfetto; chiuso il rubinetto tra il manometro e la pompa Gaede, la pressione rimaneva immutata anche dopo parecchi giorni: la qual cosa stava a dimostrare un fatto già noto, che, cioè, anche alle estreme rarefazioni i gas occlusi negli elettrodi non si sprigionano spontaneamente alla temperatura ordinaria: d'altra parte però non si è mai osservato, nemmeno quando i tubi erano esauriti, alcun assorbimento spontaneo dei gas da parte degli elettrodi: non essendovi dunque nè spontanea emissione nè spontaneo assorbimento è chiaro che per questo riguardo le condizioni dei tubi dovevano rimanere immutate.

Una precauzione assolutamente indispensabile per ottenere l'esaurimento dei tubi, è quella di impedire che una parte della scarica arrivi a propagarsi al manometro ed alla pompa, perchè in tal caso si sprigionano, molto probabilmente nella superficie di contatto tra vetro e mercurio, dei gas che mascherano completamente i fenomeni che avvengono nel tubo. In alcune esperienze preliminari — nelle quali adoperavo le scariche impulsive di una batteria di condensatori, in luogo di quelle del rocchetto — i rubinetti facilmente si foravano, mentre, se resistevano, la scarica passava tra le due superfici di vetro del rubinetto combacianti ed insieme con questo passaggio della scarica, si vedeva la pressione aumentare, non ostante che i rubinetti lasciati a sè, tenessero ancora perfettamente il vuoto. Se non si elimina questa propagazione di una parte della scarica dal tubo al manometro e alla pompa, non è possibile di ottenere l'esaurimento degli elettrodi, che nelle prime esperienze, non ostante tutte le precauzioni prese, sembravano per ciò inesauribili.

Le cose cambiarono completamente quando pensai di avvolgere di stagnola un buon tratto del tubo di comunicazione tra il tubo Röntgen ed il manometro, in prossimità del tubo Röntgen medesimo, stabilendo poi una buona comunicazione di questa stagnola col suolo. Con questo artificio la parte di scarica, che tendeva a propagarsi al manometro, veniva arrestata

al luogo rivestito dalla stagnola, così che tutto il rimanente dell'apparecchio restava escluso da ogni azione elettrica: eliminata così questa gravissima causa di errore, i fenomeni di emissione e di assorbimento del gas da parte degli elettrodi presero una grande regolarità, che mi permise di compiere lo studio propostomi.

Non essendo qui possibile di riportare tutte le serie di misure fatte, anche se volessi limitarmi a quelle riferentisi all'esaurimento di un solo dei tubi sperimentati, mi limiterò a riferirne alcune che, opportunamente scelte, daranno una chiara idea del modo come il processo si svolge. Naturalmente questi fenomeni di emissione e di assorbimento dipendono essenzialmente dalla natura degli elettrodi: anzi si può dire che ogni tubo abbia un comportamento proprio, così che mentre qualche tubo dava fin da principio delle emissioni di gas notevolissime, qualche altro dava una emissione relativamente scarsa. Ciò non poteva dipendere che dal modo stesso con cui era stato preparato l'alluminio che serviva per gli elettrodi. I risultati in seguito riferiti furono ottenuti con un tubo che ha dato tra le più abbondanti emissioni del gas accluso.

Nei seguenti prospetti, nella colonna indicata con la lettera t sono riportati i minuti primi per i quali si è fatto funzionare il rocchetto; in quella indicata con la lettera w, il numero delle divisioni lette al manometro; in quella indicata con P, i valori di w^2, proporzionali alla pressione, il cui vero valore si otterrebbe dividendo, come si disse, w^2 per 12000; in quella indicata con Δ, il rapporto tra l'incremento o il decremento dei valori di P osservato, e il numero dei minuti durante il quale esso si è verificato.

L'anticatodo venne unito al catodo soltanto quando si procedeva a misure di ionizzazione per conoscere l'andamento della emissione dei raggi X: e ciò per non annerire con le scariche il tubo, cosa che avveniva rapidamente se si teneva l'anticatodo unito al catodo per la facile polverizzazione del platino specialmente a temperature elevate. Durante poi le serie di misure che si andavano facendo per la pressione, si manteneva costantemente chiuso il rubinetto adiacente alla pompa Gaede, così che quest'ultima restava esclusa, ed il gas che si sprigionava dagli elettrodi occupava un volume costante.

	Serie I			Serie II			Serie III			Serie IV			Serie V			Serie VI			Serie VII			Serie VIII			Serie IX		
t	w	P	Δ	w	P	Δ	w	P	Δ	w	P	Δ	w	P	Δ	w	P	Δ	w	P	Δ	w	P	Δ	w	P	Δ
0	36,0	1296		38,0	1444		31,5	992		37,4	1399		13,0	169		23,5	552		6,0	36		18.3	335		37,0	1369	
			1234			1056			377			487			50			108			364			49			280
1	50,3	2530		50,0	2500		37,0	1369		30,2	912		14,8	219		25,7	660		20,0	400		19,6	384		35,0	1089	
			417			562			119			131			25			48			256			25			114
3	58,0	3364		60,2	3624		40,1	1608		25,5	650		16,4	269		27,5	756		30,2	912		20,8	433		29,0	861	
			209			313			78			56			8			14			210			12			61
5	61,5	3782		65,2	4251		42,0	1764		23,2	538		16,9	286		28,0	784		36,5	1332		21,4	458		27,2	740	
			123			218			34			34			4			9			90			8			33
10	66,3	4396		73,0	5329		44,0	1936		19,2	369		17.5	306		28,8	829		42.2	1781		22,3	497		24,0	576	
			62			110			20			14			1,4			1,2			43			1,4			5
20	70,8	5013		80,2	6432		46,2	2134		15,0	225		17,9	320		29,0	841		47,0	2209		22,6	511		23,0	529	
			27			62			9			3			0			0			14			0,4			1,5
30	72,7	5285		84,0	7056		47,1	2218		14,0	196		17,9	320		29,0	841		48.5	2352		22,7	515		22,7	515	
			15			43			4			0,5			0			0			2			0			0
50	74,8	5595		89,0	7921		47,6	2266		13,6	185		17.9	320		29.0	841		49,0	2401		22,7	515		22.7	515	
			10			23			0			0,4									0						
75	76,4	5837		92,2	8501		47,6	2266		13,2	174								49,0	2401							
			4			13						0,2									0						
100	77,0	5929		94,0	8836					13,0	169								49,0	2401							

La prima serie riportata, eseguita alla temperatura ordinaria poche ore dopo che il tubo Röntgen era stato saldato al tubo di comunicazione del manometro e della pompa, mostra in modo evidente che per il passaggio delle scariche del rocchetto si svolge dagli elettrodi di alluminio una notevole quantità di gas, così che la pressione è salita, in 75′, da 1296 (pari a 0,108 mm. di Hg.) a 5837 (pari a 0,486 mm. di Hg.): ma l'emissione va rapidamente diminuendo col crescere della pressione; e tende verso un valore limite, oltre il quale la emissione si arresta. A questa pressione esiste dunque uno stato di equilibrio tra il gas esterno e quello occluso in prossimità della superficie degli elettrodi: essa può servire come indice del progressivo esaurimento del tubo Röntgen, essendo manifesto che, per avere il tubo stabile, si deve raggiungere quella condizione di cose per la quale pressione di equilibrio debba essere proprio quella corrispondente alla massima emissione dei raggi X.

La seconda serie riportata è stata eseguita due giorni dopo, durante i quali si è proseguito il processo di esaurimento del tubo: a questo scopo, il tubo venne portato, durante questi due giorni e per alcune ore, a 200°, aiutando l'emissione del gas occluso negli elettrodi, e che avveniva spontaneamente per l'elevata temperatura, sia mandando di tanto in tanto le scariche del rocchetto, sia facendo funzionare la pompa in modo che la pressione rimanesse sufficientemente bassa (circa 0,09 mm. di Hg.). Dai valori riportati si vede che per il passaggio delle scariche la pressione è salita, nello stesso tempo di 75′, da 1444 (pari a 0,095 mm. di Hg.) ad 8501 (pari a 0,705 mm. di Hg.), dimostrandosi, così, che alla temperatura di 200° l'emissione del gas da parte degli elettrodi provocata dalle scariche è stata notevolmente superiore a quella ottenuta nella I^{a} serie a temperatura ordinaria, non ostante la notevole quantità di gas già eliminata nei due giorni precedenti. Questa seconda serie è molto interessante, perchè dimostra quale importanza abbia l'elevata temperatura nel conseguire un rapido esaurimento degli elettrodi del tubo.

La terza serie è stata eseguita il giorno successivo, mentre il tubo si trovava alla temperatura pure di 200°. Tra la seconda e terza serie si era proseguito il processo di esaurimento, mantenendo il tubo per diverse ore a 200°, mandando di tanto in tanto le scariche e mantenendo la pressione sufficientemente bassa. Come risulta dai valori riportati, la pressione sale, nel solito tempo di 75′, per l'azione delle scariche soltanto da 992 (pari a 0,083 mm. di Hg.) a 2266 (pari a 0,189 mm. di Hg.), dimostrando, col confronto della 2^{a} serie, che il processo di esaurimento degli elettrodi aveva già fatto sensibile progresso.

La quarta serie è di particolare interesse: essa venne fatta due giorni dopo la precedente, essendosi proseguito durante i medesimi il processo di esaurimento degli elettrodi. Dopo aver portato il tubo a 200°, e dopo averlo

tenuto per parecchie ore alla maggiore rarefazione possibile per il funzionamento della pompa, si escluse la pompa e si attese che la pressione del gas uscito dagli elettrodi sotto l'azione dell'elevata temperatura e con l'aiuto delle scariche del rocchetto, salisse ad un valore di circa 2500: indi si spensero le fiamme e, tolto l'involucro, si portò il tubo rapidamente alla temperatura ordinaria. La pressione del gas si ridusse, per il raffreddamento, a 1399 (pari a 0,117 mm. di Hg.). Fatto in seguito funzionare nuovamente il rocchetto, si sono eseguite le misure che sono riportate nella serie IV. Questa serie dimostra che gli elettrodi riassorbono, alla temperatura ordinaria e sotto l'azione delle scariche, il gas che, sotto l'azione delle scariche, avevano emesso a temperatura elevata, dando origine ad una rarefazione del tubo la quale raggiunse pressioni molto basse, cioè il valore di 169 (pari a 0,014 mm. di Hg); pressione alla quale si era già oltrepassata la massima emissione dei raggi X, ed il tubo si mostrava così indurito da non lasciare quasi più passare la scarica.

La quinta serie riportata fu eseguita nel giorno successivo: ed è pure importante, perchè dimostra che, dopo parecchie ore di riposo, gli elettrodi del tubo tornano ad emettere, sempre per azione delle scariche, del nuovo gas, il quale evidentemente non può che provenire dai più profondi strati di essi. Questa emissione si accentua se il riposo del tubo si prolunga, come lo dimostra la serie sesta fatta due giorni dopo la quinta: è omessa per brevità la serie fatta nel giorno intermedio, e nella quale la pressione era salita, da 320, a 522. Se però si confronta la serie sesta con la prima, risulta manifesto quale progresso sia stato fatto nell'esaurimento degli elettrodi del tubo e come questo esaurimento proceda regolarmente.

La serie VII fu fatta alla temperatura di 300°, cioè a temperatura molto più elevata delle precedenti. Essa dimostra come, anche quando gli elettrodi sembrano sufficientemente esauriti alla temperatura ordinaria, emettono ancora abbondante quantità di gas, a temperatura elevata: ma se si confronta questa serie ultima con le precedenti fatte a 200°, si vede come per il solo fatto di aver portato il tubo a temperatura più elevata di quelle prima adoperate, si accentui notevolmente l'emissione del gas dagli elettrodi: la pressione infatti è salita, in 75′, da 26 (pari a 0,003 mm. di Hg.) a 2401 (pari a 0,2 mm. di Hg.).

L'ottava e nona serie riportate servono a dimostrare che in ogni particolare condizione di esaurimento degli elettrodi vi è una pressione per la quale si stabilisce l'equilibrio tra il gas in essi contenuto e il gas interno. La serie ottava è una serie di emissione alla temperatura ordinaria, fatta dopo che il tubo era rimasto in riposo per molte ore: e si vede che la pressione sale lentamente per l'azione delle scariche, così che in 50′ si passa dal valore di 335 (pari a 0,028 mm. di Hg.) a 515 (pari a 0,043 mm. di Hg.). Riscaldato subito dopo il tubo a 280°, e aiutata l'emissione del gas

con le scariche fino a raggiungere il valore di 2500, lasciando naturalmente esclusa la pompa, si è in seguito ricondotto rapidamente il tubo alla temperatura ordinaria, alla quale la pressione si trovò ridotta, per il raffreddamento, a 1369 (pari a 0,114 mm. di Hg.). La serie nona mostra come siasi compiuto l'assorbimento del gas emesso; e si vede che la pressione, alla quale l'assorbimento si arresta, è precisamente quella di 515, alla quale si era anche arrestata la emissione del gas nella serie precedente.

Dal complesso di tutte le serie fatte si può dunque concludere:

1°) che gli elettrodi di alluminio dei tubi Röntgen, dopo essere stati in contatto con l'aria atmosferica, contengono occlusa una notevole quantità di gas che non si sprigiona spontaneamente alla temperatura ordinaria neppure nelle rarefazioni più spinte, ma che invece viene emessa per il passaggio delle scariche;

2°) che l'emissione del gas avviene spontaneamente a temperature elevate, ma anche in questo caso viene notevolmente facilitata per il passaggio delle scariche: e la quantità di gas che si sprigiona è tanto più notvole quanto più elevata è la temperatura;

3°) che il gas occluso incontra grandissima difficoltà per raggiungere la superficie degli elettrodi, anche a temperature elevate e a rarefazioni molto spinte;

4°) che in seguito a queste difficoltà gli elettrodi possono esaurirsi superficialmente in modo che la pressione rimanga stabile al passaggio della scarica anche per qualche giorno, finchè, cioè, il gas occluso negli strati più profondi non compensi, venendo alla superficie, l'esaurimento prodotto: raggiunta questa condizione, ricomincia per il passaggio delle scariche la emissione del gas;

5°) che ottenuto l'esaurimento superficiale, gli elettrodi riassorbono, sotto l'azione delle scariche e a temperatura ordinaria, il gas che sotto l'azione delle scariche avevano emesso a temperature elevate;

6°) che l'emissione e l'assorbimento dipendono dalle particolari condizioni di esaurimento nelle quali si trovano gli strati superficiali degli elettrodi.

Affinchè dunque un tubo diventi stabile per l'emissione dei raggi X, è necessario che il gas occluso in tutta la massa degli elettrodi sia in equilibrio permanente, anche quando il tubo è attraversato dalle scariche, col gas esterno e per quella pressione per la quale ha luogo la massima emissione dei raggi X medesimi: ed è appunto il conseguimento di questo stato di equilibrio del gas occluso in tutta la massa degli elettrodi col gas esterno alla pressione corrispondente al massimo dei raggi X, che costituisce, data la estrema difficoltà del gas di muoversi nell'interno degli elettrodi, l'operazione più lunga per la costruzione di un tubo Röntgen.

Se gli elettrodi non sono sufficientemente esauriti, il gas occluso negli strati più profondi raggiunse lentamente la superficie, e, per il passaggio delle scariche, lentamente si sprigiona: il tubo, che sembrava fatto, si rammolisce perchè lo stato di equilibrio ha luogo per una pressione superiore a quella per la quale la produzione dei raggi X è massima, rendendosi in tal modo inservibile. Se invece gli elettrodi sono troppo esauriti, il gas esterno viene lentamente occluso, e il tubo si indurisce non lasciando più passare la scarica rendendosi, in tal modo, per un altro verso inservibile.

La legge con la quale avviene la emissione e l'assorbimento del gas da parte degli elettrodi, è di natura esponenziale, come si riconosce facilmente portando i valori del tempo sulle ascisse, e quelli delle pressioni sulle ordinate, in una rappresentazione grafica su carta millimetrata.

L'emissione si compie sensibilmente con una legge della seguente forma:

$$P - B = (A - B)\,(1 - 10^{-bt}) \;,$$

dove b è una costante dipendente dalle unità di misura scelte e dalle condizioni del tubo, B il valore della pressione iniziale al tempo $t = o$, ed A il valore della pressione finale per $t = \infty$.

Similmente, l'assorbimento si compie con una legge della seguente forma:

$$P - A = (B - A)\,10^{-bt} ,$$

dove ancora b è una costante dipendente dalle unità di misura scelte e dalle condizioni del tubo, B il valore della pressione iniziale al tempo $t = o$, ed A il valore della pressione finale per $t = \infty$.

Stabilito così l'andamento generale dei fenomeni che si compiono negli ordinarî tubi Röntgen per quanto riguarda l'emissione e l'assorbimento del gas che si sprigiona dagli elettrodi di alluminio, ho creduto conveniente di esaminare come si comportasse l'aria sostituita nelle identiche condizioni al gas svolto dagli elettrodi di alluminio, e ciò allo scopo di stabilisce se il gas emesso dagli elettrodi di alluminio fosse appunto aria dai medesimi occlusa, ovvero fosse un gas differente.

Che il gas emesso dagli elettrodi fosse diverso dall'aria, appariva invero manifesto dall'aspetto stesso del tubo attraversato dalle scariche: è noto, infatti, che, se la scarica passa in un tubo contenente aria, la luce che invade il tubo, prima di raggiungere lo stato di emissione dei raggi X, è di colore rosa purpureo: invece la luce che si osservava nelle stesse condizioni quando la scarica attraversava il gas emesso dagli elettrodi, era del tutto diversa, e precisamente di un colore bianco azzurrognolo.

Per risolvere la questione, subito dopo la serie IV, già sopra riportata (serie che riguarda l'assorbimento, da parte degli elettrodi, del gas emesso dagli elettrodi medesimi), feci nel tubo, con la pompa Gaede, la massima

rarefazione possibile $\frac{1}{12000}$ di mm. di mercurio, e introdussi nel tubo una piccola quantità di aria ben secca, alla pressione iniziale di 3136, pari a 0,261 mm. di mercurio. Indi, esclusa la pompa, ho fatto una serie con le scariche. Nel seguente prospetto trovansi riportate, per maggiore chiarezza, la serie IV di assorbimento del gas emesso dagli elettrodi, e la serie dell'assorbimento dell'aria.

	Serie IV			Serie X		
t	w	P		w	P	
0	37,4	1399		56,0	3136	
1	30,2	912	487	51,5	2652	484
3	25,5	650	131	51,0	2601	26
5	23,2	538	56	51,0	2601	0
10	19,2	369	34	50,7	2570	6
30	14,0	196	9	49,2	2421	7,5
50	13,6	185	0,5	47,5	2256	8,2
75	13,2	174	0,4	45,6	2079	7,1
100	13,0	169	0,2	43,3	1875	8,2
125				41,2	1697	7,1
150				38,9	1513	7,4
175				36,3	1318	7,8
200				33,6	1129	7,6
225				30,7	942	7,5
250				27,4	751	7,6
275				24,6	605	5,8
300				22,0	484	4,8
325				19,0	361	4,9
350				16,0	256	4,2
375				14,0	196	2,4
400				13,8	190	0,2

La differenza tra il comportamento del gas emesso e quello dell'aria è evidente. Da prima l'aria subisce una brusca contrazione di volume, così che la pressione scende rapidamente, dal valore iniziale di 3136 (pari a 0,261 mm. di mercurio), al valore di 2601 (pari a 0,217 mm. di mercurio), indicando che sotto l'azione delle scariche l'ossigeno si combina con parte dell'azoto per dare origine a qualcuno degli ossidi dell'azoto: anche il colore della scarica in questi primi momenti subisce una profonda modificazione. Dopo, la pressione diminuisce proporzionalmente al tempo e, quindi, alla quantità di elettricità che attraversa il tubo: l'autorarefazione non avviene più con la legge prima stabilita, dimostrando che gli elementi dell'aria non vengono occlusi dagli elettrodi, come avveniva per il gas emesso, ma l'autorarefazione avviene con un processo differente, che probabilmente consisterà in un processo di combinazione chimica degli elementi stessi con gli elettrodi di alluminio.

I numeri riportati dimostrano, poi, che l'autorarefazione del tubo procede regolarmente, e solo a pressioni molto basse essa si compie più lentamente

sino a raggiungere un limite al quale si arresta: nel caso della serie riferita, la pressione minima raggiunta è di 190 (pari a 0,0158 mm. di mercurio), pressione alla quale ricomincerebbe l'emissione del gas che si sprigiona dagli elettrodi e che nel caso attuale era anche inferiore a quella per la quale si aveva la massima emissione dei raggi X.

Ad avvalorare questa interpretazione, che gli elementi dell'aria siano stati fissati e non assorbiti dagli elettrodi, sta il fatto che, riscaldando nuovamente il tubo ad alta temperatura e mandandovi le scariche, ciò che torna a liberarsi dagli elettrodi più non è aria ma il solito gas: la qual cosa ho potuto facilmente riconoscere dall'esame spettroscopico fatto per mezzo del tubo di Geissler unito al manometro. Nè poteva esservi dubbio di sorta, perchè lo spettro del gas che si sprigiona dagli elettrodi è costituito da poche righe che corrispondono alle seguenti lunghezze d'onda:

$$\lambda = 656{,}3 \ ; \ 606 \ ; \ 578 \ ; \ 558 \ ; \ 545 \ ; \ 515 \ ; \ 484 \ .$$

Delle azioni chimiche che si compiono sotto l'azione delle scariche tra gli elettrodi di alluminio ed il gas esterno dando luogo ad autorarefazioni del tubo che possono raggiungere pressioni estremamente basse, avrò modo di riferire in un'altra occasione: qui mi basta affermare che il gas che si sprigiona dagli elettrodi si comporta molto diversamente dell'aria.

Ma una ancor più notevole differenza tra il comportamento del gas occluso dagli elettrodi e il comportamento dell'aria, si ha dall'esame della emissione dei raggi X.

Riporto qui due delle serie fatte con gli elettrodi, quasi esauriti completamente, nelle seguenti condizioni: dopo avere riscaldato il tubo a più che 300° per alcune ore, ed aver aiutato l'emissione del gas residuo ancora contenuto negli elettrodi con le scariche, si è lasciato raffreddare rapidamente il tubo medesimo togliendone l'involucro di amianto. La pressione del tubo si trovò così portata a 1024 (pari a 0,085 mm. di Hg.). Indi, alla temperatura ordinaria, si mandarono nuovamente le scariche del rocchetto, avendo riunito l'anodo all'anticatodo. Il gas veniva, al solito, assorbito e la pressione decresceva; nello stesso tempo si misurava all'elettrometro la massima deviazione che esso presentava tenendo l'ago isolato mentre il rocchetto funzionava: questa deviazione misurava la ionizzazione prodotta dai raggi X emessi dal tubo.

Questa serie di misure è riportata nel seguente specchietto: nella prima colonna, indicata con w, si trovano i numeri letti nella provetta di Mac Leod; nella seconda, i valori di $P = w^2$ proporzionali alle pressioni: nella terza la deviazione Δ osservata all'elettrometro.

Subito dopo terminata questa serie, si è fatto il massimo vuoto con la pompa Gaede, e si mandò nell'apparecchio una piccola quantità di aria secca, regolando le cose in modo che la pressione dell'aria fosse inizialmente la

stessa di quella della serie precedente, e cioè 1024. La seconda serie riportata contiene appunto i valori w, di P e di Δ ottenuti con l'aria.

Serie I			Serie II		
w	P	Δ	w	P	Δ
32,0	1024	0	32,0	1024	0
30,8	949	0	27,2	740	0
29,6	876	34	23,0	529	0
28,0	784	126	19,0	361	46
26,8	718	182	18,0	324	126
25,5	650	240	16,8	282	229
24,2	586	286	15,8	250	294
23,5	552	306	14,8	219	332
22,0	484	340	14,1	199	**350**
21,0	441	350	12,7	161	300
20,2	408	**356**	12,2	149	180
19,4	376	346			
18,8	353	310			
18,0	334	200			

Dall'esame delle due serie si vede che l'andamento dei fenomeni è nei due casi lo stesso: i raggi X cominciano ad una determinata pressione, raggiungono un massimo, indi la loro intensità ritorna rapidamente a zero col diminuire della pressione perchè la scarica non attraversa più il tubo. Ma esiste una notevole differenza nei valori ottenuti nei due casi: quando cioè nel tubo si trova il gas emesso dagli elettrodi, i raggi X cominciano ad una pressione sufficientemente elevata, di circa 900 (pari a 0,075 mm. di Hg.); in seguito la loro emissione diventa più abbondante sino a raggiungere il massimo per una pressione di circa 400 (pari a 0,033 mm. di Hg.); indi rapidamente decresce, e, ad una pressione di circa 300 (pari a 0,025 mm. di Hg.), il tubo si spegne. Invece, con l'aria, l'emissione dei raggi X comincia ad una pressione molto inferiore, e cioè a 400 circa (pari a 0,033 mm. di Hg); aumenta con molta rapidità e raggiunge lo stesso valor massimo di prima per la pressione di circa 200 (pari a 0,017 mm. di Hg.); indi, pure molto rapidamente, diminuisce, e alla pressione di circa 130 (pari a 0,011 mm. di Hg.) la scarica non attraversa più il tubo.

Quel gas che così difficilmente si svolge dagli elettrodi e che rende così lungo il loro esaurimento sino a raggiungere quelle tali condizioni che rendono stabile il tubo per la massima emissione dei raggi X, si presenta

adunque, sia per lo spettro che fornisce, sia per il modo come viene riassorbito dagli elettrodi, sia per quanto riguarda il suo comportamento per la emissione dei raggi X, completamente diverso dall'aria.

Che cosa sia questo gas, se cioè esso sia uno degli ossidi dell'azoto proveniente per il diverso assorbimento da parte degli elettrodi dei due gas principali contenuti nell'aria, ovvero sia un gas alla cui formazione prenda parte qualche altro elemento contenuto come impurezza nell'alluminio non mi è possibile precisare non avendo potuto approfondire la ricerca spettroscopica: le osservazioni finora fatte non mi forniscono indicazioni sufficienti per un giudizio sicuro: ma su questo intendo compiere ulteriori esperienze.

Le due ultime serie riferite dimostrano ancora quale importanza abbia sulla pressione di massima emissione dei raggi X, ed in generale su tutto l'andamento dell'emissione dei raggi medesimi, la diversa natura del gas contenuto. Dal complesso però di tutte le serie fatte durante il processo di esaurimento del tubo, ho riconosciuto che le curve di emissione dei raggi X con la pressione variano continuamente e dipendono essenzialmente dalle condizioni superficiali degli elettrodi dai quali la scarica si diparte; solo ad esaurimento quasi compiuto la legge di emissione dei raggi X si presenta costante, così che i raggi X cominciano sempre alla stessa pressione che è pure costante: ma anche di questi fenomeni, che escono dai limiti di questa Nota, e che sono molto complessi, mi riserbo di riferire prossimamente.

Matematica. — *Sopra un sistema di equazioni algebriche.* Nota di A. Cecconi, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

In certe questioni di Statistica si presenta talvolta il problema che con linguaggio matematico si può esprimere nel modo seguente:

Dato un sistema di $m.n$ numeri reali a_{rs} disposti in righe ed in colonne, formanti cioè una matrice rettangolare, determinare $m+n$ quantità pure reali, $x_1, x_2, \dots, x_m$; $y_1, y_2, \dots, y_n$, per modo che valgano le eguaglianze:

$$(1)\qquad \begin{cases} x_i \sum_1^n {}_r\, a_{ir}\, y_r = A_i & (i=1,2,\dots,m) \\ y_j \sum_1^m {}_s\, a_{sj}\, x_s = B_j & (j=1,2,\dots,n) \end{cases}$$

nelle quali, A_i e B_j sono numeri assegnati tutti diversi da zero e legati dalla relazione

$$\sum_1^m {}_r\, A_r = \sum_1^n {}_s\, B_s = D\,.$$

Concettualmente la questione è esaurita, essendo ricondotta alla discussione

di un sistema di equazioni algebriche (di 2° grado), se non che i metodi generali di eliminazione sono in pratica inapplicabili. Era quindi necessaria la ricerca di un algoritmo che permettesse di calcolare, con quella approssimazione che più aggrada, almeno una soluzione del sistema di equazioni (1). Il metodo che andrò esponendo consente, sotto certe condizioni affatto restrittive per le applicazioni statistiche, il suddetto calcolo.

1. Conviene anzitutto osservare che, soddisfatte $n + m - 1$ equazioni, di necessità risulta soddisfatta anche la rimanente; e che, se

$$x_i = \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$
$$x_j = \beta_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

è una soluzione, ponendo

$$x_i = \varrho \cdot \alpha_i$$
$$y_j = \frac{1}{\varrho} \cdot \beta_j ,$$

ϱ designando un numero diverso da zero, si ottiene una nuova soluzione, che sarà però da riguardarsi come sostanzialmente coincidente con la prima. Inoltre, poichè per la natura stessa del sistema (1) non può alcuna delle α e delle β essere eguale a zero, si potrà sempre fare in modo, determinando opportunamente ϱ, che una delle incognite acquisti un valore arbitrariamente prefissato. Potremo quindi limitarci alla ricerca di quelle soluzioni per le quali è $y_n = 1$; e reciprocamente, assegnando una soluzione, supporre sempre ch'essa sia tale da attribuire all'incognita y_n il valore 1.

Nel seguito, una soluzione si dirà *uniforme*, se per essa tutte le incognite acquistano valori del medesimo segno.

2. Ciò premesso, dimostriamo che:

Se i coefficienti a_{rs} *e i termini noti* A_i *e* B_j *del sistema di equazioni* (1) *sono tutti diversi da zero e del medesimo segno, esiste una, ed una sola, soluzione uniforme.*

ESISTENZA DELLA SOLUZIONE UNIFORME. — Poniamo infatti:

$$y_1^{(0)} = y_2^{(0)} = \cdots = y_{n-1}^{(0)} = 0 ,$$

e consideriamo, per $p = 1, 2, \ldots$, le seguenti successioni:

$$x_i^{(p)} = \frac{A_i}{\sum_1^{n-1} {}_s\, a_{is}\, y_s^{(p-1)} + a_{in}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{2}$$

$$y_j^{(p)} = \frac{B_j}{\sum_1^{m} {}_r\, a_{rj}\, x_r^{(p)}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{3}$$

la legge di formazione delle quali è senz'altro manifesta dalla semplice ispezione dei secondi membri delle (2) e delle (3).

Si osservi, poi, che, essendo ogni $y_j^{(1)}$ diversa da zero, il denominatore di ciascuna $x_i^{(2)}$ è maggiore di quello della corrispondente $x_i^{(1)}$; perciò si ha:

$$x_i^{(1)} > x_i^{(2)} .$$

Ammesso ora come provato che, per ogni valore dell'indice i, sia

$$x_i^{(p-1)} > x_i^{(p)} ,$$

facilmente dimostreremo che vale una disuguaglianza analoga fra i termini $x_i^{(p)}$ e $x_i^{(p+1)}$. Infatti, basta notare, che per le (3), il denominatore di $y_j^{(p-1)}$ (j generico) supera quello del termine successivo $y_j^{(p)}$, e quindi è:

$$y_j^{(p-1)} < y_j^{(p)} ;$$

poichè allora, osservando che il denominatore di $x_i^{(p)}$ è minore di quello di $x_i^{(p+1)}$, ne scende subito che dev'essere

$$x_i^{(p)} > x_i^{(p+1)} .$$

Le $x_i^{(p)}$ costituiscono perciò m successioni decrescenti; e, conseguentemente, le $y_i^{(p)}$ rappresentano $n - 1$ successioni crescenti.

Ora si osservi che, se fra queste ultime ve ne fossero di divergenti, tutte le $x_i^{(p)}$ dovrebbero essere infinitesime. Ma poichè ciò è da escludersi, avendo sempre, per qualunque p,

$$\sum_1^m {}_r\, a_{rn}\, x_r^{(p)} > \mathrm{B}_n \text{ [1]},$$

si dovrà concludere che ogni $y_j^{(p)}$ tende ad un limite finito che indicheremo con β_j.

[1] Infatti, poichè è $y_j^{(p)} > y_i^{(p-1)}$, dalle (2) si ricava:

$$\sum_1^{n-1} {}_r \sum_1^m {}_s\, a_{sr}\, x_s^{(p)}\, y_r^{(p)} + \sum_1^m {}_r\, a_{rn}\, x_r^{(p)} > \sum_1^m {}_r\, \mathrm{A}_r ;$$

e dalle (3):

$$\sum_1^{n-1} {}_s \sum_1^m {}_r\, a_{rs}\, x_r^{(p)}\, y_s^{(p)} = \sum_1^{n-1} {}_s\, \mathrm{B}_s ,$$

donde, tenuta presente la relazione fra i termini noti A_i e B_j, scende:

$$\sum_1^m {}_r\, a_{rn}\, x_r^{(p)} > \mathrm{B}_n .$$

Dalle (2) risulta allora, che le successioni $x_i^{(p)}$ convergono verso limiti positivi

$$\alpha_i = \frac{A_i}{\sum_1^{n-1}{}_s\, a_{is}\,\beta_s + a_{in}} .$$

Se ne inferisce, passando al limite anche nelle (3), che, ponendo

$$\begin{aligned} x_i &= \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \\ y_j &= \beta_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1) \\ y_n &= 1 , \end{aligned}$$

si ottiene una soluzione uniforme del sistema di equazioni (1).

Unicità della soluzione. — Ammettiamo, ora, che esista un'altra soluzione uniforme:

$$\begin{aligned} x_i &= \mu_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \\ y_j &= \nu_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) , \end{aligned}$$

e ricordiamo che, per quanto abbiamo detto sopra, possiamo supporre $\nu_n = 1$, e quindi μ_i e ν_j positivi.

Avendo noi assunti tutti eguali a zero i valori degli elementi $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}, \ldots, y_{n-1}^{(0)}$, a norma delle (2) si avrà manifestamente:

$$x_i^{(1)} > \mu_i ;$$

e quindi, per le (3), anche

$$y_j^{(1)} < \beta_j .$$

Facendo ora un ragionamento induttivo analogo ad uno esposto precedentemente, possiamo provare che tutti i termini della successione $x_i^{(p)}$ sono maggiori di μ_i, e che ogni elemento della successione $y_j^{(p)}$ è minore di ν_j, donde scende che dev'essere

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha_i &\geq \mu_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \\ \beta_j &\leq \nu_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1). \end{aligned} \right.$$

Ma dovendo valere l'identità

$$\sum_1^m{}_r\, a_{rn}(\alpha_r - \mu_r) = 0 ,$$

i segni di disuguaglianza delle (4) non possono sussistere, e perciò la seconda soluzione coincide con la prima

c. d. d.

Come ovvia conseguenza di quanto venne dimostrato, abbiamo:

Se i termini noti del sistema di equazioni (1) *hanno tutti il medesimo segno opposto a quello comune ai coefficienti, esiste una, ed una sola, soluzione per cui tutte le x assumono valori negativi mentre tut le y assumono valori positivi.*

3. Stabilita la esistenza e la unicità della soluzione uniforme, osserviamo che nelle successioni (2) le $x_i^{(1)}$ acquistano ordinatamente i valori $\frac{A_i}{a_{in}}$. Mutando questi, si può dubitare che le successioni generate dalle formole ricorrenti (2) e (3) conservino la convergenza. Perciò dimostriamo che:

Qualunque siano i valori positivi che si attribuiscono agli elementi $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)}$, *si ha sempre*

$$\lim_{p=\infty} x_i^{(p)} = \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\lim_{p=\infty} y_j^{(p)} = \beta_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Infatti, essendo $c_1, c_2, \ldots, c_m$ dei numeri positivi qualunque, e posto

$$x_i^{(1)} = c_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

possiamo determinare m numeri h_i maggiori di -1, per modo che sia:

$$c_i = \alpha_i(1 + h_i).$$

Indichiamo con H un numero positivo arbitrario non minore del massimo degli h_i, ed analogamente con h un numero positivo minore di 1, ma, del resto, qualunque, purchè $-h$ non superi il minimo degli h_i. Necessariamente sarà

$$\alpha_i(1 - h) \leq c_i \leq \alpha_i(1 + \mathrm{H}),$$

dalle quali, tenuto presente che è

$$y_j^{(1)} = \frac{B_j}{\sum_1^m {}_r\, a_{rj}\, c_r},$$

scendono le disuguaglianze

$$\frac{\beta_j}{1 + \mathrm{H}} \leq y_j^{(1)} \leq \frac{\beta_i}{1 - h};$$

e posto

$$h_i^{(1)} = h\, \frac{A_i - a_{in}\,\alpha_i}{A_i - h a_{in}\,\alpha_i} \quad ; \quad \mathrm{H}_i^{(1)} = \mathrm{H}\, \frac{A_i - a_{in}\,\alpha_i}{A_i + \mathrm{H} a_{in}\,\alpha_i},$$

con facili semplificazioni si ricava:

$$\alpha_i(1 - h_i^{(1)}) \leq x_i^{(2)} \leq \alpha_i(1 + \mathrm{H}_j^{(1)}). \tag{4}$$

E poichè, come si verifica subito, se, per un determinato valore di $\varrho > -1$, il rapporto

$$\frac{\mathrm{A}_r - a_{rn}\,\alpha_r}{\mathrm{A}_r + \varrho a_{rn}\,\alpha_r}$$

è il massimo dei numeri

$$\frac{\mathrm{A}_i - a_{in}\,\alpha_i}{\mathrm{A}_i + \varrho a_{in}\,\alpha_i},$$

esso rimane il massimo, qualunque sia il valore che si attribuisce a ϱ, purchè maggiore di -1, dovranno valere le relazioni:

$$h_i^{(1)} \leq h_r^{(1)} = h\,\frac{\mathrm{A}_r - a_{rn}\,\alpha_r}{\mathrm{A}_r - h a_{rn}\,\alpha_r},$$

$$\mathrm{H}_i^{(1)} \leq \mathrm{H}_r^{(1)} < \mathrm{H}\,\frac{\mathrm{A}_r - a_{rn}\,\alpha_r}{\mathrm{A}_r},$$

che, ponendo, per brevità,

$$\tau = \frac{\mathrm{A}_r - a_{rn}\,\alpha_r}{\mathrm{A}_r - h a_{rn}\,\alpha_r} \quad , \quad \sigma = \frac{\mathrm{A}_r - a_{rn}\,\alpha_r}{\mathrm{A}_r},$$

equivalgono alle seguenti:

$$h_i^{(1)} \leq h\,.\,\tau = h^{(1)} \quad , \quad \mathrm{H}_i^{(1)} < \mathrm{H}\,.\,\sigma = \mathrm{H}^{(1)}.$$

Per le (5), abbiamo inoltre:

$$\alpha_i(1 - h^{(1)}) \leq x_i^{(2)} < \alpha_i(1 + \mathrm{H}^{(1)}),$$

alle quali risulta che i numeri $h^{(1)}$ e $\mathrm{H}^{(1)}$ soddisfanno, rispetto ai numeri $h_i^{(1)}$, alle medesime condizioni cui soddisfanno i numeri h ed H rispetto agli h_i.

In generale, ammesso di conoscere due numeri,

$$h^{(p-1)} = h\tau^{p-1} \quad , \quad \mathrm{H}^{(p-1)} = \mathrm{H}\sigma^{p-1},$$

tali che sia

$$\alpha_i(1 - h^{(p-1)}) < x_i^{(p)} < \alpha_i(1 + \mathrm{H}^{(p-1)}),$$

con un ragionamento del tutto analogo al precedente, che per brevità omettiamo, si può dimostrare la esistenza di un'altra coppia di numeri

$$h^{(p)} = h\tau^p \quad , \quad \mathrm{H}^{(p)} = \mathrm{H}\sigma^p,$$

tale che fra i numeri $\alpha_i(1 - h^{(p)})$ e $\alpha_i(1 + \mathrm{H}^{(p)})$ sia sempre compreso l'elemento $x_i^{(p+1)}$.

Notando, infine, che le successioni $h^{(p)}$ ed $H^{(p)}$ tendono a zero, perchè i numeri τ e σ sono entrambi minori dell'unità, concludiamo che, per un i generico, è

$$\lim_{p=\infty} x_i^{(p)} = \alpha_i ,$$

e, a norma delle (3), anche

$$\lim_{p=\infty} y_j^{(p)} = \beta_j .$$

c. d. d.

4. Se m numeri $c_1, c_2, \dots, c_m$, sono ordinatamente maggiori di α_1, $\alpha_2, \dots, \alpha_m$, diremo che costituiscono un'*emmupla di eccesso*, e similmente diremo che costituiscono un'*emmupla di difetto* se ciascun c_i è minore del valor limite corrispondente. È facile riconoscere che, partendo da un'emmupla di eccesso, le $x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_m^{(p)}$, costituiscono ancora emmuple di eccesso, mentre le $y_j^{(p)}$ sono minori dei relativi limiti; partendo invece da un'emmupla di difetto, le successive $x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_m^{(p)}$ formano emmuple di difetto, e le $y_j^{(p)}$ si mantengono tutte superiori ai corrispondenti limiti.

Abbiamo inoltre:

Condizione sufficiente perchè un dato sistema di valori c_i costituisca un'emmupla di eccesso, è che sia:

$$c_i > x_i^{(2)} . \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

Ciò, infatti, risulta subito dall'osservare che in tal caso, con un ragionamento esposto al n. 2, si dimostra che le successioni (2) sono tutte decrescenti.

In modo analogo si può provare che:

Condizione sufficiente perchè un dato sistema di numeri c_i costituisca un'emmupla di difetto, è che sia:

$$c_i < x_i^{(2)} . \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

5. Da quanto venne esposto si ricava un metodo per l'effettivo calcolo della soluzione uniforme del sistema di equazioni (1). Basterà infatti, assegnati m valori positivi arbitrarî per gli elementi $x_i^{(1)}$, servirsi delle formole 2) e (3) per la determinazione delle successive approssimazioni. Per rendere più breve il calcolo, converrà partire da valori quanto più prossimi è possibile ai valori limiti. A questo scopo possono essere di guida le seguenti osservazioni:

a) Badando alle (2) ed al fatto che dev'essere soddisfatta l'equazione

$$(6) \qquad \sum_1^m {}_r\, a_{rn}\, x_r = B_n ,$$

si riconosce che ciascuna α_i è minore del più piccolo dei numeri $\dfrac{A_i}{a_{in}}$ e $\dfrac{B_n}{a_{in}}$.

b) Se le colonne della matrice dei coefficienti del sistema di equazioni (1) sono fra loro proporzionali, ed in particolare, quindi, se sono fra loro eguali, è, come subito si verifica,

$$\alpha_i = \frac{A_i B_n}{a_{in} D} \quad , \quad \beta_j = \frac{B_j a_{rn}}{B_n a_{rj}} ,$$

nelle quali l'indice r è arbitrario, essendo, per l'ipotesi supposta, il valore del rapporto $\frac{a_{rn}}{a_{rj}}$ dipendente dal solo indice j.

c) Se i numeri c_i, che si attribuiscono alle $x_i^{(1)}$, soddisfanno alla (6), alcuni di essi sono *in generale* maggiori, e gli altri minori dei rispettivi limiti.

Tali sono, ad esempio, i numeri $\frac{A_i B_n}{a_{in} D}$.

6. Partendo da un'emmupla di eccesso, è facile assegnare un limite superiore dell'errore che si commette arrestandosi ad una approssimazione di un dato ordine p, quando cioè si assumono per le x_i e le y_j le determinazioni $x_i^{(p)}$ ed $y_j^{(p)}$ anzichè i rispettivi limiti α_i e β_j.

Siano c_i i valori attribuiti alle $x_i^{(1)}$ e sia g_i un'emmupla di difetto. Indichiamo con $\varepsilon_i^{(p)}$ la differenza $x_i^{(p)} - \alpha_i$, con R il maggiore dei numeri $c_i - g_i$ e poniamo

$$g_i = \frac{A_i}{a_{in}} q_i ,$$

con che le q_i risultano necessariamente frazioni proprie.

Tenuto presente quanto venne esposto al numero 3, ed osservato che il prodotto $H\alpha_i$ può sempre supporsi minore di R, sarà:

$$\varepsilon_i^{(p)} < H\alpha_i \left(\frac{A_i - a_{in}\alpha_i}{A_i} \right)^{p-1} < R \left(\frac{A_i - a_{in} g_i}{A_i} \right)^{p-1} < R(1 - q_i)^{p-1} .$$

Matematica. — *Sulla definizione di arco di una curva e dell'integrale di Weierstrass, che si presenta nel calcolo delle variazioni.* Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Corrispondente O. TEDONE.

I risultati di questa Nota non sono completamente nuovi; li pubblico, perchè la seguente dimostrazione è semplicissima, e, senza artificio alcuno, giunge ai risultati più generali nel modo più breve.

Siano $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ funzioni continue a variazione limitata, le quali nell'intervallo $a \leq t \leq b$ definiscono una curva continua rettificabile. L'arco s di questa curva è dato da $\int \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\, dt$, allora, e allora soltanto, che $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ siano assolutamente continue. Questo teorema, ottenuto con successive generalizzazioni da Lebesgue, De la Vallée-Poussin e Tonelli, si può (Tonelli) dimostrare facilmente con un semplice artificio dovuto al De la Vallée-Poussin.

Possiamo in tal caso assumere al posto del parametro t il parametro s, o, senz'altro, supporre $t=s$.

Consideriamo una poligonale P inscritta nella curva, avente i vertici successivi nei punti $t_1=a$, $t_2>t_1$, $t_3>t_2$, ... , $t_n=b$. Al variare della P in modo che *la massima delle* $t_{n+1}-t_n$ *tenda a zero*, il perimetro di P *avrà per limite la lunghezza* $b-a$ *dell'arco di curva dato.*

Sia P una delle nostre poligonali; noi potremo ancora definire le coordinate di un suo punto come date da equazioni $x=\bar{x}(t)$, $y=\bar{y}(t)$, $z=\bar{z}(t)$ (per $a \leq t \leq b$) in molteplici modi. E noi fisseremo che un vertice della poligonale, il quale è pure un punto della curva $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ data, sia definito dallo stesso valore di t, vuoi come punto della curva, vuoi come punto della poligonale; che cioè, nelle nostre notazioni, sia $x(t_r)=\bar{x}(t_r)$, $y(t_r)=\bar{y}(t_r)$, $z(t_r)=\bar{z}(t_r)$ per $r=1,2,\dots,n$. E ancora fisseremo che per $t_r \leq t \leq t_{r+1}$ le $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$, $\bar{z}(t)$ siano funzioni lineari della t. Con queste convenzioni, data la poligonale P, restano completamente individuate le $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$, $\bar{z}(t)$. Tra i punti di P e i punti della data curva resta così definita una corrispondenza, in cui due punti sono considerati corrispondenti quando corrispondono ad uguali valori del parametro t. In questa corrispondenza i vertici di P corrispondono a se stessi.

Noi ora proveremo che: *Se* P *varia così che la massima delle* $t_{r+1}-t_r$ *tenda a zero*, per ogni valore di t, per cui esistono e sono finiti $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$, cioè *per quasi tutti i valori di* t, *è*

$$\lim \bar{x}'(t)=x'(t) \;,\; \lim \bar{y}'(t)=y'(t) \;,\; \lim \bar{z}'(t)=z'(t) .$$

In altre parole, le derivate di x, y, z calcolate in un punto della poligonale P hanno per limite le derivate analoghe calcolate nel punto corrispondente della curva data.

Sia t un valore per cui esista $x'(t)$. Il punto corrispondente della curva, e il punto omologo di P, si troveranno rispettivamente su un archetto di tale curva e su quel lato di P che ne congiunge gli estremi. Siano t_r, t_{r+1} i due vertici estremi comuni di tale archetto e di tale lato. Senza escludere che il punto considerato sia esso stesso un vertice di P, sarà $t_r \leq t \leq t_{r+1}$. La derivata $\overline{x}'(t)$ è costante sul lato considerato della nostra poligonale, e vale

$$\overline{x}'(t) = \frac{\overline{x}'(t_{r+1}) - \overline{x}'(t_r)}{t_{r+1} - t_r} = \frac{x(t_{r+1}) - x(t_r)}{t_{r+1} - t_r}.$$

Ora

$$x(t_{r+1}) = x(t) + (t_{r+1} - t)\, x'(t) + \varepsilon(t_{r+1} - t)$$
$$x(t_r) \;\; = x(t) - (t - t_r) \quad x'(t) - \eta(t - t_r),$$

dove ε, η tendono a zero con $t_{r+1} - t_r$. Dunque

$$\overline{x}'(t) = x'(t) + \frac{\varepsilon(t_{r+1} - t) + \eta(t - t_r)}{t_{r+1} - t_r} = x'(t) + \varepsilon + (\eta - \varepsilon)\frac{t - t_r}{t_{r+1} - t_r}.$$

Osservando che $0 \leq \dfrac{t - t_r}{t_{r+1} - t_r} \leq 1$, se ne deduce che, per $t_{r+1} - t_r = 0$, è appunto $\overline{x}'(t) = x'(t)$, ecc., come volevasi provare.

L'applicazione all'integrale di Weierstrass è immediata.

Sia $f(x, y, z; x', y', z')$ una funzione finita e continua e quindi anche limitata, fino a che (x, y, z) varia in un certo dominio Γ, e x', y', z' soddisfano alla $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$. La f sia positivamente omogenea di grado 1; cioè, per ogni valore del numero $k > 0$, sia

$$f(x, y, z; x', y', z') = f(x, y, z; kx', ky', kz').$$

Sia C una curva rettificabile interna a Γ, di cui $x = x(s), y = y(s)$, $z = z(s)$ definiscano un punto generico A, in funzione dell'arco s misurato da un estremo di C fino al punto A. Lo $J = \int f(x, y, z; x', y', z')\, ds$, *esteso a tale curva* C, *è, secondo Weierstrass, il limite dell'integrale analogo relativo ad una poligonale* P *inscritta in* C, quando il massimo lato di P tende a zero. Evidentemente questa definizione non muta se poniamo le equazioni parametriche di P sotto la forma $x = \overline{x}(t), y = \overline{y}(t), z = \overline{z}(t)$,

dove t è il parametro sopra definito, e consideriamo J come il limite dell'integrale (calcolato secondo Riemann)

$$\int f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}; \overline{x}_t', \overline{y}_t', \overline{z}_t')\, dt \tag{1}$$

esteso a P, quando il massimo lato di P tende a zero.

Ora è ben evidente che $\overline{x}'^2(t) + \overline{y}'^2(t) + \overline{z}'^2(t) \leq 1$.

Quindi $f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}; \overline{x}', \overline{y}', \overline{z}')$ è *limitato*, se la poligonale P ha i lati così piccoli che ogni suo punto appartenga a $\boldsymbol{\Gamma}$. Per un noto teorema del Lebesgue, il limite di (1) coincide con l'integrale del $\lim f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}; \overline{x}', \overline{y}', \overline{z}')$ *calcolato al modo del Lebesgue*. E per i nostri risultati precedenti ($\lim \overline{x}' = x'$, ecc.), ne concludiamo:

Per le curve rettificabili, l'integrale di Weierstrass è uguale all'integrale del Lebesgue [1].

Meccanica. — *Nuovi tipi di onde periodiche permanenti e rotazionali.* Nota II di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

6. Per integrare la (15) [2],

$$\dot{\eta}^2 = \frac{2}{\varrho}(\eta - 1)(k - \eta)(\eta + k'), \tag{15}$$

[1] Questo teorema è stato per tutt'altra via ottenuto, in casi meno generali, dal prof. Tonelli nel tomo 32 (1911) dei Rendic. del Circ. matem. di Palermo; e in questi Rendic. 14 aprile 1912. In casi particolari il prof. Tonelli ha dimostrato, in più, che la rettificabilità di C è condizione necessaria affinchè l'integrale di Weierstrass sia finito.

[2] L'equazione differenziale del profilo delle onde « cnoidali » di Korteweg e De Vries è [cfr. Lamb, loc. cit., pag. 402]:

$$\dot{y}^2 = \frac{3g}{c^2 h^2}(y - l)(h_1 - y)(y - h_2),$$

dove h_1 e h_2 sono il massimo e il minimo dei valori di y, c la velocità di propagazione, e $l = \frac{c^2 h^2}{g h_1 h_2}$. Come si vede, questa equazione è del tipo (15). Tuttavia l'integrazione della (15) non si può far dipendere da quella precedente fatta da Korteweg e De Vries, e conduce, per conseguenza, ad un profilo d'onda diverso. La ragione sta nella circostanza che la costante k', che comparisce nella (15), è positiva [cfr. n. 4], mentre la costante corrispondente nell'altra equazione è $-l$, che è negativa. Gli autori, supposto infatti $h_2 < h < h_1$, pongono

$$\beta = \sqrt{\frac{4 h_1 h_2 l}{3(h_1 - l)}}, \quad k^2 = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - l},$$

e, integrando, trovano pel profilo dell'onda l'equazione

$$y = h_2 + (h_1 - h_2)\, cn^2 \frac{x}{\beta} \qquad [\text{mod } k].$$

giova sostituire, alla incognita funzione η di ξ, una nuova funzione incognita p, mediante la seguente posizione:

$$\eta = \frac{p+\alpha}{p+\beta}, \tag{18}$$

dove α e β rappresentano due costanti che mi riservo di fissare in seguito in modo opportuno.

Avendosi dalla precedente, derivando,

$$\dot{\eta} = \frac{\beta-\alpha}{(p+\beta)^2}\dot{p}, \tag{19}$$

la (15) si trasforma, per questa e per la (16), nella seguente:

$$\dot{p}^2 = \frac{2(k-1)(k'+1)}{\varrho(\alpha-\beta)}\left[p+\beta\right]\left[p+\frac{\beta k-\alpha}{k-1}\right]\left[p+\frac{\beta k'+\alpha}{k'+1}\right];$$

oppure, notando che, per le (14),

$$(k-1)(k'+1) = \varrho - 1,$$

$$\dot{p}^2 = \frac{2(\varrho-1)}{\varrho\,.\,(\alpha-\beta)}\left[p+\beta\right]\left[p+\frac{\beta k-\alpha}{k-1}\right]\left[p+\frac{\beta k'+\alpha}{k'+1}\right]. \tag{20}$$

Ciò posto, determiniamo α e β, mediante il seguente sistema di equazioni:

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha-\beta = \frac{\varrho-1}{2\varrho}, \\ &\beta + \frac{\beta k-\alpha}{k-1} + \frac{\beta k'+\alpha}{k'+1} = 0, \end{aligned}\right. \tag{21}$$

e ciò allo scopo, ben manifesto, di rendere $=4$ il coefficiente di p^3 nel secondo membro della (20), e di rendere nulla la somma delle radici dell'equazione $\dot{p}^2 = 0$.

Risolvendo il sistema (21), si ha, tenendo conto delle (14),

$$\alpha = \frac{5\varrho-2}{12\varrho} \quad , \quad \beta = \frac{4-\varrho}{12\varrho}. \tag{22}$$

Come si vede tale integrale è legato al fatto che, essendo $l > 0$ e $h_1 - l > 0$, β è reale. Nel caso nostro, l'integrale precedente non è applicabile, perchè darebbe per β un valore immaginario. D'altra parte, confrontando la precedente colla (28), si vede che le equazioni sono essenzialmente differenti, e quindi i profili delle nostre onde non sono *cnoidali*.

Posto quindi

$$(23)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\beta k-\alpha}{k-1}=\dfrac{(\varrho-4)\,k+5\,\varrho-2}{12\,\varrho\,(k-1)}=e_1\,, \\ -\beta=\dfrac{\varrho-4}{12\,\varrho}=\begin{cases} e_2 \text{ se } \varrho>1\,, \\ e_3 \text{ se } \varrho<1, \end{cases} \\ -\dfrac{\beta k'+\alpha}{k'+1}=\dfrac{(\varrho-4)\,k'-5\,\varrho+2}{12\,\varrho\,(k'+1)}=\begin{cases} e_3 \text{ se } \varrho>1\,, \\ e_2 \text{ se } \varrho<1\,, \end{cases} \end{cases}$$

dove ora è, in ogni caso,

$$e_1+e_2+e_3=0\,,$$

la (20) diviene

$$(24)\qquad p'^2=4\,(p-e_1)\,(p-e_2)\,(p-e_3)\,.$$

La p è dunque la funzione ellittica di Weierstrass, i cui invarianti g_2 e g_3 sono notoriamente legati a e_1, e_2, e_3 dalle relazioni

$$(25)\qquad \begin{cases} e_2\,e_3+e_3\,e_1+e_1\,e_2=-\dfrac{1}{4}\,g_2\,, \\ e_1\,e_2\,e_3=\dfrac{1}{4}\,g_3\,. \end{cases}$$

7. È facile verificare che è, in ogni caso:

$$(26)\qquad e_1>e_2>e_3\,,$$

Infatti, cominciamo a dimostrare che è sempre $e_1>0$. Il numeratore di e_1 è >0 se $\varrho>1$, ed è <0 se $\varrho<1$ [cfr. n. 5]; lo stesso dicasi del denominatore. Dunque, numeratore e denominatore di e_1 essendo sempre dello stesso segno, sarà $e_1>0$.

In quanto a e_2, esso è $\geqq 0$ se $\varrho\geqq 4$ e in tal caso è manifestamente $e_1>e_2$. Facciamo ora vedere che in ogni caso è

$$e_2-e_3>0\,.$$

Infatti, essendo, per le (23), nel caso $\varrho>1$,

$$e_3=-(e_1+e_2)=-\frac{(\varrho-4)\,k+2\,\varrho+1}{6\,\varrho\,(k-1)}\,,$$

sarà

$$e_2-e_3=\frac{f(\varrho)}{12\,\varrho\,(k-1)}\,,$$

avendo posto

$$f(\varrho)=(\varrho-4)\,(3k-1)+4\,\varrho+2\,.$$

È facile il vedere che $f(\varrho) > 0$; inquantochè è $f'(\varrho) = 3(k+1) > 0$ e $f(0) = 2$.

Dopo ciò potremo concludere che, se è $\varrho > 1$, e quindi [n. 5] $k > 1$, è $e_2 - e_3 > 0$. In modo analogo si vede che se è $\varrho < 1$, essendo allora $k < 1$, è $e_2 - e_3 > 0$.

Restano intanto dimostrate le diseguaglianze (26).

8. In ogni caso, dalle (23) scende che le radici e_1, e_2, e_3 della $\dot{p}^2 = 0$, si mantengono sempre reali; perciò il discriminante

$$\Delta = \{4(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)\}^2$$

è sempre positivo, e si annulla solo per $\varrho = 1$, valore che abbiamo escluso [n. 5].

In tali circostanze la funzione p ammette due periodi, 2ω e $2\omega'$, reale il primo e immaginario il secondo, definiti notoriamente dalle formule seguenti:

$$(27) \qquad \begin{cases} 2\omega = \displaystyle\int_{-e_1}^{+\infty} \frac{dp}{\sqrt{(p - e_1)(p - e_2)(p - e_3)}}, \\[2ex] \dfrac{2\omega'}{i} = \displaystyle\int_{-e_2}^{+\infty} \frac{dp}{\sqrt{(p - e_1)(p - e_2)(p - e_3)}}. \end{cases}$$

Quest'ultimo non ha, evidentemente, alcun interesse per noi.

Ciò posto, la (18) per l'ultime delle (14), definisce in modo completo il pelo libero λ, il quale ha per equazione

$$(28) \qquad y = h\frac{p+\alpha}{p+\beta}, \quad \text{dove} \quad p = p(\xi) = p\left(\frac{x}{h}\right),$$

essendo α e β definite in funzioni di ϱ mediante le (22).

La eliminazione di y tra la precedente e la (12),

$$a_1 = \frac{q}{y},$$

definisce la funzione $a_1\left(\frac{x}{h}\right)$; si ottiene così

$$(29) \qquad a_1 = \frac{q}{h}\,\frac{p+\beta}{p+\alpha}, \quad \text{dove} \quad p = p\left(\frac{x}{h}\right),$$

per la quale l'espressione (10)

$$\psi = a_1 y,$$

della funzione di corrente, diviene

$$\psi = \frac{q}{h}\,\frac{p+\beta}{p+\alpha}\,y\,. \tag{30}$$

Come si vede, si tratta di onde periodiche e di periodo $2\omega h$ definito dalla prima delle (27).

9. È interessante di stabilire la profondità del canale, cioè il valor medio delle altezze del pelo libero sul fondo del canale. Tale altezza media, che indicherò con H, sarà definita, a norma della (28), dalla seguente espressione:

$$\mathrm{H} = h\int_0^{2\omega} \frac{p+\alpha}{p+\beta}\,d\xi\,;$$

ma essendo, per le (22) e le (23),

$$\frac{p+\alpha}{p+\beta} = 1 + \frac{\alpha-\beta}{p+\beta} = \begin{cases} 1 + \dfrac{\varrho-1}{2\varrho}\,\dfrac{1}{p-e_2} & \text{se } \varrho > 1\,, \\[2ex] 1 + \dfrac{\varrho-1}{2\varrho}\,\dfrac{1}{p-e_3} & \text{se } \varrho < 1\,, \end{cases}$$

sarà

$$\mathrm{H} = 2\omega h + \begin{cases} \dfrac{\varrho-1}{2\varrho}\,h\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{d\xi}{p-e_2}\,, & \text{se } \varrho > 1\,, \\[2ex] \dfrac{\varrho-1}{2\varrho}\,h\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{d\xi}{p-e_3}\,, & \text{se } \varrho < 1\,. \end{cases} \tag{31}$$

Supposto $\varrho > 1$, si ha [1], tenendo presenti le (23),

$$\frac{1}{p-e_2} = \frac{p(\xi-\omega-\omega')-e_2}{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}$$
$$= (k-1)^2\,\frac{24\,\varrho^2 p(\xi-\omega-\omega') - 2(\varrho-4)\,\varrho}{3(1-\varrho)\,\{(\varrho-4)\,k+\varrho+2\}}\,,$$

dove ω' è definita dalla seconda delle (27); per questa da (31), si ricava

$$\mathrm{H} = 2\omega h\left\{1 + \frac{1}{3}\,\frac{(\varrho-4)(k-1)^2}{(\varrho-4)\,k+\varrho+2}\right\} \quad \text{per} \quad \varrho > 1\,. \tag{32}$$

Supposto $\varrho < 1$, allora essendo [2] per le (23):

$$\frac{1}{p-e_3} = \frac{p(\xi-\omega')-e_3}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)} = (k-1)^2\,\frac{24\,\varrho^2 p(\xi-\omega') - 2(\varrho-4)\,\varrho}{3(\varrho-1)\,\{(\varrho-4)\,k+\varrho+2\}}$$

da (31) si ricava in definitiva:

$$\mathrm{H} = 2\omega h\left\{1 - \frac{1}{3}\,\frac{(\varrho-4)(k-1)^2}{(\varrho-4)\,k+\varrho+2}\right\} \quad \text{per} \quad \varrho < 1\,. \tag{33}$$

(1) Cfr., ad es., Halphen, *Fonctions elliptiques* [Paris, 1886, vol. 1, pag 205].

(2) Cfr. Halphen, loc. cit.

Geografia fisica. — *Quarta relazione della spedizione scientifica nel Karakoram orientale*, trasmessa al Presidente dal capo della spedizione dott. Filippo De Filippi.

La spedizione lasciò la stazione di Suget nella valle del Karakash, a nord del Karakoram, nei primi giorni di settembre, per recarsi nella valle dell' alto Yarkand o Raskem Daria. valicando il colle Kug Art (4925 m.). Raggiunto il fiume a Kirghiz Jangal, ci dividemmo nuovamente in due gruppi. Il maggiore Wood risalì la valle per riunirsi a Kufelang con l'ing. Spranger e Petigax, e procedere con loro alla esplorazione dei due affluenti occidentali, di cui aveva constatato l'esistenza nel mese precedente.

Il dott. De Filippi, il prof. Abetti ed il marchese Ginori si diressero a valle con l'intenzione di raggiungere l'Oprang attraversando la catena Aghil.

Avevamo sperato che il mal tempo, di cui avevamo sofferto nell'estate, sarebbe cessato coll'autunno, ma fummo completamente delusi. Ogni giorno cadeva nuova neve sulle creste e pioggia nelle valli; l'atmosfera torbida e carica di vapori toglieva la vista dei monti e delle catene, rendendo oltremodo difficile e penoso il lavoro topografico. La conseguenza più grave di questo persistente cattivo tempo fu la mancata diminuzione autunnale dei fiumi, sulla quale avevamo contato e senza la quale è impossibile percorrere queste valli. Nei primi due giorni dopo lasciato Kirghiz Jangal, guadammo il Yarkand otto volte, in certi tratti dove la valle più ampia permetteva al fiume di dividersi in più rami. Più sotto, la valle si rinserrò in gola, e divenne impossibile di attraversare il fiume raccolto in un unico letto.

Con molte difficoltà, specie per il trasporto del bagaglio, riuscimmo a superare varî alti contrafforti del lato destro della valle e sei giorni dopo, lasciato Kirghiz Jangal, scendemmo a precipizio da uno di questi in faccia alla valle per la quale dovevamo salire al colle Aghil.

Fra noi ed essa correva però il fiume gonfio, torbido, violento e pieno di gorghi. Dopo aver speso un giorno intiero in vani tentativi, dovemmo persuaderci che era inutile sperare di poterlo traversare con la carovana. Solo qualche robusto cavallo riusciva a raggiungere l'altra riva a nuoto. I cammelli erano trascinati via.

Così, con grande rincrescimento, fummo costretti a rinunciare alla progettata esplorazione della valle Oprang.

Nel frattempo, la comitiva del maggiore Wood visitava, l'uno dopo l'altro, i due affluenti occidentali dello Yarkand. Contrariamente alle nostre previsioni, questi non provengono dai versanti settentrionali della catena del Karakoram, ma da una catena nevosa a settentrione di essa, la quale, probabilmente, separa il bacino dell'alto Yarkand da quello dell'Oprang. Quando sarà fatta la definitiva compilazione della nostra carta, potremo forse renderci conto dei rapporti di questa catena colla Aghil e col Karakoram.

In una di queste valli tributarie, e precisamente nella settentrionale, a circa cinque miglia sopra la sua confluenza con lo Yarkand, la comitiva esplorativa scoprì traccie del passaggio di uomini; alcuni esemplari del Corano, e poche lettere. Questa valle è una gola così stretta, che per giornate intiere si deve procedere nell'acqua del torrente; e sembra impossibile che essa sia mai stata una via di regolari comunicazioni. Tuttavia questa scoperta sembra dar fondamento alle tradizioni di una via diretta fra Kufelang e la valle Nubra di cui fan cenno molti antichi esploratori (G. W. Hayward, ecc,); ma che nessuno ha finora verificate. Coll'aiuto delle lettere da noi ritrovate, stiamo ora facendo una inchiesta a Yarkand e Kashgar, nella speranza di raccogliere qualche maggiore informazione.

Dal Raskem Daria le due comitive topografiche attraversarono per vie diverse il Kuen Lun occidentale, e pervennero direttamente a Kargalik e Yarkand.

Fra il 27 settembre e il 10 ottobre venne eseguita la stazione gravimetrica e magnetica di Yarkand, dove ricevemmo anche ottimamente i segnali di tempo radiotelegrafici trasmessi da Lahore. Il 15 ottobre giungevamo e Kashgar, dove ritrovavamo ospitalità europea nelle case dei consoli generali inglese e russo. I lavori geografici ci trattennero undici giorni. Grazie al metodo radiotelegrafico, si potranno determinare con grande esattezza le longitudini di Yarkand e di Kashgar, due stazioni importanti che hanno servito di base per tutto il lavoro topografico del Turkestan cinese.

Il 27 ottobre lasciavamo Kashgar per l'ultimo tratto di viaggio in carovana. In undici giorni attraversammo la complicata regione montuosa interposta fra Turkestan orientale e Turkestan russo. trovando i colli più alti (Terek Dawan) coperti già dalle prime nevi autunnali; e ad Andijan ritrovavamo la ferrovia, dopo quattordici mesi di viaggio per le vie carovaniere.

Nell'osservatorio di Taskent, compivamo l'ultima delle stazioni gravimetriche iniziate all'ufficio trigonometrico di Dehra Dun; ed il collegamento del sistema indiano con quello della Russia Asiatica era così completato.

L'Istituto topografico militare di Taskent ha cortesemente acconsentito a prendere in consegna il materiale scientifico strumentale della spedizione ed a trattenerlo fino a che siano ristabilite le vie normali di tras-

porti interrotte dallo stato di guerra. La spedizione ha recato con sè in Italia soltanto i cronometri, le lenti fotografiche, l'apparecchio gravimetrico, tutti i dati ed i documenti scientifici, le carte ed il materiale fotografico esposto.

Il comandante Alessio ed il prof. Abetti sono ora intenti ad eseguire l'ultima stazione gravimetrica all'Istituto idrografico della regia marina a Genova, con lo stesso apparecchio che ha servito a tutte le nostre osservazioni. La stazione di Genova è stata pure la nostra stazione di partenza. In questo modo tutto il sistema di stazioni gravimetriche dell'India, dell'Asia centrale e della Russia asiatica sarà collegato con una stazione fondamentale.

Riassunto generale dei lavori della spedizione.

La spedizione ha potuto svolgere intieramente il suo programma di ricerche, in sedici mesi e mezzo di lavoro.

Nel campo della geofisica, il sistema di stazioni eseguite dall'Ufficio Trigonometrico dell'India nei piani preimalaiani è stato collegato con quello stabilito nel Turkestan russo da quell'Ufficio Geodedico Militare, per mezzo di una catena di stazioni eseguite attraverso i grandi sistemi di monti interposti fra India occidentale ed Asia centrale, ed attraverso il Turkestan cinese. Tutto questo complesso sistema è collegato colla rete europea per mezzo della stazione fondamentale di Genova.

Le stazioni da noi eseguite furono quattordici: e, non ostante le difficoltà dovute alle condizioni eccezionali nelle quali si dovette spesso osservare, sono state condotte tutte col più rigoroso metodo scientifico. Vennero sempre osservati otto pendoli. L'apparato gravimetrico fu sempre adoperato senza supporto ed appoggiato generalmente sopra un grosso masso di pietra interrato, col quale si ottennero sempre variazioni minime del valore della flessione. Dove mancavano gli edificii, le osservazioni si fecero in una grande tenda appositamente costruita, nella quale le variazioni termiche si mantennero nei limiti desiderati. Vennero determinate con grande esattezza le coordinate geografiche di ogni stazione, e si raccolsero dati topografici del terreno adiacente, corredandoli con vedute e panorami fotografici. La spedizione era fornita di cronometri e di strumenti astronomici.

Per i caratteri eccezionalissimi della regione attraversata dalla spedizione, l'analisi delle determinazioni gravimetriche non può mancare di condurre ad interessanti constatazioni sulla influenza che le masse montane, l'altitudine ecc., esercitano sul valore della gravità. Le stazioni vennero eseguite ad altezze che variano fra 1500 e 5300 m. sul livello del mare.

In tutte le stazioni si fecero anche osservazioni magnetiche (inclinazione, declinazione e forza) ; ed a Skardu, approfittando della lunga sosta invernale, venne anche determinata la variazione magnetica diurna.

Dovunque la spedizione si fermò per le osservazioni geofisiche, si fecero regolari osservazioni meteorologiche, lanci di palloni-piloti e, quando il tempo lo permetteva, osservazioni di radiazione solare con varii pireliometri. Particolarmente notevoli sotto questo riguardo sono le stazioni di Skardu, dove si raccolsero regolarmente i dati meteorologici durante quattro mesi, nell'inverno 1913-14; e quella dell'altipiano Depsang, a 5300 metri di altitudine, dove si fecero ininterrotte osservazioni per due mesi e mezzo.

Per accordi presi coll'Ufficio Meteorologico Indiano, i lanci di palloni-piloti venivano eseguiti simultaneamente da varie stazioni dell'India, per modo che si spera di poter desumere dai dati d'assieme qualche conclusione intorno al regime dei venti, con speciale riguardo allo studio dei monsoni.

È difficile, od anzi impossibile, di riferire in modo intelligibile intorno al lavoro geografico, senza l'aiuto di carte o di illustrazioni; per cui mi limito a pochi cenni sommarii. L'estremità orientale della catena del Karakoram era, finora, molto incompletamente conosciuta. Verso il 1865, un topografo dell'Ufficio trigonometrico indiano, il Johnson, aveva fatto un rilevamento delle valli, attraverso le quali passa la via carovaniera fra il Ladakh e l'Asia centrale. Egli aveva veduto la fronte di un ghiacciaio dalla quale esce uno dei principali tributarii dell'Indo superiore, il fiume Shyok, ed aveva chiamato Remo questo ghiacciaio. Ma non aveva potuto determinarne l'estensione, nè la direzione o la disposizione delle valli in cui scende; nè accertare la posizione dello spartiacque. L'esplorazione di questo ghiacciaio e della porzione corrispondente del Karakoram fu il lavoro della spedizione nell'estate trascorso. Il Remo si rilevò come un ghiacciaio di proporzioni e di importanza inaspettate. Il bacino glaciale ha oltre 700 chilometri quadrati di superficie, ed è formato da tre grandi fiumane di ghiaccio, lunghe oltre 30 chilometri, che riempiono valli di 5-8 chilometri di larghezza. Il ghiacciaio ha caratteri molto singolari, e il suo bacino è come un termine di passaggio tra la valle e l'altipiano. Il fatto più interessante è senza dubbio quello che il Remo dà ad un tempo origine al fiume Shyok, tributario dell'Indo, le cui acque vanno all'Oceano Indiano, ed allo Yarkand, uno dei grandi fiumi che vanno a perdersi nelle sabbie dell'Asia Centrale.

L'esplorazione della zona limitrofa del Karakoram ha permesso di constatare in questa regione una grande incertezza dello spartiacque, la quale prelude senza dubbio ai bacini chiusi degli altipiani tibetani.

La scoperta delle sorgenti del fiume Yarkand ci condusse poi alla esplorazione sistematica di tutto il suo bacino superiore.

Questi lavori furono continuamente ostacolati dal persistente cattivo tempo. Tuttavia, grazie alla concorde attività di tutti, si poterono triangolare e rilevare quasi 5000 miglia quadrate di terreno.

Particolarmente interessanti furono le determinazioni di differenze di longitudine col metodo delle trasmissioni radiotelegrafiche di segnali di tempo. I segnali venivano trasmessi dalla stazione radiotelegrafica di Lahore, ed erano ricevuti simultaneamente dall'Ufficio Trigonometrico di Dehra Dun e da noi, nelle varie stazioni. Prima e dopo della trasmissione veniva determinato il tempo locale, con osservazioni stellari. In questo modo si potranno calcolare le longitudini con grande approssimazione e sarà possibile di determinare — coll'aggiunta della latitudine — la deviazione della verticale in tutte le stazioni eseguite nella valle dell'Indo e nella stazione sull'altipiano Depsang; mentre si otterranno esatte coordinate per le stazioni del Karakoram e dell'Asia centrale, utili sia per la correzione delle carte antiche, sia per il futuro lavoro topografico in quelle regioni.

La vasta zona montuosa interposta fra India occidentale ed Asia Centrale non ebbe alcuna cattiva influenza sulla trasmissione dei segnali radiotelegrafici, i quali vennero sempre percepiti chiarissimi, anche nelle lontane stazioni di Yarkand e di Kashgar.

Mi rimane a dire delle ricerche geologiche. Queste coprono una zona molto più vasta di quella compresa nell'itinerario della spedizione; gran parte del Baltistan e del Ladakh, alcuni dei grandi altipiani del Tibet Occidentale e l'estremità orientale del Karakoram. Fu raccolto un abbondante materiale litologico e molti fossili, grazie ai quali si potrà assegnare una data a molte delle formazioni da noi attraversate; e vennero studiati con particolare cura l'estensione ed il limite dei passati periodi di glaciazione. È da sperare che lo studio del materiale raccolto potrà condurre a qualche dato per una classificazione razionale di quei complicatissimi sistemi di monti, fondata sulla loro costituzione geologica.

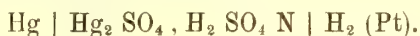
Il prof. Dainelli, nel corso delle molte escursioni geologiche, ha anche raccolto abbondante materiale per uno studio antropo-geografico del Baltistan e del Ladakh, la cui antropologia non è stata finora studiata sistematicamente, tanto che si hanno le più contraddittorie notizie sulle razze che vi abitano.

Infine, la spedizione ha riportato un abbondantissimo materiale illustrativo, riguardante tutti i campi della sua attività.

Chimica-fisica. — *Influenza delle basi organiche sul potenziale dell'elettrodo a idrogeno* [1]. Nota di ARRIGO MAZZUCCHELLI, presentata dal Socio E. PATERNÒ.

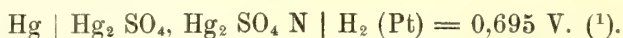
In un lavoro recentemente presentato a questa Accademia [2], ho trovato che l'aggiunta dei sali di varie basi organiche influenza sensibilmente il potenziale di riposo di un elettrodo di zinco immerso nella soluzione del suo solfato. Ho già annunziato la mia intenzione di estendere queste ricerche agli altri metalli più comuni, su alcuni dei quali sto già lavorando; ma intanto si presentava di particolare interesse la questione, se analoghi fenomeni si manifestino anche nel caso dell'elettrodo a idrogeno, il quale occupa una posizione eccezionale pel fatto che i cationi H^+ che esso emette sono quelli stessi che, sommandosi col gruppo amminico delle basi organiche, dànno origine ai cationi di queste. Con la presente Nota rendo conto dei risultati ottenuti in proposito.

Nelle mie esperienze ho misurato, col solito metodo di compensazione, mediante un elettrometro capillare che dava 0,001 V., e una pila Weston come normale, il potenziale dell'elemento

$$Hg \mid Hg_2\,SO_4\,,\, H_2\,SO_4\ N \mid H_2\ (Pt).$$

L'elettrodo a idrogeno era del tipo di Böttger [3] (ma con elettrodi in platino, invece che di oro); la lamina di platino era stata platinata elettroliticamente con la nota soluzione di Lummer e Kurlbaum; l'idrogeno era ottenuto da zinco e acido solforico, e veniva depurato attraverso una soluzione di $KMnO_4$, acidulata con ac. solforico. Il potenziale assumeva un valore costante, in meno di una diecina di minuti. Non si tenne conto della tensione di vapore dell'acqua alla temperatura ambiente (verso 14°) nè della pressione barometrica giornaliera, poichè quasi tutte le misure furono fatte in modo comparativo, prima misurando il potenziale dell'elettrodo a idrogeno in soluzione solforica pura, e poi aggiungendo il solfato organico, e ripetendo la misura. L'elettrodo a mercurio era contenuto in un recipiente della forma consueta [4], unito mediante un sifone, da cui si faceva sgocciare un po' di liquido alla fine di ogni misura, col bicchierino dove era l'elettrodo a idrogeno, e nel quale si facevano le aggiunte.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto chimico dell'Università di Roma.
[2] Seduta del 20 dicembre 1914.
[3] Z. ph. Ch., *24*, 260.
[4] Ostwald, Messungen.

Siccome ambedue gli elettrodi erano immersi nella stessa soluzione, non esisteva forza elettromotrice di contatto liquido, la quale peraltro doveva manifestarsi dopo che si era aggiunto al liquido dell'elettrodo a idrogeno una soluzione titolata del solfato organico, o anche (a seconda della convenienza pratica) il solfato allo stato solido. Per avere una idea dell'importanza di questa f. e. m., feci saggi comparativi, diluendo un poco l'acido dell'elettrodo a idrogeno, o addizionandovi un po' di solfato potassico (elettrolito estraneo, ma sicuramente senza influenza sul potenziale elettrodico), ovvero diluendo e aggiungendo solfato potassico contemporaneamente, come è espresso dagli schemi seguenti, di cui il primo corrisponde all'elemento senza alcune aggiunte:

$$Hg \mid Hg_2\,SO_4,\ Hg_2\,SO_4\ N \mid H_2\,(Pt) = 0{,}695\ V.$$ [1].

Come si vede, si tratta di variazioni abbastanza piccole: e poichè nelle misure effettive le diluizioni e le aggiunte di solfati organici ebbero luogo per un ammontare assai minore, possiamo con sicurezza affermare che divergenze dal valore normale della f. e. m. superiori a quelle sopra riportate sono senz'altro da attribuire ad azione specifica delle varie basi sul processo elettrodico.

E ora riporto senz'altro in forma di tabelle i risultati ottenuti: nella testata è indicata la composizione del liquido intorno all'elettrodo a idrogeno, quale veniva a risultare dopo l'aggiunta della soluzione titolata o del solfato organico solido; nella colonna *Tempo* sono indicati i minuti decorsi dopo l'aggiunta; nell'altra « F. E. M. » il risultato ottenuto col metodo di compensazione. Nei casi (e sono i più) dove, prima di aggiungere la base, si determinò la f. e. m. dell'elemento in stato normale (e cioè secondo lo schema I), il valore ottenuto è riportato coll'indicazione *s. a.*

I.

H_2SO_4 0,974 N + 0,3 °/₀ *p. bisolfato chinina*

Tempo	F. E. M.
—	0,692 s. a.
8	0,624
30	0,621
165	0,666

II.

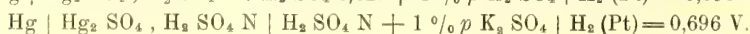
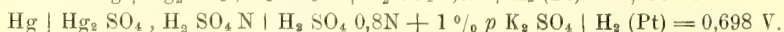
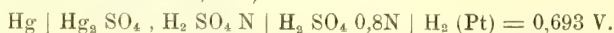
H_2SO_4 N + 0,5 °/₀ *p. bisolfato cinconina*

Tempo	F. E. M.
—	0,700 s. a.
15	0,682
50	0,682

[1] Lo stesso valore fu osservato da Wilsmore a 25° (ved. Abegg-Auerbach, Messungen elektromotorischen Kräfte, 118).

$$Hg \mid Hg_2\,SO_4\,,\ H_2\,SO_4\ N \mid H_2\,SO_4\ 0{,}8N \mid H_2\,(Pt) = 0{,}693\ V.$$

$$Hg \mid Hg_2\,SO_4\,,\ H_2\,SO_4\ N \mid H_2\,SO_4\ 0{,}8N + 1\ \%\ p\ K_2\,SO_4 \mid H_2\,(Pt) = 0{,}698\ V.$$

$$Hg \mid Hg_2\,SO_4\,,\ H_2\,SO_4\ N \mid H_2\,SO_4\ N + 1\ \%\ p\ K_2\,SO_4 \mid H_2\,(Pt) = 0{,}696\ V.$$

III.

H_2SO_4 N + 0,5 % *p. solfato brucina*

Tempo	F. E. M.
—	0,696 s. a.
15	0,668
25	0,674
35	0,678
45	0,678

IV.

H_2SO_4 N + 0,5 % *p. solfato veratrina*

Tempo	F. E. M.
—	0,696 s. a.
5	0,692
17	0,692
25	0,692
40	0,692

V.

H_2SO_4 0,92 N + 0,7 % *p. solfato coniina*

Tempo	F. E. M.
—	0,696 s. a.
3	0,690
20	0,692
40	0,692
70	0,696
90	0,696

VI.

H_2SO_4 0,97 N + 0,56 % *p solfato idrastina*

Tempo	F. E. M.
—	0,696 s. a.
20	0,696
30	0,696
40	0,696

VII.

H_2SO_4 0,975 N + 0,6 % *p solfato chinolina*

Tempo	F. E. M.
—	0,695 s. a.
5	0,676
7	0,682
13	0,685

VIII.

H_2SO_4 0,975 N + 0,73 % *p. solfato lutidina*

Tempo	F. E. M.
—	0,695 s. a.
13	0,694
51	0,693

IX.

H_2SO_4 0,955 + 0,70 % *p. solf. dimetilanilina*

Tempo	F. E. M.
13	0,686
25	0,686

X.

H_2SO_4 N + 0,5 % *p. solfato fenilidrazina*

Tempo	F. E. M.
15	0,650
25	0,653
30	0,667
75	0,672
85	0,679
105	0,682

XI.

H_2SO_4 N + 0,5 % *p. saponina*

Tempo	F. E. M.
—	0,697 s. a.
10	0,697
20	0,698
30	0,698

XII.

H_2SO_4 N + 0,5 % *p. gelatina*

Tempo	F. E. M.
15	0,696
25	0,696

XIII.

H_2SO_4 N + 1 % *amido solubile*

Tempo	F. E. M.
15	0,696
45	0,696
50	0,696

Ai numeri precedenti possiamo far seguire brevi osservazioni.

Le basi organiche hanno effettivamente una azione sul potenziale dell'elettrodo a idrogeno, rendendolo più *nobile*, appunto come si era precedentemente esservato nel caso dello zinco. La loro attività varia poi specificamente da sostanza a sostanza (si confrontino, fra gli alcaloidi propriamente detti, le tabelle I, II, III, di fronte alle IV, V, VI); è però notevole che, fra le basi di costituzione più semplice, la chinolina e la dimetilanilina (VII, IX), che influenzano molto la deposizione catodica dello zinco, si mostrano pure assai attive di fronte all'elettrodo a idrogeno. Eccezionalmente attiva è la fenilidrazina, per la quale peraltro si può sospettare una azione depolarizzante propriamente chimica.

L'azione deprimente alle basi si manifesta sempre allo stesso modo: e cioè più energica nei primi tempi, per affievolirsi (più o meno lentamente) in seguito.

Ho limitato in ogni caso le misure a qualche diecina di minuti, perchè non sembra dover essere particolarmente interessante ciò che avviene dopo un tempo assai lungo; sapendosi, infatti, che i catalizzatori (in senso lato) alterano la velocità dei processi, ma non il loro equilibrio definitivo, è ovvio di indurne che al limite dovrà stabilirsi il potenziale normale. Del resto, misure di lunga durata potran sempre farsi, qualora se ne presenti la convenienza.

Ho fatto alcune misure con sostanze colloidi (gelatina, amido) o capaci di concentrarsi alla superficie libera dei liquidi (saponina, che dava abbondante schiuma di grosse bolle colla corrente di idrogeno), sia per avere un termine di confronto, sia in vista delle osservazioni, più che altro qualitative, di C. Marie [1], il quale avrebbe trovato che la gelatina fa aumentare la tensione di deposito elettrolitica dell'idrogeno. Nel nostro caso le tre sostanze hanno una azione quasi nulla, ciò che può stare in relazione col fatto che la diffusione degli joni, e dei cristalloidi in genere, non è notevolmente influenzata dai colloidi.

[1] Compt. rend. *147*, 1908, (1400-1402).

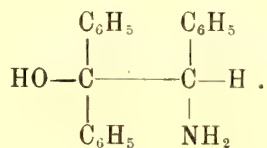
Per quanto concerne invece l'azione delle basi, non è facile darne una interpretazione completa: a una decomposizione elettrolitica del sale, con liberazione della base, che si deporrebbe sul catodo [come ho supposto nel caso dello zinco ([1])], in questo caso non può evidentemente pensarsi. In quanto le variazioni della f. e. m. corrispondono a una diminuzione della massa attiva dell' H_2, esse accennano a una diminuzione nell'attività del nero di platino come trasportatore di idrogeno, e l'effetto perciò sarebbe da ravvicinarsi agli « avvelenamenti » dei metalli colloidali ([2]), processi, del resto, assai oscuri nel loro meccanismo, ma dove in ogni caso ha una parte assai importante l'assorbimento superficiale. Poichè nell'assorbimento dei sali da parte delle superficie solide spesso la parte basica viene più assorbita della acida (valga ad es. il noto caso dell'$Mn\,O_2$), è concepibile che anche in questo caso sia assorbita soprattutto la base libera.

Ma questo fenomeno potrà essere pienamente apprezzato solo in correlazione cogli studî che ho in corso sull'influenza delle basi sui potenziali elettrodici dei metalli; in questa Nota mi basta di aver reso noto il fatto sperimentale.

Mi è grato di ringraziare lo studente signor Di Giorgio, della cui zelante opera mi sono valso nella esecuzione delle misure sperimentali.

Chimica. — *Sulla costituzione del trifenil-ammino-etil-alcool ottenuto per azione della luce* ([3]). Nota di LYDIA MONTI, presentata dal Socio E. PATERNÒ.

Nella Nota IX ([4]) *Sintesi in chimica organica per mezzo della luce* il prof. Paternò descrisse un composto della formula $C_{20}\,H_{19}\,ON$ che ottenne per azione della luce sopra una mescolanza di benzofenone e benzilammina. Per analogia con altre simili reazioni, ammise allora che questo composto si fosse formato per condensazione enolica fra il gruppo CO del benzofenone e il gruppo CH_2 della benzilammina, e che avesse la costituzione di trifenil-ammino-etil-alcool:

$$\begin{array}{ccc} & C_6H_5 & C_6H_5 \\ & | & | \\ HO- & C\text{———} & C-H\,. \\ & | & | \\ & C_6H_5 & NH_2 \end{array}$$

([1]) loc. cit.

([2]) Cfr. Leblanc, *Die elektrcm. Kräfte dsr Polarisation*, Halle, 1910, (39).

([3]) Lavoro eseguito nell' Istituto chimico della R. Università di Roma.

([4]) Gaz. Ch. It., *44* (1) 247 (1914).

Siccome prima di allora questa sostanza non era stata ottenuta per altra via, non era inutile cercare di dimostrarne la costituzione. Perciò il prof. Paternò mi dette un campione di tale sostanza perchè cercassi di trasformarla in qualche corpo noto. La via migliore mi sembrò la eliminazione dell'azoto per mezzo dell'acido nitroso, perchè in tal modo avrebbe dovuto ottenersi il trifenil-glicol di Gardeur [1] o qualche suo prodotto di trasformazione che fosse conosciuto.

Gr. 2 di sostanza si disciolgono in circa 25 cc. di acido acetico: se alla soluzione raffreddata si aggiungono circa 2 gr. di nitrito sodico sciolto in poca acqua, subito si svolgono bollicine gassose. Il miscuglio limpido di color giallo chiaro si fa bollire finchè non si vedono più vapori nitrosi; poi si aggiunge acqua e si lascia raffreddare: si deposita una sostanza bianco-giallastra voluminosa che si fa cristallizzare più volte da alcool bollente.

La sostanza così purificata si presenta allora in aghetti bianchi fusibili a 134-136°.

La sostanza seccata a 100° fino a peso costante dette all'analisi i seguenti risultati:

Sostanza gr. 0,2730;	CO_2 gr. 0,8775;		H_2O gr. 0,1468		
Donde $^0/_0$	Trovato	C	87,66	H	5,90

I risultati analitici conducono dunque alla formula $C_{20}H_{16}O$ per la quale si calcola.

C	88,23	H	5,88

Questa sostanza in tutte le sue proprietà è identica a quel prodotto di disidratazione del trifenil-glicol ottenuto allo stato impuro da Klingermann [2] e studiato poi da Delacre [3], da Collet [4] e da Biltz [5].

Il prof. Paternò e Forlì-Forti [6] l'ottennero pure riscaldando con alcool in tubi chiusi a 200° il monoacetato del trifenil-glicol, preparato per azione della luce sopra una mescolanza di benzofenone ed acetato di benzile.

Ho potuto confermare che la sostanza da me preparata è veramente identica a tale prodotto di disidratazione del trifenil-glicol, facendone, col metodo descritto da Biltz, *l'acetil derivato*, per riscaldamento con anidride acetica ed acetato sodico. Ho ottenuto così un prodotto, che cristallizzato da acido acetico diluito, fonde a 101-103°, identico a quello descritto da Biltz

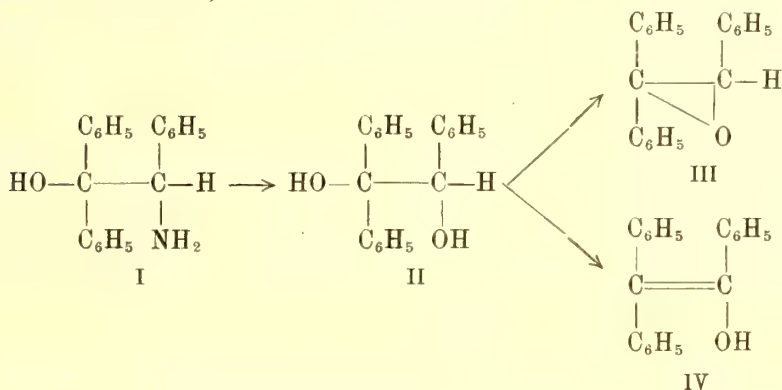
(1) Gardeur, Bl. de l'Acad. Belgique (3) *54*, 92 (1897).
(2) Klingermann A., *275*, 88 (1893).
(3) Delacre, Bl. (3) *15*, 889 (1896).
(4) Collet, Bl. (3) *15*, 22 (1896).
(5) Biltz, B. *26*, 1957 (1893) e A. *296*, 242 (1897).
(6) Paternò e Forlì-Forti, Gaz. Ch. It., *40* (2) 332 (1910).

e identico a quello che il prof. Paternò aveva preparato dal mono-acetato del trifenil-glicol riscaldandolo con cloruro di acetile in presenza di acido acetico.

La formazione di questo prodotto di disidratazione del trifenil-glicol sta a dimostrare che veramente la benzilammina per azione della luce reagisce col benzofenone in maniera analoga a quella con cui reagiscono l'alcool benzilico e l'acetato di benzile. Il gruppo CH_2 della benzilammina reagisce cioè col CO del benzofenone dando luogo ad una condensazione enolica. Soltanto ammettendo la formula (I) per il composto che si ottiene dalla benzilammina e benzofenone si può spiegare la formazione, da me osservata, del trifenil-glicol (II) e per esso del suo prodotto di disidratazione, sia esso da considerarsi come ossido di trifenil-etilene (III), sia come trifenil-vinil-alcool (IV) (probabilmente, come fece notare il prof. Paternò, si tratta di un caso di tautomeria)

$$\begin{array}{ccc} C_6H_5 & & C_6H_5 \\ | & & | \\ C & \text{———} & C-H \\ | & \diagdown & | \\ C_6H_5 & & O \end{array} \quad \text{III}$$

$$\begin{array}{ccccc} & C_6H_5 & & C_6H_5 & \\ & | & & | & \\ HO- & C & \text{———} & C & -H \\ & | & & | & \\ & C_6H_5 & & NH_2 & \end{array} \quad \text{I} \longrightarrow \begin{array}{ccccc} & C_6H_5 & & C_6H_5 & \\ & | & & | & \\ HO- & C & \text{———} & C & -H \\ & | & & | & \\ & C_6H_5 & & OH & \end{array} \quad \text{II}$$

$$\begin{array}{ccc} C_6H_5 & & C_6H_5 \\ | & & | \\ C & = & C \\ | & & | \\ C_6H_5 & & OH \end{array} \quad \text{IV}$$

In successivi trattamenti della sostanza con nitrito sodico, ho provato a variare le condizioni di esperienza, facendo la reazione in presenza di acido acetico più o meno diluito, aggiungendo o no qualche goccia di acido solforico e facendo bollire più o meno a lungo. Ho sempre ottenuto la medesima sostanza fusibile a 134-136°; solo qualche volta ho potuto isolare dei prodotti secondarî della reazione, ma in quantità così piccola da essere insufficiente per l'analisi.

Così potei separare un prodotto che, cristallizzato da molto alcool bollente, si presenta in aghetti bianchi piccolissimi che fondono a 217-219°; forse è indentico al mono-acetil-derivato del trifenil-glicol ottenuto dal prof. Paternò, per azione della luce sul miscuglio di benzofenone e acetato di benzile.

Altre volte ho potuto isolare una sostanza che cristallizza pure dall'alcool in magnifici aghetti bianchi splendenti che fondono a 232-233°; nell'insieme dei suoi caratteri sembra identica all'idrocarburo fusibile a 233° descritto da Biltz.

Ma non ho creduto necessario di continuare lo studio di questi prodotti secondarî che nessun nuovo contributo avrebbero portato al problema che ho risolto con la identificazione della sostanza fusibile a 134-136°, tanto più che, colle esperienze sopra descritte, ho finito tutto il prodotto che avevo a disposizione e per averne dell'altro avrei dovuto aspettare molto tempo.

Fisiologia vegetale. — *Ancora sull'azione degli ammonio-composti sul germogliamento dell'Avena sativa.* Nota del dott. F. Plate, presentata dal Socio R. Pirotta.

In una mia precedente Nota comparsa nell'ultimo ottobre, io studiavo l'azione di soluzioni di nitrato di ammonio sull'*Avena sativa.* Parevami opportuno di confrontare il comportamento di soluzioni normali, rispetto allo sviluppo delle piantine, con soluzioni contenenti pesi variabili di sostanze riferiti a 100 gr. di acqua, le quali ultime soluzioni io chiamerò, per brevità, percentuali.

Facevo quindi il raffronto fra i risultati ottenuti con le soluzioni normali e percentuali adoperate, mettendo in apposite tabelle il contenuto in azoto dei due casi. Ora accadde in questa Nota una deplorevole confusione tipografica, per la quale, specialmente alla pagina 293, manca completamente il senso scientifico, come il lettore avrà potuto facilmente rilevare [1].

Riprendo adunque l'argomento nella presente Nota.

Le soluzioni normali e percentuali di $NO_3\ NH_4$, stante la deliquescenza di questo sale, furono preparate rispettivamente sciogliendo in un litro di H_2O un peso di sale puro (Kahlbaum), un poco superioie al necessario. Venne stabilito il titolo della soluzione distillando da un dato volune l'NH_3 e titolando quest'ultima. Con la quantità d'H_2O calcolata, la soluzione stessa fu diluita per riportarsi alla esatta concentrazione normale e percentuale. Il contenuto quindi in azoto totale per il $NO_3\ NH_4$ era, per ogni litro di soluzione normale, la seguente:

$^N/_{50}$	$^N/_{100}$	$^N/_{200}$	$^N/_{400}$	$^N/_{800}$	$^N/_{1600}$	$^N/_{3200}$
0.5604	0.2802	0.1401	0.0700	0.0350	0.0175	0.0087

e per il $Cl\ NH_4$ l'azoto ammoniacale era:

$^N/_{50}$	$^N/_{100}$	$^N/_{200}$	$^N/_{400}$	$^N/_{800}$	$^N/_{1600}$	$^N/_{3200}$
0.2802	0.1401	0.0700	0.0350	0.0175	0.0087	0.0043

[1] Il manoscritto di quella Nota era irto di correzioni e aggiunte; trovandomi nei mesi estivi in vacanza, le bozze furono restituite senza essere da me viste, d'onde la enorme confusione per cui alcuni periodi e tabelle furono saltati, ed altri posposti.

A causa dell'azoto del gruppo NO_3, la quantità di azoto totale esistente nel NO_3 NH_4 è naturalmente doppia della quantità di azoto esistente nella corrispondente soluzione normale di Cl NH_4.

Nelle soluzioni percentuali di NO_3 NH_4 abbiamo invece le seguenti quantità di azoto totale per ogni litro:

2 ‰	1 ‰	0.5 ‰	0.25 ‰	0.125 ‰	0.0625 ‰	0.0312 ‰
0.7004	0.3502	0.1751	0.0875	0.0437	0.0218	0.0109

e per il Cl NH_4 l'azoto totale era:

2 ‰	1 ‰	0 5 ‰	0.25 ‰	0.125 ‰	0.0625 ‰	0.0312 ‰
0.5242	0.2621	0.1310	0.0655	0.0327	0.0163	0.0081

Ora la quantità d'azoto totale esistente nella soluzione percentuale del nitrato d'ammonio, a causa del gruppo NO_3, è maggiore della quantità esistente nella corrispondente soluzione percentuale di Cl NH_4, ma non doppia come nel caso delle soluzioni normali. Mentre poi, viceversa, la quantità dell'azoto ammoniacale esistente nelle corrispondenti soluzioni percentuali è maggiore per il cloruro d'ammonio che non per il nitrato d'ammonio. Infatti abbiamo che per il NO_3 NH_4 l'azoto ammoniacale è contenuto in ogni litro nelle seguenti quantità:

2 ‰	1 ‰	0.5 ‰	0.25 ‰	0.125 ‰	0.0625 ‰	0.0312 ‰
0.35012	0.1751	0.0875	0.0437	0 0218	0.0109	0.0054

mentre che per il Cl NH_4 è contenuto in queste altre quantità:

2 ‰	1 ‰	0.5 ‰	0.25 ‰	0.125 ‰	0.625 ‰	0 0312 ‰
0.5242	0.2621	0.1310	0.0655	0.0327	0.0163	0.0081

Ed è appunto di questo diverso contenuto in azoto che mi sono voluto servire per potere meglio studiare l'azione degli ammoniocomposti sul ciclo di sviluppo della *Avena sativa*, e stabilire così un termine di confronto fra i risultati ottenuti con una serie di esperienze e quelli ottenuti con l'altra.

In due altre mie Note precedenti [1] ho accennato appunto ai risultati diversi che si hanno sul germogliamento delle piantine di Avena, quando si adopera il nitrato d'ammonio e quando il cloruro. Ora, usando soluzioni normali, mentre con il primo di questi sali le piantine vengono ad essere molto danneggiate, con il cloruro d'ammonio ciò non avviene, ed anzi le piantine continuano a crescere rigogliose. Quindi trovandoci, in un caso, in presenza d'una quantità doppia d'azoto, e, in un altro, del solo azoto ammoniacale, l'azione nociva del NO_3 NH_4 si può probabilmente riferire a due cause: o ad un eccesso di azoto, oppure a cause di natura fisico-chimica.

[1] Questi Rendiconti. vol. XXIII, 2° sem. 1914, pagg. 166 e 234.

Giunto a questo punto volli vedere se usando invece le soluzioni percentuali sopradette, i risultati ne sarebbero stati i medesimi. In una prima serie di esperienze i risultati non sarebbero molto diversi da quelli ottenuti per le soluzioni normali; epperò mi occorre ancora di approfondire meglio la questione, per cui ritornerò a suo tempo su questo argomento.

Come in tutti i miei precedenti lavori sperimentali, io ho fatto sempre uso di soluzioni normali, anzichè di soluzioni che chiamai percentuali, rispondendo questo concetto indubbiamente meglio al rigore scientifico da usare in simili ricerche. Ma credo che qualche volta possa tornare utile di stabilire confronti con i risultati ottenuti per mezzo di soluzioni percentuali.

Così ho creduto opportuno, in questa Nota ulteriore, di chiarire meglio il mio concetto, riparando alla involontaria confusione avvenuta, per le ragioni suddette, nella Nota precedente, e di indicare il metodo che intendo seguire nelle indagini già intraprese.

Chimica. — *Sul metabolismo degli aminoacidi nell'organismo.* Nota II: *Azione del tessuto muscolare sugli aminoacidi aggiunti al liquido di Ringer circolante*, del dott. UGO LOMBROSO, presentata dal Socio L. LUCIANI.

Abbiamo nella precedente Nota dimostrato che, facendo circolare aminoacidi col sangue nel tessuto muscolare di un arto di cane, si ottiene una loro diminuzione nel liquido circolante.

Una parte degli aminoacidi scomparsi dal liquido viene ritrovata nel tessuto muscolare, il quale (come aveva osservato v. Slyke *in vivo*) se ne satura. Del quantitativo che ancora rimane per colmare il *deficit*, una parte, che però dalle nostre ricerche, non appare molto cospicua, viene bruciata, come si può desumere dall'aumento dell'NH_3 del sangue; dell'altra parte non possiamo in altro modo giustificare l'assenza se non ammettendo una sintesi degli aminoacidi, in sostanze più complesse non titolabili col formolo.

Questi risultati apparivano in contrasto con quanto era stato descritto dal Buglia a proposito della circolazione artificiale del cuore di coniglio con liquido di Ringer ed aminoacidi.

In tali esperienze l'autore non avrebbe mai ottenuto una diminuzione di aminoacidi dal liquido, ma al contrario, in qualche caso, un lieve aumento dovuto al versamento, nel liquido, degli aminoacidi del tessuto cardiaco.

Molte potevano essere le ragioni invocate a spiegare questa differenza di risultati: ad esempio la particolare natura del tessuto muscolare cardiaco la varia specie di animali, ecc., ecc.

Fra le varie ragioni, la più importante e degna di essere presa in immediato esame mi parve fosse quella che la divergenza in questione attribuiva all'avere io adoperato sangue in luogo di liquido di Ringer.

Come è stato dimostrato, per la formazione dell'acido ippurico nel rene, che soltanto con l'intervento del sangue è possibile la sintesi della glicocolla con l'acido benzoico, così potevasi supporre che anche nel muscolo la sintesi o la distruzione degli aminoacidi non si potesse compiere senza la partecipazione del sangue.

Perciò ho creduto opportuno di ripetere le esperienze già da me fatte sulla circolazione di aminoacidi nel muscolo di cane, sostituendo al sangue il liquido di Ringer.

In una parte di queste ricerche ho semplicemente determinato la quantità di aminoacidi presenti nel liquido prima e dopo la circolazione, nella presunzione di ottenere un risultato simile a quello del Buglia (ottenendo il quale, rimanevano quindi inutili ulteriori ricerche). Ma avendo constatato la diminuzione degli aminoacidi, alcune volte assai notevole, volli meglio determinare il destino di questi aminoacidi scomparsi, e quindi estesi le ricerche al tessuto muscolare, ed al contenuto in NH_3 del liquido e del muscolo.

I.

Cane femmina, kg. 3,800 — Peso dell'arto sottoposto alla circolazione, gr. 215. Soluzione di Ringer adoperata, cc. 400 + 4 gr. glicocolla ; pressione media 140-180 mm. mercurio. Durata della circolazione, 2 ore circa. Peso dell'arto dopo la circolazione, gr. 320.

Per 10 cc. di soluzione la formoltitolazione richiede . . 12,6 cc. Na OH $/_{10}$ *n*
» » dopo circolaz. la formoltitolaz. richiede 11,6 » »

II.

Cane maschio, kg. 4,600. — Peso dell'arto sottoposto alla circolazione gr. 245. Soluzione di Ringer adoperata 450 cc. + 4 gr. di *α* alanina; pressione media 100-140 mm. mercurio. Durata della circolazione 1 ora e mezza. Peso dell'arto dopo la circolazione gr. 350.

Per 10 cc. di soluzione la formoltitolazione richiede . . 8 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*
» » dopo circolaz. la formoltitolaz. richiede 6,9 » »

III.

Cane maschio, kg. 6,500. — Peso dell'arto sottoposto alla circolazione gr. 355. Soluzione di Ringer adoperata cc. 500 + 4 gr. asparagina (neutralizzata). Pressione media 110-150 mm. mercurio. Durata della circolazione ore 1 e un quarto. Peso dell'arto dopo la circolazione gr. 503.

Per 10 cc. di soluzione la formoltitolazione richiede . . 4,8 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*
» » dopo circolaz. la formoltitolaz. richiede 4,2 » »

IV.

Cane femmina, kg. 7,400. — Peso dell'arto sottoposto alla circolazione gr. 420. Soluzione di Ringer adoperata cc. 500 + 4 gr. glicocolla. Pressione media 140-160 mm. mercurio. Durata della circolazione ore 1 e mezzo. Peso dell'arto dopo la circolazione gr. 645.

Per 10 cc. di soluzione la formoltitolazione richiede . . 10,2 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*
» » dopo circolaz. la formoltitolaz. richiede 8,4 » »

Non riferisoo altre esperienze limitate alla semplice indagine sul contenuto in aminoacidi, del sangue nutritizio prima e dopo la circolazione nel tessuto muscolare; bastano questi esempî per indicare come si ottenga sempre, ed in misura più o meno cospicua, una loro diminuzione.

Emerge pure, da queste prime osservazioni, che si produce rapidamente durante la circolazione un edema assai cospicuo; tale da raddoppiare persino il peso dell'arto in esperimento; una gran parte del liquido viene quindi in tal modo sottratta.

Perciò riusciva tanto più importante di indagare il contenuto in aminoacidi nel tessuto muscolare prima e dopo la circolazione.

Ma a tale proposito si incontra una difficoltà nel prelevare i campioni del tessuto muscolare dopo la circolazione, perchè la percentuale degli aminoacidi non è omogenea ma si rivela più elevata nel liquido dell'edema che non nel tessuto muscolare.

Avendo io nelle prime ricerche avvertito in qualche caso risultati che parevano paradossali, ho cercato invece di sfuggire a questo inconveniente col prelevare proporzionalmente i campioni dei due elementi (muscolo ed edema); ed infine in una esperienza ho determinato il contenuto in aminoacidi dell'intero arto (escluso, naturalmente, il tessuto osseo).

Riferisco anzitutto due esperienze, nella prima delle quali il contenuto in aminoacidi dopo la circolazione fu desunte dall'esame del tessuto muscolare deterso con cura dall'edema, e nella seconda, invece, dall'esame del liquido edematoso.

V.

Cane maschio, kg. 5,200. — Peso dell'arto sottoposto alla circolazione gr. 290. Soluzione di Ringer adoperata cc. 410 + 4 gr. glicocolla. Pressione media 120-150 mm. mercurio. Durata della circolazione 2 ore. Peso dell'arto alla fine della circolazione gr. 530.

Per 10 cc. di soluzione la formoltitolazione richiede . . 11.3 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*
» » dopo circolaz. la formoltitolaz. richiede 9 » »
Per 30 gr. di muscolo la formoltitolazione richiede . . 6,4 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*
» » dopo circolaz. la formoltitolaz. richiede 15,8 » »

Complessivamente, nel liquido rimasto dopo la circolazione si richiedono per la formoltitolazione 322 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n* in meno. Nel muscolo, dopo la circolazione, si conterrebbero, in più del normale, tanti aminoacidi da corrispondere a 195,3 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. Risulterebbe quindi un *deficit* assoluto di 126,7 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*.

VI.

Cane femmina, kg. 4. — Peso dell'arto sottoposto a circolazione gr. 225. Soluzione di Ringer adoperata 400 cc. + 4 gr. glicocolla. Pressione media 120-140 mm. mercurio. Durata della circolaziono ore 1 e mezza. Peso dell'arto dopo la circolazione gr. 340.

Per 10 cc. di soluzione la formoltitolazione richiede . . 11,5 cc. Na OH $^{1}/_{10}\,n$

» » dopo circolaz. la formoltitolaz. richiede 9,3 » »

Per 50 gr. di muscolo normale » » 8,2 cc. Na OH $^{1}/_{10}\,n$

» (cc.) edema » » 40,5 » »

Complessivamente, nel liquido rimasto dopo la circolazione si richiede per la formoltitolazione 135 cc. Na OH $^{1}/_{10}\,n$ in meno. Nel muscolo, dopo la circolazione, la formoltitolazione richiede 210 cc. Na OH $^{1}/_{10}\,n$ in più del normale. Risulterebbe quindi un eccesso assoluto di 75 cc. Na OH $^{1}/_{10}\,n$.

VII.

Cane maschio, kg. 5,700. — Peso dell'arto sottoposto a circolazione, gr. 340 (tessuto osseo gr. 85). Soluzione di Ringer adoperata 525 cc. + 2 gr. asparagina neutralizzata. Pressione media 13-15 mm. mercurio. Durata della circolazione, 1 ora. Peso dell'arto alla fine della circolazione, gr. 495.

Per 15 cc. di soluzione la formoltitolazione richiede . . 7 cc. Na OH $^{1}/_{10}\,n$

» » dopo circolaz. la formoltitolaz. richiede 6,5 » »

Per 50 gr. di muscolo normale » » 17 cc. Na OH $^{1}/_{1^{0}}\,n$

» » dopo circolaz. » » 20 » »

NH_3 per 100 cc. soluzione dopo la circolaz. corrispondono a 2,5 cc. $H_2\,SO_4$ $^{1}/_{50}\,n$

» 50 gr. muscolo normale » » 15 » »

» » » dopo la circolaz. » 12 » »

Complessivamente si trovano nel liquido, dopo la circolazione, tanti aminoacidi da corrispondere a 85,1 cc. Na OH $^{1}/_{10}\,n$ in meno. Nel muscolo, dopo la circolazione, si trovano tanti aminoacidi da corrispondere a 77,3 cc. Na OH $^{1}/_{10}\,n$ in più del normale. Il *deficit* assoluto sarebbe quindi di 7,8 cc. Na OH $^{1}/_{10}\,n$.

VIII.

Cane maschio, kg. 8. — Peso dell'arto sottoposto a circolazione, gr. 480 (tessuto osseo gr. 120). Soluzione di Ringer adoperata, cc. 500 + 4 gr. alanina. Pressione media 130-160 mm. mercurio. Durata della circolazione 2 ore. Peso dell'arto alla fine della circolazione, gr. .

Per 15 cc. di soluzione la formoltitolazione richiede . . 20,7 cc. Na OH $^{1}/_{10}\,n$

» » dopo circolaz. la formoltitolaz. richiede 9,6 » »

Per 50 gr. di muscolo » » 10 cc. Na OH $^{1}/_{10}\,n$

» » dopo circolaz. » » 17,6 » »

Complessivamente si trovano nel liquido dopo, la circolazione, tanti aminoacidi da corrispondere a 118 cc. Na OH $^{1}/_{10}\,n$ in meno. Nel muscolo, dopo la circolazione, si trovano tanti aminoacidi da corrispondere a 106,1 cc. Na OH $^{1}/_{10}\,n$ in più del normale. Il *deficit* assoluto sarebbe quindi di 11,9 cc. Na OH $^{1}/_{10}\,n$.

IX.

Cane maschio, kg 3,200. — Peso dell'arto sottoposto alla circolazione gr. 215 (tessuto osseo gr. 55). Soluzione di Ringer adoperata cc. 400 + 4 gr. glicocolla. Pressione

media 100-130 mm. mercurio. Durata della circolazione, ore 1 e mezza. Peso dell'arto dopo la circolazione, gr. 320.

Per 10 cc. di soluzione la formoltitolazione richiede . . 12,6 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*

» » dopo circolaz. la formoltitolaz. richiede 11,7 » »

Nella totalità del muscolo normale » » 20,8 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*

» » dopo circolaz. a » 170,9 » »

NH_3 per 100 cc. soluzione dopo la circolaz. corrispond. a 7 cc. H_2SO_4 $^1/_{50}$ *n*

Complessivamente si trovano nel liquido, dopo la circolazione, tanti aminoacidi da corrispondere a 156 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n* in meno. Nel muscolo, dopo la circolazione, si trovano tanti aminoacidi da corrispondere a 150 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n* in più del normale. Il *deficit* assoluto sarebbe quindi di 5,9 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*.

Dalle esperienze esposte risulta che:

1) Facendo circolare nel tessuto muscolare aminoacidi sciolti in liquido di Ringer, si ottiene sempre una più o meno notevole diminuzione del contenuto in aminoacidi del liquido nutritizio, diminuzione che raggiunge persino il 12 %.

2) Oltre alla diminuzione percentuale degli aminoacidi nel liquido circolante nel tessuto muscolare, si ha pure una diminuzione nella quantità del liquido stesso, per l'insorgere di un cospicuo edema. Sommando la perdita di amicoacidi dovuta, sia alla diminuzione percentuale nel liquido *residuo*, sia alla diminuzione del liquido *in toto*, si avrebbe una perdita di aminoacidi che supera persino il 50 %.

3) Se si determina il contenuto in aminoacidi del tessuto muscolare prima e dopo la circolazione, si avverte che pressochè tutti gli aminoacidi scomparsi si ritrovano depositati nel tessuto.

Non si tratta quindi di una ulteriore utilizzazione degli aminoacidi per processi combustivi o sintetici, ma di una semplice loro deposizione.

Quella piccolissima percentuale, meno dell'1-2 %, di aminoacidi che non si ritrovano nel tessuto muscolare (e che potrebbe rientrare nei limiti di errore del metodo usato per la determinazione, o che potrebbe esser stato sottratto al tessuto osseo), può forse indicare una avvenuta combustione.

Infatti nel liquido nutritizio, dopo la circolazione, abbiamo sempre trovato piccole quantità di NH_3.

Ma non è possibile di formulare in proposito alcuna recisa affermazione, perchè non abbiamo seguìto con sufficiente esattezza il contenuto in NH_3 del muscolo, che abbiamo dosato nell'estratto idro-alcoolico del muscolo previamente essiccato e triturato.

Rimandando al risultato di ulteriori ricerche il giudizio se, concordemente all'affermazione di Buglia, il muscolo perfuso con soluzione di Ringer sia del tutto incapace di distruggere gli aminoacidi, o invece se esso compia in lievissimo grado tale ufficio, questo per ora si può affermare:

che durante la perfusione del muscolo con soluzione di Ringer ed aminoacidi, una gran parte di questi viene sottratta al liquido circolante.

Ma in luogo di venir utilizzati, essi si depositano nella totalità, o nella massima loro parte nel tessuto; mentre, invece, durante la circolazione con sangue, pur osservandosi sempre in cospicua misura il fenomeno del semplice depositarsi di aminoacidi, si ottiene anche la loro combustione ed una loro trasformazione in sostanze non titolabili al formolo.

Matematica. — *Sulle superficie di Riemann multiple, prive di punti di diramazione.* Nota del dott. Oscar Chisini, presentata dal Corrispondente F. Enriques.

1. Se, sopra una funzione razionale dei punti di una curva algebrica, di genere p,

$$\psi(x\,,z)=0\,,$$

si estrae una radice *n-esima*

$$y=\sqrt[n]{f(x\,,z)}\,,$$

si ottengono famiglie di funzioni y birazionalmente distinte, corrispondentemente ai sistemi di sostituzioni secondo cui si permutano gli n valori di y quando il punto $(x\,,z)$ descrive uno dei $2p$ cicli riemanniani della ψ, o gira attorno a uno zero di $f(x\,,z)$; questo, in generale, è uno zero semplice, e costituisce un punto di diramazione, un giro intorno ad esso producendo su y la moltiplicazione per $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Gli zeri della f possono però non essere punti di diramazione, e risultare punti critici apparenti, e ciò quando essi siano zeri d'ordine n, cioè quando le curve $f=0$ e $\psi=0$ abbiano un contatto n-punto. Nel caso in cui manchino i punti di diramazione, le famiglie di funzioni $y=\sqrt[n]{f(x\,,z)}$ dipendono soltanto dalle sostituzioni S_i relative ai $2p$ cicli riemanniani della ψ: ora queste sostituzioni devono, evidentemente, essere una potenza della sostituzione circolare $(1\,,2\,,\ldots,n)$ e, del resto, possono essere arbitrarie, esistendo effettivamente funzioni y per un sistema qualunque di sostituzioni S_i [1]: ne segue che le famiglie di funzioni y sono in numero di n^{2p}, comprese quelle riducibili per le quali il gruppo delle S_i non sia transitivo.

Ora, *scopo di questa Nota è di costruire effettivamente le funzioni* $y=\sqrt[n]{f(x\,,z)}$ *prive di punti di diramazione sulla* ψ, *per le quali sia dato « a priori » il sistema delle sostituzioni* S_i: a ciò si arriva con *consi-*

[1] Cfr. Hurwitz, Math. Annalen, Bd. 39: *Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten*, pag. 55.

derazioni essenzialmente *topologiche*, assegnando in funzione delle S_i la serie lineare cui appartiene il gruppo dei punti critici apparenti. Si ritrova, così, che questa serie determina la famiglia delle funzioni y, cosa già dimostrata per via algebrica da A. Comessatti [1] nel caso di $n = 2$.

2. Esporrò qui, discorsivamente, il filo delle mie considerazioni, rimandando alla fine (§ 3) della presente Nota per la dimostrazione di alcune proposizioni che verranno momentaneamente ammesse, e ciò per rendere più chiaro lo svolgersi del ragionamento.

Supponiamo che la curva $\psi = 0$ sia dotata solo di punti doppî a tangenti distinte (caso a cui si può sempre ridurre con una conveniente trasformazione birazionale), e indichiamo con Ψ la riemanniana della curva stessa.

Assumiamo come modello della Ψ una sfera con p manici, e su essa prendiamo come sistema dei cicli riemanniani C_i il sistema delle $2p$ retrosezioni A_i e B_i $(i = 1, 2, \dots, p)$ [2].

Se la funzione $y = \sqrt[n]{f(x, z)}$ non ha punti di diramazione sulla Ψ, occorrerà, come già abbiamo ricordato, che la curva $f = 0$ abbia un contatto n-punto, ovunque essa intersechi la $\psi = 0$; conviene però esaminare come si comporti la f nei punti doppî della ψ ad essa comuni. Precisamente, se la f passa per un punto D doppio per la ψ (a cui corrispondono due punti sulla Ψ), essa dovrà avere n intersezioni riunite con ciascuno dei due rami della ψ, e pertanto dovrà avere come doppio (almeno) il punto D, e ciascuno dei suoi rami dovrà avere un contatto, con i rami della ψ, di ordine $n - 2$, se il punto D è solo doppio per la f; d'ordine $n - r$, se il punto è r-*plo*.

Veniamo ora alla costruzione del polinomio $f(x, z)$, tale che gli n valori della funzione

$$y = \sqrt[n]{f(x, z)},$$

priva di punti di diramazione sulla Ψ, si permutino secondo sostituzioni

$$S_i = (1, 2, \dots, n)^{\alpha_i}$$

assegnate, quando il punto (x, z) descrive un ciclo C_i della Ψ.

Per comodità cercheremo la curva $f(x, z)$, soddisfacente alle nostre condizioni, fra le curve di un ordine nr abbastanza elevato, passanti per ogni punto doppio della ψ ed aventi n intersezioni riunite con ciascuno dei rami della ψ uscenti dal punto medesimo: indicheremo con f queste curve.

(1) *Sulle curve doppie di genere qualunque*, Memorie dell'Accad. delle Scienze di Torino, ser. II, tom. LX.

(2) Cfr., per esempio, F. Severi, *Lezioni di geometria algebrica*. Tip. Draghi, Padova 1908, pag. 269.

Essendo nr abbastanza elevato esisteranno certo delle f le quali abbiano un contatto n-punto in ogni loro intersezione con la curva ψ: indico con $\bar{f}$ le curve soddisfacenti a questa ulteriore condizione, e con q il numero dei punti in cui esse osculano la ψ fuori dei suoi punti doppî, e che, insieme con i punti doppî contati due volte, formano il gruppo dei punti critici apparenti per le funzioni

$$y = \sqrt[n]{\bar{f}(x , z)} .$$

Sussiste anzitutto il

Teorema: *se due curve* $\bar{f}_0$ *e* $\bar{f}_1$ *toccano la curva* ψ *in punti* (fuori dei punti doppî) *di due gruppi* G_0 e G_1 *equivalenti, esse dànno luogo alle medesime sostituzioni* S_i, *e quindi a funzioni* y *birazionalmente identiche.*

La dimostrazione di questo teorema si fa osservando che si può passare con continuità [cfr. § 3, a)] dalla curva $\bar{f}_0$ alla $\bar{f}_1$ muovendosi nella famiglia delle curve $\bar{f}$, e che durante questo passaggio il sistema delle sostituzioni S_i non può venire modificato.

Invece non è possibile di passare per continuità, movendosi entro la famiglia delle curve $\bar{f}$, da una curva $\bar{f}_0$ a un'altra $\bar{f}_1$, corrispondenti a diversi sistemi di sostituzioni S_i. Questo passaggio diventa però possibile quando si muova nella famiglia delle curve f', data da quelle curve f le quali abbiano, con la ψ, non più q intersezioni n-*ple*, ma $q - 1$ punti R_k d'intersezione n-*pla*, un punto Q d'intersezione $(n - 1)$-*pla*, e un punto P d'intersezione semplice: le curve $\bar{f}_0$ ed $\bar{f}_1$ apparendo così particolari curve f' per le quali P e Q coincidono.

Precisamente noi faremo il passaggio effettivo da una curva $\bar{f}_0$, per la quale tutte le S_i siano l'identità, a una curva $\bar{f}_1$ per la quale il sistema delle S_i sia un sistema prefissato: e in questo modo determineremo quale è la serie a cui appartiene il gruppo G_1 dei punti in cui la $\bar{f}_1$ oscula la ψ, cioè il gruppo dei punti critici apparenti della

$$y = \sqrt[n]{\bar{f}_1(x , z)} ;$$

in questo ci gioveremo essenzialmente del fatto che le curve f' dànno funzioni

$$y = \sqrt[n]{\bar{f}_1(x , z)} ,$$

dotate di due punti P e Q di diramazione.

Consideriamo adunque la curva

$$\bar{f}_0(x , z) = \varphi^n(x , z) = 0 ,$$

dove $\varphi = 0$ rappresenta una curva d'ordine r passante per i punti doppî di ψ.

La funzione

$$y = \sqrt[n]{\varphi^n(x, z)}$$

si spezza evidentemente in n funzioni: per essa, quindi, ogni sostituzione S_i è l'identità.

Si ottiene ora una funzione

$$y = \sqrt[n]{\overline{f}_1(x, z)}$$

i cui rami $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (dove $y_s = e^{\frac{2\pi i}{n}} y_{s-1}$), si permutano secondo sostituzioni prefissate

$$S_i = (1, 2, \ldots, n)^{\alpha_i},$$

nel modo seguente:

Si osservi anzitutto che la curva $\overline{f}_0 = \varphi^n$ è una curva f'_0 in cui i punti P e Q coincidono.

Facciamo variare la f'_0 nella famiglia delle f' lasciando fisso il punto Q [che è un'intersezione $(n-1)$-*pla* di f' e ψ], facendo descrivere al punto P (che è un'intersezione semplice) un cammino chiuso C, e lasciando variare comunque i punti R_k (che sono intersezioni *n-ple*): si otterrà infine una curva f' per la quale i punti P e Q coincidono, la quale è quindi una curva $\overline{f}_1$ che dà luogo a una funzione

$$y = \sqrt[n]{\overline{f}_1(x, z)}$$

priva di punti di diramazione.

È facile ora determinare quale deve essere il cammino chiuso C perchè la $y = \sqrt[n]{\overline{f}_1(x, z)}$ ammetta un dato sistema di sostituzioni S_i. A tale oggetto, definiamo il senso positivo per i cicli nulli, e per quelli costituiti dalle retrosezioni A_i e B_i. Per i cicli nulli assumiamo come senso positivo quello contrario alle lancette dell'orologio: per il ciclo B_i un senso qualunque, e per il ciclo A_i un senso tale che un punto P, che descriva A_i, tagli B_i passando dalla sinistra alla destra.

Ora esserviamo che quando, al variare della f', il punto P, percorrendo *negativamente* una retrosezione A_i, taglia il ciclo costituito dalla retrosezione coniugata B_i, questo ciclo B_i viene a sommare un ciclo nullo che avvolge P in senso *positivo*; e pertanto, se il ciclo B_i, prima di essere attraversato, corrispondeva alla sostituzione $(1, 2, \ldots, n)^r$ per la $y = \sqrt[n]{f'}$, dopo corrisponderà alla sostituzione $(1, 2, \ldots, n)^{r+1}$.

Si noti, ora, che ogni ciclo A_i taglia in un punto il ciclo B_i, e non taglia nessuno degli altri cicli: pertanto, se i rami della nostra funzione $y = \sqrt[n]{f_1(x, z)}$ debbono permutarsi secondo le sostituzioni

$$S_{a_i} = (1, 2, \dots, n)^{\alpha_i}$$
$$S_{b_i} = (1, 2, \dots, n)^{\beta_i}$$

quando il punto (x, z) descrive rispettivamente le retrosezioni A_i e B_i, dovrà essere

$$C = \Sigma - \alpha_i B_i + \Sigma - \beta_i A_i .$$

Vediamo ora quale sia la serie cui appartiene il gruppo G_1 dei punti in cui la f_1 oscula ψ. Supponiamo che la serie segata sopra la ψ dalle curve φ, passanti per i punti doppî della ψ, sia definita dalle p relazioni

$$\Sigma U_h(a_s) \equiv 0 , \qquad (h = 1, 2, \dots, p)$$

dove $U_h(a_s)$ indica uno dei p integrali abeliani di prima specie, calcolato in uno dei punti a_s della serie stessa, e dove il segno $\equiv$ indica la congruenza rispetto ai periodi degli integrali stessi.

Se indichiamo con

$$\omega_{a_i}^{(h)} \quad \text{e} \quad \omega_{b_i}^{(h)}$$

i periodi dell'integrale U_h relativi ai cicli A_i e B_i, avremo che la serie cui appartiene G_1 è definita dalle p relazioni

$$\Sigma U_h \equiv \Sigma \alpha_i \frac{\omega_{b_i}^{(h)}}{n} + \Sigma \beta_i \frac{\omega_{a_i}^{(h)}}{n}$$

(dove $h = 1, 2, \dots, p$) [cfr. § 3, b)].

Pertanto, *se si vuole che la funzione*

$$y = \sqrt[n]{f_1(x, z)}$$

ammetta come sistema di sostituzioni S *le sostituzioni*

$$S_{a_i} = (1, 2, \dots, n)^{\alpha_i}$$
$$S_{b_i} = (1, 2, \dots, n)^{\beta_i},$$

occorre prendere il gruppo G_1 *dei suoi punti critici apparenti entro la serie definita dalle* p *relazioni*

$$\Sigma U_h \equiv \Sigma \alpha_i \frac{\omega_{b_i}^{(h)}}{n} + \Sigma \beta_i \frac{\omega_{a_i}^{(h)}}{n} .$$

3. Dimostriamo ora le due proposizioni *a*) e *b*) ammesse nel § 2.

a) Per dimostrare che si può passare con continuità dalla $\bar{f}_0$ alla $\bar{f}_1$ muovendosi entro la famiglia delle $\bar{f}$, nell'ipotesi che i due gruppi dei punti di contatto G_0 e G_1 siano equivalenti, basta osservare che la serie segata dalle curve f (fuori dei punti doppî di ψ) è *completa*, e, pertanto, ogni gruppo equivalente a G_0, contato n volte, dà un gruppo segato da una f, e quindi è costituito dai punti di contatto n-punto di una $\bar{f}$.

Pertanto, potendosi passare con continuità da G_0 a G_1 entro la serie lineare che li contiene, si può passare per continuità da $\bar{f}_0$ a $\bar{f}_1$ entro la famiglia delle curve $\bar{f}$.

b) Per dimostrare che $U_h(G_1)$, somma degli integrali U_h abeliani calcolati nei punti di G_1, è congrua, rispetto ai periodi, a

$$\Sigma\, \alpha_i \frac{\omega_{b_i}^{(h)}}{n} + \Sigma\, \beta_i \frac{\omega_{a_i}^{(h)}}{n},$$

ricordiamoci che G_1 è ottenuto partendo da G_0, facendo percorrere a P il ciclo

$$C \equiv \Sigma - \alpha_i B_i + \Sigma - \beta_i A_i,$$

e che i gruppi nG_0 ed nG_1 sono equivalenti, e sono inoltre equivalenti al gruppo variabile formato da

$$P + (n-1)\, Q + n\, \Sigma\, R_k .$$

Teniamo presente il teorema d'Abel il quale dice che: condizione perchè due gruppi siano equivalenti, è che siano uguali le somme degli integrali abeliani nei gruppi stessi; osserviamo, poi, che, quando P descrive C, la somma degli integrali abeliani U_h, calcolata in P, diminuisce di

$$\Sigma\, \alpha_i\, \omega_{b_i}^{(h)} + \Sigma\, \beta_i\, \omega_{a_i}^{(h)} ;$$

quindi, restando Q fisso, la somma degli integrali U_h calcolati nei punti R_h deve aumentare di

$$\Sigma\, \alpha_i \frac{\omega_{b_i}^{(h)}}{n} + \Sigma\, \beta_i \frac{\omega_{a_i}^{(h)}}{n} :$$

pertanto, essendo

$$U_h(G_0) \equiv 0 ,$$

è

$$U_h(G_1) \equiv \Sigma\, \alpha_i \frac{\omega_{b_i}^{(h)}}{n} + \Sigma\, \beta_i \frac{\omega_{a_i}^{(h)}}{u} .$$

c. d. d.

Cristallografia. — *Sopra alcuni cristalli di gesso artificiale* [1]. Nota di C. Perrier, presentata dal Socio G. Struever.

Il metodo più semplice per ottenere artificialmente cristalli di gesso, consiste, come è noto, nel concentrare le acque che lo contengono in soluzione. Sovente il gesso in natura deve la sua formazione all'azione dell'acido solforico e dei solfati metallici solubili sopra le roccie calcaree ed eventualmente sopra i silicati che contengono calcio. Acido solforico e solfati metallici si formano spesso nell'alterazione dei solfuri e specialmente in quella della pirite e della marcassite, che acquista una particolare importanza per la grande diffusione di questi due minerali.

È noto infatti come la concomitante azione dell'ossigeno e dell'acqua alterino la pirite con produzione di solfato ferroso e di acido solforico; le acque filtranti, che hanno lisciviato questi prodotti, attaccano facilmente i calcari trasformandoli in gesso, e questa azione è poi resa tanto più facile in quanto che, l'ossigeno agendo ulteriormente sul $FeSO_4$, la trasforma in solfato ferrico, che, facilissimamente idrolizzandosi, produce nuovo H_2SO_4.

Nel riordinare il Museo e l'Istituto di mineralogia della R. Università di Torino, fu rinvenuto un frammento di calcare, sul quale erano impiantati dei nitidi cristallini di gesso. Un'etichetta, di mano del compianto prof. Spezia, indicava che quel calcare era rimasto per due anni immerso in una soluzione di solfato ferroso: evidentemente, il prof. Spezia aveva voluto imitare la formazione del gesso come si verifica in certi casi in seguito all'alterazione della pirite. I cristalli ottenuti, grandi e belli, non sono mai stati studiati; interessante appariva invece il loro esame cristallografico, non soltanto per stabilire quali sono le forme cristalline che si originano in quelle particolari e ben definite condizioni di formazione, ma anche perchè alcuni di quei cristalli presentavano delle facce che già ad occhio nudo apparivano diverse da quelle comuni del minerale.

I cristalli si trovavano sulla massa di calcare, parzialmente arrossata per deposito di idrato ferrico, parte impiantati per l'asse delle z, parte invece poggianti per una faccia di $\{010\}$.

Essi sono piuttosto allungati secondo l'asse delle z, raggiungendo talora, in questa direzione, anche 1 cm. di lunghezza; e si presentano sempre tabulari secondo $\{010\}$. Generalmente i cristalli sono incolori e trasparenti; su alcuni, però, verso l'estremità libera si osserva un esilissimo deposito granulare di

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di mineralogia della R. Università di Torino, diretto dal prof. F. Zambonini. Dicembre, 1914.

una sostanza nera costituita da un sale ferrico, del quale però, per la troppo esigua quantità disponibile, non potei identificare la natura.

Io ho misurato parecchi cristallini, determinando le seguenti forme:

$b\{010\}$, $m\{110\}$, $l\{111\}$, $y\{131\}$, $\pi\{113\}^*$, $\mu\{553\}^*$;

delle quali, la π e la μ sono nuove per il minerale.

Le combinazioni osservate sono solamente due:

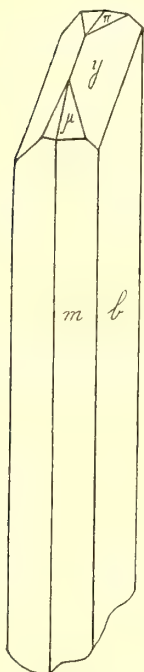
1) b, m, l;

2) b, m, y, π, μ.

Di gran lunga più frequente è la prima combinazione, nella quale si rinvengono solamente le solite e comunissime forme del gesso; b è sempre molto grande e striata parallelamente a z, come pure sempre striate nella stessa direzione sono le faccie di m: esse permettono tuttavia misure discrete la cui media si avvicina assai ai valori calcolati. Il prisma l si presenta, in generale, con buone faccie, abbastanza lucenti e piane.

Fig. 1.

Frequenti sono i geminati, per lo più con penetrazione parziale, secondo la solita legge: asse di geminazione la normale ad (100).

Molto più interessanti sono invece i due cristalli nei quali si osservò la combinazione 2ª, con le due forme nuove π e μ. Uno di quei cristalli è rappresentato dall'attigua fig. 1.

Le facce di b e di m si presentano come nel caso precedente; tra le forme terminali domina $y\{131\}$ che possiede facce abbastanza piane e splendenti. La presenza di questa forma, che è rarissima nel gesso, e che in questi cristalli così dominante, presenta un notevole interesse.

Per quanto mi consta, essa venne rinvenuta, fino ad ora, altre tre volte soltanto; scoperta da Neumann nel 1833 (¹) in un cristallo di gesso di Bex dove si presentava con facce incurvate e poco lucenti, venne rinvenuta una seconda volta da Schrauf (²) in cristalli di gesso dell' Harz, anche qui con facce non molto belle; e ultimamente venne notata da Šimek (³) sopra alcuni cristalli non molto belli di questo minerale, che si trovavano sopra dell'antimonite nel giacimento di Kostajnick in Serbia.

Che si tratti effettivamente di una forma $\{hkl\}$, fu stabilito determinando con certezza, mediante la posizione della direzione di estinzione su

(¹) Pogg. Ann., (1833) XXVII, 240.

(²) Ber. Ak. Wien., *63* (1), 157 (1871).

(³) Šimek, Groth's Zeit. f. Kryst., (1912) L, 640.

{010} che le facce riconosciute appartenenti a {131} giacciono effettivamente nell'angolo ottuso β.

Le due forme nuove {553} e {113} si presentano con facce poco estese, non molto splendenti e leggermente curve; le misure eseguite sono però attendibilissime, ed i valori trovati concordano abbastanza bene con quelli calcolati in base alle costanti di Des Cloizeaux, generalmente accettate, come risulta dalla seguente tabella:

	Trovato	Calcolato
(010):(113)	82°43′	82°38′
(110):(113)	69°1′	69°17′½
(010):(553)	65°49′	65°59′34″
(110):(553)	36°20′	36°30°50″

Fu verificata l'esistenza della zona π, μ, m.

È interessante di osservare che con la forma {553}, da me trovata, si identifica un altro prisma {hhl}, descritto molti anni fa da Schrauf, il quale credette di attribuire ad esso il simbolo {995}.

Schrauf, infatti ([1]), nel 1871 studiando alcuni grossi geminati di gesso dell'Harz, rinvenne tre forme nuove; tra queste un prisma μ {995} determinato in base alla misura dell'angolo

$$(995):(9\bar{9}5)\,.$$

Ora, quella misura ha un valore limitato, perchè, come le altre riferite in quel lavoro, venne eseguita esclusivamente col goniometro d'applicazione; ad ogni modo, il valore trovato da Schrauf si accorda meglio con quello calcolato per il simbolo {553} che non con quello che si deduce per 995}.

Si ha infatti:

$$(hhl):(h\bar{h}l) = 48°\,{}^{1}/_{2} \text{ misurato}$$
$$(553):(5\bar{5}3) = 48°1' \text{ calcolato}$$
$$(995):(9\bar{9}5) = 49°12' \quad \text{»}$$

Il simbolo {553} merita poi d'essere preferito, per la sua maggiore semplicità; la forma {995} è quindi sicuramente identica con la {553} da me rinvenuta, e per questo io adottai per quest'ultima la lettera μ.

È poi ancora da notarsi che la μ, tanto nei due cristalli nei quali io la rinvenni, quanto in quelli esaminati da Schrauf, compare sempre insieme con la y.

L'aver stabilito che alla forma μ di Schrauf spetta, in realtà, il simbolo {553} conduce necessariamente a cambiare il simbolo dell'altra forma ζ scoperta da Schrauf insieme con μ. Questa forma giace in zona con μ e con y:

([1]) Ber. Ak. Wien, loc. cit.

Schrauf assegnò ad essa il simbolo {733}, in base a questo fatto ed alla misura approssimativa

$$(hkl):(hk\bar{l}) = 25^\circ \text{ circa.}$$

Se μ ha il simbolo {553}, ne segue che ζ, che si trova nella zona [553:131], deve avere un simbolo che soddisfi alla condizione:

$$2h + k - 5l = 0\,;$$

questa non può naturalmente essere soddisfatta da {733}, ma, invece, dal simbolo molto più semplice {211}.

Per l'angolo (211) : (2$\bar{1}$1) si calcola, sempre con le costanti di Des Cloizeaux, 26°46′: l'accordo col valore trovato è poco soddisfacente, ma non va dimenticato che si tratta di un angolo misurato col goniometro di applicazione fra due facce che, se sono sufficientemente estese, sono però un po' curve. Date queste circostanze, non è il caso di calcolare per ζ un simbolo più complicato che soddisfi al legame di zona e dia un miglior accordo fra l'angolo misurato ed il calcolato.

Lo stesso Schrauf, del resto, rifiutò di accettare il simbolo {211}, solo perchè, avendo egli erroneamente alla μ attribuito il simbolo {995}, veniva, per la condizione di tautozonalità con μ e con y, escluso per la ζ il simbolo {211}.

Nella tabella seguente sono contenuti i valori angolari misurati, posti a confronto con i valori teorici calcolati in base alle costanti di Des Cloizeaux ([1]).

$$a:b:c = 0{,}68994:1:0{,}41241 \quad \beta = 80^\circ 42' 10''$$

	Limiti delle misure	Num. delle osserv.	Media delle misure	Valori calcolati	Differenze esp. - calc.
(110) : (1$\bar{1}$0)	68°20′- 68°44′	8	68°31′	68°30′	1′
(110) : (010)	55 20 - 56 1	16	55 42	55 45	— 3
(010) : (131)	45 8 - 45 52	4	45 39	45 33 45″	5 1/4
(131) : (1$\bar{3}$1)	89 2 - 89 10	2	89 6	88 52 ½	13 1/2
(110) : (1$\bar{3}$1)	39 20 - 39 56	4	39 47	41 4	— 17
(010) : (553)	65 33 - 65 56	4	65 49	65 53 34	— 10 1/2
(553) : (5$\bar{5}$3)	48 10 - 48 13	2	48 11	48 1	10
(110) : (553)	36 14 - 36 26	2	36 20	36 30 50	— 10 5/6
(010) : (113)	82 9 - 83 9	4	82 43	82 38	5
(113) : (1$\bar{1}$3)	14 25 - 14 41	2	14 36	14 44	8
(110) : (113)	68 54 - 69 4	2	69 1	69 17 ½	16 1/2
(010) : (111)	71 22 - 71 44	2	71 38	71 54	16

([1]) Bull. Soc. min., (1886) *9*, 175

Finora, di determinazioni cristallografiche su cristalli *macroscopici* di gesso ne sono state eseguite ben poche.

La lenta azione del solfato ferroso sul calcare, che riproduce abbastanza bene alcuni processi naturali di formazione del gesso, pare un metodo assai adatto per ottenere cristalli con discreta ricchezza di forme.

I cristalli artificiali di gesso da me studiati presentano perciò, in confronto di quelli esaminati da altri autori, una ricchezza di facce relativamente notevole: così Lacroix (¹) in cristalli di gesso ottenuti per lento svaporamento di una soluzione diluita di acido solforico che aveva reagito con fluoruro di calcio, potè osservare solamente le forme $\{010\}$, $\{110\}$, $\{111\}$ e geminati secondo (100); e Gorgeu (²), in cristalli ottenuti da una soluzione di solfito di calcio in acqua contenente acido solforoso, osservò appena $\{010\}$ $\{110\}$ ed i soliti geminati.

Più recentemente Barker (³), in cristalli di gesso, ottenuti per lento svaporamento di una soluzione cloridrica di solfato di calcio, riuscì ad identificare la forma $n\{\bar{1}11\}$ insieme con le $\{010\}$ e $\{110\}$.

Ultimamente poi Fletcher (⁴) rinvenne cristalli di gesso, depositatisi in una caldaia che serviva per la distillazione dell'acqua, anche più interessanti. Infatti egli vi rinvenne $\{010\}$ $\{110\}$ $\{230\}$ $\{111\}$, e, ciò che è più rimarchevole, notò geminati secondo $d\{101\}$, che fino ad ora, a quanto pare, non erano mai stati rinvenuti in cristalli di gesso artificiale.

Mi è grato infine di rivolgere al prof. F. Zambonini i miei più vivi ringraziamenti per l'ospitalità concessami nel suo laboratorio e per i consigli ed insegnamenti, di cui mi è prodigo nelle mie ricerche.

Biologia vegetale. — *Sulla biologia fiorale del mandorlo.* Nota preventiva di C. Campbell, presentata dal Socio R. Pirotta.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. M.

(¹) Bull. Soc. min., (1883) *6*, 173.
(²) Bull. Soc. min., (1894) *17*, 8.
(³) Mineralogical Magazine, (1907) XIV, 211.
(⁴) Mineralogical Magazine, (1911) XVI, 137.

pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXIV. (1892-1915). Fasc. 2°. Sem. 1°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIII. (1892-1914). Fasc. 5°-6°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-X. Fasc. 13°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino e Firenze.*

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa e Napoli.*

RENDICONTI — Gennaio 1915.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 gennaio 1915.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 25 febbraio 1915.* **N. 3.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 febbraio 1915.

Volume XXIV°. — Fascicolo 3°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 febbraio 1915.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Chimica. — *Sull'impiego della soluzione acquosa di acetato mercurico nell'analisi della parte terpenica delle essenze.* Nota del Corrispondente L. BALBIANO [1].

Fin dal 1901 in una Nota pubblicata nella Chemiker Zeitung, pag. 932, proponevo la soluzione acquosa satura a freddo di acetato mercurico, come reagente atto a svelare la presenza delle olefine nei petrolii naturali, perchè tale reattivo non agiva sugli idrocarburi aromatici, nè sulle paraffine, nè sui cicloidrocarburi saturi « *nafteni* », mentre agiva ossidante, trasformandosi l'acetato mercurico in mercuroso insolubile, sulle olefine. Le mie esperienze venivano, in quest'ultimo decennio, confermate ed ampliate da altri chimici.

Il dott. Jenö Tausz [2], nel laboratorio del prof. Engler del politecnico di Karlsruhe, nella sua tesi di laurea, sottoponeva il metodo da me proposto per l'analisi delle benzine del petrolio ad una minuta critica sperimentale e concludeva: *Die Methode ist somit für den Nachweis der unter 100° siedenden ungesättigten Kohlenwasserstoffe brauchbar.* La modificazione

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica organica del R. Politecnico di Torino.

[2] *Beiträge zur identifizierung und Kenntniss der Kohlenwasserstoffe des Erdöls.* Inaug. diss. Polytech. Karlsruhe. Borna-Leipzig, Buchdruckerei Robert Noske, 1911.

più importante introdotta dal Tausz e che rende pratico il metodo, è di far agire la soluzione di acetato mercurico alla temperatura di 100° anzichè alla temperatura ambiente; così si abbrevia la durata della reazione, che si può ridurre a 3 ore.

Altri chimici applicarono il processo d'ossidazione coll'acetato mercurico disciolto alla ricerca dei legami olefinici nelle sostanze grasse, e fra questi A. Leys (1) adopera la mia reazione, e siccome discioglie l'ossido di mercurio ed il grasso nell'acido acetico concentrato, non usando l'acetato mercurico già fatto, ritiene la sua reazione originale e naturalmente trascura di citare il mio lavoro anteriore di sei anni.

C. Grimaldi e L. Prussia (2) applicarono la soluzione di acetato mercurico alla ricerca e determinazione dei derivati del petrolio negli olii di trementina, lavorando un metodo pratico che permette di svelare tale sofisticazione.

La mia reazione serve anche, come ho dimostrato nel 1909 (3), a separare i composti naturali delle essenze che contengono i due radicali C_3H_5 *allile* e *propenile*, perchè l'azione dell'acetato mercurico introdotto in quantità stechiometrica nella miscela reagisce prima sul radicale *allile*, formando il composto aceto-mercurico fisso, e lascia inalterato il composto *propenilico* volatile col vapore d'acqua (4).

L'azione della soluzione acquosa di acetato mercurico si esplica sui terpeni in due modi differenti. Il pinene viene ossidato a diossipinene (5); il canfene invece dà un composto aceto-mercurico di un'ossicanfene.

(1) Bl. 1907, 262, 543.

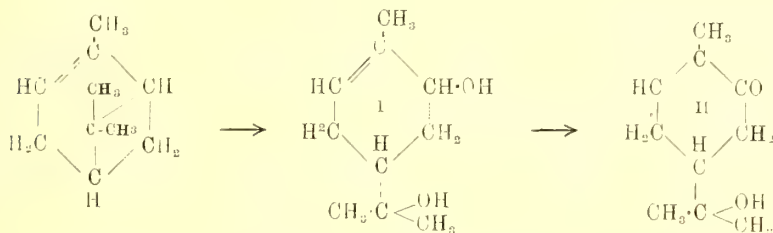
(2) Ann. chim. appl., tom. I, 1914, pag. 324.

(3) R. A. L., XVIII, serie 5a, 372. B. *42*; 1502 [1909].

(4) Questa reazione è *l'unica praticamente distintiva*, conosciuta attualmente fra il radicale allile e propenile; perciò non so spiegarmi perchè il professor Nasini, nel suo audace discorso fatto al congresso della Società italiana per il progresso delle scienze (Atti 1912, pag. 320), dopo aver rilevato l'importanza del problema, abbia taciuto di essa nella « Rivista sintetica dei progressi della chimica organica durante i 50 anni d'unità nazionale », *esaltando* invece nella « Rivista sintetica dei progressi della chimica-fisica » il metodo — in origine del Gladstone — basato sul differente indice di rifrazione delle due serie di isomeri, metodo che, come ho avvertito nella mia Memoria (Atti accademici 1905), manca allo scopo quando si conosca soltanto uno dei due termini isomeri.

(5) Non ho risposto — contrariamente alla mia abitudine — alle osservazioni contenute nella Nota di G. G. Henderson e J. W. Agnew (Soc. *95*, 289, an. 1909) sulla costituzione del diossipinene che si ottiene per ossidazione acetomercurica del pinene, perchè non avevo alcun fatto da obbiettare alle loro conclusioni. Essendo essi riusciti ad isolare nel primo periodo di ossidazione il Sobrerolo (I), che poi nel secondo periodo si cambia nel chetone (II), ed inoltre avendo essi ottenuto coll'idrogenazione mediante il sodio e la soluzione eterea umida del chetone la ritrasformazione in Sobrerolo, mentre tale passaggio non mi era stato possibile coll'idrogeno svolto dall'amalgama di alluminio, le loro conclusioni erano logicamente dedotte

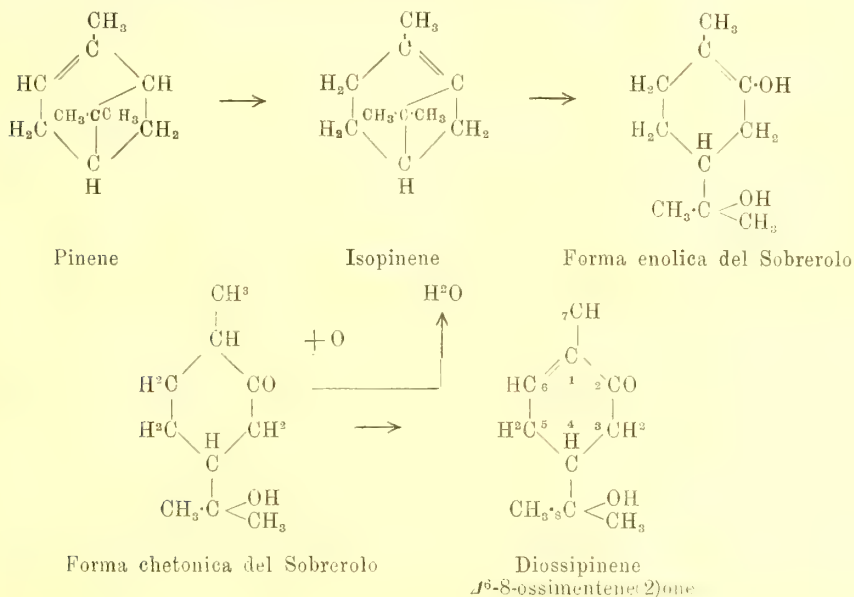
Ho quindi un mezzo per separare questi due terpeni nelle essenze naturali: ed a questo scopo ho lavorato un metodo analitico che mi permette di separare e riconoscere in una miscela di idrocarburi, le paraffine, gli aroma-

---

Però mi è sempre stato difficile di spiegare la formazione del Sobrerolo in prima fase di reazione, perchè l'esperienza mi aveva insegnato che il *pinane*, prodotto d'idrogenazione del pinene col metodo Sabatier-Senderens, non reagiva per niente colla soluzione acquosa di acetato mercurico. Da ciò deducevo che la reazione ossidante era soltanto provocata dal legame etilenico del pinene, non dalla rottura del ponte, come era proposta nella mia interpretazione ed ammessa la costituzione del pinene, dimostrata dall'*abbau* permanganica del Wagner e del Baeyer, questo legame non era attaccato al C al quale si aggrappa l'isopropile; doveva quindi presumibilmente avvenire prima nel pinene uno spostamento del doppio legame.

Verso la fine del 1911 Zelinsky (Ber. *44*, 2782) dimostrò che per azione del nero di palladio, preparato con certe modalità, il pinene si isomerizza cataliticamente, alla temperatura ordinaria, in *isopinene* con trasporto del legame etilenico al C al quale si aggrappa l'isoproprile. Allora ammettendo tre fasi nella reazione — 1°) sloggiamento del legame etilenico; 2°) rottura del ponte; 3°) saturazione con -OH delle valenze libere — si ha la forma chetonica del Sobrerolo, che, ossidata ulteriormente, dà il diossipinene. I passaggi delle diverse fasi sono rappresentati dai seguenti schemi.

Pinene → Isopinene → Forma enolica del Sobrerolo

Forma chetonica del Sobrerolo ($+O$, $-H_2O$) → Diossipinene

Δ^6-8-ossimentenel(2)one

tici, le cicloparaffine, le olefine ed i terpeni, impiegando la soluzione satura a freddo, di acetato mercurico. Espongo in questa breve Nota i risultati ottenuti.

Parte sperimentale.

I. Come lavoro preparatorio ho dovuto sperimentare se il pinene purissimo, quando viene ossidato colla soluzione acquosa satura di acetato mercurico, genera o no piccole quantità di cimene. Perciò si preparò il pinene puro secondo le prescrizioni di Wallach [1], decomponendo con soluzione alcoolica di anilina il nitroso-cloruro cristallizzato. Il pinene adoperato distillava fra 155°.2 e 155°,8 alla pressione di 750 mm.

Pinene 5 cm.^{3} si agitarono blandamente per 40 minuti con gr. 40 acetato mercurico secco sciolti in 160 cm.^{3} di acqua e quando già si era prodotto il deposito di acetato mercuroso, si fece bollire a ricadere la massa a bagno d'olio per ore 1,30 a viva ebollizione, condensando il vapore con refrigerante Soxhlet a doppia circolazione d'acqua. Si distillò in seguito circa 90 cm.^{3} di liquido, dal quale, mediante imbuto a robinetto e buretta graduata divisa in centesimi, si separarono cm.^{3} 0,35 di olio galleggiante. Questi cm.^{3} 0,35, agitati con soluzione satura di acetato mercurico, davano ancora la riduzione ad acetato mercuroso.

In un'altra esperienza in cui l'ebollizione a ricadere s'era protratta per 3 ore, 5 cm.^{3} pinene dettero cm.^{3} 0,02 di olio che dava ancora la reazione coll'acetato mercurico. In queste condizioni il 99,6 % di pinene s'era ossidato, trasformandosi il 47,8 % di esso in diossipinene, perchè il semicarbazone ottenuto pesava gr. 3,248.

Altri saggi fatti su pinene destrogiro e sinistrogiro provenienti dalla distillazione di essenze di trementina commerciali, variando la durata dell'ebollizione, dettero i seguenti risultati:

	Durata ebollizione	
Pinene destrogiro p. eb. 158-159° . . .	ore 1.30	cm.^{3} 5 dettero cm.^{3} 0,05 olio reagente coll'acetato mercurico.
Pinene sinistrogiro p. eb. 158-160° . . .	» 2	cm.^{3} 5 dettero cm.^{3} 0,05 olio reagente coll'acetato mercurico.
Pinene dalla trementina veneta. Essenza distillata in laboratorio e rettificata, p. e. 160-161°	» 4	cm.^{3} 5 dettero cm.^{3} 0,1 olio reagente coll'acetato mercurico.

Riassumendo: il pinene, quando viene bollito a ricadere per 2 a 4 ore colla quantità richiesta di acetato mercurico disciolto in 4 p. di acqua, si

[1] A. *258*, 344.

decompone integralmente, resinificandosi in gran parte; ma circa il 50 % si ossida a diossipinene. Con queste esperienze viene provato che in questa ossidazione non si produce quantità apprezzabile di cimene.

II. Col pinene depurato col processo di Wallach si fecero le seguenti esperienze:

a) Pinene cm.^{3} 4,5 mescolati con cm.^{3} 0,5 di eteri di petrolio p. eb. 40°-65°, risultanti non reazionabili coll'acetato mercurico, si fecero bollire a ricadere con p. 40 di acetato mercurico sciolti in 160 p. di acqua, per 3 ore. Si distillò in seguito 80-90 cm.^{3} di liquido, dal quale si separò cm.^{3} 0,35 di olio che più non reagiva con acetato mercurico.

b) Si sperimentò l'azione della soluzione acquosa di acetato mercurico sul pinane, $C_{10}H_{18}$, ottenuto per idrogenazione del pinene dall'essenza di trementina col metodo di Sabatier e Senderens. Il pinane adoperato bolle a 166°, e non reagisce nè a freddo nè a caldo colla soluzione di acetato mercurico.

Pinane cm.^{3} 5 vennero agitati alla temperatura ordinaria con 40 gr. di acetato mercurico secco sciolti in 160 p. di acqua. Dopo un contatto di 48 ore la soluzione s'era conservata perfettamente limpida. Si fece bollire a ricadere per 2 ore; indi si distillarono circa 100 cm.^{3} di liquido, sul quale galleggiavano cm.^{3} 4,7 di pinane inalterato. La soluzione acquosa, dopo l'ebollizione, era colorata leggermente in giallo, e s'era depositata una piccola quantità di ossido rosso di mercurio coll'idrolisi dell'acetato.

c) Una miscela di cm.^{3} 4,5 pinene di Wallach e cm.^{3} 0,5 pinane, trattati con 40 gr. di acetato mercurico secco sciolti in 160 p. di acqua, e fatti bollire a ricadere per 2 ore; indi distillati circa 100 cm.^{3} di liquido dal quale si separò cm.^{3} 0,7 di olio che a freddo reagiva con soluzione di acetato mercurico. Si lasciò completare la reazione a freddo per 48 ore adoperando 10 cm.^{3} di soluzione satura di acetato mercurico; indi si distillò in corrente di vapore raccogliendo circa 10 cm.^{3} di liquido dal quale si separarono cm.^{3} 0,3 di olio che più non reagiva coll'acetato mercurico. Da questa esperienza risulta che il pinene era completamente ossidato, e che il 60 % del pinane era riottenuto separato dalla miscela.

III. Il canfene adoperato proveniva dalla fabbrica C. A. F. Kahlbaum; distilla fra 155°-156°; la reazione si fece in mezzo acido, acidulando con acido acetico previamente saggiato che non riducesse l'acetato mercurico [1].

a) Canfene gr. 2, si fecero bollire per 7 ore con gr. 16 di acetato mercurico — la quantità teorica di acetato sarebbe gr. 9,3 — sciolti in 64 gr.

[1] L'acido acetico, che nel suo catalogo il Kahlbaum segna con sigla speciale, soddisfa a questa condizione. Molti acidi provenienti da diverse fabbriche riducono più o meno l'acetato mercurico, a seconda della quantità di acidi non saturi che contengono.

di acqua acidulata con 5 cm.^{3} di acido acetico glaciale. Il canfene aveva reagito completamente e s'era trasformato nel composto aceto-mercurico insolubile, sotto forma di un precipitato bianco-giallognolo, che, lavato con acqua e disseccato nel vuoto su acido solforico, pesa gr. 10,5 e fonde verso 187°. Per 2 gr. canfene si calcola gr. 9,8 composto $C_{10}H_{16}O(HgC_2H_3O_2)^2$. I gr. 10,5 di composto si sospesero in acido cloridrico diluito (1 vol. acido concentrato, 1 vol. acqua), e si riscaldarono a bagno-maria con zinco granulato in matraccio munito di refrigerante ascendente, per 8 ore; indi si distillò in corrente di vapore. Col vapor d'acqua si raccolsero gr. 1,4 di canfene.

b) Canfene gr. 2 sciolti in 5 cm.^{3} benzolo, trattati colla stessa quantità di soluzione di acetato mercurico (16 in 64 acq.), fatti bollire per 2 ore a ricadere, e distillata in seguito la massa in corrente di vapore; si separarono cm.^{3} 4 3 di benzolo, che più non reagiva coll'acetato mercurico: e dal precipitato, il quale, lavato e disseccato, pesava gr, 9,63 e fondeva verso 190°, si riottennero gr. 1,88 di canfene.

c) Canfene gr. 2 sciolti in 5 cm.^{3} pinane, trattati colla stessa quantità di soluzione di acetato mercurico (16 in 64 acq.), bolliti, a ricadere per 2 ore, dettero nel distillato cm.^{3} 4,5 pinane; e dal composto aceto-mercurico pesante gr. 10 e fus. a 188°-189°, si riottenne gr. 1,7 di canfene.

d) Canfene gr. 1, sciolti in cm.^{3} 2 pinene Wallach, vennero bolliti a ricadere per ore 2,30 con gr 23 acetato mercurico sciolti in 92 gr. di acqua acidulata con 2 cm.^{3} di acido acetico. La massa distillata in corrente di vapore, più non svela terpene inalterato. Il precipitato di acetato mercuroso e di composto aceto-mercurico del canfene, sul quale si osservavano delle piccole goccioline di mercurio ridotto, si filtrò, si lavò con acqua, indi si riscaldò a bagno-maria con acido cloridrico e zinco. Dopo 8 ore di riscaldamento a ricadere, si distillò in corrente di vapore, e nel distillato si raccolse circa gr. 0,7 di canfene. Le acque filtrate si svaporarono a secco a bagno-maria, ed il residuo si riprese con etere. L'etere, lavato con acqua e distillato, lasciò un residuo oleoso, che, trattato con cloridrato di semicarbazide ed acetato potassico, dette gr. 0,95 di semicarbazone del diossipinene, circa il 30 % del pinene adoperato.

IV. La miscela complessa di 2 cm.^{3} pinene Wallach, 2 cm.^{3} cimene, 2 cm.^{3} pinane, 1 gr. canfene, si trattò con gr. 33 di acetato mercurico secco disciolti in 132 cm.^{3} di acqua acidulati con 5 cm.^{3} di acido acetico. Si fece bollire a ricadere per ore 2.30, mantenendo viva l'ebollizione ed agitando di frequente la massa per rompere i grumi di composti di mercurio che andavano man mano formandosi. Dal distillato in corrente di vapore si separarono cm.^{3} 3,5 di olio, miscela di cimene e pinane, che più non reagiva con acetato mercurico, segno che la reazione era avvenuta completa. Dalla

massa di acetato mercuroso e composto aceto-mercurico del canfene, col trattamento con zinco ed acido cloridrico e successiva distillazione in corrente di vapore, si separarono circa gr. 0,6 di canfene, che si conservò liquido per qualche giorno, ma che infine cristallizzò. Le acque evaporate a bagno-maria, il residuo ripreso con etere, la soluzione eterea lavata ripetutamente con acqua, lasciarono alla distillazione un olio colorato in giallo rosso, che, sciolto in alcool e trattato con soluzione acquosa di cloridrato di semicarbazide ed acetato potassico, dette gr. 0,85 di semicarbazone del diossipinene, circa il 25 % del pinene adoperato.

Riassumendo i risultati sperimentali esposti, risulta:

1°) Che la reazione ossidante esercitata dalla soluzione acquosa di acetato mercurico viene grandemente agevolata dall'azione del calore, anche nel caso che, come pel canfene, si formi un composto aceto-mercurico del terpene.

2°) Che l'acetato mercurico non reagisce cogli idrocarburi aromatici — fatto già rilevato nelle mie ricerche del 1901 — nè colle cicloparaffine, come ho dimostrato nel 1904 [1] studiando col dott. Angeloni l'inattività di tale soluzione sull' 1-3-dimetilcicloesano dall'acido canforico, nè cogli idrocarburi $C_{10}H_{18}$ biciclici, tipo pinane. Questi fatti, confermati dal Tausz, vennero completati da lui collo studio delle paraffine che si dimostrano non reazionabili.

3°) Che l'acetato mercurico reagisce quantitativamente sul canfene formando il composto aceto-mercurico di un ossicanfene che, decomposto con zinco ed acido cloridrico, ridà il canfene in quantità oscillanti fra il 70 e 94 % dell'adoperato. Tali differenze provengono dalla difficoltà tecnica di condensare quantitativamente piccole porzioni di canfene nella distillazione in corrente di vapore.

4°) Che da una miscela di terpeni, cicloidrocarburi, carburi aromatici e paraffine, la soluzione acquosa di acetato mercurico serve a separare i terpeni.

A questo proposito io mi permetto di rivolgere pubblicamente la preghiera ai miei colleghi chimici che maneggiano e scoprono nuovi terpeni, di voler provare su di essi l'azione della detta soluzione. Si completerà così il processo d'analisi immediata della parte terpenica delle essenze che le mie ricerche hanno abbozzato.

[1] R. A. L., tom. XIII, ser. 5ª pag. 142 (1904).

Fisiologia. — *Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci di animali omeotermi.* Nota V (¹): *Le contrazioni del preparato diaframmatico provocate da stimoli unici* (²), del Corrisp. FILIPPO BOTTAZZI.

Le contrazioni provocate da stimoli unici (d'apertura di corrente indotta) sogliono essere dette *semplici* o *uniche*. Queste mie ricerche tendono a dimostrare che semplici esse non sono sempre, se, così chiamandole, si vuol dire che risultano di un unico processo contrattorio. Le curve delle contrazioni semplici di solito presentano, dopo il periodo di latenza, un tratto ascendente culminante in un apice, al quale segue un tratto discendente che raggiunge

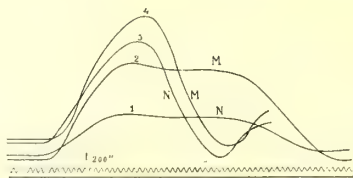



FIG. 1

Le curve 3 e 4 furono registrate prima delle curve 1 e 2: col tempo apparisce la contrazione tonica.

[N. B. Ciascuna delle curve riprodotte in questa e nelle figure seguenti è da considerarsi come rappresentante tipica di gruppi di contrazioni ottenute in molti esperimenti simili. Nel riprodurle dai tracciati, sono state fotograficamente ridotte a $^1/_3$ delle dimensioni originali].

l'ascissa. Tali contrazioni eseguisce anche il preparato diaframmatico (fig. 1, curve 3 e 4), stimolato sia direttamente (contrazioni *M*), sia indirettamente, cioè per il tramite del nervo (contrazioni *N*). Spesso però il preparato diaframmatico compie contrazioni, che possono dirsi *doppie*, perchè le rispettive curve presentano più o meno distintamente due elevazioni diverse d'aspetto, come se fossero composte d'una prima *contrazione rapida* o *clonica* e di una seconda *contrazione lenta* o *tonica*. Generalmente, solo la prima ha un

(¹) Le Note precedenti sono pubblicate: la I^a^, nelle Mem. d. R. Accad. d. Lincei (5), vol. X, p. 489-630, a. 1914; la III^a^, in questi Rendic. (5), vol. XIII, p. 539, a. 1914 e vol. XIV, p. 27 a. 1915; la IV^a^, nel Volume giubil. dedic. ad A. Lustig (« Ricerche di Biologia »), Firenze 1915; la II^a^ è in corso di stampa nelle Memorie della R. Accad. dei Lincei.

(²) Lavoro eseguito nell'Istituto di fisiologia della R. Università di Napoli.

vero apice, mentre la seconda si manifesta con un'elevazione a forma di cupola, la quale s'inizia in un certo momento del periodo di allungamento della contrazione rapida, che per ciò ne rimane notevolmente prolungata o amplificata (fig. 1, curve 1 e 2; fig. 2, curve 1 e 2 ecc.). Raramente, in condizioni ordinarie, la cupola della contrazione tonica oltrepassa in altezza l'apice della contrazione clonica (ved. fig. 3, curva 2). Registrando successivamente, a intervalli più o meno grandi, un certo numero di gruppi di

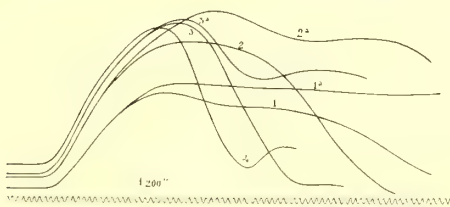



Fig. 2

Le curve si succedono nell'ordine da 1 a 4: in questo caso, col tempo, la contrazione tonica sparisce. Le curve 1ª, 2ª e 3ª sono le prime del rispettivo gruppo, e presentano più accentuata la contrazione tonica; le corrispondenti 1, 2 e 3 sono le ultime.

contrazioni, si può osservare, o che le curve, prima semplici, diventano mano mano doppie (fig. 1); o, viceversa, che, col tempo, dalle curve doppie mano mano sparisce la contrazione tonica rimanendo la contrazione clonica: cioè

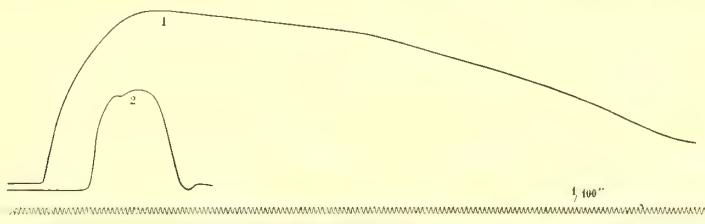



Fig. 3

La curva 1, registrata da un muscolo fresco e apparentemente normale, a 36° C, sembra curva di contrazione di un muscolo liscio. La curva 2 potrebbe scambiarsi con quella di un muscolo veratrinizzato.

che curve, prima doppie, diventano semplici (fig. 2). Talora, in condizioni speciali di eccitabilità, il muscolo freschissimo eseguisce contrazioni molto prolungate e toniche, come quella rappresentata dalla curva 1 della fig. 3.

La proprietà di eseguire contrazioni doppie non appartiene esclusivamente al preparato diaframmatico, ma, bensì, ad ogni muscolo striato. Contrazioni doppie, analoghe a quelle riprodotte in questo lavoro, furono registrate da quasi tutti gli autori che si sono occupati di fisiologia muscolare. Mi basti rammentare le ricerche di Fick (1), di Funke (2), di Tiegel (3), di Tiger-

stedt ([4]), di Rollett ([5]) ecc., e particolarmente quelle di Yeo e Cash ([6]), di Lhoták von Lhota ([7]) e di Graham Brown ([8]); dalle quali risulta che il fenomeno della contrazione doppia o bicuspidata, sul quale io mi sforzo di richiamare l'attenzione dei fisiologi perchè vogliano considerarlo come manifestazione ordinaria dell'attività dei muscoli striati bianchi o rossi, di animali omeotermi o pecilotermi, è stato osservato da moltissimi sperimentatori.

Tutti però hanno avuto il torto di ritenerlo, come ben dissero Yeo e Cash, come un fenomeno abnorme, trascurabile ammettendo schematicamente che la contrazione eseguita da un muscolo eccitato da uno stimolo unico non può essere se non una contrazione unica o semplice. Grützner ([9]) parla

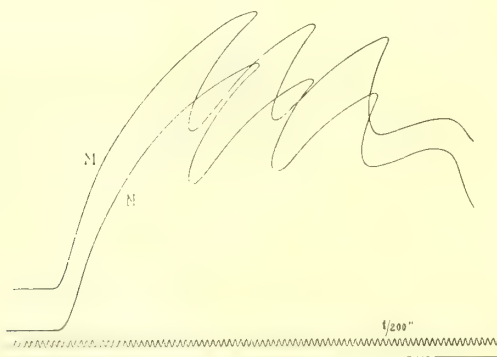



Fig. 4

Curve di contrazioni multiple, provocate da stimoli unici applicati al nervo (N) e al muscolo (M) di un preparato eccitabilissimo.

espressamente delle contrazioni biscupidate, ma le attribuisce alle due specie di fibre, bianche e rosse o chiare e torbide, che sogliono trovarsi insieme in uno stesso muscolo. Ma dopo le ricerche di Carvallo e Weiss ([10]), i quali hanno dimostrato che anche i muscoli esclusivamente bianchi del coniglio avvelenato con veratrina dànno curve tipicamente doppie, l'ipotesi del Grützner non è più sostenibile. Del resto, perfino un discepolo di lui, il Fischer ([11]), ha dovuto recentemente convenire che « certamente non ogni curva bicuspidata può spiegarsi coll'esistenza delle due specie di fibre muscolari ».

Io ho fatto per più anni di seguito numerosissime ricerche circa l'influenza che varî fattori esercitano sulla forma della contrazione del preparato diaframmatico, e ho ottenuto risultati che qui debbo limitarmi a riassumere in conclusiva brevità.

Influenza del peso. — Se il muscolo è caricato di un peso troppo piccolo, dopo la prima contrazione esso non può distendersi completamente; le curve successive non raggiungono l'ascissa primitiva, e si svolgono tutte sopra

ascisse notevolmente più alte. Se invece la carica è eccessiva, il tratto discendente di ogni curva oltrepassa in giù l'ascissa primitiva.

Con pesi intermedii, le contrazioni si svolgono normalmente. Spesso, aumentando successivamente il peso, accade di osservare che le contrazioni, prima apparentemente semplici, diventano mano mano doppie (fig. 5), presentandosi una contrazione tonica che, col crescere del peso, sempre più si accentua. Non sempre però il solo aumentare del peso basta a far apparire distintamente la contrazione tonica. In conclusione, è lecito solamente di affermare, che ove nel preparato esista la disposizione alla contrazione tonica (il che è vero nel maggior numero dei casi), una certa carica è necessaria perchè essa si manifesti in modo cospicuo, mentre non la si osserva nelle curve dello stesso muscolo quasi del tutto scaricato. Quando la detta disposizione esiste, in generale si osserva che, mentre il muscolo scaricato compie contrazioni molto alte e ampie (talora quasi cupoliformi), ma prive di una netta contrazione secondaria o tonica, aggiunto il peso *optimum* le contrazioni diminuiscono di altezza e presentano subito una tipica contrazione tonica (fig. 5, curve 1 e 2).

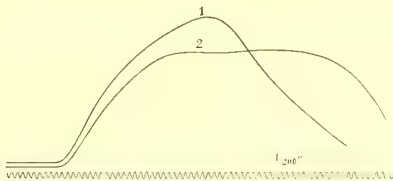



Fig. 5

Due curve di contrazione di uno stesso muscolo: la 1, quando il muscolo era scarico; la 2, quando era caricato del peso di gr. 13.

Influenza della intensità degli stimoli. — Gli effetti del progressivo aumento della intensità delle scosse uniche d'apertura di corrente indotta sono: 1°) Aumento progressivo dell'altezza delle contrazioni rapide, fino a che sia raggiunto un valore massimo. 2°) Se la contrazione tonica è poco accentuata quando lo stimolo è debole, aumentando l'intensità di questo la contrazione tonica diventa sempre più cospicua. Talora, stimoli deboli provocano contrazioni semplici tipiche, che però diventano doppie, aumentando l'intensità degli stimoli (fig. 6). Siccome però vi sono casi nei quali le contrazioni rimangono semplici per quanto si aumenti l'intensità degli stimoli, bisogna ammettere che gli stimoli forti, per sè soli, non sono capaci di provocare la comparsa di contrazioni toniche in muscoli che, per ragioni ignote, non hanno disposizione ad eseguirle.

Influenza della temperatura. — Finora io non ho accennato affatto a questo importantissimo fattore di variazioni della forma della contrazione

muscolare, perchè i rispettivi esperimenti s'intendeva che fossero stati eseguiti alla temperatura *optimum* o a una prossima a questa. La temperatura *optimum*, cioè quella alla quale il preparato diaframmatico compie, a parità delle altre condizioni (peso, intensità degli stimoli ecc.), le più alte sebbene non le più rapide contrazioni, è di 34°-35° C., vale a dire alquanto inferiore alla temperatura centrale del corpo. A quella temperatura, la contrazione provocata da uno stimolo unico può essere, a seconda dei preparati, semplice o doppia, il che già dimostra che l'esistenza o meno di una contrazione tonica non dipende esclusivamente dalla temperatura.

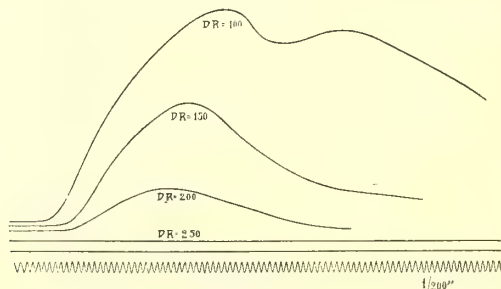



Fig. 6

Cinque curve di contrazione provocate da altrettanti stimoli d'intensità crescente da DR = 250 mm. (stimolo inefficace) a DR = 100 mm. Lo stimolo più forte provoca una cospicua contrazione tonica.

In molti esperimenti, ho determinato il periodo di latenza, l'altezza e la durata delle contrazioni provocate da stimoli di intensità costante, a temperature diverse. Riferisco nelle seguenti tabelle i dati raccolti in tre esperimenti diversi. Dalla I tabella risulta che, coll'aumentare della tempera-

TABELLA I.

Numero d'ordine	Intensità dello stimolo DR =	Temperatura	Altezza delle curve	Durata delle contraz. (ampiezza)	Periodo di latenza	*Osservazioni*
1	100 mm.	15° C	—	—	—	Per le prime contrazioni la determinazione dell'ampiezza (durata) non fu possibile, perchè la leva scrivente si allontanava dal cilindro prima che la curva fosse tutta registrata.
2	»	17	mm. 6,5	—	0,05″	
3	»	20	19	—	0,047″	
4	»	22	29	—	0,037″	
5	»	26	55	mm. 150	0,02″	
6	»	30	68	84	0,015″	
7	»	33	64	80	0,012″	
8	»	35	37	90	0,015″	
9	»	36	31	95	0,017″	
10	»	37	25	95	—	
11	»	38	10	—	0,018″	

TABELLA II.

Numero d'ordine	Intensità dello stimolo DR =	Temperatura	Altezza delle curve	Durata delle contraz. (ampiezza)	Periodo di latenza	*Osservazioni*
1	100 mm.	13° C	81 mm.	mm. 250	0,02″	—
2	»	18	86	220	0,017″	
3	»	20	104	190	0,005″	
4	»	25	104 o più	190	0,004″	
5	»	31	103 mm.	100	0,005″	
6	»	35	100	95	0,011″	
7	»	37	60	85	0,015″	

TABELLA III.

Numero d'ordine	Intensità dello stimolo DR =	Temperatura	Altezza delle curve	*Osservazioni*
1	100 mm.	27° C	mm. 73	Ore 11
2	»	29	66	
3	»	30	83	Contrazioni doppie (3–7)
4	»	31	87	
5	»	31	87	
6	»	35	100	
7	»	38	93	
8	»	40	88	
9	»	40	87	
10	»	40	80	
11	»	41	62	
12	»	40	51	
13	»	36	47	
14	»	35	48	
15	»	31	50	Ore 18

tura, il periodo di latenza prima diminuisce e poi tende di nuovo ad aumentare un poco; l'altezza delle contrazioni prima aumenta e poi di nuovo diminuisce; la durata totale (ampiezza) di esse, prima diminuisce e poi di nuovo aumenta. Lo stesso dimostra la II tabella, con la sola differenza che la durata delle contrazioni, in questo caso, diminuisce sempre col crescere della temperatura. Nell'esperimento, cui si riferiscono i dati della III tabella, la temperatura fu fatta prima aumentare e poi di nuovo diminuire. Anche l'altezza delle contrazioni prima aumentò e poi diminuì; ma la dimi-

nuzione di essa s'iniziò mentre la temperatura era ancora in via d'aumento; e quando questa tornò ad abbassarsi, le contrazioni tornarono ad aumentare d'altezza.

Si osservino le curve delle figg. 7 e 8.

Dai dati raccolti nelle tabelle e da queste figure risulta che spesso le più alte contrazioni sono quelle che il muscolo compie a una temperatura, non prossima a quella centrale del corpo, ma di molto inferiore (ancor che

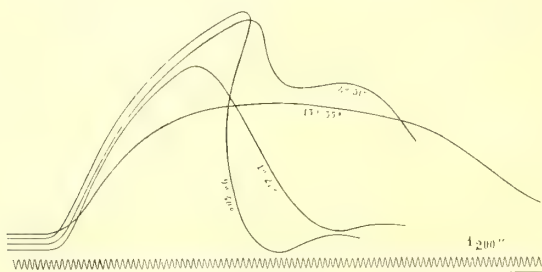



Fig. 7

Quattro contrazioni di uno stesso muscolo registrate a temperature diverse. Una contrazione tonica distinta si vede solamente nella 4ª curva. La curva 13ª è molto prolungata, probabilmente a causa della fatica.

variabile secondo i casi), il che è in accordo con i risultati ottenuti da Gad e Heymans ([12]), da Fröhlich ([13]) e particolarmente da Gayda ([14]). Questo fenomeno singolare può solo ora essere spiegato, considerando che, come ri-

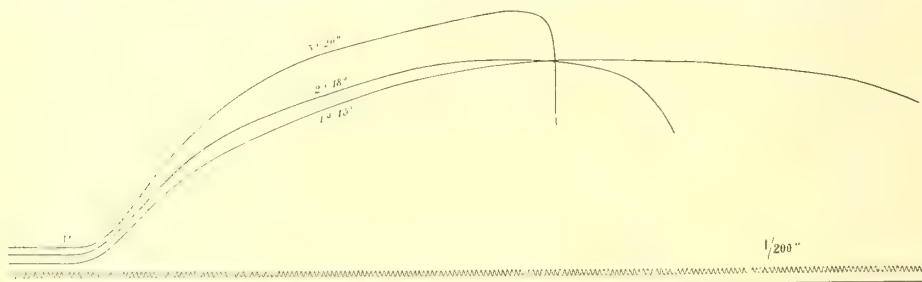



Fig. 8

Curve di contrazione di un muscolo raffreddato a 20°-13° C. Si vede nettamente, specie nella 3ª, come l'apice è fatto dalla contrazione tonica.

sulta dai miei tracciati, solo entro certi limiti di temperatura sotto la temperatura centrale del corpo la contrazione tonica, quando si presenta, è massimamente sviluppata, tanto da elevarsi col suo apice al di sopra della contrazione clonica. Per es., nella curva 3ª della fig. 8, l'apice della curva complessiva è fatto dalla contrazione tonica, che si distingue abbastanza bene dalla contrazione primaria. L'altezza così grande di quella curva, alla

temperatura relativamente assai bassa di 20° C. è determinata dal fatto che la contrazione tonica si sovrappone alla clonica. Crescendo la temperatura, la contrazione tonica diventa sempre meno cospicua, fino a scomparire del tutto, come nella 9ª curva della fig. 7. Nell'esperimento corrispondente, la contrazione tonica si manifestò solo fra i 29° e i 35° C; non se ne vide traccia a temperature inferiori (27°-24° C) nè superiori (37°-42° C). È evidente che qui non si può parlare di un coefficiente termico ([15]) costante della contrazione muscolare; ma ciò dipende assai probabilmente dal fatto, sul quale io insisto, che la contrazione muscolare non risulta di un unico processo contrattorio, ma almeno di due, ciascuno dei quali può avere un coefficiente termico distinto.

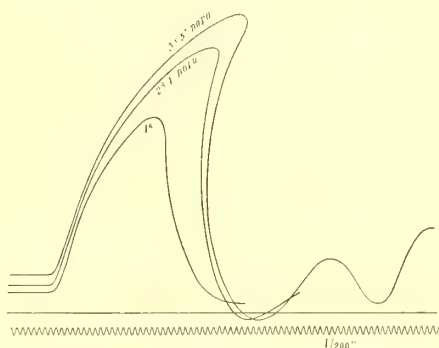



Fig. 9

Azione iniziale della veratrina: 1ª, curva normale; 2ª, 1′ dopo l'azione della veratrina; 3ª, 5′ dopo. Aumento progressivo delle altezze di contrazione, provocato dalla veratrina.

Influenza della veratrina. — Dalle mie ricerche risulta, che la veratrina determina i seguenti effetti nel preparato diaframmatico: 1°) In primo luogo, subito dopo l'azione della veratrina (fig. 9), aumenta l'altezza delle contrazioni (ved. a questo proposito il lavoro di Carvallo e Weiss, 10), che man mano diventano anche più ampie. 2°) Quindi sempre più si sviluppa la contrazione tonica ([16]), che viene assumendo addirittura l'aspetto di contrattura (fig. 10); col tempo, mentre s'intensifica la contrattura, s'indebolisce la contrazione clonica, sino a fondersi interamente con la prima: allora le rispettive curve assumono l'aspetto di quelle dei muscoli fetali da me già descritte in un'altra pubblicazione [[17]], che somigliano, quanto alla forma, alle curve di contrazione dei muscoli lisci. 3°) Spesso la contrattura, come nella fig. 10, è ritmica, cioè la rispettiva curva si presenta ondulata, ciascuna ondulazione avendo a sua volta l'aspetto di una piccola contrazione elementare.

La veratrina, come una temperatura relativamente bassa, non fa che esaltare nel muscolo la sua attività tonica. Da ciò credo che dipenda anche

l'aumento in altezza delle contrazioni, che si osserva immediatamente dopo l'azione della veratrina. Più tardi questa deprime la contrazione clonica, anzi l'attività contrattile generale del muscolo. Azione analoga esercita sul muscolo l'ammoniaca (e altre sostanze).

Contrazioni multiple seguenti a stimoli unici. — In certi casi di esaltata eccitabilità naturale del preparato frenico-diaframmatico, stimoli unici, applicati per lo più al nervo (talora anche direttamente al muscolo), provocano contrazioni multiple, cioè contrazioni che differiscono profondamente da quelle finora descritte, perchè risultano da quattro o più contrazioni semplici seguentisi con un ritmo regolare sopra una linea di tonicità assai ele-

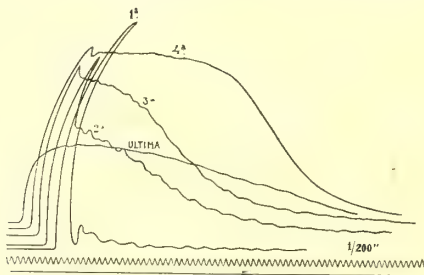



Fig. 10

Azione tardiva della veratrina. Dalla 1ª all'*ultima* di queste contrazioni, mentre apparisce e sempre più si accentua la contrazione tonica, che qui anzi assume l'aspetto di contrattura ritmica, diminuisce l'altezza della contrazione clonica, che nell'*ultima* curva è interamente fusa con la contrattura.

vata, in guisa che la curva complessiva assume l'aspetto d'un tetano incompleto, come nella fig. 4. Io suppongo che questo fenomeno, del resto non nuovo perchè lo si può constatare in una quantità di tracciati ottenuti da varî autori ([18]), dipende da una moltiplicazione dell'eccitamento, prodotto dallo stimolo unico forte, nelle giunzioni neuro-muscolari del preparato ([19]).

Considerazioni generali sulla genesi della contrazione doppia. — Dopo quanto ho detto, mi pare che più non sia lecito di dubitare dell'esistenza, in ogni muscolo striato, di una vera duplicità funzionale, cioè di un'attività clonica e tonica. Per ogni condizione capace d'influire sull'attività contrattile esistono dei limiti, entro i quali la duplicità funzionale si manifesta con la comparsa di tipiche contrazioni doppie, e questi limiti variano per i varii preparati muscolari: ciò è vero per la temperatura, come per l'intensità degli stimoli, per la concentrazione degl'idrogenioni, per il peso onde il muscolo è caricato, per l'azione di speciali sostanze (veratrina ecc.).

La contrazione muscolare è quasi sempre doppia. Quando essa apparisce semplice, spesso ciò dipende da una fusione completa della contrazione

tonica con la clonica. Solo in certe condizioni (stimolo debolissimo unico, peso eccessivamente piccolo, certe temperature ecc.) la contrazione tonica non si manifesta. Ma in altre condizioni (temperatura eccessivamente bassa, periodo avanzato dell'azione della veratrina, della fatica ecc.) sembra dileguarsi invece la contrazione clonica.

Generalmente, quando una contrazione, prima apparentemente semplice, si trasforma in contrazione nettamente doppia, ciò è effetto dunque di dissociazione delle due contrazioni prima fuse, dipendente dal fatto che la condizione determinante tale dissociazione agisce diversamente sulle due attività, clonica e tonica, del muscolo, diversamente quanto alla intensità e alla velocità di svolgimento di esse.

Tra i fattori determinanti la forma della contrazione, principalissimo è la natura del muscolo, se cioè questo è un muscolo bianco o rosso ([20]). Essendo l'attività tonica massimamente sviluppata nei muscoli rossi, la frequenza con cui il preparato diaframmatico eseguisce contrazioni doppie dipende dall'essere il diaframma un muscolo rosso per eccellenza.

Le contrazioni più alte, che un muscolo compie in risposta a stimoli unici, si osservano quando in esso l'attività clonica e l'attività tonica sono eccitabili a un grado *optimum* e armonicamente; allora la contrazione tonica fa da « sostegno interno » alla contrazione clonica. Il detto grado *optimum* di sinergia delle due attività non può corrispondere alla massima dissociazione di esse. Solo nei muscoli abnormemente raffreddati o avvelenati con veratrina, la straordinaria altezza delle contrazioni può essere determinata, per così dire, da sovrapposizione della contrazione tonica sulla clonica.

L'ipotesi più soddisfacente che oggi possediamo, per spiegare la contrazione doppia in tutti i casi in cui si presenta, come anche i varii fenomeni alla medesima connessi, mi sembra che sia quella da me proposta ([21]); vale a dire, che la duplicità funzionale dei muscoli striati sia propria di ogni fibra muscolare, e però corrisponda alla duplicità strutturale di questa; e particolarmente, che l'attività clonica (contrazione primaria o rapida) sia localizzata nelle miofibrille, mentre l'attività tonica (contrazione secondaria o lenta, contrattura) sarebbe localizzata nel sarcoplasma.

BIBLIOGRAFIA

([1]) A. Fick, *Studien über elektrische Nervenreizung*. Arb. a. d. physiol. Labor. d. Würzbürger Hochschule. Würzburg 1872, pag. 65. tav. VI.

([2]) O. Funke, *Ueber den Einfluss der Ermüdung auf den zeitlichen Verlauf der Muskelthätigkeit*. Pflüger's Arch. VIII, pag. 213 (1874).

([3]) E. Tiegel, *Ueber Muskelcontractur im Gegensatz zu Contraction*. Pflüger's Arch. XIII, pag. 71 (1876).

(4) R. Tigerstedt, *Untersuchungen über die Latenzdauer der Muskelzuckung in ihrer Abhängigkeit von verschiedenen Variabeln.* Arch. f. (Anat. u.) Physiol. 1885, Suppl., pag. 111.

(5) A. Rollett, *Ueber die Veränderlichkeit des Zuckungsverlaufes quergestreifter Muskeln bei fortgesetzter periodischer Erregung und bei der Erholung nach derselben.* Pflüger's Arch. LXIV, pag. 507 (1896).

(6) G. F. Yeo and Th. Cash, *On the relation between the active phases of contraction and the latent period of skeletal muscle.* Journ. of physiol. IV, pag. 198 (1883).

(7) C. Lhoták von Lhota, *Untersuchungen über die Veränderungen der Muskelfunction in einer Kohlendioxydatmosphäre.* Arch. f. (Anat. u.) Physiol. 1902, Suppl., pag. 45.

(8) T. Graham Brown, *Der Einfluss des Nervensystems auf die Form der Zuckungskurve des Frosch-Gastrocnemius.* Pflüger's Arch. CXXV, pag. 491 (1908).

(9) P. Grützner, *Ueber physiologische Verschiedenheiten der Skelettmuskeln.* Bresl. ärztl. Zeit. 1883, n. 18 (22 Sept.); id., *Zur Anatomie und Physiologie der quergestreiften Muskeln,* Rec. zool. suisse I, n. 4, pag. 565 (20 Sept. 1884); id., *Zur Muskelphysiologie,* Bresl. ärztl. Zeit. 1886, n. 1 (15 Jan.).

(10) J. Carvallo et G. Weiss, *De l'action de la vératrine sur les muscles rouges et blancs du lapin.* Journ. de physiol. et de pathol. géner. I, pag. 1 (1899).

(11) H. Fischer, *Zur Physiologie der quergestreiften Muskeln der Säugetiere.* Pflüger's Arch. CXXV, pag. 541 (1908).

(12) J. Gad und J. F. Heymans, *Uber den Einfluss der Temperatur auf die Leistungsfähigkeit der Muskelsubstanz.* Arch. f. (Anat. u.) Physiol., 1890, Suppl., pag. 59.

(13) Fr. W. Fröhlich, *Ueber den Einfluss der Temperatur auf den Muskel.* Zeit. f. allg. Physiol. VII, pag. 401 (1908); IX, pag. 515 (1909); id., *Das Prinzip der scheinbaren Erregbarkeitssteigerung.* Zeit. f. allg. Physiol. IX, Sammelref., pag. 1 (1909).

(14) T. Gayda, *Influenza della temperatura sulla funzionalità dei muscoli isolati di riccio* (*Erinaceus europaeus*). Arch. di fisiol. XI, pag. 1 (1912). Ved. anche: A. Clopatt, *Zur Kenntnis des Einflusses der Temperatur auf die Muskelzuckung.* Skand. Arch. f. Physiol. X, pag. 249 (1900).

(15) O. Langendorff, *Untersuchungen am überlebenden Säugethierherzen.* Pflüger's Arch. LXI, pag. 291 (1895); A. Kanitz, *Auch für die Frequenz des Säugethierherzens gilt die R. G. T. Regel.* Pflüger's Arch. CXVIII, pag. 601 (1907); A. Herlitzka, *Ricerche sull'azione della temperatura sulla funzione del cuore.* Zeit. f. allg. Physiol. V, pag. 265 (1905); id., *Ricerche di termodinamica muscolare.* I Arch. di fisiol. X, pag. 501 (1912); G. Galeotti e F. Piccinini, *Influenza della temperatura sulla funzione del cuore.* Arch. di fisiol. VIII, pag. 237 (1910).

(16) B. Mostinsky, *Die Formgesetze der Veratrinkurve des Froschmuskels.* Arch. f. exp. Path. u. Pharm. LI, pag. 310 (1904). Ved. anche: G. Quagliariello, *Beiträge zur Muskelphysiologie: Wirkung des Veratrins auf die quergestreiften Muskeln von Warmblütern.* Zeit. f. Biol. LIX. pag. 441 (1913); F. Bottazzi, *Ueber die Wirkung des Veratrins und anderer Stoffe auf die quergestreifte, atriale und glatte Musculatur.* (*Beiträge zur Physiologie des Sarkoplasmas*). Arch. f. (Anat. u.) Physiol., 1901, pag. 377.

(17) F. Bottazzi, *Contributi alla fisiologia dei muscoli: La contrazione dei muscoli fetali.* Mélanges biologiques, livre dédié à Ch. Richet. Paris 1912, pag. 485. Ved. anche: F. W. Ellis, *The development of double refraction in the muscles of fish embryos.* Amer. Journ. of physiol. XXXI, pag. 370 (1913); E. Meyer, *Sur l'innervation respiratoire et l'excitation des nerfs et des muscles chez le nouveau-né.* Arch. de physiol. norm. et path. 1894, pag. 476. (Ved. anche, per i muscoli di bambini neonati, una pubblicazione di Patrizi e Mensi, Giorn. d. R. Accad. med. di Torino, 1894, pag. 61).

([18]) F. S. Locke, *Die Wirkung der physiologischen Kochsalzlösung auf quergestreifte Muskeln.* Pflüger's Arch. LIV, pag. 501 (1893); Dr. Carlslaw, *Die Beziehungen zwischen der Dichtigkeit und den reizenden Wirkungen der NaCl-Lösungen,* Arch. f. (Anat. u.) Physiol. 1887, pag. 429; A. Durig, *Ueber die elektrische Wirkungen des wasserarmen Muskels.* Pflüger's Arch. XCVII, pag. 457 (1903); E. Th. von Brücke, *Ueber die Beziehungen zwischen Aktionsstrom und Zuckung des Muskels im Verlaufe der Ermüdung.* Pflüger's Arch. CXXIV, pag. 215 (1908); R. Dittler, *Ueber die Innervation des Zwerchfelles als Beispiel einer tonischen Innervation.* Pflüger's Arch. CXXX, pag. 400 (1909); J. Burdon-Sanderson, *The electrical response to stimulation of muscle, and its relation to the mechanical response.* Journ. of physiol. XVIII, pag. 117 (1895); F. Buchanan, *The electrical response of muscle in different kinds of persistent contraction.* Journ. of physiol. XXVII, pag. 95 (1901); S. Garten, *Ueber das elektromotorische Verhalten von Nerv und Muskel nach Veratrinvergiftung.* Pflüger's Arch. LXXVII, pag. 485 (1899); id., *Ueber rhythmische elektrische Vorgänge im quergestreiften Skelettmuskel.* Abhandl. d. math.-physik. Klasse d. Königl. Sächs. Ges. d. Wiss. XXVI, pag. 331 (1901); M. Philippson et G. Hannevart, *L'action des acides et des alcalis sur la contraction des muscles.* Bull. de la Soc. roy. d. sc. médic. et nat. de Bruxelles, n. 8, octobre 1912.

([19]) F. Bottazzi, *L'attività nervosa e i processi elementari su cui si fonda.* (Discorso letto il 15 novembre 1913 per la solenne inaugurazione dell'anno accademico 1913-14 nella R. Università di Napoli). Annuario della R. Università degli studî. Napoli 1914. (Ved. anche: Scientia XV, n. XXXV-3, 1914); H. Henkel, *Rhythmische Entladungen der Nervenzentra.* Zeit. f. allg. Physiol. XV, pag. 1 (1913); C. Foà, *Ricerche sul ritmo degli impulsi motori che partono dai centri nervosi.* Zeit. f. allg. Physiol. XIII, pag. 247 (1912).

([20]) E. Paukul, *Die Zuckungsformen von Kaninchenmuskeln verschiedener Farbe und Structur.* Arch. f. (Anat. u.) Physiol. 1904, pag. 100.

([21]) F. Bottazzi, *The oscillations of the auricular tonus in the batrachian heart with a theory on the function of sarcoplasma in muscular tissues.* Journ. of physiol. XXI, pag. 1 (1897).

Chimica-fisica. — *La materia allo stato sopraffuso.* III. *Viscosità e conducibilità elettrica delle sostanze sopraffuse.* Memoria del Socio R. Nasini, di A. Bresciani e F. Zacchini.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie.*

Meccanica. — *Estensione della soluzione del Sundman dal caso di corpi ideali, al caso di sferette elastiche omogenee.* Nota di G. Armellini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

INTRODUZIONE. — OGGETTO DELLA PRESENTE NOTA.

1. Il Sundman, nella sua Memoria sul problema di tre corpi [1], suppone esplicitamente che si tratti di corpi ideali, cioè tali da essere soggetti, anche nell'urto, *soltanto* alla forza d'attrazione newtoniana.

« Il va sans dire — egli scrive [2] — que lorsque nous parlons de la « continuation du mouvement après un choc, nous supposons qu'il s'agisse « de corps idéaux » ecc.

Data l'importanza dello studio del Sundman, riesce quindi assai interessante di esaminare se il risultato possa estendersi al caso di sferette materiali omogenee e perfettamente elastiche.

Vedremo, nella presente Nota, che la risposta sarà affermativa.

2. Più esattamente immaginiamo tre sfere $S_1\, S_2\, S_3$, materiali, omogenee, di massa $m_1\, m_2\, m_3$ e di raggio r; le quali si attirino secondo la legge di Newton.

Supponiamo, inoltre, che esse (per usare il linguaggio degli antichi) siano perfettamente elastiche: cioè tali che, nell'urto, non abbia luogo alcuna perdita di forza viva; ciò che in natura si verifica con approssimazione per l'acciaio, l'avorio ecc.

Indichiamo con $C_1\, C_2\, C_3$ le traiettorie che i centri di $S_1\, S_2\, S_3$ descrivono dall'istante iniziale $t = 0$ sino a $t = \infty$. Siano $K_1\, K_2\, K_3$ le traiettorie dei corrispondenti punti ideali del Sundman; cioè le traiettorie di tre punti ideali di massa $m_1\, m_2\, m_3$, abbandonati in condizioni iniziali identiche a quelle dei centri di $S_1\, S_2\, S_3$ [3].

Chiamiamo con $X_i\, Y_i\, Z_i$ le coordinate del centro della sfera S_i; e con $x_i\, y_i\, z_i$ quelle del corrispondente punto ideale di massa m_i, nello stesso istante t.

[1] Karl F. Sundman, *Mémoire sur le problème des trois corps*, Acta Math., tom. 36.

[2] Op. cit., pag. 141.

[3] Supponiamo, ancora, che, nell'istante iniziale, le tre sfere non abbiano alcun moto di rotazione; di maniera che il momento della quantità di moto, e la forza viva del sistema $S_1\, S_2\, S_3$ siano uguali a quelli del corrispondente sistema ideale del Sundman, $m_1\, m_2\, m_3$.

Supponiamo, che data una quantità positiva ε, estremamente piccola, si abbia sempre

(1) $$\left|\sqrt{(X_i - x_i)^2 + (Y_i - y_i)^2 + (Z_i - z_i)^2}\right| < \varepsilon ; \quad (i = 1, 2, 3)$$

io dirò allora, brevemente, che le traiettorie $C_1 C_2 C_3$ si discostano a meno di ε da quelle $K_1 K_2 K_3$ dei corrispondenti punti ideali.

Ciò posto, nella presente Nota io dimostrerò che, qualunque siano gli urti, hanno luogo le tre eguaglianze:

(2) $$\lim_{r=0} C_i = K_i ; \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Adoperando allora il linguaggio ordinario, potremo dire che, se le sfere S_i sono di raggio infinitamente piccolo, esse descrivono, non ostante gli urti, le stesse traiettorie dei corrispondenti punti ideali.

La limitazione del Sundman apparirà quindi superflua.

Principî su cui poggia la ricerca.

3. Per maggiore chiarezza, faccio procedere il seguente

Lemma. — Consideriamo le tre sfere di raggio r, di cui sopra abbiamo parlato.

Consideriamo un intervallo finito di tempo:

(3) $$0 \leqq t \leqq T ,$$

e supponiamo di avere costruito nello spazio gli archi $c_{1T}\, c_{2T}\, c_{3T}$, $k_{1T}\, k_{2T}\, k_{3T}$, descritti in questo intervallo dai centri delle tre sfere e dai punti corrispondenti.

Io dico che, essendo T finito, è possibile di assegnare al raggio r delle tre sfere un valore *diverso da zero*, e tale che esse si urtino *soltanto* allorchè la traiettoria del centro dell'una passa *rigorosamente* per il centro dell'altra.

Dimostrazione. — Studiamo le relazioni intercedenti tra k_{1T} e k_{2T}; il lettore intende che ragionamenti analoghi potrebbero ripetersi per le coppie $k_{2T}\, k_{3T}$, $k_{3T}\, k_{1T}$. Trascurando, per ora, il caso (che esamineremo da parte) che gli archi $k_{1T}\, k_{2T}$ abbiano qualche tratto in comune, essi, in generale, si taglieranno in un certo numero di punti P, Q, R ecc.

Di più esisteranno, su k_{1T} e k_{2T}, delle coppie di punti $G_1 G_2$, $H_1 H_2$, $L_1 L_2$ ecc., tali che le distanze $G_1 G_2 = \lambda_g$, $H_1 H_2 = \lambda_h$, $L_1 L_2 = \lambda_l$ ecc. siano *minime* (non nulle), rispetto alle mutue distanze dei punti immediatamente precedenti e seguenti.

Per il nostro scopo dobbiamo considerare come *una sola* tutte quelle coppie $G_1 G_2$, $N_1 N_2$ i cui punti presentino distanze uguali, $\lambda_g = \lambda_n$ [1] ecc.

[1] Quindi, se k_{1T} e k_{2T} presentassero nel loro percorso, ad es., due archi circolari concentrici, le infinite coppie di eguale distanza, ivi esistenti, dovrebbero, per il nostro scopo, essere considerate come una coppia sola.

Analogamente dobbiamo considerare P come *un solo* punto comune, anche se in P i due archi presentassero un contatto dell'ordine n. Poste queste convenzioni, data la natura delle traiettorie, ed essendo T finito, è facile il dimostrare che i punti d'intersezione P, Q, R ecc., e le coppie di distanza minima non nulla $G_1 G_2$, $H_1 H_2$, $L_1 L_2$ ecc., sono in numero finito.

Ciò posto, consideriamo la successione:

$$\lambda_g, \lambda_h, \lambda_l, \ldots; \tag{4}$$

essa è formata da un numero finito di termini, tutti positivi e diversi da zero: esisterà perciò tra essi un termine λ_i, non nullo, minore o, al più, eguale agli altri.

Se allora immaginiamo di sostituire i corpi ideali del Sundman con sferette omogenee di raggio r, noi saremo certi che non vi sarà alcun urto nei punti di $G_1 G_2$ ecc., purchè si scelga il raggio r in modo da soddisfare all'ineguaglianza

$$2r < \lambda_i. \tag{5}$$

Consideriamo ora i punti d'intersezione P, Q, R ecc., e siano $t_{1p} t_{2p}$, $t_{1q} t_{2q}$, $t_{1r} t_{2r}$, i tempi in cui vi passano i due corpi ideali del Sundman, di massa $m_1 m_2$.

Poniamo:

$$|t_{1p} - t_{2p}| = \tau_p \quad ; \quad |t_{1q} - t_{2q}| = \tau_q \text{ ecc. ecc.} \tag{6}$$

Dividiamo le τ in due classi, ponendo nella prima quelle, tra esse, che sono diverse da zero (ad es.: τ_p, τ_r, τ_s); nella seconda quelle uguali a zero (per es.: $\tau_q \tau_u$ ecc. ecc.).

Per ciò che si riferisce alla prima classe:

$$\tau_p, \tau_r, \tau_s, \ldots \tag{7}$$

risultando essa composta di un numero finito di termini tutti positivi e non nulli ne esisterà uno, per es. τ_z, diverso da zero, minore o, al più, eguale agli altri.

Sostituendo i corpi ideali $m_1 m_2$ con le nostre sfere $S_1 S_2$, noi potremo allora evitare gli urti corrispondenti alle intersezioni P, R ecc., purchè diamo loro un raggio sufficientemente piccolo, ma finito.

Per le intersezioni della seconda classe Q, U ecc., avviene il contrario. Qui l'urto ha sempre luogo comunque sia piccolo il raggio r. Ma, per questi punti, la traiettoria del centro della sfera S_1, supposta prolungata, passa rigorosamente per il centro della sfera S_2. Infatti, k_{1T} e k_{2T} s'intersecano in Q, U ecc.; e si ha $t_{1q} = t_{2q}$, $t_{1u} = t_{2u}$, ecc.

Supponiamo, ora, che k_{1T} e k_{2T} abbiano un tratto comune φ. Per gli archi residui $k_{1T} - \varphi$ e $k_{2T} - \varphi$, ripeteremo ciò che è stato detto. Quanto

al tratto φ, se esso viene percorso in tempi diversi dai due mobili, ciò non reca alcun danno. In caso contrario, se su φ hanno luogo urti, questi soddisfano certamente alla nostra asserzione, percorrendo i due centri la stessa traiettoria. Il lemma è dunque provato. c. d. d.

Teorema fondamentale.

4. Dimostriamo ora il seguente

Teorema. — Consideriamo gli archi di traiettoria

$$c_{1T}\, c_{2T}\, c_{3T} \quad , \quad k_{1T}\, k_{2T}\, k_{3T}$$

descritti nell'intervallo $0 \leqq t \leqq T$ dai centri delle nostre sfere $S_1\, S_2\, S_3$, e dai corrispondenti corpi ideali del Sundman. Sia ε una quantità arbitraria. piccola a piacere. Io dico che, se T è finito, è possibile di assegnare alle sfere $S_1\, S_2\, S_3$ un raggio r, *diverso da zero,* e tale che $c_{1T}\, c_{2T}\, c_{3T}$ si discostino da $k_{1T}\, k_{2T}\, k_{3T}$ a meno di ε.

Dico, di più, che, mantenendo fisso T, e facendo tendere r a zero, si ha:

$$\lim_{r=0} \varepsilon = 0 \,. \tag{8}$$

Dimostrazione. — Cominciamo intanto dal ricordare che, nell'istante iniziale, le sfere $S_1\, S_2\, S_3$ non hanno, per ipotesi, alcun moto di rotazione. Notiamo, allora, che, essendo per es. S_1 omogenea, le forze d'attrazione agenti sui punti di S_1 si ridurranno ad una risultante unica e passante per il suo centro. Se la S_1 viene ad urtarsi con S_2, e supponiamo la superficie senza attrito, la reazione F, esercitata da S_2 su S_1, sarà perpendicolare al piano tangente comune, condotto per il punto di contatto: la F passerà perciò per i due centri. Le nostre sfere quindi non acquisteranno mai alcun moto di rotazione: e noi non dovremo perciò temere quei fenomeni perturbatori, dovuti a moti rotativi, i quali potrebbero modificare le leggi dell'urto, e immagazzinare una parte dell'energia cinetica del sistema.

Ciò posto, scegliamo r in modo tale che nell'intervallo $0 \leqq t \leqq T$ l'urto avvenga *soltanto* in quei punti in cui la traiettoria del centro di una sfera passa *rigorosamente* per il centro dell'altra. Essendo T finito, a norma del precedente lemma, il valore di r risulterà finito e *diverso da zero.*

Sia t_1^* l'istante in cui avviene il primo urto; ad es., tra la sfera S_1 e la sfera S_2. Consideriamo il moto del centro di S_2, rispetto al centro di S_1 prendendo, pel momento, quest'ultimo punto come origine, e servendoci di un piano mobile α, passante per l'origine e per la tangente alla traiettoria relativa del centro di S_2.

Chiamiamo con ϱ il raggio vettore (distanza tra i centri delle due sfere), e con ϑ l'angolo che esso forma con una retta tracciata sul piano mobile α. Sia β l'angolo d'incidenza (contato dalla congiungente i due centri) sotto cui avviene l'urto tra le sfere. Esso sarà uguale all'angolo che, nell'istante $t_1^{\star}$, il raggio vettore ϱ forma con la tangente alla traiettoria relativa del centro di S_2. Ammettendo quest'ultima una tangente ben determinata, avremo, secondo una formola notissima,

$$(9) \qquad \operatorname{tg}\beta = \left[\frac{\varrho}{\frac{d\varrho}{d\vartheta}}\right]_{t=t_1^{\star}} = \left\{\varrho\,\frac{\frac{d\vartheta}{dt}}{\frac{d\varrho}{dt}}\right\}_{t=t_1^{\star}}.$$

Ma si ha:

$$(10) \qquad \varrho_{t=t_1^{\star}} = 2r.$$

Facciamo tendere a zero il raggio r delle due sfere. Per il nostro lemma, passando la traiettoria di S_2 rigorosamente per il centro di S_1, *l'urto avrà sempre luogo*. Solamente, $t_1^{\star}$ tenderà ad un valore limite t_1; $\frac{d\vartheta}{dt}$ si conserverà finita per un noto teorema, mentre $\frac{d\varrho}{dt}$ tenderà all'infinito. Avremo quindi

$$(11) \qquad \lim_{r=0}(\operatorname{tg}\beta) = 0.$$

In altre parole, tendendo a zero il raggio delle sfere, $S_1\,S_2$, l'urto nell'istante $t_1^{\star}$, tende a divenire normale. Ciò posto, tornando a riferirci ad assi fissi, chiamiamo con v_1 e V_1 la velocità del centro di S_1 immediatamente prima e dopo l'urto; con v_2 e V_2 le quantità analoghe per S_2.

Se l'urto fosse esattamente normale, non essendovi, per ipotesi, alcuna perdita di forza viva, noi avremmo:

$$(12) \qquad V_2 = \frac{(m_2 - m_1)\,v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Ora io chiamo con w la velocità del baricentro del sistema S_1, S_2; ho allora, immediatamente prima e dopo l'urto:

$$(13) \qquad w = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2},$$

da cui ricavo:

$$(14) \qquad \frac{V_2}{v_2} = \frac{2w}{v_2} - 1.$$

Facciamo decrescere a zero il raggio r delle sfere, mantenendo fisse le loro masse. La velocità con cui esse si urtano tenderà all'infinito, mentre

la velocità w del baricentro del sistema rimarrà finita; ho allora, dalla (14),

$$\lim_{r=0}\left(\frac{V_2}{v_2}\right) = -1; \tag{15}$$

ed analogamente:

$$\lim_{r=0}\left(\frac{V_1}{v_1}\right) = -1. \tag{16}$$

Facendo quindi tendere a zero il raggio r delle sfere, l'urto tende a divenire normale; e la velocità di rimbalzo tende a divenire uguale, a meno del segno, a quella primitiva. Al limite, avremo quindi per l'urto le stesse leggi dei corpi ideali del Sundman. Ciò posto: in tutto l'intervallo compreso fra $t=0$ e $t=t_1^*$, in cui avviene il primo urto, le traiettorie dei centri di $S_1\,S_2\,S_3$ sono identiche a quelle dei corrispondenti corpi ideali. Ma, come abbiamo visto, è possibile di scegliere r tanto piccolo che, immediatamente dopo l'urto, le condizioni dei centri delle sfere $S_1\;S_2\;S_3$ *siano vicine, quanto ci piace, a quelle dei corpi ideali corrispondenti.* Allora, essendo le coordinate funzioni continue delle condizioni iniziali, in tutto l'intervallo $t_1^* \leqq t \leqq t_2^*$, compreso tra il primo e il secondo urto, le traiettorie dei centri delle tre sfere $S_1\,S_2\,S_3$ saranno non più identiche, *ma prossime, quanto vogliamo*, a quelle dei corrispondenti corpi ideali. Ora, T è finito: quindi nell'intervallo $0 \leqq t \leqq T$ non può aver luogo che un numero *finito* di urti. Il nostro teorema risulta perciò provato. c. d. d.

DIMOSTRAZIONE DELLE (2). - TENDENDO r A ZERO, LE TRAIETTORIE $C_1\,C_2\,C_3$ CONVERGONO — SEBBENE NON UNIFORMEMENTE — VERSO $K_1\,K_2\,K_3$.

CONCLUSIONE.

5. Indichiamo, come è stato detto in principio, con $C_1\,C_2\,C_3$, $K_1\,K_2\,K_3$ le intere traiettorie descritte da $t=0$ a $t=\infty$, dai centri delle nostre sfere, e dai corpi ideali corrispondenti. Sia E_i un punto qualsiasi, appartenente alla traiettoria C_i; e sia $\overline{t_i}$ l'istante in cui vi giunge il centro della sfera S_i. Nello stesso istante il corpo ideale m_i giungerà al punto F_i sulla K_i. Facciamo tendere r a zero. Essendo $\overline{t_i}$ finito, per quanto è stato detto, avremo, indicando con $\overline{E_i\,F_i}$ la distanza dei due punti:

$$\lim_{r=0} \overline{E_i\,F_i} = 0. \tag{17}$$

Ma E_i è un punto generico, preso a caso, sulla C_i. Ripetendo il ragionamento per ogni punto al finito, avremo:

$$\lim_{r=0} C_i = K_i. \qquad (i=1\,,2\,,3) \tag{18}$$

Le (2) sono quindi dimostrate. Domandiamoci, però, se C_i converge verso K_i in modo uniforme. È facile vedere che, in generale, la risposta sarà negativa. In altre parole, a differenza di ciò che avviene per le c_{iT}, ora è, in *generale*, impossibile trovare un valore di r, *diverso da zero*, per cui le C_i si discostino a meno di ε dalle K_i. Per dimostrarlo, basta osservare che, in questo caso, essendo l'intervallo di tempo infinito, le successioni (4) e (7) sono in generale composte d'infiniti termini, e possono avere per limite inferiore lo zero.

In casi particolari può però aversi la convergenza uniforme. Un esempio importante, in cui questo fatto si verifica, si ha quando le orbite sono periodiche. Infatti, chiamando con Ω il periodo, basta allora studiare il fenomeno nell'intervallo $0 \leqq t \leqq \Omega$. Vale quindi il teorema del n. 4. Enunciando le (18) col linguaggio ordinario, giungiamo al risultato seguente, già annunziato in principio:

« *Le traiettorie descritte da tre sferette perfettamente elastiche, omogenee, di raggio infinitamente piccolo, le quali si attirino secondo la legge di Newton, sono identiche, non ostante gli urti, a quelle dei corrispondenti corpi ideali del Sundman. La limitazione posta dal Sundman sulla natura dei suoi corpi, appare quindi superflua* ».

Matematica. — *Risoluzione geometrica del problema di Moutard sulla costruzione delle equazioni di Laplace ad integrale esplicito.* Nota di E. Bompiani, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

1. Il problema della costruzione delle equazioni di Laplace, cioè del tipo

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial \varrho_1 \, \partial \varrho_2} + a(\varrho_1, \varrho_2) \frac{\partial x}{\partial \varrho_1} + b(\varrho_1, \varrho_2) \frac{\partial x}{\partial \varrho_2} + c(\varrho_1, \varrho_2)\, x = 0,$$

che ammettono un integrale esplicito (cioè per le quali la successione di trasformate di Laplace si chiude dalle due parti) è stato posto e risoluto dal Moutard, in una celebre Memoria, perduta, prima che fosse stampata, nel 1871: una parte di essa, quella relativa alle equazioni ad invarianti uguali, è stata ricomposta e resa nota dal Moutard nel 1878 [1].

Il Darboux, nelle sue classiche « Leçons sur la théorie générale des surfaces », ha risoluto per via analitica il problema di Moutard; con metodo che presumibilmente si avvicina di più a quello tenuto dal Moutard

[1] Journal de l'École polytechnique, XLV cahier, p. 1.

[servendosi cioè della teoria delle trasformate differenziali e integrali, singolari, della (1)] ha raggiunto lo stesso scopo il prof. Nicoletti (¹).

Io mi propongo qui di risolvere il problema di Moutard con sole considerazioni geometriche; esse gettano, mi sembra, una luce d'evidenza e di intimo significato nell'eleganza delle formole del Darboux. In particolare mi permetto di rilevare la costruzione delle equazioni ad invarianti uguali fatta col solo sussidio di un bel teorema di Koenigs, del quale colgo l'occasione per dare una dimostrazione di carattere proiettivo.

2. È noto il significato geometrico della (1): se si considerano $n+1$ sue soluzioni indipendenti come coordinate proiettive omogenee di un punto in uno S_n, questo punto descrive, al variare di ϱ_1, ϱ_2, un doppio sistema coniugato rappresentato, sulla superficie luogo Φ, dalle equazioni $\varrho_2 = \text{cost.}$ (curve caratteristiche ϱ_1) e $\varrho_1 = \text{cost.}$ (curve ϱ_2). La congruenza delle tangenti alle curve ϱ_1 (o ϱ_2) di Φ ha (oltre Φ) una seconda superficie focale che rappresenta una delle trasformate di Laplace Φ_1 (o Φ_{-1}) della (1).

Perchè la successione delle trasformate della (1) sia terminata da una parte almeno occorre e basta che sul nostro modello iperspaziale si verifichi una delle circortanze seguenti (²):

gli spazî osculatorî S_k alle caratteristiche di un sistema nei punti di una caratteristica dell'altro sistema passano per un punto; in tal caso la successione si chiude da una parte dopo k trasformazioni, secondo il caso generale;

le caratteristiche di un sistema sono contenute in spazî S_k, che riescono osculatori ad una curva; la successione si chiude pure dopo k trasformazioni in un senso, secondo il caso di Goursat;

se gli S_k dell'ultimo caso passano per uno spazio fisso S_μ, la successione si chiude dopo $k-\mu$ trasformazioni; si ha il caso misto.

3. Proponiamoci di costruire tutte le successioni di Laplace terminate in tutt'e due i sensi secondo il caso di Goursat.

Siano le caratteristiche di un sistema di Φ immerse negli S_h osculatori ad una curva γ_1, e le caratteristiche dell'altro sistema in S_k osculatori ad una curva γ_2. È chiaro che Φ è il luogo dei punti d'intersezione di un S_h osculatore a γ_1 con un S_k osculatore a γ_2, e che quindi Φ e tutta la successione sta in un S_n ove $n = h + k$. Viceversa: date due curve ad arbitrio in S_n, il luogo del punto d'intersezione di un S_h generico osculatore alla prima e di un S_k osculatore alla seconda è sempre una superficie Φ

(¹) Rend. Acc. dei Lincei, ser. 5ª, vol. VI (1 sem. 1897), pp. 307-314 e pp. 334-341. Per la teoria generale delle trasformazioni della (1) vedasi pure del Nicoletti: *Sulla trasformazione delle equazioni lineari del secondo ordine con due variabili indipendenti* (Ann. Scuola norm. sup. di Pisa, 1897).

(²) Vedasi la mia Memoria: *Sull'equazione di Laplace* (Rend. Circ. mat. di Palermo, tom. XXXIV, 1912), parte I.

con un doppio sistema coniugato? Per vederlo, basterà dimostrare che le tangenti a due curve segate su due S_h, infinitamente vicini, dagli S_k, sono incidenti a coppie. Ma ciò è chiaro se si pensa che una tangente ad una curva di S_h è segata dallo S_{k+1} congiungente due S_k infinitamente vicini: le due tangenti richieste sono segate dallo S_{k+1} su due S_h infinitamente vicini, cioè stanno nello S_{h+1} loro congiungente. Appartenendo ad un S_{h+1} e ad un S_{k+1} di S_n $(n = h + k)$, stanno nel loro piano d'intersezione: quindi effettivamente s'incontrano. Dunque:

Per costruire la più generale successione di Laplace chiusa dalle due parti secondo il caso di Goursat, basta considerare due curve qualsiansi di S_n: *il luogo del punto d'intersezione di un* S_h *osculatore alla prima e di un* S_k *osculatore all'altra, con la condizioue* $h + k = n$, *è una superficie* Φ *della serie. Per ottenere tutte le superficie della successione, basta far variare h da* 0 *ad n* (¹).

Nel caso che una o tutt'e due le curve scelte degenerino, la successione si chiude da una o da tutt'e due le parti, presentando il caso misto.

4. Per costruire le successioni più generali chiuse da tutt'e due le parti secondo il caso generale, consideriamo due curve γ_1, γ_2 qualsiansi in S_n, fra loro in posizione generica, e consideriamo inoltre gli S_{h+k+1} congiungenti S_h osculatori alla prima curva, con S_k osculatori alla seconda, e tagliamo poi la configurazione, così ottenuta, di ∞^2 S_ν $(\nu = h + k + 1)$, con un $S_{n-\nu}$. Si ottiene una superficie Φ con un doppio sistema coniugato, la cui successione di Laplace è chiusa da tutt'e due le parti secondo il caso generale. Infatti, se in un punto di γ_1 si considera, oltre allo S_h, lo S_ν osculatore, questo taglia $S_{n-\nu}$ in un punto per il quale vengono a passare gli S_{k+1} osculatori alle curve ϱ_1 di Φ nei punti di una curva ϱ_2. Altrettanto avviene scambiando l'ufficio delle due curve.

5. Interpretiamo analiticamente questi risultati.

Le due curve γ_1, γ_2 del n. prec. siano individuate proiettivamente dalle due equazioni lineari omogenee, d'ordine $n + 1$,

$$\alpha_{n+1}\,x + \alpha_n\,x^{(1)} + \cdots + \alpha_0\,x^{(n+1)} = 0 \qquad \left(x^{(h)} = \frac{d^h x}{d\varrho_1^h}\right) \tag{2}$$

$$\beta_{n+1}\,y + \beta_n\,y^{(1)} + \cdots + \beta_0\,y^{(n+1)} = 0 \qquad \left(y^{(k)} = \frac{d^k y}{d\varrho_2^k}\right): \tag{3}$$

(¹) Se le curve che terminano la successione dalle due parti coincidono, la superficie Φ è luogo delle intersezioni degli S_h e degli S_k osculatori ad una stessa curva. In particolare, per $n = 4$, $h = 2$ e $k = 4$; e se la curva è la quartica razionale normale, si ha come superficie Φ del tipo esaminato la più generale proiezione in S_4 della superficie di Veronese già incontrata dal prof. Castelnuovo (Atti Ist. veneto, ser. 7ª, tom. II, 1889) come superficie singolare di un sistema lineare ∞^2 di complessi lineari di rette, e dal prof. Fano come superficie con ∞^3 trasformazioni proiettive in sè (Mem. Acc. di Torino, s. 2ª, tom. XLVI, 1896).

i coefficienti della prima essendo funzioni della sola ϱ_1; quelli della seconda, della sola ϱ_2. S'intende che i punti di γ_1 o di γ_2 hanno per coordinate proiettive omogenee $n+1$ soluzioni indipendenti della (2) o della (3). Lo spazio congiungente un S_h osculatore a γ_1 e un S_k osculatore a γ_2 è individuato dai punti $x, x^{(1)}, \dots, x^{(h)}, y, y^{(1)}, \dots, y^{(k)}$. Se si taglia la configurazione di Laplace [1] degli S_{h+k+1} con lo $S_{n-\nu}$ di equazioni $x_1=0, \dots, x_\nu=0$, si ha una superficie Φ, e le coordinate dei suoi punti si estraggono dalla matrice:

$$(4) \qquad \left\| \begin{matrix} x_1 & \dots & x_\nu & x_{\nu+1} & \dots & x_{n+1} \\ x_1^{(1)} & \dots & x_\nu^{(1)} & x_{\nu+1}^{(1)} & \dots & x_{n+1}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(1)} & \dots & x_\nu^{(h)} & x_{\nu+1}^{(h)} & \dots & x_{n+1}^{(h)} \\ y_1 & \dots & y_\nu & y_{\nu+1} & \dots & y_{n+1} \\ y_1^{(1)} & \dots & y_\nu^{(1)} & y_{\nu+1}^{(1)} & \dots & y_{n+1}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(h)} & \dots & y_\nu^{(k)} & y_{\nu+1}^{(k)} & \dots & y_{n+1}^{(k)} \end{matrix} \right\| \qquad (\nu = h+k+1)$$

tenendo fisse le prime ν colonne. *Questi determinanti sono soluzioni della più generale equazione di Laplace la cui successione termina dalle due parti secondo il caso generale. Le equazioni della successione si ottengono dando ad h tutt'i valori da* 0 *ad* n [2].

Analogamente si procederebbe negli altri casi di chiusura.

6. Consideriamo il caso in cui la (1) abbia gli invarianti [3]

$$H = \frac{\partial a}{\partial \varrho_1} + ab - c \quad , \quad K = \frac{\partial b}{\partial \varrho_2} + ab - c$$

uguali. La caratteristica geometrica di questo fatto è espressa dal teorema di Koenigs, che ora dimostriamo [4]. Sia x un punto generico di Φ: i punti

[1] Cfr. la mia Nota: *Sur les configurations de Laplace* (Compt. rend. Acad. de France, tom. 156, février 1913).

[2] Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, vol. II (1889), ch. VI, n. 385.

[3] Darboux, loc. cit., vol. II, ch. II n. 326; ho adoperato per gli invarianti le lettere maiuscole, invece che le minuscole come nel Darboux, per evitare confusioni con quel che precede e segue.

[4] Darboux, loc. cit., vol. IV, pag. 878. La dimostrazione del Darboux è d'indole metrica; una dimostrazione proiettiva era stata annunziata da Tzitzéica, ma, per quanto so, non è stata pubblicata.

che da esso si ottengono con la trasformazione di Laplace (nel piano tangente in x a Φ) hanno le coordinate

$$x_i^{-1} = \frac{\partial x_i}{\partial \varrho_1} + b x_i \quad , \quad x_i^1 = \frac{\partial x_i}{\partial \varrho_2} + a x_i .$$

Scegliamo questi tre punti come vertici di un triangolo fondamentale per un sistema di coordinate proiettive, e precisamente (nel piano tangente considerato) sia

$$x^{-1}(1,0,0) \quad ; \quad x(0,1,0) \quad ; \quad x^1(0,0,1).$$

Segue, da ciò, che le derivate di x_i sono (in x):

$$\begin{array}{lll} x_1 = 0 & \dfrac{\partial x_1}{\partial \varrho_1} = 1 & \dfrac{\partial x_1}{\partial \varrho_2} = 0 \\ x_2 = 1 & \dfrac{\partial x_2}{\partial \varrho_1} = -b & \dfrac{\partial x_2}{\partial \varrho_2} = -a \\ x_3 = 0 & \dfrac{\partial x_3}{\partial \varrho_1} = 0 & \dfrac{\partial x_3}{\partial \varrho_2} = 1. \end{array}$$

Una conica che tocchi i lati del triangolo fondamentale nei vertici x^{-1} e x^1 ha un'equazione del tipo $x_1 x_3 - \lambda x_2^2 = 0$.

Vogliamo determinare λ in modo che la conica riesca osculatrice in x^{-1} alla curva ϱ_2 di Φ_{-1} che vi passa. Detta conica deve perciò contenere il punto

$$X = x^{-1} + \frac{\partial x^{-1}}{\partial \varrho_2} d\varrho_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x^{-1}}{\partial \varrho_2^2} d\varrho_2^2 ,$$

le cui coordinate si calcolano subito servendosi dei valori trovati per le derivate prime ed eliminando le successive per mezzo della (1) stessa; e si trova:

$$X_1 = 1 + \cdots \quad ; \quad X_2 = K\, d\varrho_2 + \cdots \quad ; \quad X_3 = \frac{1}{2} K\, d\varrho_2^2 ;$$

ove i ... indicano termini d'ordine superiore, in $d\varrho_2$, a quelli scritti. L'equazione della conica richiesta è perciò:

$$x_1 x_3 - \frac{1}{2K} x_2^2 = 0 .$$

La conica analoga osculatrice in x^1 alla curva ϱ_1 che vi passa (e tangente in x^{-1} alla curva ϱ_2) ha l'equazione

$$x_1 x_3 - \frac{1}{2H} x_2^2 = 0 .$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè esista una conica osculatrice in x^{-1} *alla curva* ϱ_2 *e in* x^1 *alla curva* ϱ_1, *è che gli invarianti della* (1) *siano uguali*: $H = K$.

Questo è il teorema di Koenigs.

7. Occupiamoci ora della *costruzione di tutte le equazioni ad invarianti uguali con integrale esplicito.*

Osserviamo, subito, che, essendo ad invarianti uguali l'equazione, la successione termina da tutte due le parti della (1) dopo lo stesso numero di trasformazioni e presentando lo stesso caso. Supponiamo sia quello di Goursat. Come s'è detto al n. 3, la superficie Φ che si considera è luogo dei punti d'intersezione degli S_h e degli S_k osculatori a due curve di un S_{h+k}; poichè nel nostro caso $h = k$, Φ va considerata in uno spazio di dimensione pari, $S_n = S_{2h}$. Bisogna ora sfruttare, per caratterizzare Φ, le due condizioni: che le caratteristiche di Φ sono in S osculatori a due curve γ_1, γ_2, e che esiste la conica di Koenigs in ogni suo piano tangente.

Dalla prima condizione segue che le curve ϱ_2 su Φ_1 appartengono agli S_{h-1} osculatori alla curva γ_1 (su cui varia soltanto ϱ_1), e le curve ϱ_1 di Φ_{-1} appartengono agli S_{h-1} osculatori a γ_2 (su cui varia soltanto ϱ_2). Per sfruttare la seconda condizione, cerchiamo il luogo della conica di Koenigs al variare di x su Φ. Sia M il punto di γ_1 il cui S_h osculatore contiene la curva ϱ_2 passante per x, e il cui S_{h-1} osculatore contiene la curva ϱ_2 (di Φ_1) passante per x^1, ed N il punto analogo su γ_2.

Consideriamo una qualunque ipersuperficie quadrica Q passante per gli S_{h-1} osculatori a γ_1 in tre punti infinitamente vicini M, M', M'', e tangente alla curva ϱ_2 di Φ_{-1} in x^{-1}. Il piano tangente in x a Φ sega Q in una conica che è osculatrice in x^1 a ϱ_1 (di Φ_1) e tangente in x^{-1} a ϱ_2 (di Φ_{-1}). Per il teorema di Koenigs detta conica, quindi Q, è osculatrice in x^{-1} a ϱ_2.

Facciamo variare x^{-1} su ϱ_2 (di Φ_{-1}): la conica di Koenigs varia mantenendosi tangente alla posizione precedente e osculatrice alla Q in punti della curva ϱ_2 passante per x^1 (giacente tutta su Q). Poichè la conica di Koenigs relativa a x^{-1} sta su Q, vi stanno anche tutte le posizioni successive, quindi pure la curva ϱ_2 per x^{-1}.

Ora facciamo variare la curva ϱ_2 e consideriamone h posizioni infinitamente vicine. Queste h curve ϱ_2 appartengono ad una stessa quadrica, se una ne esiste passante per $h + 2$ S_{h-1} osculatori a λ_1 in M e in punti infinitamente vicini e per due S_{h-1} osculatori a γ_2 in N e in punto infinitamente vicino. Poniamo di aver dimostrato l'esistenza di una tal quadrica Q: gli S_{h-1}, in cui si trovano le curve ϱ_1 di Φ_{-1}, incontrano almeno in h punti (infin. vicini, sulle h curve ϱ_2) la Q. Ma due di essi sono contenuti, per costruzione, sulla quadrica Q, quindi vi appartengono tutti. Q contiene dunque tutti gli S_{h-1} osculatori a γ_2; scambiando Φ_{-1} con Φ_1, si vede che Q contiene anche tutti gli S_{h-1} osculatori a γ_1 (poichè ne contiene già $h + 2$).

Rimane da vedere se esista una quadrica soddisfacente alle condizioni imposte. Perchè un S_{h-1} appartenga ad una quadrica di $S_n = S_{2h}$, occorre che vi appartengano $\frac{h(h+1)}{2}$ suoi punti; poichè due S_{h-1} osculatori successivi si tagliano in un S_{h-2} che pure deve appartenere alla quadrica, si hanno, per questo, $\frac{h(h-1)}{2}$ condizioni; quindi, ad esprimere che lo S_{h-1} appartiene alla quadrica, occorrono più soltanto h condizioni. Sicchè gli $h+2$ S_{h-1} osculatori successivi a γ_1 impongono $\frac{h(h-1)}{2} + h(h+2)$ condizioni. Analogamente i due S_{h-1} osculatori a γ_2 impongono $\frac{h(h-1)}{2} + 2h$ condizioni. In totale si hanno

$$h(h-1) + h(h+4) = h(2h+3) = \frac{n(n+3)}{2}$$

condizioni, cioè appunto tante quante bastano per individuare una quadrica in S_n (1). Raccogliendo, abbiamo:
le curve γ_1, γ_2, *insieme con le loro sviluppabili fino a quelle costituite dagli* S_{h-1} *osculatori, stanno sopra una stessa quadrica* Q; c. v. d.

Siccome non ci sono altre condizioni da sfruttare, si è certi che, scegliendo in questo modo γ_1 e γ_2, si ha, come luogo dei punti d'incontro degli S_h osculatori, una superficie Φ ad invarianti uguali, la cui successione di Laplace si chiude dalle due parti. Infatti il piano tangente in un punto x taglia la quadrica Q in una conica che per costruzione riesce osculatrice in x^1 ad una curva ϱ_1, e in x^{-1} ad una curva ϱ_2; quindi deve coincidere con la conica di Koenigs, e perciò l'equazione ha invarianti uguali.

8. Per tradurre analiticamente il resultato, facciamo ancora qualche osservazione relativamente alle curve γ_1, γ_2: quel che si dice per una, vale anche per l'altra. Poichè gli S_{h-1} osculatori alla γ_1 sono contenuti in Q, gli S_{n-1} osculatori a γ_1 nei suoi punti sono gli iperpiani ivi tangenti a Q. Infatti, lo S_h osculatore in un punto è polare dello S_{h-1} osculatore, e così di seguito (si noti che anche questo fatto è essenzialmente legato alla parità dello spazio, chè in uno spazio dispari non sarebbe possibile costruire curve come quelle qui richieste). Rappresentiamo ancora γ_1 con la (2): dev'essere anzitutto $n = 2h$. Inoltre, se vogliamo ottenere enti reali, l'equazione della quadrica Q riferita ad un $(n+1)$-edro autopolare può scriversi:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_h^2 - x_{h+1}^2 - x_{h+2}^2 - \cdots - x_{2h+1}^2 = 0.$$

(1) Il fatto che questa quadrica contiene S_{h-1} osculatori a curve (γ_1 e γ_2) è possibile solo perchè l'ambiente ha dimensione pari. Vedi per es. Bertini: *Geometria proiettiva degli iperspazi* (Pisa, Spoerri, 1907), cap. 6, n. 18.

È poi notissimo, nella teoria delle equazioni (2), che il passaggio da essa all'aggiunta equivale a sostituire alla curva (che ne è il modello proiettivo) i suoi S_{n-1} osculatori, o, se si vuole, il luogo dei poli di questi S_{n-1} rispetto a Q: ma, nel nostro caso, questo luogo coincide con la curva primitiva; dunque le equazioni (2) e (3) debbono essere d'ordine dispari e autoaggiunte.

Una superficie dello stesso tipo si ottiene partendo dalle curve γ_1, γ_2, considerando i loro $S_{h+\beta}$ osculatori, gli $S_{2\beta}$ d'intersezione di due di essi appartenenti a curve diverse, e infine tagliando con un $S_{2h-2\beta}$ la configurazione ottenuta.

Possiamo quindi concludere col teorema di Darboux [1]:

Si ottengono tutte le equazioni a invarianti uguali che s'integrano col metodo di Laplace, prendendo, nelle espressioni (4), $h=k$, *e come funzioni* x, y *soluzioni particolari di due equazioni d'ordine dispari autoaggiunte; queste soluzioni debbono inoltre esser tali da soddisfare, insieme con tutte le loro derivate fino a quelle d'ordine* $h-1$, *ad una stessa relazione quadratica.*

Meccanica. — *Sistemi astatici equivalenti a due forze astatiche irriducibili.* Nota II di Matteo Bottasso, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo.

Altre proprietà del complesso degli assi centrali.

8. Il teorema precedente permette già di raffigurarci molto chiaramente il complesso degli assi centrali del sistema dato; esso può però completarsi considerando gli assi centrali passanti per un punto improprio, o per un punto del piano mediano.

Come nel caso generale, si riconosce facilmente (*Astat.*, n. 54 e n. 75) che:

Gli assi centrali paralleli ad un vettore unitario $\mathbf{u}$, *fissato ad arbitrio, formano un cilindro circolare retto, il cui asse passa per il punto centrale ed il cui raggio è* $(\text{mod}\,\sigma\mathbf{u})/f$, *cioè* [*per la* (7)] $p\mathbf{u}\times\mathbf{i}_1$. *Tale raggio è nullo quando* $\mathbf{u}$ *è normale alla retta centrale, ed è massimo quando* $\mathbf{u}$ *è parallelo a questa retta. La sezione del cilindro indicato, di raggio non nullo, col piano mediano, è l'ellisse (bitangente al circolo focale) luogo delle traccie di tutti gli assi centrali che s'appoggiano alla retta* $G\mathbf{u}$.

[1] Darboux, loc. cit., vol. II, ch. VII, n. 388.

Basta infatti osservare che tenendo fissa la direzione dell'asse centrale r, cioè il vettore $\mathbf{j}_3$ in (10), e cambiando, in questa, $\mathbf{j}_1$ in un altro qualsiasi vettore unitario $\mathbf{j}'_1$ (normale a $\mathbf{j}_3$), è sempre $G - p\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3 \, . \, \mathbf{j}'_1$ il piede della perpendicolare all'asse centrale condotta da G, e quindi è $\pm p\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3$ la distanza del punto centrale G da detto asse. c. d. d.

9. Se è d la distanza d'un punto Q del piano mediano, non esterno al circolo focale, dal punto centrale, s'avrà, come nella (15), $Q = G + p\mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{j}_2$ quando si abbia

$$p\mathbf{j}_2 = \pm \sqrt{p^2 - d^2}\,\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_1 \wedge (Q - G),$$

come risulta subito moltiplicando vettorialmente per $\mathbf{i}_1$, ed osservando che il quadrato del secondo membro è p^2. Gli assi centrali (paralleli a $\mathbf{j}_3$) corrispondenti a tale vettore $\mathbf{j}_2$ sono normali a questo vettore, e quindi s'appoggiano alla retta per G parallela al vettore $d^2\mathbf{i}_1 \pm \sqrt{p^2 - d^2}\,\mathbf{i}_1 \wedge (Q - G)$, il che, dopo quanto si è visto nei numeri precedenti, permette di concludere il teorema:

Il cono degli assi centrali, con vertice in un punto del piano mediano non esterno al circolo focale, si spezza in due piani passanti per il punto centrale, simmetrici rispetto al piano mediano, e tali che il seno del loro semidiedro è uguale al rapporto della distanza, del punto considerato dal punto centrale, al raggio del circolo focale.

Per un punto del piano mediano, fuori del circolo focale, non vi sono altri assi centrali (reali) oltre alla congiungente del punto stesso col punto centrale.

Il teorema di Minding
per i sistemi riduttibili astaticamente a due forze

10. Dal teorema precedente risulta, in particolare, che *gli assi centrali passanti per un punto del circolo focale formano un unico fascio (doppio), il cui piano è perpendicolare al piano mediano, cioè passa per la retta centrale.*

Inversamente, si ha che:

Gli assi centrali, appartenenti ad un piano passante per la retta centrale, formano due fasci di rette i cui centri sono i punti d'incontro del piano dato con il circolo focale. Ognuno degli assi indicati è il sostegno d'una forza che può sostituire (staticamente), in una configurazione conveniente, tutte le forze del sistema dato.

Infatti, siano: $\mathbf{i}_2$ un vettore unitario perpendicolare alla retta centrale, cioè ad $\mathbf{i}_1$, e parallelo al piano considerato, ed $\mathbf{u}$ un vettore unitario qualsiasi dello stesso piano. Le rette dei due fasci indicati si ottengono allora dal bipunto $(G \pm p\mathbf{i}_2)\mathbf{u}$ facendo variare il vettore $\mathbf{u}$; e poichè la distanza di $(G \pm p\mathbf{i}_1)\mathbf{u}$, dal punto centrale G, è $\pm p\mathbf{u} \times \mathbf{i}_1$ (che è precisamente, per

il n. 8, la distanza da G dei due assi centrali paralleli ad $\mathbf{u}$, e situati nel piano $G\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2$), così tutte le rette indicate appartengono al complesso degli assi centrali. Ad una qualsiasi di queste rette g corrisponde almeno una configurazione del dato sistema, nella quale g è rappresentato dal bipunto r (10). In tale configurazione il vettore $\mathbf{j}_3$ è parallelo al piano considerato $G\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2$; e poichè $G = p\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3 \,.\, \mathbf{j}_1$ è il piede della perpendicolare condotta per il punto centrale G alla retta g, escludendo il caso (già considerato nel n. 5) di $\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3 = 0$, si ha che il vettore $\mathbf{j}_1$ è anch'esso parallelo al piano $G\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2$: perciò $\mathbf{j}_2$ è normale a questo piano, e la condizione (11) è verificata. c. d. d.

11. A complemento del teorema precedente (e di quanto s'è visto nel n. 5), si ha la proposizione seguente, che sostituisce, nel caso in esame, il teorema di Minding:

Quando un sistema $(P_i, \mathbf{f}_i)$ *è astaticamente riducibile a due sole forze, la congruenza luogo delle rette, ciascuna delle quali è il sostegno d'una forza (di vettore* $\mathbf{f}$*) che può sostituire staticamente il sistema di forze, in una conveniente configurazione, è formata da tutte (e sole) le rette che incontrano la retta centrale ed il circolo focale del sistema dato.*

Infatti, quando $ss = 0$, cioè è verificata la (11), la forma s (9) (che è allora un bipunto) rappresenta tutte le rette della congruenza indicata; e si vede immediatamente che tutte queste rette incontrano la retta centrale $G\mathbf{i}_1$, poichè si ha identicamente $G\mathbf{i}_1\, s = 0$.

Inoltre la (15) mostra che, quando $\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3 \neq 0$, ed è verificata la (11), il vettore $\mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{j}_2$ ha modulo unitario; ed il punto $G + p\mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{j}_2$ d'incontro di r (od s) col piano mediano $G\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ risulta, così, sempre sul circolo focale. Quando è $\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3 = 0$, già sappiamo (n. 5) che le rette considerate, normali alla retta centrale, appartengono al piano mediano.

Inversamente, per i nn. 5 e 10, tutte le rette che si appoggiano alla retta centrale ed al circolo focale appartengono alla congruenza indicata; ed il teorema è, così, completamente dimostrato.

Quadriche omofocali.

12. Se π è una forma di 3ª specie che individua un piano [1], del quale A è un punto ed $\mathbf{u}$ è un vettore unitario ad esso normale, il *momento astatico del sistema rispetto al piano*, cioè il vettore $\Sigma_i \dfrac{3\,P_i \pi}{\operatorname{mod} \pi}\, \mathbf{f}_i$ (somma dei vettori delle forze per le rispettive distanze, con un segno, dei punti d'applicazione dal piano), risulta eguale (*Astat.*, n. 96) a $\sigma_A \mathbf{u}$.

[1] C. Burali-Forti, *Corso di geometria analitico-proiettiva*, Torino, G. B. Petrini, 1912, pag. 163, n. 196 *c*.

Se allora si considerano tutti i piani rispetto ai quali il modulo del momento del sistema ha un dato valore positivo m , essi inviluppano una quadrica d'equazione (*Astat.*, n. 99):

$$(16) \qquad f^2(M - G) \times (m^2 - K\sigma \,.\, \sigma)^{-1}(M - G) = 1\,,$$

la quale è di rivoluzione intorno alla retta centrale, perchè dalle (8) segue (*A. V.*, pag. 166):

$$(16) \quad \begin{cases} (m^2 - K\sigma \,.\, \sigma)^{-1} = \\ = f^2 \left[\dfrac{1}{m^2 - p^2 f^2} H(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_1) + \dfrac{1}{m^2} H(\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_2) + \dfrac{1}{m^2} H(\mathbf{i}_3, \mathbf{i}_3) \right]; \end{cases}$$

da quest'equazione si trae, inoltre, che il quadrato del semiasse di rotazione della quadrica è $\dfrac{m^2}{f^2} - p^2$, ed $\dfrac{m^2}{f^2}$ è il quadrato del parallelo principale. Da tali espressioni risulta, ancora, che le quadriche (16), al variare di m, formano un sistema di quadriche omofocali, le cui linee focali si ottengono ponendo successivamente $p^2 f^2$, e 0 al posto di m^2; esse sono il circolo focale e la retta centrale. I fuochi principali [1] su questa sono i punti doppî dell'involuzione (di Minchin) del n. 2; e non sono, quindi, reali.

13. Un asse centrale arbitrario r (10) è parallelo al vettore $\mathbf{j}_3$ (od $\mathbf{f}$), e passa per il punto $A = G - p\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3 \,.\, \mathbf{j}_1$, la cui omografia, per le (4) e (7), è:

$$\sigma_A = pf\,[H(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) + \mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3 \,.\, H(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_3)]\,.$$

D'altra parte, i piani passanti per l'asse centrale r, ossia per $A\mathbf{j}_3$, si ottengono facendo variare φ nell'espressione $A|\mathbf{u} = A|(\cos\varphi\mathbf{j}_1 + \mathrm{sen}\,\varphi\mathbf{j}_2)$. Perciò, fra i piani uscenti da tale retta, quelli il cui quadrato del momento ha un valore dato m^2, corrispondono agli angoli φ soddisfacenti alla relazione $[\sigma_A(\cos\varphi\mathbf{j}_1 + \mathrm{sen}\,\varphi\mathbf{j}_2)]^2 = m^2\,[(\cos\varphi)^2 + (\mathrm{sen}\,\varphi)^2]$, cioè all'equazione di secondo grado in $\mathrm{tang}\,\varphi$:

$$(17) \quad \begin{aligned} &[p^2 f^2 (\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_2)^2 - m^2]\,(\mathrm{tang}\,\varphi)^2 + 2p^2 f^2\, \mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_1 \,.\, \mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_2\, \mathrm{tang}\,\varphi + \\ &\qquad + p^2 f^2\,[(\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_1)^2 + (\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3)^2] - m^2 = 0\,, \end{aligned}$$

alle cui radici corrispondono i piani $A|\mathbf{u}$, per la retta r, tangenti alla quadrica (16).

[1] Ved., per es., L. Bianchi, *Lezioni di geometria analitica*, Pisa, Spoerri, 1915, § 213, pag. 531.

Ora, osserviamo che:

1°) Il prodotto delle due radici di questa equazione sarà -1 quando (e solo quando) è nulla la somma dei coefficienti estremi, cioè è

$$p^2 f^2 [(\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_2)^2 + (\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_1)^2 + (\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3)^2] - 2m^2 = 0 :$$

ossia, $2m^2 = p^2 f^2$.

2°) Le due radici dell'equazione (17), corrispondente ad un valore m_1 di m, saranno uguali alle inverse, cambiate di segno, delle radici della stessa equazione (17) per $m = m_2$, quando (e solo quando) il primo ed il terzo coefficiente di detta equazione, per $m = m_1$, sono rispettivamente opposti al terzo ed al primo coefficiente della medesima equazione per $m = m_2$, cioè quando è

$$p^2 f^2 (\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_2)^2 - m_i^2 = - p^2 f^2 [\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_1)^2 + (\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_3)^2] + m_j^2 ,$$

ove i, j indica una delle due permutazioni degli indici 1 e 2; ossia, quando si ha $m_1^2 + m_2^2 = p^2 f^2$.

Si ha così, analogamente a quanto si dimostra per il caso generale [1], che:

Considerando, nel sistema di quadriche omofocali (16), *due iperboloidi* (*che diremo associati*) *ad una falda, i cui raggi dei circoli di gola siano eguali ai cateti d'un qualsiasi triangolo rettangolo avente per ipotenusa il raggio del circolo focale* (*e quindi tali che il quadrato del semi-asse, non trasverso, di uno, sia eguale al quadrato del raggio del circolo di gola dell'altro*), *il complesso degli assi centrali del sistema dato può riguardarsi come il luogo delle rette d'intersezione di due piani ortogonali, uno tangente all'uno, e l'altro tangente all'altro dei due iperboloidi associati.*

In particolare, per $m_1^2 = m_2^2 = \frac{1}{2} p^2 f^2$, o per l'osservazione 1ª), si ha:

Il complesso degli assi centrali è il luogo delle rette d'intersezione delle coppie di piani ortogonali tangenti all'iperboloide, ad una falda, di rotazione intorno alla retta centrale, il cui circolo di gola è concentrico al circolo focale; ed il suo raggio è eguale a quello del circolo focale moltiplicato per $1/\sqrt{2}$, *e la cui sezione meridiana è un'iperbole equilatera.*

14. La nostra deduzione permette ancora di riconoscere senza difficoltà (come nel caso generale: cfr. *Astat.*, n. 106) se una qualsiasi delle coppie di piani ortogonali, indicate nei teoremi precedenti, è *formata da piani reali*, poichè basta esaminare il discriminante dell'equazione (17).

È chiaro intanto, per la (15), — contrariamente al caso generale — che per un asse centrale, non appartenente alla congruenza di Minding,

[1] Ved., per es., E. J. Routh, *A treatise on analytical statics*, vol. II, Cambridge, 1892, pag. 199; oppure *Astat.*, n. 106.

non passa alcun piano reale tangente al circolo focale, come non passa alcun piano reale tangente agli iperboloidi associati con un loro asse sufficientemente piccolo. Si può invece riconoscere che:

I due piani ortogonali tangenti all'iperboloide ad una falda dianzi indicato [*corrispondente ad* $m^2 = \frac{1}{2}p^2f^2$ *nella* (17)], *ed uscenti da un qualsiasi asse centrale, sono sempre reali.*

Con ciò si ha una effettiva *costruzione geometrica reale* di tutti gli assi centrali del nostro sistema.

Infatti, il discriminante dell'equazione (17), per $m^2 = \frac{1}{2}p^2f^2$, è

$$p^4f^4[(\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_1)^2 + (\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_3)^2 - \tfrac{1}{2}][(\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_2)^2 - \tfrac{1}{2}] - p^4f^4(\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_1)^2(\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_2)^2 =$$
$$= p^4f^4[(\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_2)^2(\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_3)^2 - \tfrac{1}{4}];$$

e siccome il massimo valore che può assumere il prodotto $(\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_2)^2(\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_3)^2$, per un valore assegnato di $\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_1$, è $\frac{1}{4}[1-(\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_1)^2]$, tale discriminante è nullo solo quando $\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_1 = 0$, ed $(\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_2)^2 = (\mathbf{i}_1\times\mathbf{j}_3)^2 = \frac{1}{2}$, ed è negativo in ogni altra ipotesi. Nel caso ora indicato, è facile di riconoscere che l'equazione considerata è identicamente soddisfatta, e corrisponde ad assi centrali che incontrano il piano mediano nel circolo di gola dell'iperboloide sopra considerato.

Dunque, le radici dell'equazione (17), per $m^2 = \frac{1}{2}p^2f^2$ sono sempre reali; esse sono inoltre distinte e determinate finchè l'asse centrale considerato, $A\mathbf{j}_3$, non è una generatrice dell'iperboloide indicato nell'enunciato ultimo del n. 13, chè allora sono (com'è ovvio) indeterminate.

15. Il complesso degli assi centrali rientra così, per l'ultimo teorema del n. 13, nel complesso (caso particolare del complesso di Battaglini) che i francesi ([1]) chiamano senz'altro « di Painvin », il quale ([2]) ha studiato più specialmente il luogo delle rette, per ciascuna delle quali si possono condurre due piani ortogonali tangenti ad un dato *ellissoide*; ed è a tale studio che si riferisce il Darboux (loc. cit., pag. 40). Peraltro, non tutte le proprietà dedotte dal Painvin si possono riportare al complesso degli assi centrali di un sistema astatico in cui, come nel caso qui studiato, comparisce sempre un *iperboloide ad una falda* (*Astat.*, n. 106); tanto più avendo sopratutto riguardo, come fa il Painvin (loc. cit., pag. 97), agli elementi reali. Così non si potrebbe rintracciare nel Painvin una costruzione del complesso che corrisponda a quella da noi esposta.

([1]) Ved., per es., A Demoulin, *Sur le complexe des droites par lesquelles on peut mener à une quadrique deux plans tangents rectangulaires*, Bulletin de la Soc. Math. de France, t. XX, 1892, pp. 122-132.

([2]) Painvin, *Étude d'un complexe du second ordre*, Nouv. Ann. de Mathém. (2), 11, 1872, pp. 49-60, 106-107, 202-210, 289-297, 481-500, 529-539.

Passiamo ancora osservare che dal n. 9 risulta che: *il piano mediano è il luogo dei punti il cui cono delle rette del nostro complesso si spezza in una coppia di piani*; mentre, nel complesso studiato dal Painvin, tale luogo è *una superficie d'onda* (del 4° ordine), i cui punti reali sono tutti al finito.

Direzioni principali.

16. Nel caso che si considera, si possono trovare facilmente le direzioni principali (*A. V.*, I, pag. 35) dell'omografia σ_A del sistema $(P_i, \mathbf{f}_i)$, relativa ad un punto qualsiasi A.

Infatti, dalle (14) e (17) segue, anzitutto, che σ_A trasforma in un vettore nullo ogni vettore normale al piano $AG\mathbf{i}_1$, od alla retta centrale, secondo che A è fuori o sopra questa retta.

Se A è fuori della retta $G\mathbf{i}_1$, e s'indicano con $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$ due vettori unitarî-ortogonali paralleli alle direzioni principali non nulle di σ_A; con $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ i corrispondenti vettori unitarî-ortogonali paralleli alle direzioni principali di $K\sigma_A$; e con a, b i relativi parametri principali (*A. V.*, I, pag. 166), è

$$\sigma_A = a\,H(\mathbf{i}', \mathbf{i}) + b\,H(\mathbf{j}', \mathbf{j}).$$

Poichè allora (*A. V.*, I, pag. 166) $R\sigma_A = ab\,H(\mathbf{k}', \mathbf{k})$, il vettore $\mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$ è parallelo al vettore $\mathbf{j}_2$ del n. 2; quindi $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$, normali a $\mathbf{j}_2$, sono paralleli ad una delle coppie di vettori $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ (6), per un determinato valore di θ: e perciò, in virtù delle (3), i vettori $K\sigma_A\mathbf{i} = a\mathbf{i}'$, $K\sigma_A\mathbf{j} = b\mathbf{j}'$ sono paralleli alle rette ortogonali AP, AQ, che vanno a due punti coniugati nell'involuzione della retta centrale, oltrechè alle direzioni principali, non nulle, di σ_A.

Inversamente, se le due rette AP, AQ, passanti per due punti coniugati (3) dell'involuzione della retta centrale, sono ortogonali, segue subito che, per l'omografia $\sigma_A = H(P - A, \mathbf{h}_1) + H(Q - A, \mathbf{h}_2)$, le direzioni di tali rette sono principali. Così, anche per il n. 7, si ha:

Ogni punto A della retta centrale ha ∞^1 *terne principali, ciascuna formata delle direzioni della retta centrale e da due direzioni* (*nulle per* σ_A) *ortogonali e normali a tale retta.*

Un punto qualunque A, *fuori della retta centrale, ha come direzione principale* (*nulla per* σ_A) *quella della normale al piano del punto e della retta centrale, insieme con le direzioni della coppia* (*unica, per A fuori del circolo focale, o fra le* ∞^1 *coppie siffatte, se A è su tale circolo*) *di rette ortogonali, che vanno a due punti coniugati nell'involuzione* (*ellittica, di Minchin*) *della retta centrale.*

17. Le direzioni indicate (doppie per la dilatazione $K\sigma_A . \sigma_A$) sono degli elementi astatici del sistema $(P_i, \mathbf{f}_i)$ rispetto al corpo (*Astat.*, pag. 12), ed hanno perciò una importanza fondamentale nelle ricerche di astatica. Esse

sono parallele sia agli assi dell'*ellissoide centrale* di Darboux, sia a quelli dell'*ellissoide di riduzione* di Da Silva (che sono due quadriche indicatrici, con centro in A, rispettivamente delle dilatazioni $K\sigma_A . \sigma_A$ e $\sigma_A^{-1} . K\sigma_A^{-1}$: cfr. *Astat.*, Appendice), sia agli *assi di squilibrio* di Siacci [1]; e permettono di determinare facilmente, per es., gli assi principali di rotazione di Möbius ed ogni altro elemento invariabilmente legato al corpo.

L'omografia σ_A da noi considerata è definita, oltrechè da tali direzioni principali, dalle direzioni doppie della dilatazione $\sigma_A . K\sigma_A$, astatiche rispetto al sistema di forze, e dai parametri principali (*Astat.*, cap. I, § 10) che sono astatici rispetto al corpo ed alle forze; donde la ragione che con essa si possono facilmente ritrovare le proprietà ottenute sulla astatica con procedimenti assai diversi e spesso complicati. Di più essa permette di completare, e vedere sotto nuova luce, molti risultati noti, poichè presenta il vantaggio di riunire tutti gli elementi che si trovano sempre considerati separatamente dai varî autori, a seconda dei loro punti di vista speciali.

Matematica. — *Formole di derivazione funzionale.* Nota di E. DANIELE, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla derivazione per serie.* Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Corrisp. O. TEDONE.

Il seguente teorema mi sembra notevole, perchè semplice ed abbastanza generale.

Se $u(x) = \sum_1^\infty u_n(x)$ *è una serie convergente di funzioni monotòne, per es. non decrescenti, definite in un intervallo* $a \leq x \leq b$, *ivi è quasi dappertutto lecita la derivazione per serie; cioè quasi dappertutto vale la* $u'(x) = \sum_1^\infty u'_n(x)$.

In altre parole:

1°) il gruppo G dei punti, ove non esiste oppure non è finita anche una sola delle $u'(x)$, $u'_n(x)$;

2°) il gruppo dei punti ove $\Sigma u'_n(x)$ non converge;

3°) il gruppo dei punti ove non è $u'(x) = \Sigma u'_n(x)$

sono aggregati di misura nulla.

[1] F. Siacci, *Le quaterne statiche nei sistemi di forma invariabile*, Memorie della Soc. Ital. delle Scienze, detta dei XL, (3°), tom. IV, n. 3, 1882, pag. 7.

Ciò è ben noto (per i teoremi generali del Lebesgue circa le funzioni monotòne) per quanto riguarda il primo gruppo G.

Per un teorema di De la Vallée Poussin ([1]), è

$$(1)\qquad \begin{cases} u(x) - u(a) = \int_a^x u'(x)\,dx + V(x) \\ u_n(x) - u_n(a) = \int_a^x u'_n(x)\,dx + V_n(x)\,, \end{cases}$$

dove le $V(x)$, $V_n(x)$ si definiscono nel modo seguente: Costruiamo infiniti sistemi $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}, \Sigma^{(3)}, \ldots$ di intervalli, a due a due senza punti interni comuni, rinchiudenti l'aggregato G. Siano $\delta_1^{(r)}, \delta_2^{(r)}, \delta_3^{(r)}, \ldots$ gli intervalli di $\Sigma^{(r)}$; la somma delle loro lunghezze *tenda a zero* per $r = \infty$. Siano $v_{nk}^{(r)}, v_k^{(r)}$ le variazioni di u_n e di u in uno dei segmentini $\delta_k^{(r)}$, o sua parte, che appartiene all'intervallo (a, x). Poniamo

$$V^{(r)} = \sum_k v_k^{(r)} \quad , \quad V_n^{(r)} = \sum_k v_{nk}^{(r)} \,.$$

Il teorema citato dice che:

$$V(x) = \lim_{r=\infty} V^{(r)} \quad ; \quad V_n(x) = \lim_{r=\infty} V_n^{(r)} \,.$$

Evidentemente

$$v_k^{(r)} = \sum_n v_{nk}^{(r)} \,,$$

donde

$$V^{(r)} = \sum_k v_k^{(r)} = \sum_k \sum_n v_{nk}^{(r)} \,.$$

Essendo le $v_{nk}^{(r)}$ positive, si possono nel terzo membro invertire i simboli di sommatoria, cosicchè

$$(2)\qquad V^{(r)} = \sum_n \left[\sum v_{nk}^{(r)} \right] = \sum V_n^{(r)} \,.$$

Ora noi possiamo scegliere i $\Sigma^{(r)}$ in guisa che ogni $\Sigma^{(r+1)}$ sia interno a $\Sigma^{(r)}$. Con tale scelta, le $V^{(r)}, V_n^{(r)}$ decresceranno al crescere della r, pure essendo positive; e perciò è ultimo membro di (1) ha, per $r = \infty$, un limite, che si può calcolare passando al limite termine a termine. Quindi

$$(3)\qquad V(x) = \lim_{r=\infty} V^{(r)} = \lim_{r=\infty} \sum_n V_n^{(r)} = \sum_n \lim_{r=\infty} V_n^{(r)} = \sum_n V_n(x) \,.$$

([1]) De la Vallée-Poussin, *Cours d'analyse infinitésimale*, vol. I, 2a edizione, 1909, pag. 269.

Ora, poichè $u(x) = \sum_n u_n(x)$, dalle (1) si trae:

$$\int_a^x u'(x)\,dx + V(x) = \sum_n \int_a^x u'_n(x)\,dx + \sum_n V_n(x)\,, \tag{4}$$

la quale, per (3), diventa:

$$\int_a^x u'(x)\,dx = \sum_n \int_a^x u'_n(x)\,dx\,. \tag{5}$$

Essendo le $u'_n(x)$ non negative, e convergendo il secondo membro di (5), si avrà [1]:

$$\sum_n \int_a^x u'_n(x)\,dx = \int_a^x \sum_n u'_n(x)\,dx\,, \tag{6}$$

cosicchè la (5) diventa:

$$\int_a^x u'(x)\,dx = \int_a^x \left[\sum_n u'_n(x)\right] dx\,.$$

Derivando, se ne deduce che, come si doveva dimostrare, è quasi dappertutto

$$u'(x) = \sum_n u'_n(x)\,.$$

Matematica. — *Sopra una equazione integro-differenziale del tipo ellittico*. Nota di Luigi Sinigallia, presentata dal Socio V. Volterra.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

[1] B. Levi, *Sopra l'integrazione delle serie*, Rendiconti dell'Istituto lombardo, vol. XXXIX (1906), pp. 775 e segg.

Meccanica. — *Sulle vibrazioni di una corda elastica in un mezzo resistente.* Nota I del dott. Francesco Sbrana, presentata dal Corrispondente O. Tedone.

1. Ci occuperemo, in questa Nota, del problema delle vibrazioni di una corda elastica tesa, attorno alla sua posizione di equilibrio, in un mezzo resistente, supponendo che la resistenza del mezzo si possa rappresentare con un sistema di forze applicate agli elementi della linea, dello stesso ordine di grandezza di questi elementi, e proporzionali alle loro velocità, e che si possa trascurare il peso della corda stessa.

Di questo problema si sanno determinare le soluzioni elementari [1], e da queste, coi noti metodi, si può risalire alla soluzione generale. Il nostro còmpito sarà invece quello di pervenire ad una tale soluzione, servendoci della formula che il metodo delle caratteristiche di Riemann fornisce per l'integrale generale dell'equazione a derivate parziali del problema. Il vantaggio, che fornisce un tal metodo, consiste principalmente nel non richiedere, perchè esso sia applicabile, che le funzioni che compaiono nelle condizioni iniziali siano prima poste sotto forma di espressioni analitiche speciali.

2. Nella posizione di equilibrio la corda sia distesa lungo l'asse x positivo, tra i punti di ascissa $x=0$, $x=L$, sicchè sia L la sua lunghezza in questo stato di equilibrio. Cominceremo a contare il tempo dall'istante iniziale del movimento.

Chiamiamo u, v, w le componenti dello spostamento di un punto della corda, a partire dalla posizione di equilibrio, secondo gli assi x, y, z. E notiamo che, dal punto di vista analitico, la determinazione di u, v, w costituisce uno stesso problema: quello cioè di ottenere una funzione φ di x e t, la quale, per $t>0$ e x compreso tra 0 ed L, sia soluzione dell'equazione

$$(1) \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+2f\frac{\partial\varphi}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},$$

si riduca a 0 per $x=0$, $x=L$ e $t>0$, e assuma valori assegnati, insieme con $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, per $t=0$, e x compreso tra 0 ed L. Soltanto le costanti f e a^2 hanno ordinariamente valori diversi, secondochè φ rappresenta lo spostamento

[1] Ved., per es., Routh, *The advanced part of a Treatise on the Dynamics of a system of a rigid bodies*, ediz. 1908, pag. 438; Bouasse, *Mécanique physique*, 2me edit., pag. 572.

longitudinale u o una delle componenti v, w dello spostamento trasversale di un punto della corda.

Per risolvere questo problema, conviene trasformare la (1) nell'altra:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = U . \tag{2}$$

ponendo $\varphi = Ue^{-ft}$, e $\xi = \frac{f}{a} x$, $\eta = ft$. Si ponga pure $l = \frac{f}{a} L$. E allora, considerando ξ e η come coordinate ortogonali in un piano, il nostro problema si può porre sotto quest'altra forma:

« determinare una funzione U di ξ e η, la quale, in tutto il campo C del piano $\xi\eta$, limitato dalle rette $\xi = 0$ e $\xi = l$, nel quale $\eta > 0$, sia soluzione della (2), si annulli per $\xi = 0$ e $\xi = l$, e soddisfi inoltre alle condizioni:

$$(U)_{\eta=0} = f(\xi) \quad ; \quad \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = F(\xi),$$

essendo f e F funzioni assegnate della ξ, per ξ compreso tra 0 ed l ».

3. Sia ora τ una regione qualunque del piano $\xi\eta$, nella quale U è una soluzione regolare della (2), ed s una linea aperta in questo campo, lungo la quale sono assegnati i valori di U e delle derivate prime, mediante tre funzioni continue, delle quali, naturalmente, due sole saranno indipendenti. Se conduciamo, per un punto $0 \equiv (\xi_0, \eta_0)$ di τ, le due caratteristiche dell'equazione (2)

$$\xi - \eta = \xi_0 - \eta_0 \quad ; \quad \xi + \eta = \xi_0 + \eta_0$$

che diremo del 1° e del 2° sistema rispettivamente, indichiamo con 1 e 2 le loro intersezioni colla linea s, e intendiamo che il senso positivo su essa linea sia quello che va dal punto 1 al punto 2, la formula che dà il calore di U in 0, per mezzo dei valori che la U stessa e le sue derivate prime acquistano su s, tra i punti 1 e 2, ottenuta coll'applicazione del metodo delle caratteristiche di Riemann, si scrive:

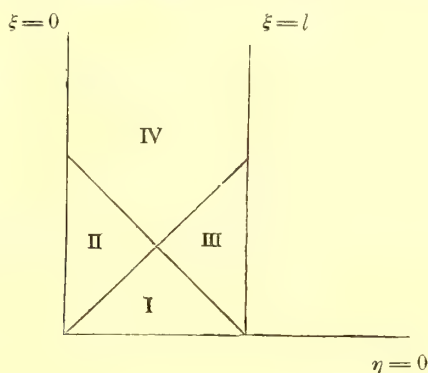
$$2U_0 = U_1 + U_2 + \int_1^2 \left\{\left(I_0 \frac{\partial U}{\partial \eta} - U \frac{\partial I_0}{\partial \eta}\right) d\xi + \left(I_0 \frac{\partial U}{\partial \xi} - U \frac{\partial I_0}{\partial \xi}\right) d\eta\right\}, \tag{3}$$

essendo U_0, U_1, U_2 i valori di U nei punti $0, 1, 2$, e intendendosi l'integrale esteso alla linea s fra i punnti 1 e 2. Inoltre abbiamo indicato semplicemente con I_0 la funzione

$$I_0(z) = \sum_0^\infty {}_i \frac{z^{2i}}{2^{2i} i!\, i!} \qquad z = \sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - (\xi - \xi_0)^2} \ \text{[1]}.$$

[1] Ved., per es., Riemann-Weber, *Part. Diff.-gleich. der math. Physik.* 2er Bd., ediz. 1912, pag. 306.

4. Cercheremo di risolvere il nostro problema coll'aiuto della formula (3), assumendo per la linea s, che comparisce nella formula (3), il contorno del campo C.

Dividiamo anzitutto il campo stesso nelle regioni I, II, III, IV, come è indicato dalla figura, mediante la caratteristica del 1° sistema uscente dall'origine delle coordinate, e quella del 2° sistema uscente dal punto di ascissa l dell asse ξ. Conduciamo quindi per un punto $0 \equiv (\xi_0, \eta_0)$ del

campo C le due caratteristiche uscenti da esso. Intenderemo come punto 1 l'intersezione della caratteristica del 1° sistema coll'asse ξ positivo se 0 è nelle regioni I o III, coll'asse η positivo se 0 è nelle regioni II o IV; e come punto 2 l'intersezione dell'altra caratteristica coll'asse ξ positivo se 0 è nelle regioni I o II, colla parte positiva della retta $\xi = l$ se 0 è nelle regioni III o IV. Quando il punto 0 cade nella regione I, la formula (3) diventa:

$$(4) \qquad 2U_0 = f(\xi_0 - \eta_0) + f(\xi_0 + \eta_0) + \\ + \int_{\xi_0 - \eta_0}^{\xi_0 + \eta_0} \left[F(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] I_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - (\xi - \xi_0)^2} \right) d\xi \,,$$

e determina quindi, senz'altro, il valore di U in questa regione, per mezzo delle funzioni assegnate f ed F. Se 0 cade nella regione II, ponendo $\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} = \varphi(\eta)$, la formula stessa diventa:

$$(5) \qquad 2U_0 = f(\eta_0 + \xi_0) + \\ + \int_0^{\eta_0 + \xi_0} \left[F(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] I_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - (\xi - \xi_0)^2} \right) d\xi - \\ - \int_0^{\eta_0 - \xi_0} I_0 \left(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - \xi_0^2} \right) \varphi(\eta) \, d\eta \,;$$

e se 0 cade nella regione III, ponendo $\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_{\xi=l} = \psi(\eta)$:

$$(6) \quad 2U_0 = f(\xi_0 - \eta_0) + \\ + \int_{\xi_0-\eta_0}^{l} \left[F(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] I_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - (\xi - \xi_0)^2}\right) d\xi + \\ + \int_0^{\xi_0+\eta_0-l} I_0 \left(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - (l - \xi_0)^2}\right) \psi(\eta)\, d\eta .$$

Se infine 0 è nella regione IV, otteniamo, allo stesso modo, la formula:

$$(7) \quad 2U_0 = -\int_0^{\eta_0-\xi_0} I_0 \left(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - \xi_0^2}\right) \varphi(\eta)\, d\eta + \\ + \int_0^{l} \left[F(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] I_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - (\xi - \xi_0)^2}\right) d\xi + \\ + \int_0^{\eta_0+\xi_0-l} I_0 \left(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - (l - \xi_0)^2}\right) \psi(\eta)\, d\eta ,$$

nella quale è ancora $\varphi(\eta) = \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_{\xi=0}$, $\psi(\eta) = \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_{\xi=l}$.

La funzione U sarà dunque determinata anche nelle regioni II, III, IV, quando si conoscano i valori di $\varphi(\eta)$ e $\psi(\eta)$. Il nostro problema sarà perciò risoluto se noi riusciremo a determinare queste ultime funzioni.

Le condizioni alle quali le funzioni $\varphi(\eta)$ e $\psi(\eta)$ devono soddisfare, si ottengono imponendo al valore di U determinato, nel campo C, dal sistema delle formule precedenti, che tenda a zero quando si fà tendere il punto 0 ad un punto del contorno del campo C appartenente all'asse η o alla retta $\xi = l$.

Facendo tendere ξ_0 a 0 nella (5), troviamo allora:

$$(8) \quad 0 = f(\eta_0) + \int_0^{\eta_0} \left[F(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] I_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - \xi^2}\right) d\xi - \\ - \int_0^{\eta_0} I_0(\eta_0 - \eta)\, \varphi(\eta)\, d\eta ;$$

e facendo tendere ξ_0 ad l nella (6), otteniamo:

$$(9) \quad 0 = f(l - \eta_0) + \int_{l-\eta_0}^{l} \left[F(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] I_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - (\xi - l)^2}\right) d\xi + \\ + \int_0^{\eta_0} I_0(\eta_0 - \eta)\, \psi(\eta)\, d\eta .$$

Infine, facendo tendere ξ_0 prima a 0, poi ad l, nella (7), abbiamo le due equazioni:

$$(10)\quad \begin{cases} 0=\int_0^l \left[F(\xi)+f(\xi)\frac{\partial}{\partial\eta_0}\right] I_0\left(\sqrt{\eta_0^2-\xi^2}\right)d\xi + \\ \quad +\int_0^{\eta_0-l} I_0\left(\sqrt{(\eta-\eta_0)^2-l^2}\right)\psi(\eta)\,d\eta-\int_0^{\eta_0} I_0(\eta_0-\eta)\,\varphi(\eta)\,d\eta \\ 0=\int_0^l \left[F(\xi)+f(\xi)\frac{\partial}{\partial\eta_0}\right] I_0\left(\sqrt{\eta_0^2-(\xi-l)^2}\right)d\xi - \\ \quad -\int_0^{\eta_0-l} I_0\left(\sqrt{(\eta-\eta_0)^2-l^2}\right)\varphi(\eta)\,d\eta+\int_0^{\eta_0} I_0(\eta_0-\eta)\,\psi(\eta)\,d\eta . \end{cases}$$

La (8), nella quale è da ritenersi $\eta_0 < l$, è un'equazione integrale, alla quale deve soddisfare $\varphi(\eta)$, per $\eta < l$; analogamente la (9) è un'equazione integrale cui deve soddisfare $\psi(\eta)$, per $\eta < l$. Nelle (10) è invece da ritenersi $\eta_0 > l$. Se si suppone di aver determinato $\varphi(\eta)$ e $\psi(\eta)$ per $\eta < nl$, essendo n un intero positivo qualunque, le (10) ci dànno subito due equazioni integrali alle quali devono soddisfare $\varphi(\eta)$ e $\psi(\eta)$ rispettivamente, per η compreso tra nl ed $(n+1)l$.

5. Le equazioni integrali, delle quali debbono essere soluzioni $\varphi(\eta)$ e $\psi(\eta)$, sono tutte del tipo

$$(11)\qquad \int_c^{x_0} I_0(x_0-x)\,\varphi(x)\,dx=\Phi(x_0)-\Phi(c)\,,$$

dove c è una costante; e si possono quindi risolvere mediante la formula

$$(11')\qquad \varphi(x_0)=\Phi'(x_0)-\int_c^{x_0}[\Phi(x)-\Phi(c)]\,\frac{I_1(x_0-x)}{x_0-x}\,dx\,,$$

ottenuta dal prof. Tedone [1]. Si ottengono però espressioni più semplici per $\varphi(\eta)$ e $\psi(\eta)$, cercando il limite, per $\xi=0$ e $\xi=l$, della derivata, rapporto a ξ della funzione U determinata dalle (5), (6), (7). Sarà necessario allora di verificare che i valori di $\varphi(\eta)$ e $\psi(\eta)$, che si ottengono per questa via, soddisfano effettivamente alle equazioni integrali delle quali le funzioni stesse debbono essere soluzioni.

Questo procedimento, del resto, non è che quello stesso col quale il prof. Tedone è riuscito ad ottenere la formula di risoluzione dell'equazione (11).

[1] *Sulla integrazione dell'equazione delle onde smorzate, col metodo delle caratteristiche.* Questi Rendiconti, seduta 31 maggio 1913.

Derivando dunque la (5) rapporto a ξ_0, e facendo quindi tendere ξ_0 a 0 nella formula ottenuta, troviamo subito, quando s' imponga la condizione che $\frac{\partial U_0}{\partial \xi_0}$ tenda a $\varphi(\eta_0)$ per $\xi_0 = 0$,

$$(8') \quad \varphi(\eta_0) = f'(\eta_0) + F(\eta_0) - \frac{\eta_0}{2} f(\eta_0) - \\ - \int_0^{\eta_0} \left[F(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] \frac{\partial}{\partial \xi} I_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - \xi^2} \right) d\xi = \\ = f'(\eta_0) + \int_0^{\eta_0} \left[F'(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] I_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - \xi^2} \right) d\xi .$$

Derivando la (6) ancora rapporto a ξ_0, e facendo tendere, nella formula ottenuta, ξ_0 ad l, ricaviamo, quando s' imponga la condizione che $\frac{\partial U_0}{\partial \xi_0}$ tenda a $\psi(\eta_0)$ per $\xi_0 = l$,

$$(9') \quad \psi(\eta_0) = f'(l - \eta_0) - F(l - \eta_0) - \frac{\eta_0}{2} f(l - \eta_0) - \\ - \int_{l-\eta_0}^{l} \left[F(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] \frac{\partial}{\partial \xi} I_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - (\xi - l)^2} \right) d\xi = \\ = f(l - \eta_0) + \int_0^{\eta_0} \left[F'(l - \xi) + f'(l - \xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] I_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - \xi^2} \right) d\xi .$$

Finalmente, derivando la (7), e facendo quindi tendere ξ_0 prima a 0, poi ad l, otteniamo allo stesso modo:

$$(10') \begin{cases} \varphi(\eta_0) = \psi(\eta_0 - l) - \int_0^l \left[F(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] \frac{\partial}{\partial \xi} I_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - \xi^2} \right) d\xi + \\ \qquad + l \int_0^{\eta_0 - l} \frac{I_1 \left(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - l^2} \right)}{\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - l^2}} \psi(\eta)\, d\eta \\ \psi(\eta_0) = \varphi(\eta_0 - l) - \\ \qquad - \int_0^l \left[F(\xi) + f(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right] \frac{\partial}{\partial \xi} I_0 \left(\sqrt{\eta_0^2 - (\xi - l)^2} \right) d\xi + \\ \qquad + l \int_0^{\eta_0 - l} \frac{I_1 \left(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - l^2} \right)}{\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - l^2}} \varphi(\eta)\, d\eta . \end{cases}$$

Le formule (8') e (9') dànno i valori $\varphi(\eta)$ e $\psi(\eta)$, per $\eta < l$; e se si suppongono note $\varphi(\eta)$ e $\psi(\eta)$ per $\eta < nl$, le (10') determinano esse funzioni per η compreso tra nl ed $(n+1)l$.

Fisica. — *Il movimento della elettricità in una lamina metallica sottoposta all'azione di un campo magnetico.* Nota di O. M. Corbino, presentata dal Socio V. Volterra.

1. Una lamina metallica piana sia sottoposta all'azione di un campo magnetico H, ad essa normale; e si supponga, come nella teoria elettronica della conduzione dei metalli, che la corrente elettrica sia in essi trasportata con meccanismo convettivo dagli ioni positivi e negativi liberamente vaganti in seno al metallo, e dotati delle mobilità che indicheremo rispettivamente con v_1 e v_2. Siano N_1 e N_2 i numeri di ioni positivi e negativi per centimetro cubo; e il valore assoluto della carica elettrica comune per le due specie di ioni; X e Y le componenti della forza elettrica nel senso di due assi x e y, e j_x e j_y le componenti della densità di corrente. Sarà perciò

$$(1)\qquad \begin{cases} j_x = e\left(N_1 \dfrac{d\xi_1}{dt} - N_2 \dfrac{d\xi_2}{dt}\right) \\[2ex] j_y = e\left(N_1 \dfrac{d\eta_1}{dt} - N_2 \dfrac{d\eta_2}{dt}\right), \end{cases}$$

dove $\dfrac{d\xi_1}{dt}, \dfrac{d\xi_2}{dt}, \dfrac{d\eta_1}{dt}, \dfrac{d\eta_2}{dt}$ rappresentano le componenti della velocità degli ioni secondo gli assi.

La velocità secondo un asse determinerà una forza elettromagnetica ad esso normale, che si aggiungerà alla forza elettrica dipendente dalla distribuzione dei potenziali sulla lamina. Supposto che la lamina sia mantenuta a temperatura costante, non avremo a considerare altre forze motrici dello ione, all'infuori della forza elettrica e di quella elettromagnetica destata dal moto secondo l'asse normale. Se gli assi x e y e il campo H formano un triedro ortogonale destrorso, avremo perciò

$$\frac{d\xi_1}{dt} = ev_1\left(X - H\frac{d\eta_1}{dt}\right) \quad ; \quad \frac{d\eta_1}{dt} = ev_1\left(Y + H\frac{d\xi_1}{dt}\right)$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = -ev_2\left(X - H\frac{d\eta_2}{dt}\right) \quad ; \quad \frac{d\eta_2}{dt} = -ev_2\left(Y + H\frac{d\xi_2}{dt}\right),$$

da cui si ricava, posto $m_1 = Hev_1$, $m_2 = Hev_2$,

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \frac{ev_1}{1+m_1^2}(X - m_1Y) \quad ; \quad \frac{d\eta_1}{dt} = \frac{ev_1}{1+m_1^2}(Y + m_1X)$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = -\frac{ev_2}{1+m_2^2}(X - m_2Y) \quad ; \quad \frac{d\eta_2}{dt} = -\frac{ev_2}{1+m_2^2}(Y + m_2X).$$

Sostituendo nelle (1), dopo aver posto

$$s_1 = \frac{N_1 e^2 v_1}{1 + m_1^2} \quad ; \quad s_2 = \frac{N_2 e^2 v_2}{1 + m_2^2}$$

$$s = s_1 + s_2 \quad ; \quad \varepsilon = m_1 s_1 - m_2 s_2 ,$$

si ottiene

$$(2) \quad \begin{cases} j_x = s\mathrm{X} - \varepsilon\mathrm{Y} \\ j_y = \varepsilon\mathrm{X} + s\mathrm{Y} \end{cases} \qquad (3) \quad \begin{cases} \mathrm{X} = \dfrac{1}{s^2 + \varepsilon^2}(s j_x + \varepsilon j_y) \\ \mathrm{Y} = \dfrac{1}{s^2 + \varepsilon^2}(-\varepsilon j_x + s j_y), \end{cases}$$

le quali permettono di passare dal campo elettrico alla corrente, e viceversa.

2. La corrente elettrica j dovrà ancora soddisfare alla condizione di continuità

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = 0 ,$$

il che porta alla condizione

$$\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y} = 0 ,$$

cioè, come avviene senza l'azione del campo, il potenziale V obbedirà alla condizione di Kirchoff,

$$\Delta^2 V = 0 ,$$

Inoltre, essendo stati gli elettrodi supposti di resistenza trascurabile e mantenuti ai potenziali costanti V_1 e V_2, il potenziale conserverà questi valori sulle parti della lamina occupate dagli elettrodi stessi.

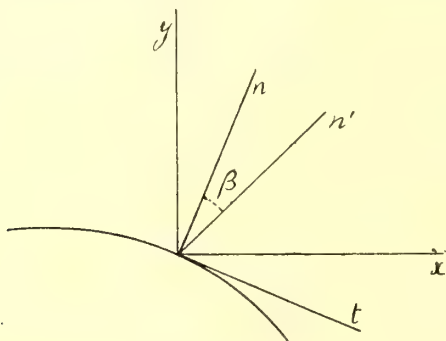



Fig. 1.

Il contorno libero della lamina, se questa è isolata, continuerà ad essere una linea di flusso. Detto perciò α l'angolo che la normale al contorno o a una linea di flusso (fig. 1) fa con l'asse x, sarà, lungo queste linee,

$$j_x \cos \alpha + j_y \operatorname{sen} \alpha = 0 .$$

Tenendo presenti le (2), facilmente si riconosce che questa condizione si traduce nella seguente, dove n e t denotano la normale e la tangente alla linea di flusso:

$$s\frac{\partial V}{\partial n}+\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t}=0; \tag{4}$$

e perciò, indicando con n' una retta formante nel senso destrorso un angolo β con n, tale che

$$\tang\beta=\frac{\varepsilon}{s}$$

si avrà

$$\frac{\partial V}{\partial n'}=0$$

Adunque: *mentre senza l'azione del campo, su una qualunque linea di flusso, e perciò sul contorno libero, è nulla la derivata del potenziale secondo la normale, per effetto del campo lungo le stesse linee è nulla la derivata di* V *secondo una direzione che forma con la normale un angolo costante in tutta la lamina.*

Quest'angolo si rovescia simmetricamente rispetto alla normale, qualora si inverta il campo, poichè cambia il segno di ε.

Si può perciò concludere che, mentre, senza l'azione del campo, le linee equipotenziali e quelle di flusso formano un sistema ortogonale, per effetto del campo si deformeranno le une, o le altre, o entrambi i fasci di curve, fino a formare un sistema isoclino in tutta la lamina. La rotazione non è trascurabile, poichè nel bismuto l'angolo β può assumere un valore superiore a 10°.

3. La determinazione del potenziale V lungo la lamina, e perciò la previsione del fenomeno di Hall isotermico in una lamina di qualunque forma, è, così, ricondotta alla risoluzione di un particolare problema di Dirichlet: trovare cioè una funzione che soddisfi, entro la lamina, alla condizione

$$\Delta^2 V=0,$$

che prenda determinati valori V_1 e V_2 sugli elettrodi, e che al contorno libero della lamina verifichi la condizione

$$\frac{\partial V}{\partial n'}=0.$$

Se ci si limita alla ricerca della variazione del potenziale prodotta dal campo, cioè alla determinazione dell'effetto Hall vero e proprio, basterà porre

$$V=V_0+v,$$

dove v è la variazione del potenziale primitivo V_0.

La funzione ignota v continuerà a soddisfare all'equazione

$$\Delta^2 v = 0\,,$$

inoltre essa sarà nulla sugli elettrodi, tenuti a potenziale costante; e infine sul contorno libero si avrà, per la (4) (essendo $\frac{\partial V_0}{\partial n} = 0$),

$$s\frac{\partial v}{\partial n} + \varepsilon\frac{\partial V_0}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial v}{\partial t} = 0\,.$$

Ma

$$s\frac{\partial v}{\partial n} + \varepsilon\frac{\partial v}{\partial t} = \sqrt{s^2+\varepsilon^2}\,\frac{\partial v}{\partial n'}\,:$$

perciò

$$\frac{\partial v}{\partial n'} = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{s^2+\varepsilon^2}}\,\frac{\partial V_0}{\partial t}\,.$$

Indicando con I_0 la corrente senza l'azione del campo, e con c la conducibilità della lamina, si avrà, d'altra parte,

$$I_0 = -c\frac{\partial V_0}{\partial t}$$

e, perciò,

$$\frac{\partial v}{\partial n'} = \frac{\varepsilon}{c}\,\frac{I_0}{\sqrt{s^2+\varepsilon^2}}\,.$$

L'ultima relazione ha un significato fisico evidente: la funzione v è identica alla distribuzione dei potenziali che si determinerebbe nella lamina senza campo, qualora, mantenendo gli antichi elettrodi a potenziale zero, si facesse penetrare per il contorno libero un flusso di correnti il cui valore nel senso n' fosse punto per punto proporzionale alla corrente I_0 che si aveva senza campo.

La (4) dà anche

$$s\frac{\partial v}{\partial n'} = -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t}\,.$$

Ma dalle equazioni (2) si deduce facilmente che la corrente j_t nel senso della tangente alla linea di flusso o al contorno è data, mentre agisce il campo, da

$$j_t = -\frac{s^2+\varepsilon^2}{s}\,\frac{\partial V}{\partial t}\,,$$

e perciò

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\varepsilon}{s^2+\varepsilon^2}\,j_t\,, \tag{5}$$

la quale ci dice che la funzione v è identica col potenziale che si determinerebbe nella lamina, qualora, per mezzo di nuovi elettrodi applicati a tutto il contorno libero, mentre gli antichi son tenuti al potenziale comune zero, si invii nella lamina un flusso di correnti normale al contorno, e proporzionale punto per punto alla corrente locale che si aveva sotto l'azione del campo.

4. Come si è detto, l'effetto del campo si riduce a una rotazione *mutua* di un angolo β delle linee di corrente rispetto a quelle equipotenziali, con la condizione che il contorno sia, come prima, in parte linea di flusso (dove esso è libero) e in parte linea equipotenziale (dove sono gli elettrodi). Ma se la lamina fosse poggiata su elettrodi molto estesi e di elevatissima resistenza specifica, allora il sistema delle linee di corrente resterebbe quello

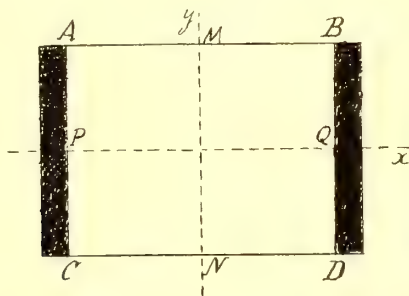



Fig. 2.

di prima, e ruoterebbero solo le linee equipotenziali: il che più non sarebbe impedito dai nuovi elettrodi, i quali consentono che, lungo il contorno della lamina con cui stanno in contatto, il potenziale assuma valori diversi.

Si può anche dire che quando gli elettrodi sono di resistenza nulla, e obbligano parte del contorno a conservare il primitivo potenziale, essi dànno origine a correnti locali con la lamina, cosicchè le linee di corrente totale non son più le primitive. Questo si verificherà anche nel caso semplice di un rettangolo, per esempio di bismuto, provvisto di elettrodi AC BD di rame (fig. 2). Le linee di corrente sotto l'azione del campo non saranno più, come suppone il Drude, parallele all'asse x, cioè quelle esistenti senza campo, poichè le cariche di Hall che si liberano agli orli AB e CD si combineranno in parte attraverso agli elettrodi che mettono gli orli in corto circuito. E perciò la corrente resterà diretta lungo l'asse x solo nell'orlo libero; mentre nell'interno della lamina le linee di corrente saranno deformate. Ciò non avverrebbe se il rettangolo ABCD fosse deposto su elettrodi molto estesi e di altissima resistenza: nel qual caso lungo AC e BD potrebbe crearsi e mantenersi la nuova distribuzione dei potenziali di Hall. Solo allora le linee di corrente resterebbero in tutta la lamina dirette secondo l'asse x,

mentre le linee equipotenziali ruoterebbero di un angolo β rispetto alle antiche.

Tornando al caso di una lamina qualunque, nelle circostanze ora indicate che consentono alle linee di corrente di conservare l'assetto primitivo, sia n una linea equipotenziale a campo zero. La (5), integrata fra gli estremi A a B di una di queste, ci dà

$$v_B - v_A = \frac{\varepsilon}{s^2 + \varepsilon^2} \int_A^B j_t \, dn = \frac{\varepsilon}{s^2 + \varepsilon^2} J \, ,$$

dove J è la corrente totale che traversa la lamina. E perciò fra due punti del contorno o di due linee di flusso qualunque, se essi sono inizialmente allo stesso potenziale, si manifesterà un effetto Hall costante, proporzionale alla corrente totale che fluisce tra le due linee considerate. In questo caso, perciò, il problema che discutiamo sarà completamente risoluto.

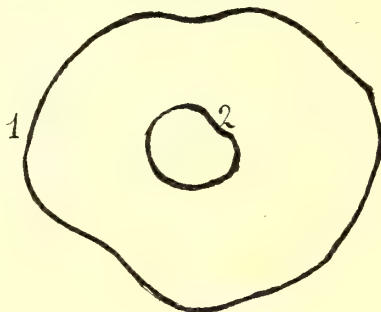



Fig. 3.

4. Possiamo invece considerare un altro caso estremo, facilmente realizzabile: quello di una lamina a connessioni multiple, che abbia sui contorni distinti 1 e 2 due elettrodi a potenziali costanti (fig. 3). Sotto l'azione del campo l'intero contorno conserverà i valori primitivi del potenziale, mentre le linee di corrente potranno deformarsi liberamente, poichè non c'è più una parte del contorno che debba essere, prima e dopo, linea di flusso. Le linee di flusso e quelle di livello faranno, per virtù del campo, un angolo $\frac{\pi}{2} - \beta$; ma, mentre si deformeranno le linee di flusso, resteranno inalterate le equipotenziali, e perciò il potenziale conserverà in tutti i punti il valore di prima. *Mancherà in tale caso l'effetto Hall*; ma la deviazione delle linee di corrente potrà far nascere altri effetti rivelatori dell'azione del campo. Io ho già avuto agio di illustrarne alcuni [1] nel caso di un disco di bismuto che abbia un elettrodo circolare al centro e uno concentrico alla periferia. Le correnti, che sono radiali senza il campo, diventano, per virtù

[1] Corbino, N. Cimento, serie VI, tom. 1, giugno 1911.

di questo, delle spirali logaritmiche, cosicchè il disco si comporta come una lamina magnetica dando origine a quelle singolari azioni elettromagnetiche e meccaniche che potei mettere in evidenza nel lavoro citato.

5. Tolti questi casi estremi, la presenza degli elettrodi arrecherà, nei casi ordinariamente considerati, perturbazioni molto gravi. Così, nel rettangolo della fig. 2 l'esperienza mi ha dimostrato che l'effetto Hall, massimo al centro fra M ed N, declina rapidamente fino a zero, con legge parabolica, avvicinandosi ad AC o a BD. Le correnti che si sovrappongono alla corrente normale hanno un centro di simmetria nel centro O del rettangolo: ma non sono simmetriche rispetto a MN; ne risulta che, lungo MN, esisterà una corrente j_y variabile da punto a punto e perciò la differenza di potenziale tra M ed N verrà diminuita di una quantità proporzionale a $\int_M^N j_y \, dy$ che sarà diversa da zero poichè j_y conserva un segno costante lungo MN e in tutta la lamina; anche fra M ed N avverrà perciò una depressione dell'effetto Hall normale.

Questa causa perturbatrice deve aver necessariamente influito nelle misure finora eseguite dell'effetto Hall. Essa inoltre giustifica il risultato di un'esperienza da me istituita con una lamina rettangolare di bismuto, molto lunga nel senso y e corta nel senso x, che avrebbe dovuto dare, senza l'azione degli elettrodi AC BD, un effetto Hall fra M ed N superiore alla differenza di potenziale ohmica esistente tra P e Q, costituendo così un trasformatore elevatore *statico* di tensioni per correnti continue.

L'esperienza diede invece per risultato una differenza di potenziale fra M ed N sempre minore di quella longitudinale fra P o Q; l'insuccesso va attribuito appunto all'azione degli elettrodi.

Infine le correnti create dalla presenza degli elettrodi, le quali si sovrappongono alla corrente principale determinando la deformazione delle linee di flusso, daranno luogo ad un consumo supplementare di energia per effetto Joule, che si aggiunge al consumo dovuto alla corrente normale. E perciò la resistenza apparente della lamina deve essere aumentata in misura sensibile, sotto l'azione del campo, per la presenza degli elettrodi.

Sono in corso esperienze per constatare l'effetto previsto.

Fisica matematica. — *Sulle correnti elettriche in una lamina metallica sotto l'azione di un campo magnetico.* Nota I del Socio Vito Volterra.

1. Il prof. Corbino ha dimostrato [1] che le leggi della propagazione delle correnti elettriche in una lamina metallica sotto l'azione di un campo magnetico dipendono da un potenziale V, il quale è legato alle componenti j_x e j_y della densità della corrente dalle relazioni

$$(1)\qquad \begin{cases} j_x = -K\left(\dfrac{\partial V}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial V}{\partial y}\right) \\ j_y = -K\left(\dfrac{\partial V}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial V}{\partial x}\right), \end{cases}$$

ove

$$(2)\qquad K = \frac{N_1 e^2 v_1^2}{1 + H^2 e^2 v_1^2} + \frac{N_2 e^2 v_2}{1 + H^2 e^2 v_2^2}$$

$$(3)\qquad \lambda = \operatorname{tg}\beta = \frac{He\left(\dfrac{N_1 v_1^2}{1 + H^2 e^2 v_1^2} - \dfrac{N_2 v_2^2}{1 + H^2 e^2 v_2^2}\right)}{\left(\dfrac{N_1 v_1}{1 + H^2 e^2 v_1^2} + \dfrac{N_2 v_2}{1 + H^2 e^2 v_2^2}\right)},$$

essendo:

H la intensità del campo magnetico normale alla lamina; e il valore assoluto della carica elettrica per gli ioni; v_1 e v_2 le mobilità degli positivi e negativi; N_1 e N_2 il numero degli ioni positivi e negativi per c. c.

Di qui il prof. Corbino deduce che V deve soddisfare alle condizioni seguenti:

1°) in tutta l'area σ occupata dalla lamina,

$$\Delta^2 V = 0\,;$$

2°) nelle porzioni del contorno libere ed isolate

$$\frac{\partial V}{\partial l} = 0\,,$$

[1] Ved. la Nota del prof. Corbino: *Il movimento della elettricità in una lamina metallica sottoposta all'azione di un campo magnetico,* pubblicata in questo stesso fascicolo.

ove l è una direzione che forma, colla normale esterna n, un angolo costante eguale a β;

3°) lungo degli elettrodi di resistenza trascurabile, V è costante.

2. Cominciamo adesso dallo stabilire alcune formule fondamentali che ci serviranno in tutta la seguente trattazione.

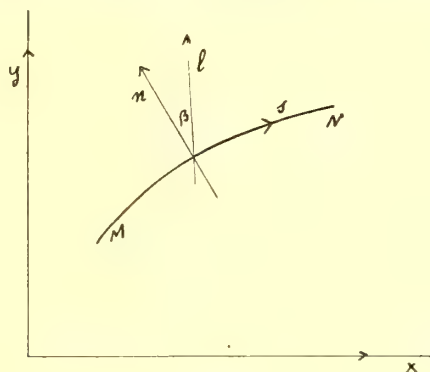



FIG. 1.

Sia s una linea qualunque tracciata nell'interno o al contorno della lamina, n la sua normale diretta, in modo che la coppia di direzioni ortogonali (s, n) sia congruente nel piano colla coppia (x, y).

Dalle formule (1) seguirà che il flusso di elettricità attraverso ds si esprimerà con

$$j_n ds = (j_x \cos nx + j_y \cos ny)\, ds = -\mathrm{K}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} + \lambda \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial s}\right) ds = \frac{-\mathrm{K}}{\cos \beta} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial l}\, ds\,,$$

ove l è una direzione che forma con n l'angolo β. Ed il flusso lungo MN, ossia l'intera linea s, sarà

$$(4) \qquad \int_s j_n ds = -\mathrm{K} \int_s \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} ds - \lambda \mathrm{K}(\mathrm{V}_{\mathrm{N}} - \mathrm{V}_{\mathrm{M}}) = \frac{-\mathrm{K}}{\cos \beta} \int_s \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial l} ds\,.$$

Analogamente avremo l'altra formula

$$(5) \quad \int_s \mathrm{V} j_n\, ds = -\mathrm{K} \int_s \mathrm{V} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} ds - \frac{\lambda \mathrm{K}}{2} (\mathrm{V}_{\mathrm{N}}^2 - \mathrm{V}_{\mathrm{M}}^2) = \frac{-\mathrm{K}}{\cos \beta} \int_s \mathrm{V} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial l} ds\,.$$

Per la validità di queste formule basterà ammettere che, lungo s, V sia finita e le sue derivate prime siano finite o infinite di ordine inferiore ad un numero minore dell'unità [1].

[1] Qui e nel seguito l'ordine di infinito di una funzione in un punto si ha prendendo come infinito fondamentale la inversa della distanza al punto stesso.

Supponiamo che la linea s sia chiusa. Allora, essendo V *monodroma*, perchè ammettiamo che nessuna regione della lamina sia sede di forze elet-

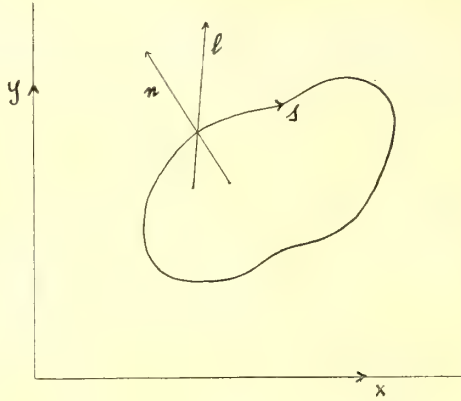



Fig. 2.

tromotrici, le formule (4) e (5) divengono:

$$\int_s j_n\, ds = -\mathrm{K} \int_s \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}\, ds = \frac{-\mathrm{K}}{\cos \beta} \int_s \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial l}\, ds \tag{A}$$

$$\int_s \mathrm{V} j_n\, ds = -\mathrm{K} \int_s \mathrm{V} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}\, ds = \frac{-\mathrm{K}}{\cos \beta} \int_s \mathrm{V} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial l}\, ds\,. \tag{B}$$

3. Ciò premesso, supponiamo che la corrente entri lungo la porzione AB del contorno da un elettrodo di resistenza trascurabile, ed esca dalla porzione CD del contorno la quale costituisca pure un elettrodo di resistenza trascurabile, mentre le porzioni del contorno BC e AD siano libere ed isolate.

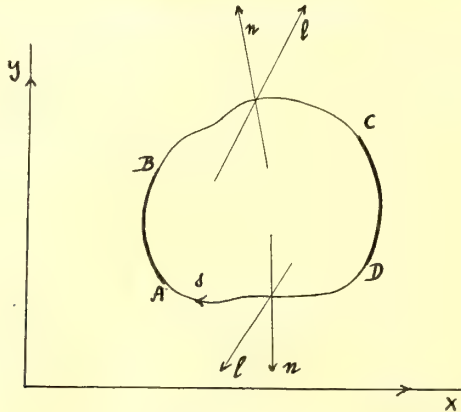



Fig. 3.

Avremo lungo AB e CD, respettivamente,

$$\mathrm{V} = \mathrm{C}_1 \quad , \quad \mathrm{V} = \mathrm{C}_2\,,$$

ove C_1 e C_2 sono costanti; e lungo BC e AD,

$$\frac{\partial V}{\partial l} = 0 .$$

Nell'interno dell'area σ occupata dalla lamina, V sarà regolare ed armonica.

Ora. se chiamiamo s l'intero contorno, e supponiamo soddisfatta la condizione precedente circa l'ordine d'infinito delle derivate di V lungo s, avremo, in virtù della (B),

$$\int_{AB} V j_n \, ds + \int_{CD} V j_n \, ds = - K \int_s V \frac{\partial V}{\partial n} ds ,$$

giacchè, sopra BC e AD, $\frac{\partial V}{\partial l} = j_n \cos \beta$ è nullo. Quindi

$$C_1 \int_{AB} j_n \, ds + C_2 \int_{CD} j_n \, ds = - K \int_s V \frac{\partial V}{\partial n} ds .$$

Chiamando J la intensità totale della corrente che percorre la lamina, sarà

$$J = \int_{CD} j_n \, ds = - \int_{AB} j_n \, ds ,$$

quindi

$$(C_2 - C_1) J = - K \int_s V \frac{\partial V}{\partial n} ds ,$$

e, per un noto teorema sulle funzioni armoniche,

$$(C_1 - C_2) J = K \int_\sigma \Delta V d\sigma .$$

Da questa relazione segue che, se $C_1 = C_2 = 0$, V deve essere nulla in tutti i punti di σ, e, per conseguenza, che a dati valori di C_1 e C_2 non può corrispondere che una unica soluzione per V. Abbiamo dunque il teorema:

Noti i valori costanti del potenziale lungo gli elettrodi AB *e* CD, *la distribuzione delle correnti nella lamina è completamente determinata.*

4. Il precedente teorema si estende facilmente. Sia σ un'area nel cui interno la funzione V armonica è regolare, ed s ne sia il contorno. Come conseguenza delle (B) avremo (se, al contorno, V è finita e le sue derivate sono finite o infinite di ordini inferiori ad un numero minore di 1)

$$\int_s V \frac{\partial V}{\partial l} ds = \cos \beta \int_s V \frac{\partial V}{\partial n} ds = \cos \beta \int_\sigma \Delta V \, d\sigma .$$

Quindi, se in certe parti del contorno V è nulla, e nelle rimanenti è nullo il $\frac{\partial V}{\partial l}$, sarà V nulla entro σ: e perciò, se V è nota in certe parti

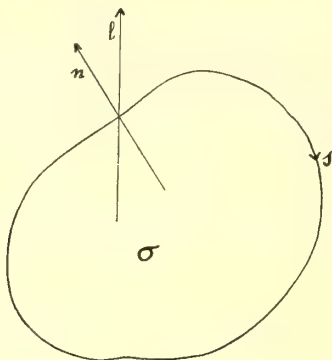



Fig. 4.

del contorno, e nelle rimanenti è noto il $\frac{\partial V}{\partial l}$, V sarà determinata entro σ. Se lungo tutto il contorno è noto solo il $\frac{\partial V}{\partial l}$, V sarà determinata a meno di una costante. La (A) ci dà la condizione a cui deve soddisfare il $\frac{\partial V}{\partial l}$:

$$\text{(A}'\text{)} \qquad \int_s \frac{\partial V}{\partial l}\, ds = 0 \,.$$

5. Supponiamo, ora, che la corrente entri ad esca dalla lamina attraverso due elettrodi puntiformi A e B. Riprendiamo la formula (A), e supponiamo, dapprima, che la linea s sia la linea s_a che circonda il punto A.

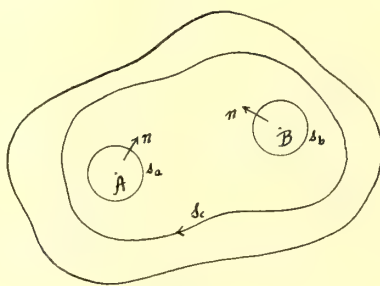



Fig. 5.

Chiamando J l'intensità della corrente, e supponendo n esterna allo spazio racchiuso da s_a, avremo

$$J = \int_{s_a} j_n\, ds_a = -\,K \int_{s_a} \frac{\partial V}{\partial n}\, ds_a \,;$$

mentre, se chiamiamo s_b una linea che circonda il punto B, e n è la normale esterna allo spazio racchiuso da s_b, avremo

$$-J = \int_{s_b} j_n\, ds_a = -K \int_{s_b} \frac{\partial V}{\partial n}\, ds_b .$$

Prendendo invece una linea s_c che abbia nell'interno A e B o escluda ambedue questi punti, avremo

$$0 = \int_{s_c} j_n\, ds_c = -K \int_{s_c} \frac{\partial V}{\partial n}\, ds_c .$$

Dunque, nella suddetta ipotesi, noi dovremo porre

$$V = \frac{J}{2\pi K}(\log r_B - \log r_A) + W , \tag{6}$$

essendo W armonica regolare, e r_A ed r_B essendo le distanze del punto generico x, y da A e da B, e dovremo porre al contorno dell'area σ la condizione

$$\frac{\partial V}{\partial l} = 0 , \tag{7}$$

ossia

$$\frac{\partial W}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l}\left[\frac{J}{2\pi K}(\log r_A - \log r_B)\right] . \tag{7'}$$

Ne segue che il problema della distribuzione delle correnti è ricondotto alla determinazione delle funzione armonica regolare W, di cui al contorno si conoscono i valori di $\frac{\partial W}{\partial l}$ dati dalla (7'). È facile il riconoscere che la condizione (A') del § 4 è soddisfatta. W resulterà determinata a meno di una costante arbitraria additiva, la quale evidentemente non ha influenza sulla legge della distribuzione delle correnti.

6. Supponiamo invece che la corrente entri da un elettrodo puntiforme A ed esca da un elettrodo BC posto al contorno e di resistenza trascurabile.

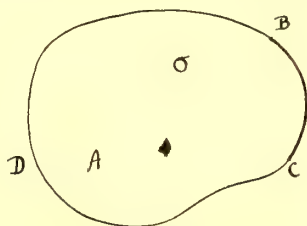



Fig. 6.

Sia J la intensità della corrente. In tale ipotesi si riconosce facilmente, con un procedimento analogo a quello tenuto nel paragrafo precedente, che si deve porre

$$V = -\frac{J}{2\pi K}\log r_A + W ,$$

ove W è una funzione armonica regolare nell'interno di σ. Lungo la porzione libera ed isolata BCD del contorno, si dovrà avere

$$\frac{\partial W}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l}\left[\frac{J}{2\pi K}\log r_A\right],$$

e, lungo BC,

$$W = C + \frac{J}{2\pi K}\log r_A,$$

ove C è il valore costante che deve assumere V lungo l'elettrodo BC. Quindi, se la funzione W è finita, e le sue derivate lungo s sono finite o infinite di ordine inferiore ad un numero minore di 1, essa sarà determinata entro σ (cfr. § 4), e perciò sarà determinata la legge della distribuzione delle correnti.

7. Riterremo, come si suol fare ordinariamente, che, se da un elettrodo esce una corrente di intensità J, ciò sia equivalente a dire che vi entra una corrente di intensità —J. Se dunque abbiamo un elettrodo puntiforme da cui entra la corrente I (qualunque sia il suo segno), nell'intorno di esso il potenziale sarà

$$V = -\frac{I}{2\pi K}\log r + W,$$

ove r è la distanza del punto generico x, y dall'elettrodo e W è una funzione armonica regolare nell'intorno del punto. La parte del potenziale

$$-\frac{I}{2\pi K}\log r = \frac{1}{2\pi K}\log\frac{1}{r}$$

si dirà il *potenziale dell'elettrodo* e sarà il potenziale logaritmico di un punto di massa $\frac{I}{2\pi K}$.

8. Stabiliamo adesso alcune altre formule fondamentali, da aggiungersi a quelle trovate nel § 2.

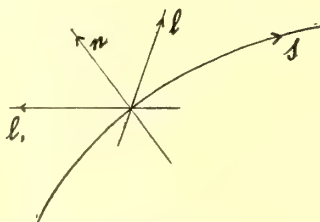



Fig. 7.

Immaginiamo di invertire il senso del campo magnetico, ossia cambiamo H in —H. Per distinguere i due casi, diremo che, nel primo, il campo magnetico è *diretto*, e nel secondo il campo magnetico è *invertito.*

Dalle formule (2) e (3) segue che K rimane inalterato, mentre λ cambia segno, ossia cambia segno l'angolo β, e, per conseguenza, la direzione l si cangia nella direzione simmetrica rispetto alla normale n, che chiameremo l_1. Se diamo un indice 1 a tutti gli elementi corrispondenti a questo caso, dovremo scrivere le formule

$$j_{1,x} = -\mathrm{K}\left(\frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial y}\right)$$

$$j_{1,y} = -\mathrm{K}\left(\frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial y} - \lambda \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial x}\right),$$

ed avremo

$$\frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial l_1} = 0$$

lungo le porzioni del contorno libere ed isolate.

Sia ora una linea qualunque $s = \mathrm{MN}$ interna o al contorno di σ, come abbiamo considerato nel § 2. Sarà

$$\mathrm{V}_1 j_n - \mathrm{V} j_{1n} = \mathrm{V}_1(j_x \cos nx + j_y \cos ny) - \mathrm{V}(j_{1x} \cos nx + j_{1y} \cos ny) =$$

$$= -\mathrm{K}\left[\mathrm{V}_1\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} + \lambda \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial s}\right) - \mathrm{V}\left(\frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial n} - \lambda \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial s}\right)\right] =$$

$$= -\mathrm{K}\left(\mathrm{V}_1 \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} - \mathrm{V} \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial n}\right) - \lambda \mathrm{K} \frac{d(\mathrm{V}\mathrm{V}_1)}{ds} = \frac{-\mathrm{K}}{\cos\beta}\left(\mathrm{V}_1 \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial l} - \mathrm{V} \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial l_1}\right)$$

e, integrando a tutta la linea s,

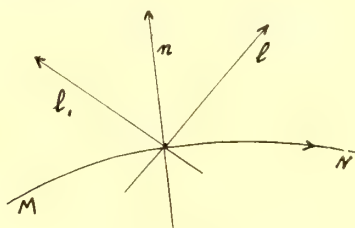



Fig. 8.

$$\int_s (\mathrm{V}_1 j_n - \mathrm{V} j_{1n})\, ds = -\mathrm{K}\int_s \left(\mathrm{V}_1 \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} - \mathrm{V} \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial n}\right) ds - \lambda \mathrm{K}[(\mathrm{V}\mathrm{V}_1)_\mathrm{N} - (\mathrm{V}\mathrm{V}_1)_\mathrm{M}] =$$

$$= \frac{-\mathrm{K}}{\cos\beta}\int_s \left(\mathrm{V}_1 \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial l} - \mathrm{V} \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial l_1}\right) ds .$$

Se la linea s sarà chiusa, resulterà

$$\text{(C)} \qquad \int_s (V_1 j_n - V j_{1n})\, ds = -K \int_s \left(V_1 \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial V_1}{\partial n} \right) ds =$$
$$= \frac{-K}{\cos\beta} \int_s \left(V_1 \frac{\partial V}{\partial l} - V \frac{\partial V_1}{\partial l_1} \right) ds .$$

È questa appunto una delle formule che conveniva stabilire.

Essa è suscettibile di estensione. Infatti, denotiamo con S non già una sola linea chiusa ma un insieme di linee chiuse le quali formino il contorno di un campo σ' interno a σ. Siccome per ciascuna linea chiusa vale la formula precedente, così essa varrà anche sostituendo ad s l'insieme S; e se, entro l'area σ', V e V_1 saranno regolari, si avrà prendendo n esterna al campo σ'

$$\text{(D)} \qquad \int_S (V_1 j_n - V j_{1n})\, dS = \frac{-K}{\cos\beta} \int_S \left(V_1 \frac{\partial V}{\partial l} - V \frac{\partial V_1}{\partial l} \right) dS = 0,$$

giacchè, per il lemma di Green, si ha

$$\int_S \left(V_1 \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial V_1}{\partial n} \right) dS = 0 .$$

Supponiamo che S sia formato dall'insieme di linee chiuse S′ e dall'insieme di linee chiuse S″; allora la formula (D) si potrà ancora scrivere

$$\text{(D')} \qquad \frac{1}{\cos\beta} \int_{S'} \left(V_1 \frac{\partial V}{\partial l} - V \frac{\partial V_1}{\partial l_1} \right) dS' + \int_{S''} \left(V_1 \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial V_1}{\partial n} \right) dS'' = 0 .$$

Le formule (D) e (D′), che abbiamo trovato, costituiscono delle estensioni del lemma di Green.

9. Passiamo ad alcune applicazioni delle formule precedenti.

Prendiamo V data dalla (6) colla condizione (7), e supponiamo di prendere per S′ il contorno s di σ, e per S″ due cerchi s_a e s_b aventi i

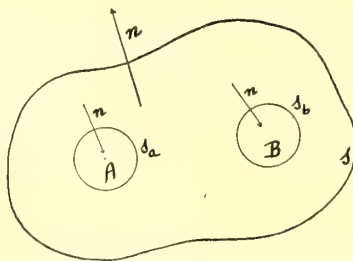



Fig. 9.

centri in A e B. Supponiamo V_1 regolare entro σ. L'area σ'' si ottiene togliendo da σ le aree incluse entro s_a e s_b; quindi sarà limitata da s,

s_a e s_b. In σ'', V e V_1 sono regolari: onde, applicando la (D'), tenendo conto che, su s, $\frac{\partial V}{\partial l} = 0$, resulterà

$$\frac{-1}{\cos\beta}\int_s V \frac{\partial V_1}{\partial l_1} ds + \int_{s_a}\left(V_1 \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial V_1}{\partial n}\right) ds_a + \\ + \int_{s_b}\left(V_1 \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial V_1}{\partial n}\right) ds_b = 0 .$$

Ma, facendo impiccolire indefinitamente i cerchi s_a e s_b, si vede che

$$\lim \int_{s_a}\left(V_1 \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial V_1}{\partial n}\right) ds_a = \frac{J}{K} V_{1,A}$$

$$\lim \int_{s_b}\left(V_1 \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial V_1}{\partial n}\right) ds_b = -\frac{J}{K} V_{1,B} ,$$

ove $V_{1,A}$ e $V_{1,B}$ denotano i valori di V_1 nei punti A e B; quindi

$$V_{1,A} - V_{1,B} = \frac{K}{J\cos\beta}\int_s V \frac{\partial V_1}{\partial l_1} ds .$$

Da questa formula si deduce la proposizione seguente:

Se si conosce la distribuzione delle correnti in una lamina, quando la corrente entra da A *ed esce da* B, *ed il campo magnetico è diretto, si potrà determinare la differenza dei valori di una funzione armonica regolare nei punti* A *e* B *allorchè si conosce al contorno la sua derivata nella direzione* l_1.

Evidentemente sussiste anche l'altra proposizione:

Se si conosce la distribuzione delle correnti in una lamina, quando la corrente entra da A *ed esce da* B, *ed il campo magnetico è invertito, si potrà determinare la differenza dei valori di una funzione armonica regolare nei punti* A *e* B *allorchè si conosce al contorno la sua derivata nella direzione* l.

In altri termini, il potenziale V, corrispondente ad un *campo magnetico diretto* e ai due elettrodi puntiformi A e B, è una *funzione analoga a quella di Green*, per il caso in cui si conoscono al contorno *i valori della derivata di una funzione armonica regolare nella direzione* l_1; mentre il potenziale corrispondente ad un *campo magnetico invertito* e ai due elettrodi puntiformi A e B, è una *funzione analoga a quella di Green*, per il caso in cui si conoscono al contorno i *valori delle derivate di una funzione armonica regolare nella direzione* l.

10. Ritorniamo al caso del § 6 e supponiamo che sia $C = 0$. Sia V_1 una funzione armonica regolare entro σ. Prendiamo per S' il contorno s

della lamina e per S'' una circonferenza s_a avente il centro in A. Applicando la formula (D') resulterà

$$\frac{1}{\cos\beta}\int_{\mathrm{BDC}} V\frac{\partial V_1}{\partial l_1}ds-\frac{1}{\cos\beta}\int_{\mathrm{BC}} V_1\frac{\partial V}{\partial l}ds-\int_{s_a}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_a=0$$

e facendo impiccolire indefinitamente il cerchio s_a

$$V_{1\mathrm{A}}=\frac{K}{J\cos\beta}\int_{\mathrm{BDC}} V\frac{\partial V_1}{\partial l_1}ds-\frac{K}{J\cos\beta}\int_{\mathrm{BC}} V_1\frac{\partial V}{\partial l}ds.$$

Dunque, *se si conosce la distribuzione delle correnti quando la corrente entra da* A *e esce dall'elettrodo* BC *ed il campo magnetico è diretto si potrà determinare il valore in* A *di una funzione armonica regolare allorchè se ne conosce il valore lungo* BC *e si conosce lungo* BDC *il valore della derivata nella direzione* l_1.

L'analoga proposizione si ha quando il campo magnetico è invertito.

11. Prendiamo ora V data dalle (6) colla condizione (7), e V dato da

$$V_1=\frac{J_1}{2\pi K}(\log r_{\mathrm{B}_1}-\log r_{\mathrm{A}_1})+W_1,$$

ove W_1 è una funzione armonica regolare entro σ, A_1 e B_1 sono due nuovi punti scelti in questo campo, e si ha

$$\frac{\partial V_1}{\partial l_1}=0$$

lungo il contorno s di σ. Supponiamo che S' sia il contorno s, e S'' l'in-

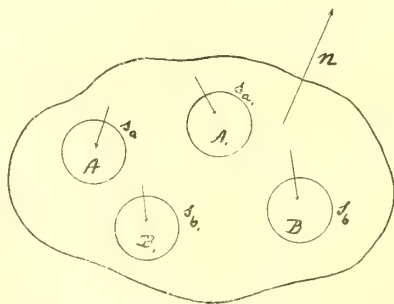



Fig. 10.

sieme dei quattro cerchi s_a, s_b, s_{a_1}, s_{b_1} aventi respettivamente i centri in A, B, A_1 e B_1.

L'area σ'' si otterrà togliendo da σ le aree racchiuse entro i quattro cerchi. In σ', V e V_1 sono regolari; onde, applicando la (D') e tenendo conto che, su s, $\frac{\partial V}{\partial l} = \frac{\partial V_1}{\partial l_1} = 0$, resulterà

$$\int_{s_a}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_a + \int_{s_b}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_b$$

$$+\int_{s_{a_1}}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_{a_1} + \int_{s_{b_1}}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_{b_1} = 0\,.$$

Ora, facendo impiccolire indefinitamente i quattro cerchi, si ha facilmente

$$\lim\int_{s_a}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_a = +\frac{J}{K}V_{1A}$$

$$\lim\int_{s_b}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_b = -\frac{J}{K}V_{1B}$$

$$\lim\int_{s_{a_1}}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_{a_1} = -\frac{J_1}{K}V_{A_1}$$

$$\lim\int_{s_{b_1}}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_{b_2} = +\frac{J_1}{K}V_{B_1}\,,$$

quindi

$$J(V_{1B} - V_{1A}) = J_1(V_{B_1} - V_{A_1})\,;$$

e, se le intensità J e J_1 delle correnti sono eguali,

$$V_{1B} - V_{1A} = V_{B_1} - V_{A_1}\,.$$

Da cui segue la seguente legge di reciprocità:

Se in una lamina conduttrice si fa passare una corrente di intensità J *sotto l'azione di un certo campo magnetico, e in due punti* A_1 *e* B_1 *si ha una differenza di potenziale, otterremo la stessa differenza fra i potenziali dei punti* A *e* B *quando si faccia entrare da* A_1 *e escire da* B_1 *la stessa corrente d'intensità* J *e si inverta il campo magnetico.*

Ho dato nel 1882 una legge di reciprocità che è un caso particolare della precedente, giacchè corrisponde al caso di correnti elettriche senza l'azione del campo magnetico. Debbo osservare, peraltro, che allora non era posta la condizione di omogeneità pel conduttore [1].

[1] *Sopra una legge di reciprocità nella distribuzione delle temperature e delle correnti galvaniche costanti in un corpo qualunque.* Nuovo Cimento, ser. III, vol. XI, anno 1882.

12. Supponiamo che al contorno della lamina esistano gli elettrodi A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, ... di resistenza trascurabile e le altre parti siano libere ed isolate. Supponiamo inoltre che non esista alcun elettrodo interno. Siano $J^{(1)}$, $J^{(2)}$, $J^{(3)}$, $J^{(4)}$, ... le intensità delle correnti che entrano da questi elettrodi, $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, $C^{(3)}$, $C^{(4)}$, ... i valori del potenziale V sopra di

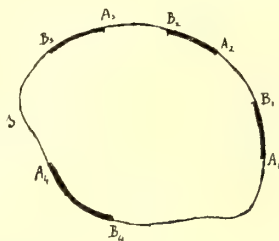



Fig. 11.

essi quando il campo magnetico è diretto. Siano poi $J_1^{(1)}$, $J_1^{(2)}$, $J_1^{(3)}$, $J_1^{(4)}$, ...; $C_1^{(1)}$, $C_1^{(2)}$, $C_1^{(3)}$, $C_1^{(4)}$, ...; V_1, le corrispondenti quantità quando il campo magnetico è invertito. Avremo evidentemente

$$\Sigma_h J^{(h)} = \Sigma_h J_1^{(h)} = 0$$

come del resto resulta dalla formula (A).

Applichiamo ora la formula (D) prendendo per S il contorno s della lamina. Avremo

$$0 = \Sigma_h \int_{A_h B_h} (V_1 j_n - V j_{1,n})\, ds = \Sigma_h (C^{(h)} J_1^{(h)} - C_1^{(h)} J^{(h)})$$

e quindi

$$\Sigma_h C_1^{(h)} J^{(h)} = \Sigma_h C^{(h)} J_1^{(h)} .$$

Se le $J^{(h)}$ sono tutte nulle escluse $J^{(1)}$ e $J^{(2)}$, e le $J_1^{(h)}$ sono pure tutte nulle escluse $J_1^{(3)}$ e $J_1^{(4)}$, avremo

$$J^{(1)} = -J^{(2)} = I$$

$$J_1^{(3)} = -J^{(4)} = I_1$$

onde

$$(C_1^{(1)} - C_1^{(2)})\, I = (C^{(3)} - C^{(4)})\, I_1$$

e se $I = I_1$,

$$C_1^{(1)} - C_1^{(2)} = C^{(3)} - C^{(4)} .$$

Queste ultime formule costituiscono dei nuovi teoremi di reciprocità di facile interpretazione (cfr. coi resultati del § 28).

13. Si può immaginare finalmente che nel caso del campo magnetico diretto, oltre gli elettrodi al contorno A_1B_1, A_2B_2, ... si abbiano degli elet-

trodi puntiformi interni $M^{(1)}, M^{(2)}, M^{(3)}, \ldots$ da cui entrino delle correnti di intensità $I^{(1)}, I^{(2)}, I^{(3)}, \ldots$ e nel caso del campo magnetico invertito, in luogo dei precedenti, altri elettrodi puntiformi interni $M_1^{(1)}, M_1^{(2)}, M_1^{(3)}, \ldots$ da cui entrino delle correnti di intensità $I_1^{(1)}, I_1^{(2)}, I_1^{(3)}, \ldots$ Sarà allora

$$\Sigma_h J^{(h)} + \Sigma_k I^{(k)} = \Sigma_h J_1^{(h)} + \Sigma_{k_1} I^{(k_1)} = 0$$

e

$$\Sigma_h C_1^{(h)} J^{(h)} + \Sigma_k V_1^{(k)} I^{(k)} = \Sigma_h C^{(h)} J_1^{(h)} + \Sigma_{k_1} V^{(k_1)} I_1^{(k_1)},$$

ove $V_1^{(k)}$ denotano i valori del potenziale V_1 nei punti $M^{(k)}$ e $V^{(k_1)}$ i valori del potenziale V nei punti $M_1^{(k_1)}$.

14. Riprendiamo le formule (1), e denotiamo con V' la funzione coniugata delle V [1], tale cioè che

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V'}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial V'}{\partial x};$$

allora le (1) potranno scriversi

$$(1') \qquad \begin{cases} j_x = -K \dfrac{\partial(V + \lambda V')}{\partial x} \\ j_y = -K \dfrac{\partial(V + \lambda V')}{\partial y} \end{cases},$$

onde, posto $V + \lambda V' = U$, avremo

$$(1'') \qquad j_x = -K \frac{\partial U}{\partial x}, \quad j_y = -K \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Lungo le porzioni del contorno libere ed isolate sarà

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0;$$

e in tutta l'area interna sarà $\Delta^2 U = 0$.

Dunque *la distribuzione delle correnti nella lamina avviene come se non vi fosse il campo magnetico, ma il potenziale fosse* U *anzichè* V, *e la conducibilità si conservasse eguale a* K. Siccome K è costante, così le linee di corrente sono indipendenti da K.

La funzione U si chiamerà la *funzione fondamentale della distribuzione delle correnti nella lamina*, o, più semplicemente, la *funzione fondamentale*. Essa non coincide col *potenziale*, altro che se il campo magnetico è nullo. Allorchè si conosce il potenziale V, per ottenere U basta la operazione

$$(E) \qquad U = V + \lambda V' = \frac{V \cos\beta + V' \operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}.$$

[1] Essa sarà determinata a meno di una costante arbitraria additiva.

Risolviamo adesso il problema di *calcolare il potenziale quando si conosce la funzione fondamentale.*

Faremo, come precedentemente, uso dell'aggiunta di un apice per denotare la funzione coniugata di una funzione armonica data. Quindi

$$U' = V' - \lambda V \; ; \tag{8}$$

onde, tenendo conto della (E), resulterà

$$V = \frac{U - \lambda U'}{1 + \lambda^2} = (U \cos\beta - U' \operatorname{sen}\beta) \cos\beta \,. \tag{E'}$$

Il problema propostoci è quindi risoluto.

Se poniamo

$$x + iy = z \quad , \quad U + iU' = f(z) \quad , \quad V + iV' = \varphi(z) \,,$$

avremo

$$f(z) = \frac{e^{-i\beta}}{\cos\beta} \, \varphi(z) \,. \tag{E''}$$

Fisica. — *Arco e scintilla. (Rilievi sopra una Nota del prof. A. Occhialini).* Nota di M. La Rosa, presentata del Corrispondente D. Macaluso.

Varie circostanze mi hanno impedito, finora, di mettere insieme alcuni rilievi sulla Nota *Scintilla ed arco*, del prof. Occhialini [1], nella quale sono chiamato in causa.

E per prima cosa faccio questione, dirò così, di esattezza storica; perchè non credo che il mio nome venga ben a posto citato, in una discussione intorno alla *vera* distinzione fra arco e scintilla, non essendomi fino a questo momento occupato di un tale argomento.

Nel lavoro, di cui il prof. Occhialini cita un passo [2], ho sostenuto semplicemente questa tesi: « che *la natura dello spettro emesso da un vapore o gas attraversato dalla scarica* (e forse, più generalmente, eccitato in un modo qualsiasi) *debba dipendere essenzialmente dalla potenza spesa nell'unità di massa eccitata, e che limitata e secondaria debba essere l'influenza del modo con cui tale potenza viene introdotta* » [3].

Ho fatto, dunque, soltanto questione di struttura spettrale, sostenendo il concetto che questa *non dipenda dalle modalità della scarica, dalla peculiarità del fenomeno che produce* l'emissione, e, più generalmente, dai

[1] Nuovo Cimento, vol. VII, ser. VI, pag. 365 (1914).

[2] Mem Lincei, vol. VII, pag. 451, giugno 1908.

[3] loc. cit., pag. 466, capoverso 3°.

mezzi — elettrici o no — impiegati per l'eccitazione luminosa; ma che dipenda soltanto dal valore della potenza specifica, il quale dovrebbe riguardarsi come *l'unico paramento che determina ciascuna struttura spettrale.*

Tutta la discussione, che forma la seconda parte del mio lavoro, è informata a questo concetto; e credo che, chiunque voglia prendersi la pena di rileggerla, anche senza soverchia attenzione, non potrà non persuadersene.

Non discuto quindi di più su questo punto; nè per spiegare quale senso abbia il passo citato dall'Occhialini, quando sia letto nel contesto del discorso di cui fa parte; nè per rilevare la contraddizione completa che esiste tra questo concetto fondamentale del mio lavoro, ed il proposito che mi si vuole attribuire: quello di ostinarmi a chiamare con uno, piuttosto che con un altro nome, la forma di scarica su cui avevo sperimentato.

Non è dunque la divergenza nei nomi, che mi preoccupa, e che mi spinge a scrivere queste brevi osservazioni; tale questione, nè mi tocca, nè mi tenta.

Alcune divergenze, di natura più profonda, esistono tra fatti riferiti dall'Occhialini, e fatti da me, e da molti altri, osservati; sulle quali sento il bisogno di fermarmi, perchè esse potrebbero screditare la mia opinione.

E però, mio malgrado, debbo entrare nell'esame del lavoro in parola.

Il concetto, su cui l'Occhialini da vario tempo insiste, è questo: ogni forma di scarica s'inizia con una fase di preparazione, che è una *vera scintilla*; e passa, dopo un certo intervallo di tempo, ad una forma più stabile, che è un *arco*, oppure un *bagliore* (pag. 367, 35° rigo; e pag. 368).

Nulla avrei da obiettare ad un tale modo di esprimersi, se l'A. volesse limitarsi ad una semplice questione di nomenclatura. L'esistenza di una fase preparatoria in ogni forma di scarica è stata accertata con numerose esperienze, fra le quali sono degne di ricordo quelle di Battelli e Magri per la scintilla, quella di Stark e di Simon per l'arco; e non saprei non elogiare il proposito di distinguere, con convenienti nomi, ciascuna delle fasi.

Ma il disaccordo nasce, quando si vogliono attribuire, a quella fase a cui si riserba il nome di scintilla (e cioè alla preparatoria), tutti i caratteri che appartengono al fenomeno, che finora è stato chiamato *scintilla*; e più precisamente si manifesta come inevitabile, quando si vuole sostenere, che a detta fase preparatoria corrisponde sempre quel tipo di spettro, che finora è stato distinto col nome di « spettro di scintilla ».

Non mi fermo a discutere le esperienze sulle « scintille troncate », di cui l'A. fa tanto uso per la sua dimostrazione; solo osservo che esse avrebbero bisogno di un'interpretazione più ponderata, in cui fosse tenuto il debito conto dell'alterazione inevitabile della resistenza complessiva del circuito elettrico, dovuta, alla sostituzione dell'elettrodo liquido a quello metallico; sostituzione, che, facendo crescere lo smorzamento, può dar luogo a tutte,

o a parte delle modificazioni che sono state attribuite alla presenza dell'elettrodo *non arroventabile* [1].

Debbo però fare un rilievo intorno alla interpretazione dei risultati dal punto di vista spettrale, in relazione alle idee propugnate dall'A.

Stando a queste idee, i due spettri ottenuti, lasciando inalterate le costanti del circuito e sostituendo l'elettrodo liquido a quello metallico dovrebbero semplicemente differire per gli elementi spettrali caratteristici della seconda fase della scarica, cioè di quella che si identifica con un arco, e che viene soppressa dalla sostituzione dell'elettrodo; eppure la semplice ispezione degli spettrogrammi riprodotti nel lavoro dell'A. mostra tutto il contrario: nello spettro emesso dalla scintilla troncata, mancano tutte le righe e le bande del gas, e tutte le righe di alta eccitazione del vapore metallico, ossia proprio gli elementi spettrali emessi dalla pilota, e dalle primissime oscillazioni (si confronti in proposito la bella Memoria di Battelli e Magri) [2].

L'A. stesso riconosce che lo spettro emesso dalla scintilla troncata si riduce a quello d'arco, o anche a quello di fiamma.

Egli stesso dunque ci offre un altro esempio, in cui l'aeriforme eccitato dalla fase iniziale della scarica — quella fase a cui deve essere riserbato il nome di scintilla, e che deve possedere tutti i caratteri distintivi della scintilla, *la struttura spettrale compresa* (secondo le affermazioni di lui, pag. 376, 24° rigo) — emette invece uno spettro di arco, o di fiamma.

Ma più importante è, per me, quanto l'A. scrive intorno allo spettro della fase iniziale dell'arco (§ 6, pag. 373), poichè i fatti, ivi riferiti, vengono direttamente in contraddizione con quelli da me osservati.

L'A. afferma che l'arco prodotto fra un elettrodo freddo (positivo) e l'elettrodo negativo di un arco ausiliario, reso intermittente mercè l'impiego di un campo magnetico, convenientemente orientato, dà sempre uno spettro di scintilla, *senza l'impiego di condensatori.*

Un tale risultato potrebbe far credere che la struttura spettrale non è vincolata all'impiego di una grande potenza, ma — conformemente alle vedute dell'A. — al tipo di scarica, al suo carattere transitorio.

Quest'affermazione, da parte dell'Occhialini, non è nuova. Già un'altra volta egli riferì che l'arco fra carboni, nella fase iniziale, emette uno spettro di righe.

Dubitai, allora, che si facesse confusione fra questo spettro di righe, e lo spettro di scintilla del carbonio, costituito da righe di alta eccitazione.

Al mio dubbio dava fondamento appunto la tendenza, già manifestata dall'Occhialini, di identificare questa fase iniziale dell'arco, con una scintilla

(1) Non è possibile dalla Nota Occhialini farsi un'idea dell'influenza che tale sostituzione avrebbe potuto produrre, perchè l'A. ha trascurato di dare qualsiasi indicazione sulla grandezza degli elementi elettrici e sulle dimensioni del vaso.

(2) Mem. Lincei, vol. VII, fasc. IX (1909).

vera e propria; e, per conseguenza, a sostituire quest' intespretazione a quella, da me già sviluppata, intorno ai fenomeni di trasformazione spettrale, che avevo studiati.

Colsi perciò l'occasione di un successivo lavoro [1], per mettere nei giusti termini i fatti. Questo spettro di righe, dall'A. osservato, è quello delle righe di *fiamma* e di *arco* dovute alle impurezze metalliche, contenute nei carboni. Esso si osserva identicamente nelle esperienze da me fatte, sopra un bastoncino di carbone arroventato dalla corrente elettrica, tutte le volte che la quantità di vapore di carbonio prodotta è molto piccola; e si osserva ancora — come sanno tutti coloro che si sono occupati di spettroscopia dell'arco fra carboni — in un arco comune, negli istanti in cui esso diviene instabile, e però cigola. Di questi fatti diedi allora una spiegazione — li ascrissi alla mancata formazione dei carburi metallici, per la povertà di vapore di carbonio — la quale è stata accettata e confermata [2].

Però, di fronte alla nuova affermazione dell'A., non mi sono acquietato nel facile suggerimento che l'equivoco non fosse ancora chiarito; ed ho voluto ripetere le esperienze riferite, con quella fedeltà che le scarse indicazioni dell'A. mi hanno consentito.

Ho prodotto un arco fra carboni [3], alimentato da una corrente di 6 amp. circa, mediante i poli —150 e 0 Volta della nostra rete urbana, attraverso ad un reostato a lampade; ho collegato un terzo elettrodo di carbone, disposto normalmente all'asse dei primi due col polo +150 della stessa rete, attraverso ad un altro reostato che permetteva di far variare la resistenza da 40 a 250 ohms circa.

Ho attaccato in serie col primo arco un'elettro-magnete, a ferro di cavallo, e l'ho disposto in modo da avere il campo — nella regione in cui gli elettrodi erano affacciati — nel senso indicato dall'A., cioè secondo l'asse del primo arco; con ciò ho introdotto nel circuito principale l'autoinduzione consigliata. Ho ottenuto così la descritta successione di scariche, la quale, a seconda della resistenza in serie col terzo elettrodo, genera o un crepitìo paragonabile a quello di una macchina elettrica in funzione, o un suono quasi musicale.

Per osservare bene lo spettro, ho proiettato le due scariche sopra la fenditura di uno spettroscopio Hilgher, in modo da avere contemporaneamente sott'occhio, nella regione inferiore del campo di osservazione, lo spettro dell'arco ausiliario, e nella superiore lo spettro della scarica intermittente. Avverto che, mentre l'arco si proiettava col suo asse in direzione normale

[1] Nuovo Cimento, vol. XX, pag. 352 (1910).

[2] Cfr. Kayser, Handb. d. Spektr., Bd. VI, pag. 96, an. 1912 (Hirzel).

[3] Poichè l'A. non indica esplicitamente la sostanza degli elettrodi, mi credo autorizzato a ritenerli di carbone.

alla lunghezza della fenditura, l'altra scarica si proiettava con l'asse nella direzione di questa.

Osservazioni prolungate, e ripetute con diversi valori dell'intensità, mi hanno mostrato che questa scarica, *costituita dalla successione di fasi iniziali dell'arco, ha la identica struttura spettrale dell'arco comune*, salvo la ripartizione delle intensità: presenta, cioè, i medesimi gruppi di bande, a cui si uniscono le medesime righe di impurezze metalliche. Tracce delle righe di scintilla del carbonio non sono mai presenti; e si badi che alcune di esse, come la 4267, hanno tali caratteri e sono di solito così intense, che, se presenti, non possono sfuggire, o venire confuse con altre.

Negli istanti in cui la scarica ha rapidi sbalzi di tensione e di intensità, si osserva, come dice l'A., uno spettro di righe brillantissimo; ma esso è quello ben noto, di cui avanti ho discorso.

Questo spettro — insisto — non ha nulla da vedere con lo spettro *di alta eccitazione del carbonio, emesso dalla scintilla condensata*, o dall'arco musicale, che studiai nel lavoro più volte ricordato.

Si chiami arco o scintilla la forma di scarica in parola, a me poco importa; è certo, però, che il suo spettro è quello dell'arco! Il nuovo fatto è ancora qui conforme agli antichi, e contraddice nettamente alla seconda parte della proposizione enunciata dall'A.

Della prima parte — la quale afferma che la seconda fase di una scintilla è un arco — non ho ragione di occuparmi. Osservo, però, che non solo le esperienze su cui l'A. si appoggia non hanno grande valore, per quanto ho già detto; ma che, *riguardando come fasi distinte la pilota e la scarica oscillatoria nel vapore* — e ciò secondo il criterio comune —, l'affermazione in parola è contraddetta dalle esperienze di Hemsalech e da quelle di Battelli e Magri, che ho avanti ricordate.

Infatti esse dimostrano che *lo spettro di alta eccitazione* (cioè di scintilla) *del vapore, viene emesso anche nelle prime oscillazioni della seconda fase.*

Ogni altro criterio di distinzione mi sembrerebbe incerto ed artificioso. Che l'aureola di vapore — la quale raggiunge il suo massimo sviluppo nelle ultime oscillazioni — emetta uno spettro di arco, è un fatto oramai troppo vecchio; riferito da Hemsalech, e consacrato nella spettroscopia della scarica.

Quanto sono venuto dicendo fin qui, non pregiudica punto il mio modo di vedere, nei riguardi della trasformazione dei fenomeni della scarica elettrica, dall'uno ad altro tipo. La opinione che il prof. Occhialini mi attribuisce, non si concilia, a me sembra, così col punto di vista catastrofico, come con l'evoluzionista. Se mai, egli avrebbe potuto tacciarmi di cocciuto conservatorismo, se avessi voluto ostinarmi a mantenere il nome di arco ad un fenomeno, che più non ne possiede tutte le proprietà (in particolare lo spettro). Ma questo non è il caso.

Nondimeno, non voglio sfuggire l'occasione di confermare il pensiero, che in altra occasione manifestai, intorno alla trasformazione elettrica, che necessariamente si accoppia con la trasformazione spettrale [1].

In proposito credo che allo stato attuale delle nostre conoscenze si possa sostenere la veduta, che il prof. Corbino ha chiamato, con parola felice, evoluzionista.

Ritengo appunto che, nei fenomeni di scarica comunemente studiati, ci s'incontri di frequente con una sovrapposizione di quelle forme, che vengono adottate come tipiche. Queste forme tipiche, che non sono puri schemi ideali, ma bensì processi reali, si ottengono in condizioni bene definite. Alterando le quali, la scarica, più non è soltanto arco, o bagliore, o scintilla, ma partecipa dei caratteri di due tipi almeno. La continuità della trasformazione spettrale, a cui si accompagna una successione, pure graduale, di mutamenti negli elementi elettrici, giustifica, secondo me, questo modo di vedere.

Il quale, per altro, non implica affatto la negazione che arco e bagliore, per es., siano due processi, che decorrono con caratteri interamente distinti, se presi ciascuno nelle condizioni tipiche; poichè esso afferma solo la possibilità di passare dall'uno all'altro di questi processi, con una successione di mutamenti graduali.

E del resto non mancano fatti, che potrebbero mettere in imbarazzo l'atteggiamento opposto; il catastrofico, dall'A. propugnato.

Ricorda ognuno, che oramai si conoscono parecchie forme di arco, il cui numero non è ancora stabilito, e va sempre crescendo. Nella letteratura che mi è nota, sono descritti già sei tipi diversi di arco, che si trasformano l'uno nell'altro, e che sempre più si avvicinano alla scarica a bagliore. E fra gli osservatori di questi fatti — mi piace ricordarlo — si annoverano Arons e Child, veri specialisti in materia.

[1] M. La Rosa, *Ricerche spettrali sull'arco fra carboni a piccole pressioni*. Nuovo Cimento, vol. IV, agosto 1912.

Fisica terrestre. — *Il recente terremoto nella Marsica e gli strumenti sismici.* Nota di G. Agamennone, presentata dal Socio E. Millosevich.

Il focolare sismico di questa nuova e tremenda convulsione del suolo, la quale ha seminato di tante stragi e rovine l'Italia centrale, è lungi ancora dall'essere ben determinato. Però, dalle notizie pubblicate dai giornali e raccolte da persone che si sono, a scopo di studio, recate nei luoghi più colpiti, parrebbe che l'epicentro non dovesse distar troppo dal bacino del Fucino, e più precisamente dal versante meridionale del M. Velino. Senonchè il riscontro d'incalcolabili danni anche nella valle del Liri ci lascia perplessi se nel terremoto attuale non siasi in presenza di due centri sismici ben distinti, anzichè d'uno solo, i quali siano entrati in azione nello stesso istante, oppure immediatamente, o quasi, l'uno appresso a l'altro. In quest'ultima ipotesi, il 2° terremoto rientrerebbe nella categoria di quelli che in sismologia son detti *à relais*, e cioè che, già preparati da lunga mano, scoppiano proprio al passaggio delle onde sismiche generate altrove. Non si può neppure escludere che l'epicentro abbia avuto una forma lineare di notevole lunghezza e che, per ragioni geologiche, abbia determinato le maggiori rovine in due punti, tra loro molto distanti [1]. Ci si può domandare quale di questi due punti abbia agito per il primo, tanto nel caso di due epicentri distinti, quanto nell'ipotesi d'un unico dislocamento di forma allungata. La risposta può essere resa meno difficile dal prendere in considerazione le ore precise in cui incominciò il movimento negli Osservatorii sismici più vicini, che sono precisamente quelli di *Montecassino*, *Rocca di Papa* e *Roma*. L'inizio esatto dei sismogrammi è stato: a $7^h52^m50^s$ [2] per la 1ª località, a $7^h52^m54^s \pm 3^s$ [3] per la 2ª e $7^h52^m55^s \pm 2^s$ [4] per la 3ª. È vero che queste

[1] L'aggravamento dei danni si è realmente osservato, qua e là, anche in altri luoghi, ad es. a *Poggio Nativo* in Sabina, a notevole distanza dall'area epicentrale; ma sembra che in detto paese le maggiori rovine siano dovute ad un contemporaneo assestamento del sottosuolo, già minato dalle piogge straordinarie di quest'inverno.

[2] Questo dato parrebbe irreprensibile, in seguito alle minuziose spiegazioni che il solerte direttore dell'Osservatorio di Montecassino s'è compiaciuto comunicarmi, sia per ciò che concerne il tempo campione, sia per quanto riguarda il rilevamento dell'ora sul sismogramma.

[3] Questa è l'incertezza inevitabile nelle ore di Rocca di Papa, dovuta al fatto principale che il tempo campione è dedotto dalla caduta, a mezzogiorno preciso, della palla del Collegio romano a Roma; caduta che spesso, specie nell'inverno, non è visibile a causa di vicende atmosferiche. E questo stato di cose viene naturalmente aggravato dalla mancanza d'un vero pendolo astronomico e, meglio, d'un cronometro di alta precisione (per non potersi arrestare anche in occasione di scosse più o meno sensibili) i quali sarebbero in grado di mantenere il tempo anche per molti giorni di seguito. Questa mancanza diverrebbe, senza dubbio, meno dannosa, qualora fosse permessa la recezione del tempo per mezzo della telegrafia afila, o si potesse con facilità disporre del telegrafo o del telefono, ciò che attualmente non è possibile.

[4] L'incertezza è minore, in confronto di Rocca di Papa, perchè il segnale del mezzodì

tre località si possono trovare a distanze alquanto diverse dal punto da cui per primo s'è irraggiato lo scuotimento; ma la 1ª ora, che anticipa di ben 4-5 secondi, starebbe a provare che l'Osservatorio di Montecassino è stato di molto il più vicino, data la notevole velocità delle onde sismiche, come vedremo appresso.

Se però la vicinanza di questi tre Osservatorii alla regione epicentrale è stata utile per il rilevamento dell'ora esatta, allo scopo di poter calcolare con sicurezza la velocità delle onde sismiche fino ai più lontani Osservatorî del mondo intero, disgraziatamente ben poco s'è potuto dedurre dai sismogrammi, perchè appunto, a causa del troppo energico scuotimento del suolo (grado VII-VIII c. della scala Mercalli), gli strumenti, specie i più sensibili, dei predetti tre Osservatorii furono immediatamente, o quasi, posti fuori d'azione, sia in seguito alla caduta delle stesse penne scriventi, sia pel fatto che le masse pendolari urtarono ripetutamente contro le apposite viti che ne limitano l'oscillazione. Ciò sta a provare, una volta di più, come non sia prudente, ai fini degli studî sismici, di fondare Osservatorî di 1° ordine, e destinati anche ai terremoti mondiali, in regioni di alta sismicità. I danni subìti dai miei microsismometrografi furono tali che uno di essi, il più sensibile, con massa di ben 1600 kg. ed ingrandimento di c. 300 volte, fu rimesso a posto soltanto ad 8^h37^m, e l'altro, più modesto, a 9^h25^m, sicchè andò perduta la registrazione di numerose repliche che seguirono, a breve distanza, la grande scossa delle 7^h53^m c. Fu più fortunato il mio *sismografo a pendoli orizzontali* installato in Roma nell'atrio dell'Uff. centr. di met. e geod., poichè, in virtù del suo minore ingrandimento

---

è sempre visibile a Roma, e con il medesimo si regola ogni giorno il cronometro collegato elettricamente al sismografo.

È interessante il far rilevare che mentre l'inizio esatto dello scuotimento del suolo s'ebbe in Roma alle $7^h\ 52^m\ 55^s$, invece, da notizie cortesemente comunicatemi dal comm. prof. E. Millosevich, l'ora di arresto di un pendolo astronomico del R. Oss. Astr. al Collegio Romano, ed il cui piano d'oscillazione era esattamente nel meridiano, avvenne ben più tardi, e cioè alle $7^h\ 53^m\ 24^s$, quando lo scuotimento sensibile era già forse cessato. Ad un'ora quasi identica ($7^h\ 53^m\ 26^s$) si arrestò un orologio elettrico Hipp dello stesso Osservatorio, a corto pendolo ed oscillante in direzione E-W. Anche a Rocca di Papa l'unico orologio a pendolo posseduto e di cui si conosceva la correzione, fu trovato fermo alle $7^h\ 53^m\ 3^s$. Da ciò si vede, una volta di più, quanto si sarebbe andati lontano dal vero se, nel calcolo della velocità delle onde sismiche, in mancanza dei dati orarî ricavati dai sismografi di M. Cassino, Rocca di Papa e Roma, si fosse presa in seria considerazione l'ora d'arresto degli anzidetti pendoli, appunto perchè perfettamente regolati. Su questa grave questione io non ho mancato di richiamare più volte l'attenzione dell'Accademia e segnatamente nello studio sulla velocità delle onde sismiche del terremoto andaluso del 25 dic. 1884, presentato nelle sedute del 18 e 25 nov. 1894. Per questo terremoto non mancò allora chi volle basare il calcolo della velocità esclusivamente sull'ora di arresto di due pendoli astronomici dell'Osserv. di S. Fernando presso Cadice, e giunge così alla strana conclusione che la velocità decresceva notevolmente con la distanza!

e della maggiore semplicità dell'apparato amplificatore, potè continuare a ben funzionare, e così fu in grado di registrare anche le prime repliche.

Un fatto importantissimo, che per la prima volta si è potuto ben assodare, grazie alla vicinanza di strumenti extra-sensibili all'area epicentrale d'un violento terremoto, è stato lo straordinario numero di repliche che lo hanno seguìto. Così, dal più potente microsismometrografo di Rocca di Papa si registrarono ben 240 scosse dalle 8^h37^m fino alle 24^h dello stesso giorno 13; e questo numero è inferiore al vero, pel fatto che lo strumento non potè funzionare dalle 7^h53^m alle 8^h37^m. Il numero delle repliche scese a 120, 88, 38, 30 ecc. nei giorni successivi. Fino a tutto ieri (6 febbraio) il numero delle repliche è stato di quasi 750, di cui solo una trentina furono più o meno lievemente sentite all'Osservatorio o nel sottostante paese. È anche verosimile che molte altre registrazioni di minore entità siano andate perdute, per essere rimaste mascherate dall' agitazione microsismica, di cui è quasi sempre preda questo potente microsismometrografo. Per chi riguardava lo strumento, era stupefacente la ripetizione di tante repliche che si susseguivano talora alla distanza di men di un minuto e che testimoniavano la quasi continua convulsione del suolo nell'area epicentrale, sebbene alla distanza di ben 70 km.! La più parte di dette registrazioni sono così piccole da essere probabile che perfino colà siano sfuggite ai sensi dell'uomo. Tutto ciò dimostra l'enorme progresso realizzato in sismometria negli ultimi anni. Ciò è tanto vero, che un altro mio sismometrografo, che pur aveva figurato con onore all'Esposizione di Parigi del 1900, non è stato in grado di registrare che $^1/_3$ circa delle repliche sopra indicate. Si può bene immaginare il lavoro immenso che si è avuto in quest'occasione all'Osservatorio da me diretto e, si può dire, l'eroica abnegazione del ristrettissimo personale (assistente e custode) che vi ha dimora fissa e che è costretto anche di notte a prestare servizio in seguito ai continui allarmi dati dai sismoscopî [1]. Quasi sempre si tratta, è vero, di scosse strumentali, che non avrebbero bisogno dell' intervento del personale; ma chi potrebbe garantire che talora non sopraggiunga il forte contraccolpo di qualche violento e lontano terremoto che ponga fuori di azione gli strumenti più delicati, come avvenne nei terremoti calabri del 1905 e 1908 e in varî altri, di modo che s'interrompa il loro prezioso funzionamento, specie di notte?

* * *

Chiudo la presente Nota col riportare le ore relative all' inizio della registrazione avutasi in molti altri Osservatorî italiani ed in alcuni anche

[1] Tra i medesimi s'è comportato in modo ammirabile il mio *sismoscopio a doppio effetto* per scosse ondulatorie. Nè si può supporre che quello di Rocca di Papa abbia una costruzione speciale, poichè il direttore dell' Osservatorio di Montecassino mi ha comunicato che un altro sismoscopio dello stesso modello, colà in azione, ha potuto indicare tutte le 421 repliche che sono state registrate da quei sismografi fino al 1° febbraio.

esteri, dai quali fino ad oggi m'è stato possibile avere notizie (¹). E dappoichè non è possibile, per adesso, di conoscere con esattezza l'epicentro del nostro terremoto, mi limiterò a riportare le 20 località, per le quali si conosce l'ora, in ordine della loro distanza da *Avezzano* che, com'è noto, è restata completamente distrutta e per tal fatto non può trovarsi troppo di scosta dal focolare sismico. Assunta dunque Avezzano quale epicentro provvisorio, ho voluto fare anche un tentativo per il calcolo della velocità superficiale delle onde sismiche, assumendo quale punto di partenza l'ora media ($7^h52^m53^s$) dei tre Osservatorî di Montecassino, Rocca di Papa e Roma, i più vicini ad Avezzano, e ponendo a suo riscontro l'ora di tutti gli altri Osservatorî. All'ora media, prescelta quale punto di partenza, corrisponde la distanza di 70 km., che è appunto la media delle distanze dei tre Osservatorî anzidetti dalla città di Avezzano.

Distanza da Avezzano	Località	Ore osservate (t. m. E. C.) h m s	Distanze percorse	Tempi impiegati	Velocità al secondo
Km. 0	Avezzano				
» 64 c.	Montecassino . .	7 52 50			
» 68 c.	Rocca di Papa .	7 52 54			
» 78 c.	Roma	7 52 55			
» **70**	Media	**7 52 53**			
» 150 c.	Ischia	7 53 12	Km. 80 c.	sec. 19	m. 4210 c.
» 160 c.	Valle di Pompei	7 53 10	» 90 c.	» 17	» 5290 c.
» 220 c.	Siena (Osservanza)	7 53 0	» 150 c.	» (7)	» (21.430 c.)
» 320 c.	Pola	7 53 27	» 250 c.	» 34	» 7350 c.
» 380 c.	Venezia	7 55 37	» 310 c.	» (164)	» (1890 c.)
» 390 c.	Padova	7 53 39	» 320 c.	» 46	» 6960 c
» 400 c	Trieste	7 53 39	» 330 c.	» 46	» 7170 c.
» 410 c.	Treviso	7 53 31	» 340 c.	» 38	» 8950 c.
» 440 c.	Mileto	7 53 40	» 370 c.	» 47	» 7870 c.
» 500 c.	Catania	7 54 18	» 430 c.	» 85	» 5060 c.
» 530 c.	Carloforte (Sard.)	7 54 37	» 460 c.	» 104	» 4420 c.
» 560 c.	Moncalieri	7 54 6	» 490 c.	» 73	» 6710 c.
» 580 c.	Graz	7 53 59	» 510 c.	» 66	» 7730 c.
» 600 c.	Domodossola . .	7 54 30	» 530 c.	» 97	» 5460 c.
» 720 c.	Vienna	7 54 16	» 650 c.	» 83	» 7830 c.
» 1300 c.	Amburgo	7 55 33	» 1230 c.	» 160	» 7690 c.
» 1540 c.	Granata	7 55 44	» 1470 c.	» 171	» 8600 c.

Media generale m. **7330** c.

(¹) Negli Osservatorî di *Milano* e di *Quarto Castello* (presso Firenze) gli strumenti sismici si trovarono accidentalmente fuori di azione; da altri Osservatorî non ho avuto ancora risposta.

Scorrendo l'ultima colonna, salta subito agli occhi la forte discordanza per la velocità che risulta per *Siena*, la cui ora è evidentemente troppo in anticipo; e se il tempo campione fosse inoppugnabile, bisognerebbe ricercare la causa dell'errore o forse nella così detta *parallasse* degli stili scriventi o nell'essersi considerato, quale principio della perturbazione sismica, qualche rinforzo nell'agitazione microsismica di cui fosse stato per caso preda quel sismografo. Per giustificare, invece, la velocità troppo piccola che vien fuori per *Venezia*, bisogna pensare o a qualche equivoco nella misura della *parallasse*, ovvero a poca sensibilità dello strumento il quale probabilmente s'è mosso in ritardo, oppure al fatto che l'inizio della registrazione non era visibile a causa di agitazione abituale nello strumento. Colpiscono pure le tenui velocità relative ad *Ischia* ed a *Valle di Pompei*; ma considerata la distanza relativamente piccola di questi due Osservatorî dall'epicentro, può essere che la stessa incerta posizione di quest'ultimo basti a spiegare l'anomalia, tanto più che queste due località si trovano dalla stessa parte. La minore velocità, spettante all'Osservatorio di *Carloforte*, è giustificata dal fatto che il principio della registrazione, a quanto mi ha scritto quel direttore, è rimasto realmente mascherato da piccole tracce di oscillazioni prodotte da vento. Dà, infine, a pensare la poca concordanza della velocità che si ottiene per *Catania* e *Domodossola*, per rispetto alle altre più sicure, e forse la si potrebbe anche qui attribuire alla difficoltà di riconoscere il vero inizio della registrazione in mezzo all'agitazione microsismica, quando non si volesse invocare l'insufficiente sensibilità di quei sismografi, ai quali potrebbero essere sfuggite le prime onde, meno intense ma più veloci. Nè è lecito di spiegare l'anomalia con la diversa direzione nel percorso delle onde sismiche, poichè Catania e Domodossola si trovano rispettivamente non troppo discoste da Mileto e Moncalieri, per i quali due ultimi Osservatorî s'ebbero velocità ben più notevoli.

Ponendo quindi in disparte tutti i predetti 7 Osservatorî, per i quali, per una ragione o per l'altra, si nutre qualche sospetto, riunisco qui sotto i 13 rimanenti, con a fianco la loro distanza da Avezzano, il rispettivo dato orario e la velocità che ne risulta:

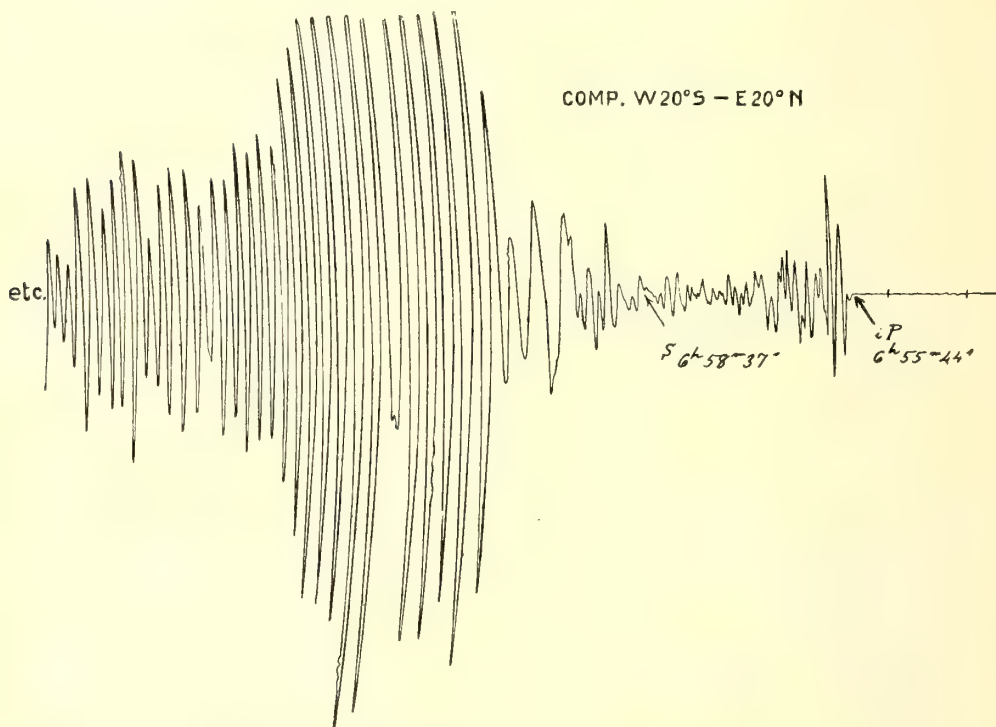
Distanza da Avezzano	LOCALITÀ	Ora dell'inizio	Velocità al secondo
Km. 70 c.	M. Cassino Rocca di Papa Roma	$7^h\,52^m\,53^s$	—
» 320 c.	Pola	» 53 27	m. 7350 c.
» 390 c.	Padova	» » 39	» 6960 c.
» 400 c.	Trieste	» » 39	» 7170 c.
» 410 c.	Treviso.	» » 31	» 8950 c.
» 440 c.	Mileto	» » 40	» 7870 c.
» 560 c.	Moncalieri. . .	» 54 6	» 6710 c.
» 580 c.	Graz	» » 30	» 7730 c.
» 720 c.	Vienna	» » 16	» 7830 c.
» 1300 c.	Amburgo. . . .	» 55 33	» 7690 c.
» 1540 c.	Granata	» » 44	» 8600 c.
		MEDIA . .	m. 7690 c.

Queste velocità oscillano da un minimo di m. 6960 (Padova) ad un massimo di m. 8950 (Treviso); ed il loro valore medio di c. 7690 m. è di poco superiore alla media generale sopra trovata, ed è quasi identico a quello (m. 7680) da me trovato pel terremoto nelle isole Jonie, del 1912 (1). Basandoci su questa velocità media di 7690 metri al secondo, e supponendo che la medesima non si discosti troppo da quella con cui effettivamente si propagarono le onde sismiche dal presunto epicentro fino alla distanza di 70 km., troviamo che quest'ultima è stata percorsa in circa 9 secondi; e perciò l'ora all'epicentro, provvisoriamente da noi assunto, sarebbe:

$$7^h\,52^m\,53^s - 9^s = \mathbf{7^h\,52^m\,44^s}.$$

Infine, ritengo importante di riportare qui appresso il *fac-simile* della prima porzione di uno dei sismogrammi, ottenuti nella importante Stazione sismologica di *Cartuja* a Granata, in occasione del terremoto di cui ci siamo qui occupati. Questo bel sismogramma (che io debbo alla cortesia del reverendo P. Manuel M.a S. Navarro Neumann, il quale dirige con tanto amore e con tanta abilità il predetto Osservatorio) fu tracciato da un *pendolo bifilare* oscillante in direzione N-S, con massa di kg. 425, periodo di 13^s,

(1) G. Agamennone, *Il terremoto del 24 gennaio 1912 nelle isole Jonie e sua velocità di propagazione* (Rend. della R. Acc. dei Lincei; seduta del 19 maggio 1912).

ingrandimento di 60 volte, e smorzamento di 4 a 1. Le ore che si leggono sul sismogramma sono espresse in t. m. Gr.: la 1ª ($_i$P) rappresenta l'inizio ben netto della registrazione, la 2ª (S) indica, a giudizio di quel Direttore, il primo apparire dei secondi tremiti preliminari, i quali avrebbero dunque

viaggiato con una velocità di soli m. 4360 c. al secondo. Tale cifra si ottiene, infatti, dividendo la distanza di m. 1.540.000 di Granata da Avezzano per l'intervallo di 350 secondi, che si ottiene sottraendo l'ora al presunto epicentro da quella di detto Osservatorio.

Chimica. — *Ricerche sulle combinazioni subalogenate di alcuni elementi*: III. *Sul cosidetto sottocloruro di bismuto*. Nota di L. Marino e R. Becarelli, presentata dal Socio R. Nasini.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Il sistema « nitroglicerina - cotone nitrato ». Condensazione dei vapori di nitroglicerina sul cotone nitrato in un ambiente vuoto a temperatura uniforme.* Nota I di D. Chiaraviglio e O. M. Corbino, presentata dal Socio E. Paternò.

È noto che la gelatinizzazione del cotone nitrato, che ha così grande importanza nella fabbricazione dei moderni esplosivi di propulsione, è generalmente ottenuta o per mezzo di un solvente volatile non esplosivo, che viene nell'ultima fase di fabbricazione della polvere eliminato da questa in modo opportuno così da non restarne che traccie nel prodotto finito; oppure per mezzo di altre sostanze, quasi sempre esplosive, pochissimo volatili, che nel prodotto finito restano come costituenti essenziali. Fra queste sostanze la nitroglicerina ha speciale interesse, perchè ad essa il più spesso si ricorre per ottenere con il cotone nitrato esplosivi tanto di propulsione come la balistite, quanto di rottura, come la gelatina esplosiva.

Il complesso delle proprietà fisiche di tali miscugli di nitroglicerina e di cotone nitrato conferisce ad essi il carattere generico dei colloidi; ma quando si è detto ciò, siamo ben lungi dal conoscere l'intima struttura della sostanza, le vere condizioni in cui si trovano associati il cotone nitrato e la nitroglicerina, e il grado di omogeneità o di dispersione del sistema che già a un semplice esame microscopico, con ingrandimenti anche non eccessivi, apparisce di costituzione assai complessa [1].

Non sarà inutile il notare che il problema in questione, già importante in sè ai fini della generale conoscenza dei corpi colloidi, ha un interesse speciale e grandissimo nel caso delle sostanze esplosive, poichè ogni superficie di discontinuità nella costituzione di un esplosivo può divenire il posto di accumulo dei prodotti di lenta decomposizione, e perciò la struttura fisica del colloide deve notevolmente influire sulla stabilità dell'esplosivo.

Qualunque ricerca destinata a illustrare la proprietà del sistema binario « cotone nitrato - nitroglicerina », per quanto ne siano modesti i risultati, va perciò considerata come un contributo di interesse non trascurabile sia dal punto di vista scientifico sia da quello tecnico; questo convincimento ci ha indotti a render noti i risultati seguenti, frutto di una lunga serie di esperienze da noi eseguite nel Laboratorio Chimico per lo studio delle sostanze esplosive. Esse sono caratterizzate dal fatto che abbiamo potuto operare a temperature ordinarie, utilizzando i vuoti elevatissimi che le attuali

[1] E. Paternò e F. Traetta-Mosca, Gazzetta Chimica, t. 38_2, pag. 512, 1908.

macchine pneumatiche permettono di ottenere, e che ci è stato possibile seguire la migrazione dei vapori di nitroglicerina dal liquido al cotone nitrato, e dalla balistite a una parete fredda, non ostante che la pressione di quei vapori sia estremamente piccola, come abbiamo dimostrato in due precedenti lavori.

1. — *Condensazione dei vapori di nitroglicerina sul cotone nitrato in un ambiente vuoto a temperatura uniforme.*

Abbiamo descritto, in una Nota anteriore [1], uu apparecchio costruito al fine di permettere la distillazione nel vuoto della nitroglicerina, contenuta in un piccolo bicchiere sospeso nel centro di un grande pallone.

Un apparecchio analogo fu adoperato per ricercare se, e in quale misura, i vapori che si sprigionano dal bicchiere centrale vanno a depositarsi in una massa polverulenta di cotone nitrato deposto al fondo del pallone. L'unica causa di migrazione del vapore doveva essere la sua tendenza ad essere assorbito dal cotone nitrato; fu quindi evitata con ogni cura ogni possibilità di differenze di temperatura fra la nitroglicerina e il cotone nitrato. A tal fine, il pallone, rilegato, nel modo già descritto, a una pompa Gaede a mercurio e a un provino di Mac-Leod, venne introdotto in un grande termostato ad aria, nel quale si poteva, per mezzo di una corrente elettrica opportunamente graduata, mantenere una temperatura uniforme e regolarla a volontà fino a circa 50°.

Dentro il pallone eran disposti due termometri al decimo di grado, immersi nella nitroglicerina del bicchiere e nel cotone nitrato; si potevano così conoscere le temperatura dei due corpi e assicurarsi della loro identità.

L'operazione poteva esser proseguita senza interruzioni per molti giorni, mentre una serie di finestre praticate nel termostato, e provviste di vetri, permetteva di guardare con un canocchiale nell'interno del pallone, di seguire il progressivo abbassamento di livello della nitroglicerina nel serbatoio e di sorvegliare l'andamento dei termometri.

Di regola il pallone, dopo fatto il vuoto, veniva escluso dal resto della tubulatura di rarefazione con la manovra di un rubinetto. Un lungo funzionamento della pompa era necessario, all'inizio, prima che si raggiungesse stabilmente una rarefazione elevata; e ciò a causa della grande quantità di aria aderente alle fibre di cotone nitrato finamente polpate. Anche in seguito fu sempre seguìto al Mac-Leod l'andamento della pressione, facendo agire di tempo in tempo la pompa per riportare la pressione al punto voluto.

In queste condizioni, e mantenendo fin da principio una temperatura di circa 30° nel pallone, si potè constatare una rilevante migrazione dei

[1] D. Chiaraviglio e O. M. Corbino, Rend. Lincei, t. 23, 1° sem., pag. 37, 1914.

vapori verso il cotone, e perciò un progressivo abbassamento del livello della nitroglicerina nel suo serbatoio. A poco a poco la distillazione si andò facendo più lenta, fino a rendersi, dopo alquanti giorni appena sensibile.

Un esame chimico del cotone nitrato, alla fine dell'esperienza, rivelò che esso aveva assorbito uniformemente in tutta la massa la nitroglicerina sparita dal serbatoio, pur mostrando un aspetto poco diverso dal primitivo; solo si notava in esso una struttura più attaccaticcia. Schiacciando la polvere sotto una rilevante pressione, per mezzo di una pressa, le fibre si rapprendevano in un insieme apparentemente omogeneo, colore di cuoio, traslucido, molto simile all'ordinaria balistite, e che manifestava cioè i caratteri di una gelatinizzazione.

Il contenuto in nitroglicerina corrispondeva, com'è naturale, al liquido sparito nel bicchiere centrale; e dipendeva solo dalla temperatura di equilibrio, purchè si fosse aspettato un sufficiente tempo a raggiungerlo. Così con cotone collodio contenente il 12,25 % di azoto, e mantenuto per 7 giorni in presenza dei vapori di nitroglicerina alla temperatura comune di 30°, si ottenne una galletta impregnata al 31,5 % di nitroglicerina; ma prolungando in altre esperienze il tempo col contatto dei vapori, in 40 giorni si raggiunse il contenuto del 35,6 %. Ricorrendo invece a fulmicotone, che conteneva il 13,27 % di azoto, si pervenne a fissarvi, dopo 40 giorni, il 37,4 % di nitroglicerina.

L'esame microscopico delle fibre di cotone nitrato prima e dopo l'assorbimento dei vapori di nitroglicerina non ha dato finora risultati sicuramente interpretabili, e noi ci riserbiamo perciò di approfondire in seguito l'importante questione.

Resta intanto assodato che effettivamente il cotone nitrato provoca un abbassamento nella tensione di vapore della nitroglicerina, e perciò una migrazione del liquido, pur trovandosi alla stessa temperatura di questo.

Evidentemente, questo risultato non conduce necessariamente ad ammettere che fra il cotone nitrato e la nitroglicerina tenda a formarsi una vera soluzione, che cioè il meccanismo della distillazione sia identico a quello per cui l'acqua distilla, a pari temperatura, verso un sale che in soluzione determina un abbassamento della pressione di vapore.

Come è noto, un abbassamento nella tensione di vapore può anche prodursi per la presenza di un solido capace di dare col liquido fenomeni di semplice imbibizione. Ed è ben probabile che un processo analogo abbia luogo tra i vapori di nitroglicerina e le fibre di cotone nitrato, così come un batuffolo di cotone idrofilo assorbe acqua in un'atmosfera umida.

L'analogia è completata dal fatto che abbiamo potuto osservare una migrazione della nitroglicerina verso il cotone nitrato anche se questo ha perduto la struttura fibrosa, come avviene nel residuo della balistite da cui si sia estratta con etere la nitroglicerina. Il cotone nitrato, così ottenuto,

era ancora capace di assorbire i vapori per circa l'8 % del suo peso; ora, com'è noto, un fenomeno analogo si manifesta fra l'acqua e la cellulosa che abbia perduto lo stato fibroso.

Non sarà poi inutile il riferire l'esito di un'altra esperienza da noi eseguita, la quale, mentre conferma l'analogia col caso del cotone coll'acqua, permette di escludere che la tendenza del cotone nitrato ad assorbire i vapori di nitroglicerina sia analoga a quella che determina la igroscopicità di alcuni sali e l'abbassamento della tensione di vapore delle soluzioni.

Abbiamo infatti osservato che, lasciando cadere nel vuoto una certa quantità di nitroglicerina sul cotone nitrato, si manifesta un ben netto sviluppo di calore, capace di elevare sensibilmente la temperatura della massa. Il cotone nitrato era stato tenuto per molto tempo nel vuoto assai spinto della pompa Gaede per eliminare i fenomeni perturbatori dovuti all'atmosfera d'aria che aderisce fortemente alle fibre.

Per mezzo di un apparecchio in vetro alquanto complicato, che permetteva di evitare la manovra di rubinetti nel tragitto del liquido esplosivo, si potè al momento voluto far cadere in seno alla massa di cotone, con velocità regolabile, una certa quantità di nitroglicerina la cui temperatura era sensibilmente eguale a quella del cotone nitrato e la cui quantità era molto minore di quella occorrente per imberlo tutto; un termometro sensibile al decimo di grado, immerso nella polvere, permetteva di constatare le variazioni di temperatura prodotte dal contatto col liquido. Fu così riconosciuto un elevamento di temperatura che raggiunse, in una esperienza, circa tre gradi.

Questo risultato prova certamente che non siamo in presenza di un processo semplice di dissoluzione del solido nel liquido, cui dovrebbe invece corrispondere un abbassamento di temperatura.

Non resta quindi che o ammettere la produzione di una vera reazione chimica esotermica tra il cotone nitrato e la nitroglicerina, o tutti i fatti osservati attribuire a fenomeni di pura imbibizione.

Chimica. — *Sui borati. Sistema* Na^2O, B^2O^3, H^2O a 60°. Nota I di U. Sborgi e F. Mecacci, presentata dal Socio R. Nasini.

Chimica. — *Sui borati. Sistema* $(NH^4)^2O, B^2O^3, H^2O$ a 60°. Nota di U. Sborgi e F. Mecacci, presentata dal Socio R. Nasini.

Biologia. — *Una ipotesi biologica sulla deposizione dello zolfo durante l'epoca gessoso-solfifera.* Nota del prof. G. Bargagli-Petrucci, presentata dal Corrispondente P. Baccarini.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Ricerche mineralogiche e petrografiche sulla valle del Chisone (Alpi Cozie): sopra un'interessante varietà di gneiss di Prali* (1). Nota di EMANUELE GRILL, presentata dal Corrispondente FEDERICO MILLOSEVICH.

Da alcuni anni mi occupo della mineralogia e geologia di quella porzione delle Alpi Cozie comprendente la valle del Chisone, la quale, come pure l'adiacente valle del Pellice, è stata, a differenza di molte altre valli alpine, fin'ora, assai poco studiata dai mineralisti. Infatti, se si prescinde dai magistrali lavori dell'ing. V. Novarese (2), compiuti in seguito al rilevamento geologico della regione, è veramente esiguo il numero delle pubblicazioni di indole mineralogico-petrografico riguardanti quella zona (3). Questo fatto, come ancora il mio abituale e lungo soggiorno estivo in quei luoghi, mi ha determinato ad occuparmene profondamente.

Nell'attesa di poter dare alle stampe lo studio complessivo di tutte le più importanti formazioni litologiche di quell'interessante territorio, non appena ne sarà ultimato l'esame chimico e petrografico, espongo, in questa Nota preliminare, il risultato delle mie ricerche intorno alla vera natura di una roccia, intercalata nell'importante gruppo dei micascisti, e dall'ingegner Novarese (4) considerata come una quarzite.

Secondo l'ing. Novarese, la quarzite, in forma di banchi, si presenterebbe nel vallone di Prali (parte alta e meridionale della Germanasca, affluente del Chisone) in due località: « sulla cresta che scende all'ovest « della punta Cornour (5), e sul monticello di fronte a Prali, dove un banco

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto mineralogico di Firenze, diretto dal prof. Federico Millosevich.

(2) V. Novarese, *Sul rilevamento geologico eseguito nel 1894 in Valle della Germanasca (Alpi Cozie)*. Bull. R. Com. geol., pag. 253, an. 1895, Roma; *I giacimenti di grafite delle Alpi Cozie*, Bull. R. Com. geol., pag. 4, an. 1898, Roma.

(3) S. Franchi e V. Novarese, *Appunti geologici e petrografici sui dintorni di Pinerolo*, Bull. R. Com. geol., pag. 385, an. 1895, Roma; L. Colomba, *Note mineralogiche sulla valle del Chisone* (cave del Pomaretto), Atti R. Acc. sc., Torino, vol. XLIII, 1908; C. Barucco, *Le cave di talco nella valle di S. Martino (Alpi Pinerolesi)*, Rassegna mineraria metall. chimica, vol. XXXII, n. 12, Torino, an. 1910,

(4) V. Novarese, *Sul rilevamento geologico* ecc., pag. 264.

(5) *Nota*. Nonostante l'indicazione, un po' vaga, della località, sono certo di averne identificato esattamente l'ubicazione, sia perchè non si hanno altre creste ad ovest della punta Cornour, e sia anche perchè il rilevatore non ha indicato l'esistenza del banco di calcare da me segnalato, mentre sono invece esattamente ricordate tutte le altre formazioni calcaree circostanti.

« di una diecina di metri di potenza di una quarzite bianca, simula l'a-
« spetto che hanno nella valle gli affioramenti di calcare cristallino ».

Il banco della prima località, cui accenna Novarese, attraverserebbe la scoscesa e poco accessibile parete del Cornourin, cioè della vetta che s'innalza esattamente a sud dei ricoveri militari dei Tredici Laghi e quindi anche all'ovest del Cornour (vedi foglio 67 della carta d'Italia, *Perosa-Argentina*, scala 1 a 50000). Dal colle del Cornourin, tra la punta omonima e il Cornour, detto banco scende obliquamente in basso, con direzione all'incirca SO-NE, mantenendosi però sempre ad un'altezza difficilmente accessibile. Per prelevarne un campione in posto, è necessario di arrampicarsi per il ripido canalone che dalla conca dei Tredici Laghi conduce al suddetto colle, ove, un po' prima di giungere sulla cresta, s'incontra la roccia bianca in questione, la quale non è una quarzite ma bensì un calcare bianco, cristallino, di cui avrò ad occuparmi in un altro lavoro.

Il secondo banco di presupposta quarzite si osserva vicino alla frazione Villa di Prali, in regione Galmont, e più precisamente alle Ronciaglie, ove esso attraversa, per un lungo tratto, la testata dell'ultima propaggine di monte che divide il vallone di Rodoretto da quello di Prali.

È racchiuso anch'esso, come il precedente, fra strati di micascisto di cui segue, in perfetta concordanza, l'andamento, immergendosi con essi verso il monte con una pendenza di 62° circa e con direzione NNE-SSO.

La roccia costituente il banco è bianchissima, compatta, e con una fronte quasi verticale che sopravanza alquanto il micascisto includente, assai meno resistente. Nella sua massa si notano delle linee di frattura con direzione variabile, le quali ne sminuiscono però ben poco la compattezza e la tenacità. Alla parte superiore si ha un netto distacco rispetto al micascisto, il cui color grigio-plumbeo ne fa risaltare anche maggiormente la separazione. Non si ha così un manifesto e graduale passaggio tra l'uno e l'altro tipo di roccia. Tuttavia in prossimità della zona di contatto si osserva, così nel micascisto come nella roccia inclusa, un leggero aumento degli elementi micacei.

Non è possibile, a prima giunta, di riconoscere sicuramente la natura di quella intercalazione dei micascisti, la cui colorazione bianchissima, che la rende appariscente anche da lontano, e la grana regolare e tanto minuta da non lasciar distinguere, ad occhio nudo, altro costituente essenziale all'infuori del quarzo e della mica, le dànno addirittura l'aspetto di una quarzite micacea.

La mica è tutta bianca, assai abbondante e in numerose laminette, lucenti, molto piccole (la dimensione lineare massima è di rado superiore ai 2 mm.), distribuite nella massa della roccia in modo regolare e con una disposizione varia. Esaminando però attentamente le diverse superficie di frattura dei campioni staccati, si nota un certo parallelismo tra le lami-

nette di mica e gli strati del micascisto includente, senza che la roccia inclusa assumi però una vera scistosità.

Al microscopio, la roccia presenta la struttura caratteristica delle rocce cristalline metamorfiche, cioè quarzo cataclastico e pavimentato. La pavimentazione del quarzo viene interrotta da adunamenti di mica e di feldspato, i quali, invece di seguire piani costanti di scistosità, accennano ad aggrupparsi in zone irregolari, ciò che giustifica la frattura scagliosa.

Rispetto all'abbondanza relativa dei tre principali costituenti, il primo posto è tenuto dal quarzo. Questo passa da frammenti estremamente minuti a frammenti che non oltrepassano, per altro, le dimensioni proprie agli gneiss minuti. Il secondo posto è occupato dal felspato, che, nel campo del microscopio, occupa le maggiori aree come microclino, il quale, in grosse plaghe (Vedi figura. Ingrandimento 35 diam., nicols incrociati) prende parte al mosaico cristallino. Poi viene la mica, anch'essa assai abbondante.

Il *quarzo* è abbastanza limpido, a contorni molto irregolari e allotriomorfo rispetto agli elementi del felspato e della mica. Presenta frequentissime fenditure, che, assieme con l'estinzione ondulata, abbastanza notevole, sarebbe una prova del dinamometamorfismo cui è stata soggetta la nostra roccia.

Non mancano le inclusioni di mica e di qualche altro granulo che per i suoi colori di polarizzazione sembra doversi attribuire al pirosseno.

Il *felspato* è rappresentato, nella quasi totalità, da plaghe, relativamente assai grandi, di *microclino*, riconoscibile per la caratteristica struttura a graticcio, dovuta alla germinazione polisintetica albite periclino e per gli indici di rifrazione sempre inferiori ai due principali del quarzo e a quello del nuovo mastice adoprato da Voigt e Hochgesang, la collolite con $N_{na} = 1{,}5354$.

Questo felspato è assai fresco e sembra derivato, anche qui, come in molti altri gneiss alpini, da ortoclasio, ancora presente, in seguito ad energiche deformazioni meccaniche. Esso non mostra tracce di accrescimento pertitico; le sue uniche inclusioni sono quelle di minute squamette a forte poter rifrangente e ad elevata birifrazione, riferibili a mica muscovite.

In talune zone di microclino, vicine alla discontinuità della roccia, si nota una estinzione raggiata, che attesterebbe una incipiente zeolitizzazione, ossia una alterazione per idratazione.

Qua e là compaiono pure lamelle di *plagioclasio*, il quale, in confronto dello sviluppo, veramente notevole, del microclino, assume una parte quasi accessoria.

A cagione dei contatti mal definiti tra plagioclasio e quarzo, non si possono fare sicure misure comparative tra gli indici di rifrazione di quei due minerali, secondo il metodo di Becke. Quindi la determinazione del felspato sodico-calcico, geminato sempre secondo la legge dell'albite, venne fatta, nelle sezioni normali a $\{010\}$, solo in base al valore dell'estinzione simmetrica, trovato compreso fra 8° e 13°. I confronti con la collolite dànno i seguenti schemi:

$$\alpha' > n \qquad \gamma' > n\,;$$

si tratterebbe dunque di un plagioclasio assai acido, compreso fra l'oligloclasio basico e l'andesina, corrispondente cioè ad una miscela isomorfa intermedia a $Ab_2\,An_1$ e $Ab_3\,An_2$.

L'*ortoclosio* vi è parimenti scarso. È abbastanza fresco e limpido. Si presenta in larghe plaghe con evidenti linee di sfaldatura basale e in elementi allungati, geminati secondo la legge di Carlsbad. Il confronto con la collolite dà:

$$\alpha' < n \qquad \gamma' < n\,.$$

La *mica* che prende parte alla costituzione della roccia è da riferirsi completamente alla muscovite. Essa è in lamelle pochissimo sviluppate, con marcate linee di sfaldatura secondo le quali avviene l'estinzione, e assume colori d'interferenza vivaci e iridati tra i nicols incrociati.

I suoi contorni sono più regolari e meno sfrangiati di quelli di tutti gli altri elementi: ciò che, come anche il ritrovarsi inclusa nel quarzo e nel felspato, attesterebbe la precedenza genetica di questo minerale sugli altri.

La muscovite è pure essa abbastanza fresca, e solo di rado accenna ad alterazione in clorite.

Minerali accessorii. Se si eccettua la rara comparsa, nel quarzo e nel felspato, di granuli assai rifrangenti, quasi incolori e con pleocroismo poco sensibile, probabilmente dovuti a pirosseno, si può dire che la roccia qui studiata è assai povera di interclusi. Infatti, in tutta la sezione vidi un solo cristallo di granato non molto esteso, torbido, e fortemente fratturato.

L'analisi chimica mi ha dato i seguenti risultati:

p. p. arr. . . .	1,12
SiO_2	73.23
Al_2O_3	17.19
Fe_2O_3	0,42
CaO	1.37
MgO	tr.
K_2O	4,50
Na_2O	3,01
	100,84

p. sp. 2,677

Dalla diagnosi microscopica e chimica risulta quindi, in modo sicuro, che la roccia di cui ci occupiamo non è una quarzite di cui ha solo tutta l'apparenza, per la colorazione bianchissima, dovuta alla mancanza pressochè assoluta di elementi colorati, non mai visibili macroscopicamente, e per la grana minutissima.

E data poi la notevole abbondanza della mica e del felspato alcalino, il quale prende parte essenziale alla costituzione della roccia, tanto che in certe plaghe è addirittura prevalente sul quarzo e sulla mica, elementi normali degli scisti cristallini, credo non si debba neppure riferire ad uno gneiss quarzitico ma considerare come un vero e proprio gneiss con struttura speciale.

Volendo quindi dare a questa varietà locale di gneiss un nome che ne indichi la struttura e la composizione mineralogica ad un tempo, bisogna chiamarla *gneiss minuto muscovitico a microclino.*

Sulla diffusione di questo gneiss, e sull'estensione e importanza delle formazioni quarzitiche nella valle del Chisone, tratteremo più particolarmente nella descrizione generale delle formazioni litologiche della regione.

Biologia vegetale. — *Sulla biologia fioralc del mandorlo.* Nota preventiva di C. Campbell, presentata dal Socio R. Pirotta.

La conformazione del fiore nelle diverse piante e varietà, presenta differenze tali, su cui è bene fissare l'attenzione, per l'interesse che esse offrono sia dal lato botanico come da quello agrario, in quanto possono portare alla spiegazione delle cause di bassa produttività in date annate, in mandorleti specializzati con unica varietà o forma biologica, e individualmente per certe piante, specie quando, anzichè associate in vaste colture, si trovino isolate, e vengano a mancare o difettare nella località i pronubi necessarî alla impollinazione.

Sul dimorfismo fiorale del mandorlo, non si hanno che scarse malsicure e contraddittorie notizie, riguardanti esclusivamente le diversità che passano tra mandorlo dolce e mandorlo amaro, distinzione che verrebbe a cadere se il mandorlo dolce si ritiene, come è forse più logico di ritenere, una forma coltivata derivata dal mandorlo amaro, con tutte quelle modificazioni morfologiche, chimiche e adattamenti biologici, che sono così comuni tra le piante coltivàte.

De Candolle ([1]) così ne scrive:

« α amara — Stylis fere longitudine staminum infra tomentosis;
β dulcis — . . . . . stylis stamina multo superantibus ».

Identica distinzione si trova p. es. nel Loudon ([2]):

« amara — Styles nearly as long as the stames, and tomentose in the lower part;
dulcis — Styles much longer than the stames ».

Scotti ([3]), tra l'altro, fa riconoscere i caratteri del mandorlo amaro per lo stile un po' più corto. Egualmente ne parlano gli autori — anche agrarî — che si sono occupati del mandorlo, e così in una recente pubblicazione si esprimono Marre e Toulouse ([4]).

« Le pistil des variétés amères est de même longueur que les étamines, ce qui facilite la fécondation; le pollen tombe naturellement des anthères sur le stigmate, et assure la fécondation. Le style des variétés douces, au con-

([1]) De Candolle, *Prodromus systematis naturalis regni vegetabilis.* Parisiis 1824-1844.
([2]) I. C. Loudon, *Tree and shrub.* London 1842.
([3]) G. Scotti, *Flora medica* 1872.
([4]) E. Marre et A. C. Toulouse, L'*amandier.* Paris 1913.

traire, est beaucoup plus long que les étamines; le pollen ne peut aller de lui-même sur les stigmates ».

Nel Fiori [1] viene invece fatta una distinzione decisamente opposta:

« seme ora (a-*dulcis* [Mill, sub amygdalo]) dolce in pianta a stilo lungo come gli stami esterni, ora (b-*amara* [Hayne, sub amygdalo]) amaro in pianta a stilo più lungo degli stami esterni ».

Da tali esempii di citazioni risulta evidente come la questione non sia stata approfondita, sia nei riguardi della distinzione tra mandorlo amaro e mandorlo dolce, sia nei riguardi della biologia fiorale, e come principalmente due sole forme sieno state notate, la mediostila e la longistila, nessun cenno trovandosi di una forma decisamente brevistila come risulta dalle mie ricerche.

***

Nel mandorlo, le gemme fiorali si trovano sui rametti fruttiferi isolate e meno frequentemente abbinate o raggruppate alla estremità dei rametti fruttiferi.

I caratteri del fiore all'antesi, o anche prima, sono sensibilmente varii da pianta a pianta, quando provenga da seme, e da varietà a varietà, così per struttura come per dimensioni.

Le presenti ricerche furono fatte sopra piante, sia direttamente provenienti da seme, sia innestate.

Il calice, coi sepali più o meno fortemente pubescenti, ha colorito variabilissimo, che va dal colore nocciola-rossastro al verde chiaro, con variazioni più o meno accentuate in fiori di determinata varietà o pianta.

Nè minori sono le variazioni che si riscontrano nelle dimensioni e colorito dei petali, che vanno dal bianco più perfetto, al bianco con sfumature o striature rosee, ad un rosso più o meno intenso.

Sembra che non vi sia relazione tra le dimensioni e il colorito dei sepali e petali, la qualità del frutto e le diverse caratteristiche degli organi della riproduzione, che presentano le differenze strutturali della maggiore importanza e del maggiore interesse, sia dal lato morfologico, sia da quello biologico.

Generalmente, in un medesimo fiore gli stami sono di varia lunghezza, e quindi le antère non vengono a trovarsi sopra un medesimo piano; la loro deiscenza, se non avviene contemporaneamente, avviene quasi sempre in un periodo molto breve di tempo.

Il maggiore interesse viene offerto dal pistillo, per la sua posizione rispetto agli stami, così che le diverse forme fiorali debbono dividersi come segue:

fiore longistilo
» *mediostilo*
» *brevistilo.*

[1] Fiori, *Flora analitica d'Italia*. Padova 1896-98, vol. I.

A queste tre distinte formazioni ne va forse aggiunta una quarta, che ho trovata però in un'unica pianta, ma in tutti i fiori della stessa:

fiore a stilo ricurvo

Fiore longistilo - È il fiore in cui lo stilo supera di circa metà della

sua lunghezza gli stami, e viene quindi a trovarsi isolato sopra di essi, ancora prima che avvenga la perfetta schiusura; fig. 1, e 1 *bis*.

Sembra che la forma longistila sia propria delle varietà più gentili coltivate, e la si trova di preferenza nelle piante innestate, per quanto la abbia riscontrata anche in piante direttamente provenienti da seme.

Fiore mediostilo - In tale forma lo stilo ha una lunghezza presso a poco eguale agli stami più lunghi, e quindi lo stimma viene a trovarsi all'altezza delle antère più elevate. Tale forma ho trovata in piante coltivate ma provenienti da seme direttamente e non innestate; fig. 4.

Fiore brevistilo - In esso lo stilo non arriva se non raramente all'altezza degli stami più corti, e lo stimma viene quindi a trovarsi in posizione inferiore alle antère anche degli stami più corti; fig. 3 e 3 *bis*.

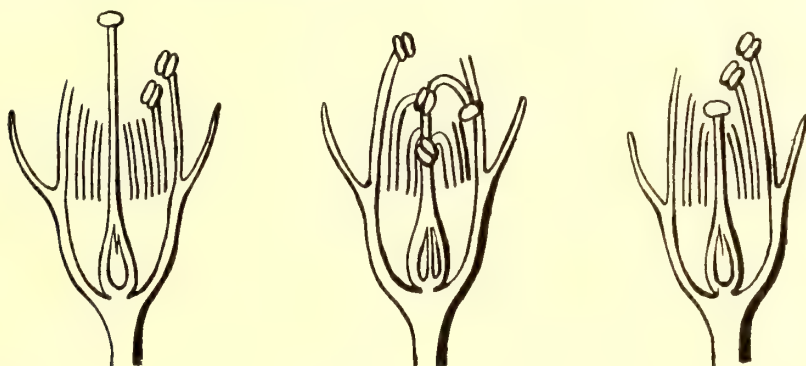



FIG. 1 *bis*. — Longistilo. FIG. 2 *bis*. — A stilo ricurvo. FIG. 3 *bis*. — Brevistilo.

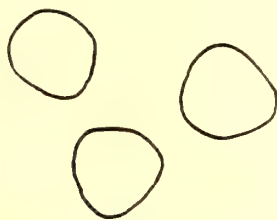
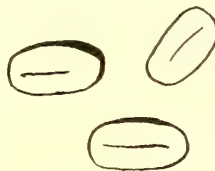



FIG. 5. FIG. 6.

Tale forma ho trovata in piante provenienti da seme non innestate, o, quanto meno, in piante innestate non mi fu dato rinvenirla, senza escludere che anche tra piante innestate possa rinvenirsi.

Fiore a stilo curvo - In una coltivazione di piante non innestate, ne ho rinvenuta una in cui tutti i fiori portavano lo stilo ricurvo (fig. 2 e III); e, in qualche fiore, qualche stame presentava lo stesso carattere. Lo stimma, in tali fiori, viene quindi a trovarsi completamente rivolto in basso.

Notevole ancora in tali fiori la costante presenza di due ovoli nell'ovario; mentre negli altri fiori, diversamente costituiti, dei due sacchi embrionali che si sviluppano ordinariamente da principio, uno solo arriva a maturarsi, così che osservato il fiore completamente sviluppato, si trova nell'ovario un solo ovolo, e raramente due.

È questa una forma nuova, che va studiata e ricercata altrove, per stabilirne la genesi e l'importanza biologica.

Le ricerche sul polline e sulla sua germinabilità, posto in soluzione di saccarosio al 10 % in goccia pendente, mostrano caratteristiche anche di grande interesse.

Il polline non germina sempre con lo stesso tempo, e talora non germina affatto. Nelle ricerche sui fiori longistili, e di una pianta più specialmente, il polline ha mostrato un alto potere germinante, con l'emissione del tubo pollinico in breve tempo: due ore circa a temperatura di laboratorio ed in soluzione di saccarosio al 10 % in goccia pendente.

Nelle diverse forme fiorali si ha sempre l'emissione del tubo pollinico, ma con variazioni sia nella percentuale di germinazione, sia nel tempo impiegato; il che potrebbe anche essere in relazione ad altre cause, tra cui l'età del polline, così da far ritenere che una relazione tra potere germinante del polline e forma fiorale non vi sia, per lo meno nelle forme e fiori da me indicati e studiati.

Una relazione sembra invece esista tra la forma del polline e la sua germinabilità. Esaminato al microscopio, il granulo pollinico mostra una forma che va dalla rotonda più o meno regolare (fig. 5), alla elittica, con un solco mediano (fig. 6), che deve essere una ripiegatura dell'esina. Le due figg. 5 e 6 rappresentano le due forme di polline ad un ingrandimento di circa 300 diam. disegnate con la camera lucida di Abbe.

In fiori mediostili (di unica pianta) ben differenziati ancora pel colorito bianco-puro dei petali e verde-chiaro dei sepali, polline di cui alla fig. 6, non è germinato nella soluzione di saccarosio al 10 %, nè nella stessa allungata con acqua. Il granulo pollinico, in tali condizioni, ingrossava, per assumere la forma primitiva all'asciutto, senza mai emettere il tubo pollinico. Granuli di presso a poco la stessa forma, ma tolti da altri fiori, e di altra forma, e di altre piante, hanno dato una bassissima percentuale di germinazione, in confronto a quelli, rotondi, d'altri fiori e d'altre piante.

Può darsi che tale polline esiga condizioni diverse per germinare, sia di luce sia di mezzo nutritivo; in ogni caso riesce evidente la stretta relazione tra forma e germinabilità del polline, relazione che ha bisogno di più larghe indagini sperimentali.

La germinabilità del polline dei fiori a stilo ricurvo non ha mostrato nulla di caratteristico.

* * *

Dalle cennate ricerche ed osservazioni, non è certo logico di trarre conclusioni definitive. in quanto nuovo e più esteso lavoro, fatto in condizioni che permettano una accurata sperimentazione (in aperta campagna le esperienze sono difficili e mal sicure, perchè chi può garentirle da mani

profane?), chiarirà non pochi dubbî che sorgono naturali e non poche ipotesi non meno logiche ed importanti.

Qualche pratica osservazione può però sino da ora chiarire il complicato meccanismo della fecondazione del fiore del mandorlo, quando si consideri che piante isolate non producono affatto, o molto poco e raramente, e che bassa produzione presentano spesso mandorleti innestati con piante biologicamente simili, mentre la maggiore e più costante produzione sembra aversi là dove sieno raggruppate le tre forme fiorali longistila mediostila brevistila.

Tale constatazione fa subito pensare all'oscuro fenomeno dell'andinamandria, secondo cui, in fiori monoclini, il polline, ancorchè ottimo, è incapace di fecondare lo stimma del proprio fiore — e probabilmente della stessa forma biologica — mentre lo stesso polline può fecondare il fiore proveniente da diversa individualità fisiologica, e probabilmente diversa conformazione.

Nel caso in parola, si avrebbe quella forma di andinamandria che il Delpno chiama triplostaurogamia.

Resterebbe da delucidare il posto biologico da assegnare al fiore a stilo ricurvo, se pure non trattisi di una forma puramente anomala, non stabile o atavica, in quanto non sono noti — ch'io sappia — casi di fiori, nelle diverse specie del genere ed affini, che portino stilo ricurvo.

Simili considerazioni farebbero ancora cadere la distinzione tra mandorlo amaro e mandorlo dolce, come varietà a sè o come mutazione colturale, nei riguardi dei caratteri fiorali; ma le diverse forme dovrebbero considerarsi come un naturale nesso biologico, all'infuori delle esterne condizioni e della azione colturale.

Dal complesso esame della questione, e di ricerche per quanto preventive, risalta evidente — parmi — la necessità, anche per la pratica agraria, che simili ricerche vengano completate ed estese, perchè l'assodare sicuramente la biologia fiorale di una pianta coltivata, vuol dire contribuire ad una più certa e regolare produzione, affidata ancora al caso e, più, all'empirismo.

Fisiologia vegetale. — *Il magnesio nelle piante albicate e clorotiche* (¹). Nota della dott^ssa^. Eva Mameli, presentata dal Socio Giovanni Briosi.

In una precedente Nota (²) dimostrai sperimentalmente che la quantità di clorofilla che si forma negli organi assimilatori epigei è in rapporto con la quantità di magnesio somministrata alla pianta. Infatti:

1° piante diversissime, tanto crittogame quanto fanerogame, appartenenti a diverse specie (*Protococcus viridis*, *Spirogyra majuscula*, *Vaucheria* sp., *Zea Mays*, *Polygonum Fagopyrum*, *Helianthus annuus*, *Torrenia Fournieri*), coltivate in soluzioni prive di magnesio, diedero tallo e foglie completamente eziolate o appena debolmente verdi;

2°) le stesse specie, coltivate in soluzioni contenenti quantità varie di magnesio, svilupparono tallo e foglie la cui intensità di colorazione cresceva col crescere della quantità di magnesio che era stata loro somministrata.

Gli estratti eterei di queste foglie, confrontati con il metodo colorimetrico, dimostrarono che tra clorofilla e magnesio v'è un rapporto *diretto* costante.

Le presenti ricerche mirano a portare un nuovo contributo alla dimostrazione dell'esistenza di questo rapporto, per mezzo del dosaggio quantitativo del magnesio contenuto nelle foglie (o in parti di foglie) verdi ed in foglie (o parti di foglie) bianche o giallognole, appartenenti ad una stessa pianta variegata o clorotica.

Le analisi chimiche, sinora fatte dai diversi autori allo scopo di conoscere le quantità di ceneri, di sostanza organica, di acqua e dei diversi elementi, contenuti sia nelle foglie verdi sia nelle corrispondenti albicate o clorotiche, sono scarse ed i risultati contradditorii, tanto che lo Czapek scrive, per ciò che riguarda il magnesio, nella sua *Biochemie der Pflanze* (II, 796): « che il contenuto, in magnesio, delle foglie eziolate, si differenzi in modo speciale e costante da quello delle foglie verdi, non è finora risultato dalle analisi delle ceneri ».

Tale mancanza di un risultato conclusivo, che compendii tutte le ricerche fatte, è dovuto soprattutto alla disparità del materiale d'analisi usato dai diversi autori, i quali analizzarono, ora foglie *normalmente* albicate,

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto botanico della R. Università di Pavia, gennaio, 1915.

(²) Mameli E., *Sulla influenza del magnesio sopra la formazione della clorofilla* (Atti Ist. bot. di Pavia, XV, 151), an. 1912.

appartenenti cioè a piante nelle quali l'albinismo era da molto tempo fissato quale carattere ereditario; ora foglie eziolate per clorosi patologica d'origine recente; ora foglie eziolate perchè provenienti da culture fatte in ambienti privi di luce; ora infine foglie ingiallite, còlte nella stagione invernale.

È evidente che le condizioni fisiologiche generali delle foglie non colorate (o debolmente colorate), in confronto a quelle verdi, debbano essere assai varie a seconda che si tratti di uno o dell'altro di questi quattro casi, e che specialissime poi debbano essere in ciascun caso le condizioni nelle quali avvengono l'assorbimento delle sostanze minerali e il loro accumularsi.

Esaminiamoli partitamente.

Albinismo. — Le prime analisi comparative di foglie verdi e di foglie variegate di bianco e di verde, si debbono al Church [1]. Egli analizzò foglie di *Acer Negundo*, di *Hedera Helix*, e di *Ilex Aquifolium*; e trovò le seguenti percentuali dei componenti le ceneri:

	Acer		Hedera		Ilex	
	f. bianche	f. verdi	f. bianche	f. verdi	f. bianche	f. verdi
Potassio	45,05	12,61	35,30	16,22	47,20	17,91
Calcio	10,89	39,93	21,50	34,43	12,92	48,55
Magnesio	3,95	4,75	3,23	2,43	1,11	1,04
Ferro	?	?	3,11	3,11	2,62	2,31
Fosforo	14,57	8,80	9,51	7.29	10,68	3,87

Si noti che, mentre per i quattro elementi — K, Ca, Fe, e P — le differenze tra foglie bianche e foglie verdi sono concordanti per tutt'e tre le specie, per ciò che riguarda il magnesio v'è invece sconcordanza.

Dopo quelle del Church, le sole analisi di sostanze minerali, nelle foglie albicate, che potei trovare nella bibliografia, sono quelle di Aso [2], che analizzò foglie di *Arundo Donax*, dopo averne separato le parti bianche dalle verdi. Egli trovò che nelle prime è contenuto il 0,455 °/₀ di ossido di Mg; nelle seconde, il 0,513 °/₀.

Clorosi. — Ramann [citato da Sorauer [3]] analizzò foglie di pino affètte da clorosi e trovò che esse contengono 0,2791 °/₀ di magnesio, mentre le foglie verdi della stessa pianta ne contengono il 0,6069 °/₀. Schulze, nelle viti sane, trovò, invece, meno magnesio che non in quelle malate di clorosi.

(1) Church A., *Variegated leaves* (Gard. Chronicle II, 586), 1877. — *Chemische Untersuchungen über den Albinismus der Pflanzen* (Centr. Agrik. XVI, 429), an. 1887.

(2) *On the different forms of lime in plants* (Bull. of the Coll. of agric. Tokyo V, 239), an. 1912.

(3) Sorauer, *Pflanzenkrankheiten*, Berlin, an. 1909, I, 305.

E per ciò che riguarda il magnesio, non abbiamo altre analisi di piante clorotiche.

Sulle *foglie autunnali ingiallite* abbiamo analisi: di Grandeau e Fliche ([1]) i quali in foglie di *Robinia*, *Prunus avium*, *Castanea* e *Betula*, constatarono che la quantità di magnesio aumenta in autunno; di Tucker e Tollens ([2]) che trovarono anch'essi che il magnesio aumenta nelle foglie di platano sino alla loro caduta, e subisce una debole diminuzione alla fine del periodo vegetativo. Stahl ([3]) fece fare l'analisi di foglie ancora verdi e di foglie gialle (autunnali) di *Evonymus japonicus*, dalle quali risultò che il magnesio è in maggior quantità nelle foglie gialle. Lo stesso autore fa conoscere però il risultato di alcune analisi di Swart, secondo le quali il ferro e il magnesio sono in quantità minori nelle foglie gialle. In un recentissimo lavoro, lo Swart ([4]) riporta numerose analisi, secondo le quali, durante il decoloramento delle foglie autunnali, la quantità di magnesio resterebbe costante nel maggior numero dei casi, e in alcuni casi diminuirebbe; ma questa variazione è dall'autore attribuita alle condizioni del materiale analizzato.

Come si vede, i dati analitici su questa questione sono troppo scarsi e contradittorii perchè se ne possa fare alcuna deduzione su un probabile rapporto quantitativo fra magnesio e clorofilla. Assai scarsi sono particolarmente i dati che riguardano le piante albicate.

Mi è quindi parso che fosse interessante e opportuno di fare un'accurata ricerca quantitativa del magnesio in un maggior numero di specie presentanti questo fenomeno. Scelsi a questo scopo: *Vinca minor* var. *foliis variegatis*, *Pelargonium zonale* var. *fol. var.*, *Pandanus javanicus* var. *fol. var.*, *Polygonum orientale* var. *fol. var.*, *Acer Negundo* var. *fraxinifolia*, *Spiraea lobata* var. *fol. var.*, *Funkia lancifolia* var. *albo-marginata*, *Evonymus japonicus* var. *fol. var.*, *Haegopodium podagraria* var. *fol. var.* Aggiunsi a queste anche le analisi di foglie appartenenti a individui in qualche loro ramo colpiti da clorosi: *Camellia japonica*, *Rosa bengalensis*, *Catalpa bignonioides*.

Per ogni specie prelevai tutte le foglie da una stessa pianta; e separai le foglie (o le parti di foglie) bianche da quelle verdi, tagliandole, quando era necessario, con le forbici, ed escludendo sempre i piccinoli, e quelle zone fogliari che apparivano non precisamente bianche o verdi e che non avrei potuto includere con sicurezza nè fra le une, nè fra le altre.

([1]) Grandeau e Fliche, (Ann. Stat. agron. de l'Est, an. 1878).

([2]) Tucker e Tollens, *Ueber den Gehalt der Platanenblätter an Nahrstoffen und die Verwendung dieser Nahrstoffe beim Wachsen und Absterben der Blätter* (Journ. f. Landw. XLVIII), an. 1900

([3]) Stahl, *Zur Biologie des Chlorophylls*. Jena, an. 1909, pag. 139.

([4]) Swart, *Die Stoffwanderung in ablebenden Blättern*. Jena, an. 1914.

L'incenerimento delle foglie venne fatto secondo il König ([1]); per il metodo d'analisi seguii il Fresenius ([2]), dosando il magnesio allo stato di pirofosfato.

I risultati ottenuti sono riassunti nella tabella riportata alla pagina seguente.

Dai dati analitici ivi riportati si deduce:

1°) che nelle piante affètte da clorosi risultò, in due casi su tre, maggiore la quantità di magnesio contenuta nelle parti clorotiche. Probabilmente la varia natura delle cause fisiologiche, che, a quanto si ritiene oggidì, possono provocare la clorosi, esercita, a seconda dei casi, influenze diverse sull'assorbimento dei sali: di qui i risultati varii ottenuti da queste analisi e da quelle eseguite dagli autori su citati, che dosarono il magnesio contenuto nelle piante clorotiche ([3]);

2°) che nelle piante albicate la quantità di magnesio risultò, in otto casi su nove, maggiore nelle parti verdi rispetto alle parti bianche dello stesso individuo: risultato che conferma esservi uno stretto rapporto fisiologico tra magnesio e clorofilla.

In base a questi risultati mi permetto di dissentire dallo Swart per ciò che riguarda l'interpretazione dei suoi dati analitici. Secondo quest'autore, non v'è contraddizione tra il fatto che il magnesio non diminuisca nelle foglie ingiallite e la presenza del magnesio nella clorofilla, perchè (a suo avviso), essendo la quantità di magnesio contenuta nella clorofilla una piccola porzione della quantità totale di questo elemento contenuta nella pianta, la variazione di questa piccola quantità, anche se si verificasse, non avrebbe importanza. Ammetto anch'io che contraddizione non vi sia; ma osservo che una più probabile causa della costanza quasi generale che lo Swart constata nella quantità del magnesio durante l'ingiallimento delle foglie, è non l'errore analitico, ma bensì la non avvenuta emigrazione di questo elemento dopo la scissione della clorofilla.

([1]) König, *Die Untersuchung landwirtschaftlich und gewertlich wichtiger Stoffe*. Berlin, an. 1906, pag. 194.

([2]) Fresenius R., *Traité d'analyse chimique quantitative*. Paris, an. 1909, vol. I, 255 e 644; II, 466.

([3]) Per quanto ancora non siano state fatte esperienze in proposito, noto che già da qualche anno trovansi in commercio sostanze a base di sali di magnesio, il cui uso viene consigliato pei terreni calcari ove appare la clorosi. Esempio: il concime « La fertilité » della « Société des produits dolomitiques de l'Hérault ». Infatti, anche nella letteratura si trovano casi di clorosi guarita con somministrazione di sali di magnesio: vedi Soraner (loc. cit.) per la clorosi del pino; Bourcart (*Le maladies des plants*, Paris, an. 1910), e Accardi (*La clorosi delle viti americane*, Napoli, an. 1913), secondo il quale la clorosi permanente deve ascriversi specialmente alla deficienza di assorbimento del magnesio da parte della pianta.

Nome della pianta		Ceneri °/o sul peso secco	Mg O °/o sul peso secco	*Osservazioni*
Vinca minor	foglie bianche	15,91	4,09	Foglie totalmente o per metà bianche.
	» verdi	10,74	4,55	
Pelargonium zonale ...	» bianche	15,85	3,96	Poche foglie bianche; la maggior parte giallastre.
	» verdi	16,52	3,67	
Pandanus javanicus ...	» bianche	8,12	8,19	Foglie a lunghe zone bianche.
	» verdi	6,14	10,85	
Polygonum orientale...	» bianche	11,51	10,94	Foglie con zone bianche e giallastre.
	» verdi	12,11	14,23	
Acer Negundo.......	» bianche	11,77	4.23	Foglie verdi, e foglie perfettamente e completamente bianche.
	» verdi	9,17	6,98	
Spiraea lobata	» bianche	12,18	5,25	Molte foglie completamente bianche, altre giallognole.
	» verdi	9,29	7,92	
Funkia lancifolia	» bianche	15,01	4,38	Foglie con larghe zone perfettamente bianche.
	» verdi	8,66	6,80	
Evonymus japonicus ...	» bianche	11,81	4,29	Numerose foglie totalmente bianche; altre zonate di bianco.
	» verdi	10,48	4,43	
Haegopodium podagraria	» bianche	16,90	5,01	Foglie totalmente o per metà bianche.
	» verdi	13,80	6,34	
Camellia japonica	» bianche	6,60	8,52	Piante diverse che nell'estate 1914 presentarono foglie clorotiche, alcune delle quali perfettamente bianche.
	» verdi	5,52	11,56	
Rosa bengalensis	» bianche	7,05	9,17	Pianta in cui alcuni rami apparvero nell'agosto 1909 eziolati, ma in cui le foglie rimasero verdiccie.
	» verdi	11,37	7,00	
Catalpa bignonioides...	» bianche	—	9,36	Pianta che nell'estate 1912 presentò un grosso ramo le cui foglie erano quasi totalmente bianche.
	» verdi	—	9,32	

Infatti, che l'assenza della clorofilla sia collegata con una diminuzione del magnesio, è ben dimostrabile con l'analisi, come si rileva dai risultati da me ottenuti; ciò che non sappiamo è quello che avvenga allorchè la clorofilla si scinde o comunque si trasforma (clorosi, ingiallimento autunnale); quali siano cioè i prodotti della decomposizione che emigrano, e quali quelli che permangono nella foglia. Ma osservando che tanto diversi sono i risultati ottenuti dai varii autori (Grandeau e Fliche, Tucker e Tollens, Stahl, Swart) a me pare non improbabile l'ipotesi che, almeno per ciò che riguarda l'emigrazione del magnesio, ogni pianta possa avere un comportamento suo proprio a seconda della natura della sua clorofilla, dell'epoca d'ingiallimento delle sue foglie, della maturazione dei suoi frutti, ecc.; a seconda, cioè, dei varii e complessi mutamenti che avvengono nel chimismo cellulare della pianta durante quel periodo di tempo nel quale essa perde le foglie, e ancora più durante il periodo che immediatamente precede questo fenomeno.

Lo stesso non può dirsi per il caso delle piante albicate, da me studiato a fine di dimostrare la concomitanza dei due fatti: assenza, o quasi, di clorofilla, e minor quantità di magnesio. In questo caso non si tratta di piante nelle quali avvenga un temporaneo e quasi subitaneo fenomeno di squilibrio, come nel caso della clorosi e dell'ingiallimento autunnale; ma di piante nelle quali i germogli, sin dal loro apparire, sono o albicati o verdi, il che dà un'apparenza di fatto quasi normale a questo fenomeno, che non si sa ancora se si debba o no considerare come patologico.

Conclusione.

Dalle analisi comparative di foglie e parti di foglie bianche e verdi appartenenti ad una stessa pianta albicata, si rileva che l'assenza totale, o quasi, di clorofilla nelle foglie, è accompagnata da una minore percentuale del magnesio in esse contenuto. Questi risultati, come quelli resi noti in una mia precedente Memoria, vengono in appoggio alla constatazione, fatta da Willstättor, che la clorofilla è un composto magnesiaco.

Chimica-fisiologica. — *Proprietà chimiche e chimico-fisiche dei muscoli e dei succhi muscolari.* Nota VI: *Sul contenuto in fosforo dei muscoli striati bianchi e rossi*, del dott. G. Quagliariello, presentata dal Corrisp. Filippo Bottazzi.

Chimica-fisica. — *Sullo stato dell'acido carbonico nel sangue.* II: *Mobilità dell'ione* HCO'_3 *a varie temperature.* Nota dei dottori E. D'Agostino e G. Quagliariello, presentata dal Corrispondente F. Bottazzi.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Sul rapporto fra centri corticali del giro sigmoideo e sensibilità cutanea nel cane* (¹). Nota del dott. G. Amantea, presentata dal Socio L. Luciani.

Una classica serie di indagini fisiologiche, eseguite col metodo delle ablazioni parziali della corteccia cerebrale (Hitzig, Goltz, Munk, Luciani e Tamburini, Carville e Duret. ecc. (²)) ha permesso di dimostrare sperimentalmente, nel cane e nella scimmia, che esiste un rapporto funzionale tra i centri della zona cosidetta eccitabile e la sensibilità cutanea. Anzi, appunto in base ai risultati di queste ricerche, il Luciani sostenne il concetto che la cosidetta zona eccitabile « logicamente non può essere definita come *sensitiva*, nè come *motrice*, ma deve essere considerata come *sensitivo-motrice. Motrice*, perchè rappresenta quella parte della corteccia cerebrale che è direttamente connessa, per mezzo di fibre efferenti di proiezione, coi centri motori inferiori, mesencefalici, bulbari e spinali, e perchè è da essa che emanano gli impulsi e s'inizia la prima fase degli atti muscolari volontarî; *sensitiva*, perchè gli atti volontarî sono guidati e governati dalle sensazioni cutanee e muscolari, e quindi le parti della corteccia nelle quali essi si originano debbono trovarsi in intimo nesso coi centri percettivi di dette sensazioni; *sensitiva-motrice*, infine, perchè i disturbi che conseguono alla distruzione della zona rolandica non sono nè esclusivamente motori, nè esclusivamente sensitivi ».

In seguito alle osservazioni accennate, si può dire che nulla di più la fisiologia sperimentale ha potuto aggiungere alle conclusioni molto generali, cui il metodo delle ablazioni aveva condotto.

Nel corso di numerose mie ricerche, eseguite col metodo della stimolazione chimica sui centri corticali del giro sigmoideo nel cane (³), ho avuto occasione di osservare dei fenomeni, che mi hanno aperto la via ad una nuova serie di indagini sul rapporto tra i centri suddetti e la sensibilità cutanea, le quali tendono a precisare ed a illuminare ulteriormente la que-

(¹) Lavoro eseguito nel laboratorio di fisiologia della R. Università di Roma, diretto dal prof. L. Luciani

(²) L. Luciani, *Fisiologia dell'uomo*, IV ediz., vol. III, 1913.

(³) G. Amantea, Zentralbl. f. Phys., Bd. XXIV, n. 5; id., Arch. di farmac. sper. e sc. aff., vol. XIV, 1912; id., Arch. di fisiol., vol. XI, 1913; S. Baglioni e G. Amantea, *Mélanges biolog. déd. à Ch. Richet*, pag. 11, 1912; Arch. di farmac. sper. e sc. aff., vol. XVII, 1914, e Zeitschr f. biol. Technik u. Methodik, Bd. III; G. Amantea, Arch. di fisiol., vol. XII, 1914.

stione. Qui voglio appunto accennare al nuovo metodo sperimentale e alle mie prime osservazioni.

È un fatto bene accertato, che, quando si applica stricnina (in soluzione acquosa all'1 $^{0}/_{0}$) su un centro corticale del giro sigmoideo nel cane, si ottengono scosse cloniche e ritmiche del gruppo muscolare ad esso corrispondente, come per i primi hanno dimostrato S. Baglioni e M. Magnini (1). Ebbene, lavorando sotto la direzione di S. Baglioni, io ho potuto assicurarmi (2) che sono capaci di aumentare entro certi limiti la frequenza e l'intensità di queste scosse tutti gli eccitamenti provenienti dagli organi di senso superiori (specialmente da quello uditivo) e tutti gli eccitamenti afferenti (sensitivi) tattili o dolorifici partenti dalle regioni cutanee del corpo dell'animale, ciò che fa pensare a fenomeni di sommazione o di agevolazione.

Continuando le mie esperienze, mi accorsi, però, che tutto questo si verifica nel caso in cui l'eccitamento corticale indotto dalla stricnina ha raggiunto un grado relativamente elevato, o quando si siano fatte più applicazioni successive e sempre efficaci della sostanza, pur avendo avuto la massima cura (in ciò appunto consiste il fondamento del nostro metodo di stimolazione chimica) nel circoscriverne e limitarne l'azione. Mi fu dato anche di osservare che, nel periodo in cui si presentano le prime scosse cloniche spontanee, gli eccitamenti che provengono dagli organi di senso superiori possono riuscire inefficaci, mentre è già evidente l'influenza degli stimoli (tattili e dolorifici) portati sulla cute; ed anche questi ultimi non sono sempre efficaci su qualsiasi regione del corpo dell'animale, ma, talora, solo su determinate aree cutanee. Solo stimolando tali aree in simili casi la scosse divengono più numerose e più forti. Se poi l'eccitamento corticale indotto dalla stricnina diviene gradualmente più elevato, questa limitazione a mano a mano scompare, e tutta la cute dell'arto, che è sede dei muscoli in clono, risponde allora agli stimoli nel senso sopra accennato, come se fosse divenuta quasi iperestesica.

Però, anche nei casi, in cui si è ripetuta più volte successive l'applicazione di stricnina, e lo stato di eccitamento corticale è divenuto, da qualche tempo, massimo, si può spesso, mercè un esame accurato, accertare, che esiste in realtà una differenza tra l'effetto di stimolazioni eseguite sulle cute dell'intero arto, che presenta le contrazioni cloniche, e l'effetto di stimolazioni eseguite su altri punti della superfice cutanea: nel primo caso l'effetto è positivo e costante; nel secondo, spesso incerto o affatto mancante.

Ma il fenomeno da me osservato, e che mi parve degno della massima attenzione, è il seguente: il periodo delle scosse cloniche spontanee da stricnizzazione corticale è immediatamente preceduto da un altro, che può anche

(1) S. Baglioni e M. Magnini, Arch. di fisiol., vol. VI, an. 1909.
(2) S. Baglioni e G. Amantea, *Mélanges biolog. déd. à Ch. Richet*, pag. 21, 1912.

essere assai breve, ma che non manca mai, durante il quale le contrazioni cloniche si possono ottenere *solo in via riflessa*, stimolando regioni cutanee ben *circoscritte e determinate* dell'arto che è sede del clono. La cute di tali regioni sembra divenuta, come ho accennato più sopra, quasi iperestesica; e gli stimoli portati su di essa esplicano, al solito, la loro azione provocando una o più contrazioni successive del gruppo muscolare corrispondente al centro stricninizzato. Stimolando altre aree cutanee, ciò non si ottiene, e la differenza è spesso nettissima nel breve periodo in cui è dato osservarla.

Era logico di pensare, dopo ciò, che appunto il poter prolungare questo periodo, così da permettere una più agevole condizione di osservazione e una maggior precisione di indagine, avrebbe potuto costituire una nuova ed utile applicazione del nostro metodo di stimolazione chimica circoscritta corticale, mercè la stricnina.

Pensai di tentare la soluzione del problema, regolando o graduando l'applicazione della sostanza chimica in rapporto al vario e variabile grado di eccitabilità corticale degli animali (cani) da esperimento, in modo da ottenere, eventualmente, che le scosse cloniche, invece di manifestarsi in maniera spontanea, potessero destarsi *solo in via riflessa*, per azione di stimoli tattili o dolorifici applicati sulla cute. Le dosi di stricnina da noi di solito adoperate (soluzione all'1 %), il più delle volte determinavano troppo rapidamente, nel centro stimolato, il grado di eccitamento massimo, che si rivela colle scosse spontanee; e l'applicazione di stricnina in soluzioni più diluite e appropriate avrebbe forse potuto permettere di raggiungere lo scopo.

Così facendo, cioè applicando (sempre con la tecnica, per i particolari della quale rimando a quello che è stato altrove pubblicato [1]) soluzioni di stricnina di concentrazione crescente, dalla proporzione di 1 : 2000 a quella di 1 : 200, ho potuto accertare che *è possibile di trovare, per ogni cane su cui si esperimenta, una soluzione di stricnina di concentrazione tale, che, applicandola una o più volte successive sul centro corticale voluto del giro sigmoideo, ne modifichi la funzione, in maniera da rendersi efficaci su determinate aree cutanee stimoli tattili o dolorifici, prima inefficaci, i quali a loro volta destano in via riflessa una o più contrazioni cloniche successive di determinati gruppi muscolari.*

La concentrazione media sufficiente, nella maggior parte dei casi, mi risulta essere quella compresa tra 1 : 1000 e 1 : 500.

Dopo aver localizzato, mercè la corrente faradica, il centro sul quale si vuole sperimentare, si incomincia coll'applicarvi (servendosi di dischetti

[1] Baglioni e G. Amantea, Arch. di farm. sper. e sc. aff., vol. XVII, an. 1914; Zeitschr. f. biol. Technik u. Metodik, Bd. III.

di carta da filtro di 1-3 mm. di diametro) una soluzione debole, per poi passare, se è necessario, a quelle più forti. Prima e dopo l'applicazione della sostanza chimica sul centro, si saggia lo stato della sensibilità cutanea in modo rapido, servendosi di stimoli dolorifici, e confrontando i risultati che si possono ottenere su regioni corrispondenti dei due lati del corpo dell'animale. Le esperienze sono delicate, e richiedono pazienza e costanza.

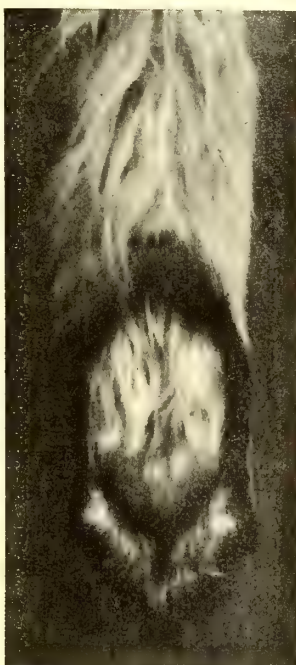



Fig. 1. Fig. 2.

In conclusione, non generose ablazioni e rilievo dei conseguenti sintomi di deficienza sensitivo-motrice, sì bene esaltamento dell'attività di singoli centri ben localizzati e rilievo delle eventuali connessioni funzionali con determinate aree cutanee e determinati gruppi muscolari: questo il fondamento della nuova tecnica, che mi sono proposto di seguire.

Finora ho potuto sperimentare già su parecchi cani, rivolgendo specialmente l'attenzione ai centri corticali per gli arti anteriori. E più volte ho potuto così osservare, per es., il seguente fatto: *quando si stricninizza il centro per l'estensione delle dita di un arto anteriore, l'area cutanea iperestesica si presenta generalmente circoscritta alla cute della superfice superiore o dorsale dell'estremità dell'arto stesso* (ved. fig. 1); *quando invece si applica la stricnina sul centro dei flessori delle dita, l'area iperestesica corrisponde alla cute della superfice plantare* (ved. fig. 2).

Già quello soltanto che ho esposto potrebbe bastare per numerose considerazioni, e per una discussione completa sul valore dei fenomeni osservati. Ma mi sembra più opportuno di limitarsi, per ora, al semplice rilievo dei fatti; chè quando altre osservazioni avranno completato quelle già eseguite, le considerazioni e le discussioni teoriche potranno trovarvi più ampia base di sostegno, guadagnando in efficacia.

Voglio solo fin da ora far notare che i fatti da me accennati possono considerarsi come l'espressione e la conferma insieme, del concetto limpidamente espresso dal Luciani, e ricordato al principio della presente Nota.

Fisiologia. — *Sull'adattamento degli anfibî all'ambiente liquido esterno, mediante la regolazione della pressione osmotica dei loro liquidi interni.* IV: *Il tempo entro il quale avviene la regolazione osmotica.* Nota di Bruno Brunacci, presentata dal Socio L. Luciani.

Un altro problema che mi sono proposto di risolvere è stato quello relativo *al tempo necessario alla rana esculenta estiva per mettersi in equilibrio osmotico coll'ambiente*, e ciò, tanto per gli animali trasportati dall'acqua dolce (acqua piovana di cisterna $\Delta = 0°,01$) in soluzione Ringer ipertonica, quanto per quelli che dall'ambiente ipertonico erano riportati nell'acqua dolce corrente.

Le esperienze sono state fatte tenendo i recipienti ove erano le rane, in locale a temperatura quasi costante (temperatura circa 12° C.) ed al buio (sotterraneo annesso all'Istituto).

Nelle tabelle 6ª e 7ª (serie *E*) sono trascritti i dati sperimentali ottenuti.

Per quanto concerne *le rane che dall'acqua dolce venivano poste nella soluzione Ringer ipertonica*, si constata che sono state necessarie 8-9 ore perchè i liquidi interni degli animali riuscissero non solo a raggiungere il livello di concentrazione molecolare iniziale dell'ambiente esterno, ma a sorpassarlo; mentre un tempo minore (6-7 ore) si mostrò insufficiente. Ciò si è osservato tanto per la soluzione Ringer ipertonica massima (contenente cioè il 10 ‰ di NaCl; cfr. esp. I, tab. 6ª), quanto per la soluzione Ringer meno concentrata (Na Cl gr. 9 ‰: cfr. esp. II, tab. 6ª).

Come ho detto nella Nota precedente, è caratteristico il fatto che la regolazione osmotica della rana avviene, nelle prime ore dell'adattamento, soprattutto a spese degli elettroliti, mentre nei giorni successivi essa è dovuta più a sostanze organiche osmoticamente attive costruite dall'organismo stesso dell'animale (cfr. tab. 4-5-6).

La linfa dei sacchi. scarsa nelle prime 6-7 ore, cresce, successivamente, moltissimo. L'urina si forma, invece, parecchio tempo più tardi della linfa.

Circa *le rane trasportate nell'acqua dolce corrente dopo aver soggiornato per varî giorni in ambiente ipertonico*, si nota che esse — già nelle prime 6-7 ore — non hanno quasi più linfa nei sacchi linfatici (della quale erano pieni), mentre non di rado si accumula una abbondantissima quantità di urina in vescica. Verso la decima ora di permanenza nell'acqua dolce corrente, anche l'urina scompare, infine, del tutto.

Sembra che le rane le quali avevano soggiornato in soluzione Ringer più concentrata (Na Cl gr. 10 $^{0}/_{00}$; esp. I, tab. 7^{a}) impieghino più tempo per adattare la concentrazione del loro sangue alle mutate condizioni di ambiente, di quelle che erano state tenute nella soluzione salina meno concentrata (Na Cl gr. 9 $^{0}/_{00}$; esp. II, tab. 7^{a}).

Ad ogni modo, *occorre minor tempo per far aumentare la concentrazione molecolare dei liquidi interni dell'animale, che non per far perdere ad essi la concentrazione maggiore, alla quale erano prima pervenuti.*

Il fatto, sul quale ho già richiamato l'attenzione nella Nota precedente (cioè che le rane, le quali hanno soggiornato in ambiente ipertonico, non riescono, se trasportate in acqua dolce, a raggiungere quel livello minimo di concentrazione molecolare del proprio sangue, al quale giungono invece gli animali posti direttamente nell'acqua dolce senza aver in precedenza soggiornato in soluzione Ringer concentrata), potrebbe anche essere spiegato ammettendo un più difficile passaggio di elettroliti dall'interno all'esterno dell'organismo. Ma l'aver osservato (cfr. Nota precedente) che le rane provenienti da altra località (Grosseto), tenute in identiche condizioni di quelle dei dintorni di Siena (stesso numero di giorni di permanenza in acqua di condotta sino a depurazione, e successivo soggiorno, di eguale durata, in acqua distillata), presentavano una maggiore concentrazione molecolare del loro sangue, può far pensare anche — come si disse — alla possibilità di una fissazione, nel sangue, di caratteri osmotici acquisiti dall'ambiente esterno.

Tabella 6ª.

Serie **E.**

Il tempo entro il quale avviene la regolazione osmotica.

a) *Rane escul. estive trasportate dall'acqua di condotta in soluzione ipertonica*

Num e data		Δ	$R_{22°}$ (in Ohm)	N tot. gr. %	Residuo secco a 110° C gr. %	Ceneri gr. %	Sostanze organiche gr. %	Osservazioni
1. I) Dopo 6-7 ore (28-29 VIII 1911)	Liquido ambiente	0°.665	19	—	—	—	—	Rane tenute in soluzione Ringer contenente circa il 10 ‰ di NaCl + gli altri sali in proporzione.
	Sangue defibrinato	0.605	32	—	—	—	—	Temperatura circa 12° C. All'oscuro.
	Siero dello stesso	0.630	24	0.5908	4.1900	0 3235	3 8665	Da 23 rane, niente *urina*; il *sangue* esce meglio che nelle rane tenute in acqua distillata, e coagula più facilmente. La *linfa* dei sacchi è scarsa (da 23 rane si ricavano circa 6-7 cmc. di linfa.
	Linfa defibrinata	0.645	27	0.2706	2.4266	0.4122	3.0144	
	Urina	—	. .	—	—	—	—	
» II) Dopo 8-9 ore	Liquido ambiente	0°635	19	—	—	—	. . .	Da 24 rane, solo 1 2 rane forniscono poche gocce di *urina*; le altre niente. Moltissimo *liquido* nei *sacchi linfatici* (da 24 rane circa 35 cmc.), spontaneamente coagulabile.
	Sangue defibrinato	0 685	31	—	—	—	. . .	
	Siero dello stesso	0.670	22	0.5880	4.1350	0 4108	3.7242	
	Linfa defibrinata	0 685	20.5	0.2016	2.0481	0.3660	1.6821	
	Urina	—	—	—	—	—	—	
» III) Dopo 27-28 ore	Liquido ambiente	0°.680	19	—	—	—	—	Da 19 rane, niente *urina*, molta *linfa* nei sacchi (da 19 rane, circa 25 cmc.). *Sangue* con abbondante coagulo. Poco liquido nei tessuti.
	Sangue defibrinato	0.685	25.5	—	—	—	—	
	Siero dello stesso	0.670	—	0.4806	3.6088	0 4389	3.1699	
	Linfa defibrinata	0.695	20.5	0 2464	2.3673	0 4390	1.9283	
	Urina	—	—	—	—	—	—	

Serie E.

(*segue*): TABELLA 6ª.

Il tempo entro il quale avviene la regolazione osmotica.

a) *Rane escul. estive trasportate dall'acqua di condotta in soluzione ipertonica.*

NUM. E DATA		Δ	$R_{22°}$ (in Ohm)	N tot. gr. %	Residuo secco a 110° C gr. %	Ceneri gr. %	Sostanze organiche gr. %	OSSERVAZIONI
2. I) Dopo 6-7 ore (4-5 VIII 1912)	Liquido ambiente	0°.560	21	—	—	—	—	Rane tenute in soluzione Ringer contenente circa il 9 ‰ di Na Cl + gli altri sali in proporzione.
	Sangue defibrinato	0.540	34	—	—	—	—	Temperatura ambiente circa il 12° C All'oscuro.
	Siero dello stesso	0.540	26	0.546	3.509	0.492	3.017	Da 18 rane, poca *linfa* (circa 6 cmc.) nei sacchi linfatici; intensamente colorata in giallo-citrino; molto coagulabile. Niente *urina*. *Sangue* più denso e più coagulabile che nelle rane tenute in acqua distillata.
	Linfa defibrinata	0.540	25	0.403	2.525	0.320	2.205	
	Urina	—	—	—	—	—	—	
» II) Dopo 8-9 ore	Liquido ambiente	0°.530	21	0.026	—	...	...	Da 19 rane, *linfa* dei sacchi poca (circa 7 cmc). Giallo-citrino-chiara; spontaneamente coagulabile. *Urina* pochissima (da 19 rane circa 3 cmc). *Sangue* come sopra.
	Sangue defibrinato	0.560	32	—	—	...	...	
	Siero dello stesso	0.545	25	—	3.465	0.242 (?)	3.223 (?)	
	Linfa defibrinata	0.555	27	0.431	2.376	0.400	1.976	
	Urina	—	—	0.257	—	—	—	
» III) Dopo 24-25 ore	Liquido ambiente	0°.570	20.5	0.014	—	—	—	Da 21 rane, *linfa* dei sacchi *molta* (circa 25 cmc.). *Urina* più abbondante delle precedenti (circa 7 cmc.). Liquido ambiente colorato in verdastro.
	Sangue defibrinato	0.580	30	—	—	—	—	
	Siero dello stesso	0.580	23	—	3.104	0.560	2.544	
	Linfa defibrinata	0.575	22	0.234	1.995	0.606	1.389	
	Urina	0.550	22	0.132	—	—	—	

Serie E. TABELLA 7ª.

Il tempo entro il quale avviene la regolazione osmotica.

b) *Rane escul. estive trasportate dalla soluzione ipertonica nell'acqua di condotta.*

NUM. E DATA		Δ	$R_{23°}$ (in Ohm)	N tot. gr. %	Residuo secco a 110° C. gr. %	Ceneri gr. %	Sostanze organiche gr. %	
1. I) Dopo 10 ore (8-9-IX-1911)	Liquido ambiente	—	—	—	—	—	—	(¹)
	Sangue defibrinato	0.540	38	—	—	—	—	
	Siero dello stesso	0 510	30	0.5506	3.8824	0.3100	3.5724	
	Linfa defibrinata	0.480	30	0.2668	1.9581	0.2277	1.7304	
	Urina	—	—	—	—	—	—	
» II) Dopo 24 ore	Liquido ambiente	—	—	—	—	—	—	(²)
	Sangue defibrinato	0.495	38	—	—	—	—	
	Siero dello stesso	0.485	30	0.490	3.5986	0.3084	3.2902	
	Linfa defibrinata	—	—	—	—	—	—	
	Urina	—	—	—	—	—	—	
2. I) Dopo 6-7 ore (11-VIII-1913)	Liquido ambiente	—	—	—	—	—	—	(³)
	Sangue defibrinato	0.490	35	—	—	—	—	
	Siero dello stesso	0.455	30	—	3.056	0.371	2.685	
	Linfa defibrinata	—	—	—	—	—	—	
	Urina	0.190	65	—	—	—	—	
» II) Dopo 8-10 ore	Liquido ambiente	—	—	—	—	—	—	(⁴)
	Sangue defibrinato	0.465	35	—	—	—	—	
	Siero dello stesso	0.445	30	—	2.919	0.331	2.588	
	Linfa defibrinata	—	—	—	—	—	—	
	Urina	—	—	—	—	—	—	

(¹) Rane restate 5 giorni in soluzione Ringer ipertonica (circa 10 ‰ di Na Cl), si mettono nell'acqua corrente di condotta (*acqua piovana di cisterna*). — *Dopo 10 ore,* niente *urina* in vescica. *Linfa* ancora presente, solo in alcune rane; nelle altre niente (da 5-6 rane se ne raccolgono cmc. 8 circa).

(²) *Dopo 24 ore,* niente *urina*; pochissima *linfa* (solo 4-5 rane ne hanno fornito 1-2 cmc. insufficienti alle ricerche).

(³) Rane restate 6 giorni in soluzione Ringer ipertonica (circa 9 ‰ di Na Cl), si mettono nell'acqua corrente di condotta (acqua di cisterna, piovana). — Da 18 rane, *dopo 6-7 ore,* la *linfa* che, appena poste nell'acqua di condotta, avevano tutte, è quasi completamente scomparsa. Solo 2-3 rane ne avevano, ma poca. Parecchia *urina* in vescica. Qualche rana, appena presa, entra in tetano e muore.

(⁴) *Dopo 8-10 ore,* da 18 rane, *niente linfa* nella massima parte di esse. Solo 2 rane ne avevano ancora (3-4 cmc.), coagulabile spontaneamente ed abbondantemente. *Urina* scarsissima; solo 2-3 rane ne avevano ancora un poco; le altre niente. — Centrifugando il *sangue* si nota un'*eccessiva scarsezza* di *corpuscoli rossi* mentre il siero si presenta di colore rosso-mattone scuro (*emolisi accentuata* con disfacimento corpuscolare (?)).

Fisiologia. — *Sull'adattamento degli anfibî all'ambiente liquido esterno mediante la regolazione della pressione osmotica dei loro liquidi interni*: VII. *Importanza della vescica urinaria*. VIII. *I fenomeni dell'adattamento nelle rane escul. ibernanti*. Note del dott. B. Brunacci, presentate dal Socio L. Luciani.

Chimica fisiologica. — *Sulla possibilità di titolare al formolo l'azoto aminico monosostituito*. Nota del dott. Antonino Clementi, presentata dal Socio L. Luciani.

Le Note precedenti saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente da il triste annuncio della morte del Corrispondente prof. Arturo Marcacci, avvenuta il 19 gennaio 1915; apparteneva il defunto all'Accademia, per la *Fisiologia*, sino dal 14 luglio 1907. Comunica anche la morte del Socio straniero prof. Arturo von Auwers, mancato ai vivi il 24 gennaio 1915; faceva parte il defunto dell'Accademia, per l'*Astronomia*, sino dal 7 settembre 1888. Ed annuncia che la Classe deve deplorare anche la perdita del Socio straniero John Murray, il quale apparteneva all'Accademia per la *Zoologia* e *Morfologia*, sino dal 9 settembre 1912.

Il Corrisp. Reina legge la seguente Commemorazione del prof. Adolfo Venturi:

Il giorno 28 dicembre 1914 spegnevasi in Palermo, dopo breve malattia, il prof. Adolfo Venturi, docente di Geodesia teoretica e di Meccanica superiore in quella Università. La luttuosa notizia, diffusa al chiudersi dell'anno, riempiva di amaro cordoglio colleghi, amici, discepoli.

Nato a Firenze il 22 settembre 1852, Egli compiva i suoi studî nella Università di Pisa, ottenendovi la laurea nella Facoltà fisico-matematica (1875), e tosto veniva nominato professore di matematica nel Liceo di Como. Fornito di soda cultura matematica, desideroso di ricerca, non abbandonava gli studî superiori, ma con operosa costanza dedicava le proprie forze ad approfondire le teorie della Meccanica celeste, impiegandovi le ore lasciate libere dall'insegnamento, e nel 1879 pubblicava il suo primo lavoro *Teoria del*

moto della Terra intorno al suo centro di gravità. Il lavoro è di natura monografica, il classico problema già essendo stato risoluto per opera di Eulero, D'Alembert, Laplace, Poisson, Serret ed altri; ma la chiara esposizione, la armonica funzione dei risultati da altri ottenuti con procedimenti diversi, la sicurezza nel maneggio delle funzioni sferiche ed ellittiche, e gli sviluppi originali intesi a completare e raffinare la soluzione nelle varie sue parti, già dimostravano che il Venturi, se da un lato nutriva l'aspirazione di percorrere la carriera degli studî superiori, possedeva dall'altro la tempra a ciò occorrente.

Poco dopo (1883), negli Annali della Scuola normale superiore di Pisa, pubblicava la dissertazione *Sul moto perturbato delle comete*, nella quale, pur seguendo nelle sue linee generali un metodo dovuto ad Hansen, lo modifica opportunamente con un mutamento di variabile, in guisa da ottenere serie molto più convergenti di quelle impiegate dallo stesso Hansen.

In quell'epoca il prof. Schiaparelli, direttore dell'Osservatorio di Brera, compieva i suoi memorabili studî sulle comete, le stelle cadenti, la topografia di Marte ecc., ed era ben naturale che il giovane studioso della meccanica dei cieli si sentisse attratto verso l'astro maggiore. Incominciarono a diventar frequenti le escursioni fra Como e la vicina Milano, ed il Maestro non mancò di essere largo di consigli e di aiuto al giovane scolaro così pieno di fede e di ardore. Ne uscì un lavoro di gran peso: *Il metodo di Hansen per calcolare le perturbazioni dei piccoli pianeti, interamente rifuso.* La esposizione del metodo, fatta dallo stesso Hansen, era involuta ed oscura, così che pochi erano gli astronomi i quali, rendendosene ragione, erano in grado di poterlo con piena conoscenza applicare. Il Venturi riprende il problema dalle sue basi, trascura tutto ciò che non è strettamente legato all'argomento, introduce nuove variabili atte a semplificare gli sviluppi ed a facilitare la costruzione delle Tavole, scopo ultimo della ricerca, come quelle che debbono essere messe a disposizione dell'astronomo calcolatore, ed imprime a tutto il lavoro un carattere personale e quasi di originalità. Occorreva però ancora mettere alla prova in un caso pratico la facilità di applicazione dei procedimenti sviluppati; ed anche questo viene fatto con pieno successo in un ulteriore lavoro, *Le perturbazioni assolute di Feronia (72) prodotte dalla attrazione di Giove.*

I due poderosi lavori, presentati alla Accademia dei Lincei al concorso per l'Astronomia scaduto il 31 dicembre 1884, ottenevano il premio reale nel 1886.

Questa solenne attestazione di merito costituiva la miglior prova che il Venturi era oramai preparato ad entrare nella carriera universitaria, e l'occasione non tardò a presentarsi. Nel 1888 veniva aperto il concorso alla

cattedra di Geodesia teoretica nella Università di Palermo, ed Egli vi si presentava solo. La Commissione esaminatrice non esitava a pronunciare un giudizio pienamente favorevole, pur notando come i titoli esibiti non rispondessero strettamente alla natura della cattedra, nè costituissero una prova della attitudine del concorrente a ricerche sperimentali e d'osservazione. Opinava però, in pari tempo, non essere svantaggioso alla scienza imprimerle nelle diverse cattedre un diverso indirizzo; così che, mentre in talune era dato maggior risalto alla parte pratica, potevasi con proficuità dare in altre prevalente sviluppo a corsi teorici.

Mente versatile, dotata di grande adattabilità, il Venturi risponde da par suo alla fiducia in lui riposta dalla Commissione esaminatrice, e, passando a Palermo, muta completamente l'indirizzo delle sue ricerche, dedicandosi a tutt'uomo a lavori di osservazione e di Geodesia operativa. Suo primo pensiero è di creare una Specola geodetica sull'edificio della Scuola degli ingegneri, e di collegare questa e l'Osservatorio astronomico alla rete trigonometrica di 1° ordine dello Stato. Provvede degli strumenti occorrenti il suo nascente Gabinetto, ne fa uno studio accurato, traccia e misura la rete di riattacco, la assoggetta al calcolo di compensazione valutandone il grado di precisione, fa il trasporto della latitudine e della longitudine geodetica lungo i lati della rete, ne fa il confronto colla latitudine e colla longitudine astronomica dell'Osservatorio, e perviene così alla determinazione della attrazione locale. Questo primo lavoro, che doveva servire di modello ad altri compiuti successivamente in Italia, è condotto con grande perizia, e già rivela il provetto geodeta.

Ma qui Egli non si arresta: ricostruita e provveduta di apposita copertura metallica la Specola geodetica della Martorana, vuole effettuarvi una determinazione astronomica di azimut, assumendo come direzione di riferimento quella di monte Alfano, e basandosi sui puntamenti di α e δ *Ursae minoris*.

A queste misure aggiunge più tardi una determinazione astronomica di latitudine fatta sia col metodo delle distanze zenitali circummeridiane, sia col metodo Besseliano di passaggi nel 1° verticale, e può così determinare per la Specola geodetica le due componenti della attrazione locale rispetto a Castanèa, punto origine per la rete di 1° ordine della Sicilia.

In pari tempo rivolge il pensiero ad un altro problema, di indole tanto fisica quanto geodetica: quello della rifrazione terrestre. Mentre il fenomeno era stato replicate volte studiato all'estero, presso di noi non si avevano che alcune ricerche fatte nel nord d'Italia, in occasione di lavori di triangolazione, per iniziativa dell'Istituto geografico militare, e per opera del prof. Pucci e del colonnello De Stefanis. Il Venturi, desideroso di portare il suo contributo alla soluzione dell'interessante problema, si associa il proprio assistente prof. Soler, e con lui compie una serie di misure di distanze

zenitali reciproche contemporanee fra due punti trigonometrici (Terrazza delle Società di Acclimazione, Semaforo di Capo-Gallo) dei quali vengono prima determinate con grande cura le posizioni geografiche, mentre il dislivello è ricavato dalle stesse misure eseguite. Per controllare i risultati ottenuti con questo primo procedimento, effettua una lunga serie di misure di zenitali marine, tenendo rigorosamente conto delle variazioni del livello del mare, date dal mareografo. Giunge così a determinare il coefficiente medio della rifrazione terrestre in Sicilia, trovandolo più basso che non in altri paesi.

Mentre si dedica a questi lavori di osservazione, non dimentica però gli studî prediletti di Meccanica celeste. Nel 1890-91 ottiene l'incarico di tale materia nella Università, ed a partire da quell'epoca alterna nei corsi la teoria delle orbite e delle loro perturbazioni, colla teoria della forma dei pianeti e delle maree. Intorno alla stessa epoca fa il calcolo della cometa 1890 IV (Zona) avente un'orbita allungatissima, per determinare la quale non dispone che di osservazioni distribuite su un arco di circa 20°. Fa uso del metodo delle formole differenziali di Schönfeld, e dopo aver dato una valutazione delle deformazioni dell'orbita corrispondenti a determinati piccoli spostamenti dei luoghi normali, esamina e discute i risultati che si ottengono quando, invece di una conica libera, si assuma a base del calcolo una conica vincolata.

Su argomenti di Meccanica celeste torna altre due volte; in occasione cioè del discorso *Le dottrine positive nei dinamismi del Cielo*, letto per la inaugurazione della Università di Palermo nel 1897, ed in una recente pubblicazione del 1913, *Uno sguardo alla teoria delle orbite*, nella quale fa un esame della terza edizione della Astronomia teorica di Klinkerfuess elaborata dal dott. Buchholz. Ma prima di addentrarsi nella recensione dell'opera, passa in rassegna sintetica le principali pubblicazioni riguardanti la determinazione delle orbite, distinguendole secondo due scuole, quella fondata da Laplace e quella che ha a capo Gauss, e fa un raffronto fra i due ordini di procedimenti, mettendone in evidenza i vantaggi relativi. Questa rapida sintesi, condotta con grande acume, mostra ad evidenza quale assoluta padronanza egli avesse del difficile argomento e con quanta predilezione lo coltivasse.

Resta da rendere conto di un ultimo gruppo di lavori che occuparono l'attività del prof. Venturi negli ultimi anni: i lavori gravimetrici.

È ben noto quanto difficili, laboriose e delicate siano le misure *assolute* di gravità, ciò che spiega perchè tanto scarso sia stato fino ad ora il loro numero, e perchè tre sole se ne contino in Italia: una a Milano (Biot), una a Padova (Lorenzoni), ed una a Roma (Pisati e Pucci). Ma nel decennio fra il 1880 ed il 1890 una vera riforma effettuavasi in questo campo: per

opera soprattutto di Roberto von Sterneck, veniva costruito un apparato atto a fare determinazioni *relative* o *differenziali* di gravità, così compendioso nella forma e facile di maneggio e di trasporto, da essere tosto riprodotto con successo nei varî paesi e da permettere il rapido moltiplicarsi delle misure gravimetriche. Con un tale apparato il prof. Riccò, fin dal 1896, iniziava una numerosa serie di determinazioni nella regione orientale della Sicilia, facendole dipendere dal valore assoluto della gravità a Vienna (sistema di Vienna); ed a lui tosto faceva sèguito il prof. Venturi per la parte occidentale e le isolette circostanti, usando un apparato analogo, ma con mensola a muro, acquistato per conto del suo Gabinetto.

Le determinazioni del prof. Venturi, iniziate nel 1899, proseguirono fino al 1910, comprendendo 32 stazioni, tre delle quali scaglionate in Tunisia ed una nell' isola di Malta. Esse pure appartengono al sistema di Vienna e sono, per mezzo della stazione comune di Milazzo, collegate con quelle del prof. Riccò. Le misure riunite dei due operatori hanno permesso di costruire la carta delle linee isoanomale della Sicilia, la quale mostra come le anomalie della gravità, negative nel centro dell' isola e quasi evanescenti in corrispondenza all'Etna, vadano crescendo verso la costa e sui mari, assumendo grandi valori sul mar Tirreno e sul mar Jonio che sono profondi, mentre assumono valori assai più bassi sulle coste sud-occidentali dell' isola e sulle coste affacciate della Tunisia, dove il mare presenta poca profondità: il che, a parere dello stesso prof. Venturi, potrebbe forse gettare un pò di luce sulla questione, tanto dibattuta dai geologhi, circa la possibile antichissima congiunzione delle due coste.

L'ultima Nota sull'argomento venne dal prof. Venturi presentata alla nostra Accademia nell'ottobre 1914; ed in essa Egli si riprometteva di riunire ed illustrare, con una Nota ulteriore, tutti i risultati ottenuti. Il suo desiderio doveva, pur troppo, andare frustrato.

A questo gruppo di lavori se ne connettono altri due di indole teorica. L'uno è una esposizione teorica e critica della *Bilancia di torsione di Eötvös*, il nuovo ingegnoso apparato escogitato dal professore di fisica dell'Università di Buda-Pest, per determinare il gradiente orizzontale della gravità. L'altro lavoro, *Gli integrali generali del moto del bipendolo in relazione a movimenti orizzontali intrinseci od estrinseci del supporto*, contiene una esauriente discussione teorica su un problema assai dibattuto negli ultimi anni. Per quanto sicure siano le misure relative di gravità rispetto a quelle assolute, sono però esse pure soggette ad una causa di errore che può, in determinate circostanze, divenir grave: la oscillazione del supporto del pendolo. È per questo motivo che il supporto originario (tripode metallico sostenuto da un pilastro), per il quale l'oscillazione risultava notevole, venne sostituito dalla mensola a muro, colla quale l'oscillazione riesce sempre assai piccola, mentre altri operatori cercarono di risolvere il problema di deter-

minare quantitativamente la correzione da applicarsi alla durata di oscillazione del pendolo per ridurla a supporto rigido, ricorrendo agli apparati bipendolari, tripendolari e quadripendolari.

Il prof. Venturi stabilisce nel suo lavoro le equazioni generali del moto contemporaneo di due pendoli e del loro supporto, e scendendo poi ai casi particolari, ne trae interessanti conclusioni circa la validità di impiego dei varî apparati pendolari.

La carriera del prof. Venturi fu facile e piana. Dal Liceo di Como, sua prima sede, passava all'Università di Palermo, e lì restava fino al termine di sua vita. Socio corrispondente della Accademia dei Lincei, membro della Commissione geodetica italiana, vice-presidente della Accademia di Palermo, presidente della Società palermitana di scienze naturali ed economiche, a tutte queste istituzioni scientifiche portava il contributo della sua operosità, l'operosità calma dell'uomo sereno, contento della propria posizione.

Sua caratteristica fu l'affezione costante per gli uomini e le cose. A Como egli soleva tornare quasi ogni anno nella stagione autunnale, spinto dal desiderio di rivedere il bel lago ed i monti testimonî della sua feconda operosa giovinezza, quasi chiamato dal bisogno di rivedere gli antichi scolari; e questi, animati da un durevole sentimento di gratitudine, festosamente accoglievano l'antico professore che, col magistero di una parola limpida e chiara, aveva reso loro facile una materia difficile.

Ma la maggior somma del suo affetto era riservata a Palermo, sua patria di adozione. Rettore della Università dal 1899 al 1903, dedicava tante cure all'alto ufficio da meritare di essere ricordato in una lapide collocata sull'ingresso del restaurato Ateneo; e la benefica sua azione direttrice proseguiva fino all'ultimo, come preside della Facoltà di scienze fisiche e matematiche.

Se la vista dell'incantevole golfo più non rallegra lo sguardo suo, se le aure profumate che discendono dalla Conca d'Oro alla marina più non alimentano il nobile spirito indagatore, l'esempio di sua vita così pura e serena è per noi incitamento a bene operare.

PUBBLICAZIONI DEL PROF. ADOLFO VENTURI

Teoria del moto perturbato della Terra intorno al suo centro di gravità. Como, 1879.

Sul moto perturbato delle comete. Annali della Scuola normale di Pisa, 1883.

Metodo di Hansen per calcolare le perturbazioni dei piccoli pianeti. Pubblicazioni del R. Osservatorio di Brera in Milano, n°. XXII, 1882.

Le perturbazioni assolute di Feronia (72) prodotte dalla attrazione di Giove. Mem. della R. Acc. dei Lincei, serie IV, vol. III, 1885-86.

Di una notevole semplificazione nel calcolo delle perturbazioni dei piccoli pianeti. Pubbl. del R. Oss. di Brera in Milano, n°. XXVIII, 1886.

Influenza che la rifrazione astronomico-geodetica esercita sulla formazione dell'immagine del Sole nascente, riflessa sul mare. Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1889.

Formazione delle immagini di oggetti celesti o terrestri sulle grandi superficie liquide della terra. Mem. degli spettroscopisti italiani, 1889.

Nuova determinazione della deviazione locale in latitudine e longitudine dell' Osservatorio di Palermo. Giornale di scienze naturali ed economiche, vol. XX, Palermo, 1890.

Sopra un caso generale di compensazione angolare. Rendic. del Circolo matematico di Palermo, 1890.

Orbita definitiva della Cometa 1890 IV (Zona). Giorn. di scienze naturali ed economiche di Palermo, 1891.

Azimut di monte Alfano sull' orizzonte della Specola geodetica della Martorana in Palermo. Pubblicazioni della R. Commissione geodetica italiana, Palermo 1892.

Relazione sul nuovo strumento universale Salmoiraghi. Giornale « Il Politecnico », Milano, 1892.

Prime ricerche sul coefficiente di rifrazione in Sicilia. Atti della R. Acc. di Palermo, 1893 (in collaborazione col prof. E. Soler).

Sulla latitudine della Specola geodetica della Martorana in Palermo. Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1897.

Sul coefficiente di rifrazione in Sicilia (secondo contributo). Rivista di topografia e catasto, vol. X, Torino 1897-98 (in collaborazione coll'ing. A. Loperfido).

Sopra alcune proprietà rappresentative degli angoli, e sulla proiezione isodromica. Rivista geografica italiana, Firenze 1898.

Le dottrine positive dei dinamismi del Cielo (Discorso letto il 22 novembre 1897 per la inaugurazione dell' anno accademico). Annuario della R. Università di Palermo, 1898.

Azimut della lanterna del Faro sull'orizzonte della Specola geodetica della Martorana in Palermo. Giorn. delle scienze naturali ed economiche, vol. XXII, Palermo 1899.

Sulla compensazione dei risultati nelle misure di gravità relativa terrestre. Nuovo Cimento, Pisa 1900.

Determinazioni di gravità relativa nella regione occidentale della Sicilia. Atti della R. Acc. di Palermo, 1901.

Nuove determinazioni di gravità relativa in Sicilia. Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1905.

Riassunto dei lavori di collegamento e di verifica del valore della gravità in Palermo. Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1906.

Terza campagna gravimetrica in Sicilia nel 1905. Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1907.

Teoria della bilancia di torsione di Eötvös. Atti della R. Acc. di Palermo, 1908.

Quarta campagna gravimetrica in Sicilia, nel 1906. Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1909.

Determinazioni complementari di gravità in Sicilia nel 1907. Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1910.

Gli integrali generali del moto del bipendolo in relazione a movimenti orizzontali intrinseci od estrinseci del supporto. Atti della R. Acc. di Palermo, 1911.

Determinazioni di gravità relativa in Tunisia e a Malta nel 1908. Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1912.

Determinazioni complementari di gravità in Sicilia, eseguite nel 1910. Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1914.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle del Socio TARAMELLI, dei Corrispondenti BERLESE e CANAVARI, e del prof. LOVISATO. Fa inoltre particolare menzione del tomo I delle *Opere complete* di TOMMASO JAN STIELTJES, pubblicate dalla Società matematica di Amsterdam.

Il Socio VOLTERRA presenta in omaggio, a nome dell'autore prof. ERNESTO LEBON, il rapporto che egli ha comunicato nel 1914 sui lavori compiuti dall'Associazione francese per l'avanzamento delle scienze; ne discorre e ricorda i rapporti dell'Associazione stessa con scienziati italiani e colla Società italiana per il progresso delle scienze. Lo stesso Socio offre anche una copia dei *Verbali delle sedute dell'anno accademico 1913-1914* del Seminario matematico della Facoltà di scienze della R. Università di Roma.

CONCORSI A PREMI

Il Segretario MILLOSEVICH dà comunicazione del seguente:

Elenco dei lavori presentati ai concorsi ai premî
del Ministero della Pubblica Istruzione, per le *Scienze fisiche e chimiche.*
(Scadenza 31 dicembre 1914. — Due premî, di L. 2000 ciascuno).

1. AMERIO ALESSANDRO. 1) « Fondamenti e progressi della tecnica dell'illuminazione: parti I e II » (st.). — 2) « Azioni di una corrente elettrica e di un campo magnetico trasversale nella magnetizzazione di un filo di ferro » (st.). — 3) « Ricerche sullo spettro e sulla temperatura della fotosfera solare » (st.). — 4) « Lo spettro, la temperatura e lo splendore del cratere nell'arco a carboni, in relazione con la questione dei proiettori » (st.). — 5) « Il cratere del carbone positivo, e la legge del coseno » (st.). — 6) « Equivalenti e rendimenti luminosi dell'energia raggiante » (ms).

2. BERNINI ARCIERO. 1) « Sulle apparenti variazioni della velocità specifica degli joni di fiamma, col campo » (st.). — 2) « Sulla velocità specifica degli joni uscenti dall'arco elettrico » (st.). — 3) « Sul magnetismo susseguente del ferro: parti III, IV e V » (st.). — 4) « Id. id, parte VI » (ms.). — 5) « Ricerche sul magnetismo susseguente nel ferro elettrolitico, nel nichel e cobalto » (ms). — 6) « Sulla dilatazione termica del sodio, del potassio e del litio » (st.).

3. Calcagni Luigi Gennaro. 1) « Azione dei fenoli e degli alcoli sull'etere diazo-acetico » (st.). — 2) « Studî sulla capacità degli ossidrili alcoolici a formare complessi » (st.) — 3) « Basicità degli acidi organici contenenti ossidrili alcoolici » (st.). — 4) « Solfati anidri » (st.). — 5) « I fondamenti della chimica organica » (ms.).

4. Castelli Enrico. « La costituzione delle stelle: saggio di astrofisica elementare (con fig.) » (st.).

5. Coppadoro Angelo. 1) « L'equilibrio nel sistema ternario: nitrato di bario, nitrato di sodio e acqua » (st.). — 2) « Gli equilibrî nel sistema: cloruro di bario, nitrato di sodio, nitrato di bario, cloruro di sodio e acqua » (st.). — 3) Il problema della potassa e l'utilizzazione delle acque madri delle saline » (ms.). — 4) « La trasmutazione degli elementi » (st.). — 5) « La nuova pila elettrica a combustibile, di W. Nernst » (st.). — 6) « I vincitori dei premî Nobel per la chimica e per la fisica, nel 1913 » (st.). — 7) La sintesi del diamante » (st.).

6. Drago Ernesto. 1) « Influenza delle scariche oscillatorie e delle onde elettriche sulla rapidità di smorzamento delle oscillazioni torsionali di fili di ferro » (st.). — 2) « I pericoli delle correnti elettriche » (st.) — 3) « Sull'attrito interno del nichel in campo magnetico variabile » (ms.).

7. Perucca Eligio. 1) « Analisi di vibrazioni luminose debolmente ellittiche, e descrizione di un nuovo apparecchio a penombra » (st.). — 2) « Sull'analizzatore ellittico di Bravais-Zakrzewski » (st.). — 3) « Il potere rotatorio dei cristalli misti $NaClO_3$ - $AgClO_3$ » (st.). — 4) « Ueber zirkularen Dichroismus des Amethysts » (st.). — 5) « Due noterelle di fisica elementare » (ms.). — 6) « Sull'azione magnetica della luce » (ms.).

8. Platania Giovanni. 1) « Misure della lava fluente dell'Etna » (st.). — 2) « Osservazioni dei punti neutri della polarizzazione atmosferica » (st.). — 3) « Osservazioni pireliometriche eseguite durante l'eclisse del 17 aprile 1912 (in collaborazione col prof. A. Bemporad) » (st.). — 4) « Temperatura superficiale del mare intorno all'isola dei Ciclopi » (st.). — 5) « Il maremoto del 23 ottobre 1907 in Calabria, e la propagazione delle onde di maremoto » (st.). — 6) Le oscillazioni del mare nel golfo di Catania » (st.). — 7) « Osservazioni dei punti neutri della polarizzazione atmosferica eseguite in Catania nel 1912 » (st.). — 8) « Le recenti variazioni del livello del mare in Italia, e la causa del terremoto di Messina e Reggio nel 1908 » (st.). — 9) « Risultati delle osservazioni sul maremoto dello stretto di Messina, 28 dicembre 1908 » (st.). — 10) « Il pulviscolo vulcanico dell'alta atmosfera, e la radiazione solare » (st.). — 11) « Osservazioni dei punti neutri della polarizzazione atmosferica eseguite in Catania negli anni 1913-14 » (st.).

9. Quartaroli Alfredo. 1) « Sulle soluzioni citrofosfatiche » (st.). — 2) « Sull'idrolisi del nitrato di bismuto » (st.). — 3) « Sulle cause d'errore

nella precipitazione del fosfato ammonico-magnesiaco in presenza di citrato ammonico » (st.). — 4) « Ricerche sull'azione dei sali di magnesio sui complessi di alluminio, ferro e bismuto con sostanze organiche » (st.). 5) « Sull'impiego del citrato ammonico nella determinazione dell'acido fosforico » (st.). — 6) « Su di un metodo qualitativo per lo studio della suscettività magnetica delle soluzioni » (st.). — 7) « Suscettività magnetica e dissociazione elettrolitica » (st.). — 8) « Sull'apparente lentezza dell'idrolisi dei sali ferrici » (ms.). — 9) « Sul significato della dipendenza fra suscettività magnetica e dissociazione: associazione fra ioni e solvente » (ms.).

10. Romegialli Emilio Abelardo. « Studio chimico della *cloche*, ossia dei materiali per la fabbricazione dei cappelli detti di feltro di pelo (con album » (ms).

11. Stefanini Annibale. 1) « Le applicazioni della fonetica sperimentale alla clinica » [con G. Gradenigo e C. Biaggi] (st.). — 2) « Alcune esperienze di acustica » (st.). — 3) Sull'influenza delle membrane e dei tubi nella registrazione delle onde sonore » (st.). — 4) « Sull'uso dei tubi di risonanza nella determinazione della tonalità dei suoni e dei rumori deboli » (st.). — 5 « Sulla determinazione del modulo di elasticità dei solidi » (st.). — 6) Alternatore pendolare elettromagnetico » (bozze di stampa). — 7) « Nuovi studî sulle vocali » (ms.). — 8) « Conferenza sperimentale della teoria Cotugno-Hebnholtz sulla percezione dei suoni » (ms.). — 9). « La teoria della risonanza per la percezione dei suoni » (ms.).

AFFARI DIVERSI

Il Segretario Millosevich, dopo aver riassunta l'opera della spedizione De Filippi al Karakoram ed aver messa in rilievo l'importanza dei risultati ottenuti dalla spedizione stessa, a nome della Presidenza presenta il seguente voto:

« La Reale Accademia dei Lincei, nell'odierna Seduta della Classe delle Scienze fisiche, matematiche e naturali, mentre esprime il suo compiacimento per l'esito felicissimo della Spedizione De Filippi nell'Asia centrale con carattere scientifico intensivo in una zona di arduo accesso e per buona parte fino ad ora inesplorata, fa voti che il Regio Governo, auspice S. E. il Ministro dell'Istruzione, voglia fornire nella misura e coi mezzi, che stimerà più adatti, i fondi necessari perchè tutto il materiale raccolto e studiato e tutte le osservazioni scientifiche compiute trovino il debito posto in una serie di volumi, che conservino il frutto di tante fatiche a vantaggio della scienza e ad onore dell'Italia ».

Il voto precedente viene approvato all'unanimità.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL' ACCADEMIA
presentate nella seduta del 7 febbraio 1915.

BERLESE A. — Acari nuovi. (Estr. dal « Redia » vol. X). Firenze, 1914. 8°.

BERLESE A. — La distruzione della *Diaspis pentagona* a mezzo della *Prospaltella Berlesei* (Estr. dal « Redia », vol. X). Firenze, 1914. 8°.

COLOMBA L. — Speziaite, nuovo anfibolo di Traversella. (Estr. dagli « Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino », vol. 49). Torino, 1914. 8°.

DI-STEFANO G. — La richthofenia dei calcari con fusulina di Palazzo Adriano nella valle del fiume Sosio. Tav. I-III. (Estr. dalla « Palaeontographia italica, vol. XX). Pisa, 1914. 8°.

GOEBEL K. — Organographie der Pflanzen. Zweite Auflage; erstel Teil. Allgemeine Organographie. Iena, 1913. 8°.

LOVISATO D. — Altre specie nuove di *Clypeaster Scutella* ed *Amphiope* della Sardegna. (Estr. da « Riv. ital. di Paleontologia ». an. XX). Parma, 1914. 8°.

IANET Ch. — L'esthétique dans les sciences de la nature. (Estr. du « Bulletin de la Societé zoologique de France », 1900). Paris, 1900. 8°.

RIVERA V. — Ricerche sperimentali sulle cause predisponenti il frumento alla « Nebbia ». (*Erysiphe graminis* D. C.). Roma, 1915. 8°.

STIELTJES T. I. — Oeuvres complètes. T. I. Groningen, 1914. 8°.

TARAMELLI T. — Sulla storia geologica del Garda. Novara, 1914. 8°.

TURATI E. — Revisione di una specie di erebia: *Erebia Alecto* Hb, (*nerine* Frr.) Estr. dagli « Atti della Società italiana di Sc. natur. », vol. LIII). Pavia, 1914. 8°.

PERSONALE ACCADEMICO

PRESENTAZIONE DI LIBRI

CONCORSI A PREMI

AFFARI DIVERSI

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 febbraio 1915.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Segue in terza pagina.

(*) Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

(**) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 12 marzo 1915.* N. 4.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 febbraio 1915.

Volume XXIV°. — Fascicolo 4°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 febbraio 1915.

F. D' Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica matematica. — *Sulle eorrenti elettriche in una lamina metallica sotto l'azione di un campo magnetico.* Nota II del Socio Vito Volterra.

15. La funzione coniugata di $\log r_A$ è θ_A, denotando con questo simbolo l'angolo che il raggio vettore spiccato dal punto A forma con una direzione fissa; $-\frac{m}{2\pi}\theta_A$ è il potenziale di un vortice situato in A, di momento m [1]. Quindi, se si ha in A un elettrodo puntiforme da cui entra la corrente J, il corrispondente potenziale sarà (§ 7)

$$-\frac{J}{2\pi K}\log r_A\,,$$

e la corrispondente funzione fondamentale

$$-\frac{J}{2\pi K}(\log r_A+\lambda\theta_A)=\frac{J}{2\pi K}\log\frac{1}{r_A}-\frac{\lambda J}{2\pi K}\theta_A\,;$$

dunque *la funzione fondamentale corrispondente ad un elettrodo punti-*

[1] Supposta l'orientazione degli assi x e y come è indicata nella figura 1 del § 2, noi supponiamo di contare l'angolo θ_A nel senso contrario a quello secondo cui ruotano le lancette di un orologio, mentre ammettiamo che un vortice di momento positivo ruoti nel verso delle lancette di un orologio.

forme in A, *ove entra la corrente di intensità* J, *è il potenziale logaritmico di una massa* $\frac{J}{2\pi K}$ *e di un vortice di momento* $\frac{\lambda J}{K}$ *situato nel punto* A.

Questo resultato può enunciarsi dicendo che l'azione del campo magnetico sulla distribuzione delle correnti si esplica, modificando la funzione fondamentale, coll'aggiungere ad ogni elettrodo un vortice il cui momento è eguale alla intensità moltiplicata per λ divisa per la conducibilità, mentre si mantiene nulla la derivata normale della funzione fondamentale nei punti del contorno libero ed isolato [1].

La funzione θ_A è polidroma: quindi la funzione fondamentale è una funzione polidroma, la quale ha per punti di diramazione gli elettrodi. Dunque, mentre il potenziale è monodromo, e gli elettrodi puntiformi sono i punti di infinito logaritmico, la funzione fondamentale ha negli elettrodi punti di infinito logaritmico e di diramazione.

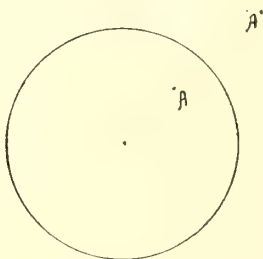



Fig. 12.

16. Supponiamo, adesso, che la lamina sia circolare, e la corrente entri ed esca da elettrodi puntiformi interni. Cerchiamo di calcolare l'effetto del contorno C (che è di render nulla la derivata normale della funzione fondamentale) coll'aggiunta di masse e di vortici immagini distribuiti nei punti reciproci degli elettrodi interni rispetto al contorno.

Sia A_1 il punto reciproco dell'elettrodo A. Se in A_1 disponiamo una massa $\frac{J}{2\pi K}$, il potenziale logaritmico delle due masse $\frac{J}{2\pi K}$ distribuite in A e A_1 avrà la derivata normale lungo C eguale a

$$-\frac{J}{2\pi KR},$$

[1] L'aggiunta del vortice per l'azione del campo magnetico resulta ben naturale quando si pensi all'azione deviatrice prodotta dal campo stesso sul moto degli elettroni nell'intorno dell'elettrodo.

essendo R il raggio del contorno; e se in A_1 disponiamo un vortice di momento

$$-\frac{\lambda J}{K},$$

il potenziale dei due vortici di momenti $-\frac{\lambda J}{K}$ e $\frac{\lambda J}{K}$ disposti in A_1 e A avrà la derivata normale nulla al contorno.

Tenendo presente che le somme algebriche delle intensità delle correnti che entrano dai varî elettrodi interni è nulla, si otterrà dunque, come espressione della funzione fondamentale,

$$(9) \qquad U = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} \{ \log r_A + \log r_{A_1} + \lambda\theta_A - \lambda\theta_{A_1} \},$$

essendo estesa la somma a tutti gli elettrodi interni.

La espressione stessa può scriversi:

$$U = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} (\log r_A + \lambda\theta_A) + \psi,$$

ove

$$\psi = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} (\log r_{A_1} - \lambda\theta_{A_1});$$

ed evidentemente ψ è regolare entro l'area occupata dalla lamina, giacchè i punti di infinito e di diramazione sono tutti esterni all'area stessa.

Il resultato ottenuto può enunciarsi nei termini seguenti:

La distribuzione delle correnti che entrano ed escono da elettrodi puntiformi in una lamina circolare soggetta ad un campo magnetico, è quella stessa che si avrebbe sopprimendo il campo magnetico, rendendo indefinita la lamina ed aggiungendo ad ogni elettrodo ove la intensità è J un vortice di momento $\frac{\lambda J}{K}$; *inoltre aggiungendo, nel punto reciproco di ciascun elettrodo interno, un elettrodo immagine ove la intensità è la stessa, ed un vortice immagine del vortice interno di momento invertito.*

17. Poichè abbiamo calcolato, mediante la formula (9), la funzione fondamentale della distribuzione delle correnti, così, applicando la regola (E′), possiamo ricavare dalla espressione ottenuta il potenziale.

Cominciamo dall'esprimere la funzione coniugata di U. Questa sarà

$$U' = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} (\theta_A + \theta_{A_1} - \lambda \log r_A + \lambda \log r_{A_1}),$$

e perciò il potenziale resulterà

$$(10) \quad V = \frac{U - \lambda U'}{1 + \lambda^2} = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} \left(\log r_A + \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \log r_{A_1} - \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} \theta_{A_1} \right).$$

Ora, poichè $\lambda = \operatorname{tg} \beta$, abbiamo

$$\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} = \cos 2\beta \quad , \quad \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} = \operatorname{sen} 2\beta \, ,$$

quindi

$$(10') \qquad V = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} (\log r_A + \cos 2\beta \, . \log r_{A_1} - \operatorname{sen} 2\beta \, . \, \theta_{A_1}) \, .$$

Questa espressione può scriversi

$$(10'') \qquad V = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} \log r_A + \varphi \, ,$$

ove

$$(10_a) \qquad \varphi = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} (\cos 2\beta \, . \log r_{A_1} - \operatorname{sen} 2\beta \, . \, \theta_{A_1}) \, .$$

Il primo termine delle (10″) è il potenziale degli elettrodi, ed il secondo termine φ è una funzione regolare nell'area occupata dalle lamina, giacchè i punti di infinito e di diramazione sono esterni.

Il resultato conseguito può enunciarsi nei termini seguenti:

Se in una lamina circolare soggetta ad un campo magnetico, le correnti entrano ed escono da elettrodi puntiformi, il potenziale si otterrà aggiungendo a quello di ciascun elettrodo ove la intensità è J *il potenziale di un elettrodo immagine situato nel punto reciproco di intensita* $J \cos 2\beta$, *e quello di un vortice pure disposto nel punto reciproco di momento* $-\frac{J \operatorname{sen} 2\beta}{K}$.

18. Esistono dunque *due diversi principii delle immagini* nel caso in cui la lamina è soggetta al campo magnetico, uno dei quali è relativo alla distribuzione delle correnti e quindi alla *funzione fondamentale*, e l'altro al *potenziale elettrico*.

19. Questi stessi resultati possono ottenersi molto facilmente adoperando le funzioni di variabili complesse introdotte alla fine del § 14. Osserviamo che se a ed a' denotano gl'indici di due punti reciproci rispetto ad un cerchio nel piano complesso $z = x + iy$ e $\Sigma M = 0$ essendo le M e la m reali, si ha che la funzione

$$(11) \qquad e^{im} \Sigma M \log (z - a) - e^{-im} \Sigma M \log (z - a')$$

ha la parte reale costante sulla periferia del cerchio, e

$$(11') \qquad e^{im} \Sigma M \log (z - a) + e^{-im} \Sigma M \log (z - a')$$

ha costante la parte immaginaria.

Ora se denotiamo con a gl'indici degli elettrodi puntiformi il potenziale degli elettrodi è la parte reale della funzione di variabile complessa

$$\varphi = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} \log(z-a),$$

quindi in virtù della (E'') la corrispondente funzione fondamentale sarà la parte reale di

$$f = \frac{-e^{-i\beta}}{\cos\beta} \Sigma \frac{J}{2\pi K} \log(z-a).$$

Tenendo conto del contorno circolare la funzione fondamentale dovrà resultare quindi, a cagione della (11'), come parte reale di

$$F = -\Sigma \frac{1}{2\pi K \cos\beta} (e^{-i\beta} \log(z-a) + e^{i\beta} \log(z-a')),$$

e per conseguenza, per la (E''), il potenziale elettrico sarà la parte reale di

$$\Phi = -\Sigma \frac{1}{2\pi K} (\log(z-a) + e^{2i\beta} \log(z-a')),$$

da cui resultano immediatamente le formule (9) e (10).

20. Noi abbiamo fin qui supposto che gli elettrodi puntiformi fossero interni, ammettiamo ora che vadano al contorno. Basterà nelle formule (9) e (10) supporre coincidenti i punti A e A_1, ossia

$$\log r_A = \log r_{A_1} \quad , \quad \theta_A = \theta_{A_1} ,$$

e perciò avremo

$$U = -\Sigma \frac{J}{\pi K} \log r_A$$

$$V = -\Sigma \frac{J}{\pi K} (\cos\beta \,.\, \log r_A - \operatorname{sen}\beta \,.\, \theta_A) \cos\beta .$$

Ne segue che, se gli elettrodi puntiformi sono al contorno, il campo magnetico non altera la distribuzione delle correnti, mentre altera il potenziale elettrico.

21. Se gli elettrodi sono due A e B, le formule (9) e (10) divengono

$$U = \frac{J}{2\pi K} \left(\log\left(\frac{r_B\, r_{B_1}}{r_A\, r_{A_1}}\right) + \lambda(\Omega_{AB} - \Omega_{A_1 B_1}) \right),$$

$$V = \frac{J}{2\pi K} \log\left(\frac{r_B\, r_{B_1}}{r_A\, r_{A_1}}\right) - \frac{J}{\pi K} \operatorname{sen}\beta \left(\log\left(\frac{r_{B_1}}{r_{A_1}}\right) \operatorname{sen}\beta + \Omega_{A_1 B_1} \cos\beta \right).$$

ove $\Omega_{AB} = \theta_B - \theta_A$, $\Omega_{A_1 B_1} = \theta_{B_1} - \theta_{A_1}$ sono gli angoli sotto cui si vedono dal punto generico x, y le due coppie di punti A, B e A_1, B_1.

Se i due elettrodi sono al contorno, allora

$$U = \frac{J}{\pi K} \log \frac{r_B}{r_A} \quad , \quad V = \frac{J}{\pi K} \left(\cos\beta \, . \log \frac{r_B}{r_A} - \operatorname{sen}\beta \, . \, \Omega_{AB} \right) \cos\beta \, .$$

22. Allorchè gli elettrodi sono puntiformi il problema è quindi risoluto completamente nel caso in cui la lamina è circolare. Per conseguenza esso si risolverà anche in tutti i casi in cui *l'area occupata dalla lamina sarà rappresentabile conformemente in un cerchio.*

23. Consideriamo il caso in cui gli elettrodi puntiformi sono al contorno, allora, *comunque sia la forma della lamina, purchè essa sia semplicemente connessa, la distribuzione delle correnti non viene alterata dall'azione del campo magnetico.* Ciò dipende dal resultato ottenuto nel caso del cerchio (§ 20) e trasportato in un campo generale semplicemente connesso mediante la rappresentazione conforme, e può ricavarsi anche direttamente dalle condizioni a cui deve soddisfare U (§ 14).

Infatti se il campo è semplicemente connesso e gli elettrodi puntiformi sono al contorno, U è monodromo; al contorno $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$; inoltre, se con un arco di curva qualunque ε stacchiamo la regione ove esiste l'elettrodo dalla rimanente area della lamina, deve aversi

$$\int_\varepsilon \frac{\partial U}{\partial n} d\varepsilon = -\frac{J}{K} \, ,$$

ove J è l'intensità della corrente che esce dall'elettrodo. Quindi, se la intensità delle correnti non vengono alterate, U non può differire dal potenziale elettrico nel caso in cui manchi il campo magnetico.

Chiameremo questa proposizione il *principio degli elettrodi puntiformi al contorno.* Evidentemente se la lamina non è semplicemente connessa, la sua area non è rappresentabile conformemente nel cerchio, nè può dirsi che U deve essere monodroma, quindi le dimostrazioni date non valgono più in questo caso, e difatti la proposizione precedente in generale non è vera quando la lamina non è semplicemente connessa (cfr. § 32).

24. Da quanto è stato trovato nel paragrafo precedente resulta che *se noi conosciamo la legge della distribuzione delle correnti in una lamina qualunque semplicemente connessa non soggetta al campo magnetico, allorchè gli elettrodi puntiformi sono al contorno, potremo conoscere* U *onde, applicando le regole del* § 14, *data mediante la* (E'), *potremo avere il potenziale elettrico nel caso in cui agisce il campo magnetico.*

Per esempio: se una lamina rettangolare non è soggetta al campo magnetico noi sappiamo esprimere (secondo i calcoli del Betti) [1], mediante

[1] Betti, *Opere*, vol. II, pag. 267.

la funzione ellittica Δam, la distribuzione delle correnti allorchè gli elettrodi sono nei punti di mezzo di due lati opposti; applicando dunque le precedenti considerazioni potremo risolvere l'analogo problema quando la lamina è soggetta ad un campo magnetico.

25. Abbiansi delle correnti di date intensità che entrano ed escono in una lamina da elettrodi puntiformi al contorno. Supponiamo di non alterare le intensità stesse allorchè si assoggetta la lamina (supposta semplicemente connessa) al campo magnetico.

Se u è la funzione fondamentale prima che esista il campo e U quando esiste il campo magnetico, avremo

$$U = \varrho u ,$$

ove ϱ è il rapporto delle conducibilità della lamina nei due casi, quindi per la regola (E'), indicando sempre con un apice la funzione coniugata di una funzione data armonica,

$$V = \varrho \frac{u - \lambda u'}{1 + \lambda^2} .$$

Conduciamo la rete delle linee di corrente e delle linee equipotenziali nel caso in cui manchi il campo magnetico MN e QP siano linee di corrente, e MQ e NP linee equipotenziali. Avremo

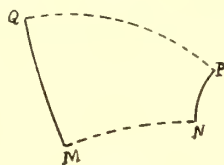



Fig. 13.

$$u_M = u_Q , u_N = u_P \quad , \quad u'_M = u'_N , u'_Q = u'_P ,$$

e per conseguenza

$$V_M - V_N + V_P - V_Q = 0 ,$$

donde il teorema: *Allorchè gli elettrodi puntiformi sono al contorno, se si considera un quadrilatero formato da linee di corrente e di livello corrispondenti al caso in cui manchi il campo magnetico, e si determinano i valori del potenziale elettrico ai quattro vertici allorchè agisce il campo magnetico, la differenza dei valori in due vertici adiacenti è eguale alla differenza negli altri due.*

Questa proposizione che chiameremo il *teorema dei quattro vertici* è suscettibile di facile verifica sperimentale.

26. Supponiamo in particolare che la lamina sia circolare, le correnti entrino ed escano dagli elettrodi puntiformi A e B al contorno. Tracciamo i cerchi che passano per A e B ed i cerchi ortogonali. Qualunque sia il

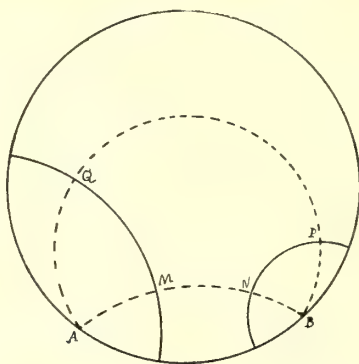



Fig. 14.

campo magnetico per un quadrilatero MNPQ formato con questi cerchi

$$V_M - V_N + V_P - V_Q = 0 .$$

27. Il resultato enunciato nel § 22 può notevolmente estendersi; infatti, se si conosce la legge di distribuzione delle correnti in una lamina semplicemente connessa non soggetta al campo magnetico allorchè la corrente entra ed esce da due elettrodi puntiformi, si sa fare la rappresentazione conforme dell'area occupata dalla lamina in un cerchio, onde si saprà determinare la distribuzione delle correnti, ed il potenziale quando le correnti entrano ed escono da elettrodi puntiformi qualsiasi e la lamina è soggetta ad un campo magnetico.

28. Varie fra le proposizioni date valgono tanto se l'area occupata dalla lamina è semplicemente connessa, quanto se è più volte connessa, altre (e lo si è dichiarato esplicitamente volta per volta) non valgono che se si tratta d'un'area semplicemente connessa.

Le formule ed i teoremi di reciprocità dati nei §§ 11, 12, 13 sussistono evidentemente anche nel caso in cui la lamina è più volte connessa. Solo in questo caso essi possono assumere un aspetto alquanto diverso, giacchè le porzioni del contorno ove il potenziale è costante possono essere alcune delle intere linee chiuse il cui insieme forma il contorno totale dell'area più volte connessa, occupata dalla lamina.

Supponiamo la lamina σ limitata da più linee chiuse $s'_1, s'_2, \dots, s'_n$; s''_1, $s''_2, \dots, s''_m$, e ammettiamo che le prime siano libere ed isolate, e le seconde siano mantenute ad un potenziale costante. Chiameremo S' l'insieme delle prime linee, ed S'' l'insieme delle altre. Escluderemo per semplicità l'esistenza di elettrodi puntiformi.

Con il campo magnetico diretto i valori del potenziale V in $s_1'', s_2'', \dots, s_m''$ siano respettivamente $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(m)}$ e con il campo magnetico invertito i valori del potenziale V_1 siano $C_1^{(1)}, C_1^{(2)}, \dots, C_1^{(m)}$. Denotiamo poi con $J^{(1)}$, $J^{(2)}, \dots, J^{(m)}$ le quantità di elettricità che penetrano nell'unità di tempo nella lamina attraverso i contorni $s_1'', s_2'', \dots, s_m''$ allorchè si sperimenta col campo elettrico diretto, e denotiamo con $J_1^{(1)}, J_1^{(2)}, \dots, J_1^{(m)}$ le quantità di elettricità che penetrano attraverso gli stessi contorni quando si sperimenta col campo elettrico invertito. Applicando i resultati del § 12 avremo

$$\Sigma_h J^{(h)} C_1^{(h)} = \Sigma_h J_1^{(h)} C^{(h)} .$$

Se noi consideriamo $s_1'', s_2'', \dots, s_m''$ come orli di elettrodi di resistenza trascurabile le $J^{(h)}$ e $J_1^{(h)}$ sono respettivamente le intensità delle correnti che penetrano dagli elettrodi stessi. Dalla precedente relazione si ricavano quindi evidentemente le proposizioni di reciprocità nel caso di elettrodi interni di area finita e di resistenza trascurabile.

29. Ciò premesso consideriamo il caso del campo magnetico diretto, e impieghiamo la regola (E) (§ 14) per passare dal potenziale V alla funzione fondamentale U. Avremo

$$U = V + \lambda V' , \tag{12}$$

e se tracciamo una linea chiusa s nell'area occupata dalla lamina

$$\int_s \frac{\partial V'}{\partial s} ds = - \int_s \frac{\partial V}{\partial n} ds = \frac{1}{K} (J^{(\alpha)} + J^{(\beta)} + \cdots + J^{(\rho)}),$$

denotando con $s_\alpha'', s_\beta'', \dots, s_\rho''$ i contorni interni alla linea s.

Ne segue che la funzione V' è polidroma, i cicli di polidromia sono quelli che contengono nell'interno i contorni $s_\alpha'' \dots$ ed i moduli di polidromia sono i numeri $\dfrac{J_\alpha}{K}$.

Poichè V è monodroma (cfr. § 2), U avrà la stessa polidromia di V' salvo che i moduli di polidromia saranno cambiati nel rapporto λ.

30. Applicando le formule (A) e (B) del § 2 si deduce (cfr. § 4)

$$\Sigma_h J^{(h)} = 0 \quad , \quad \Sigma_h J^{(h)} C^{(h)} = K \int_\sigma \Delta V d\sigma .$$

Dall'ultima si ricava che se le $J^{(h)}$ sono zero sopra alcuni dei contorni s_h'' e le $C^{(h)}$ sono zero sopra i rimanenti s_h'', V deve essere nulla; e se si sa che tutte le $J^{(h)}$ sono nulle, V deve essere costante. Se ne conclude che la conoscenza delle $J^{(h)}$ determina V a meno di una costante e la conoscenzza di alcune delle $J^{(h)}$ e delle rimanenti $C^{(h)}$ determina completamente V.

Supponiamo che manchino i contorni liberi ed isolati s'_h, e che siano note tutte le $C^{(h)}$, V sarà determinato e sarà indipendente dalla conducibilità K. Se invece sono note tutte le $J^{(h)}$, V cambierà in ragione inversa delle conducibilità K. Se finalmente sono note in parte le $C^{(h)}$, ed in parte le $J^{(h)}$. V dipenderà dalla conducibilità K.

Da tutto ciò segue che se ciascuna delle diverse linee che costituiscono il contorno ha un potenziale costante inalterabile, il potenziale elettrico non dipenderà dal campo magnetico, ma il campo magnetico altererà la funzione fondamentale, e quindi la distribuzione delle correnti.

Ne resulta che se noi conosceremo la distribuzione delle correnti quando manca il campo magnetico, e quindi il potenziale V, mediante la formula (E) potremo calcolare l'alterazione delle correnti stesse.

In modo analogo avremo resultati simili se si suppongono note ed inalterabili le $J^{(h)}$.

Questi ultimi resultati sono in perfetto accordo con quanto aveva già riconosciuto il prof. Corbino nel caso di due contorni a potenziale inalterabile [1]. Supponiamo in particolare che i due contorni della lamina siano due circonferenze concentriche di raggi R_1 e R_2. Avremo allora

$$\left\{\begin{aligned} V &= \frac{(C^{(1)} - C^{(2)}) \log r + C^{(2)} \log R_1 - C^{(1)} \log R_2}{\log R_1 - \log R_2} \\ V' &= \frac{(C^{(1)} - C^{(2)})}{\log R_1 - \log R_2}\,\theta \\ U &= \frac{(C^{(1)} - C^{(2)}) (\log r + \lambda\theta)}{\log R_1 - \log R_2} + C\,, \end{aligned}\right.$$

ove r e θ sono le coordinate polari dei punti dell'anello circolare che costituisce la lamina avendo preso come origine il centro, e C è una costante.

Se la corrente entra dal cerchio maggiore di raggio R_1, e la sua intensità è I, avremo

$$V = \frac{I}{2\pi K} \log r \;,\quad V' = \frac{I}{2\pi K}\,\theta \;,\quad U = \frac{I}{2\pi K} (\log r + \lambda\theta).$$

31. I resultati del § 29 si possono estendere. Supponiamo in generale di avere una lamina più volte connessa limitata dalle linee chiuse $s_1, s_2, \dots, s_n$. Senza fare alcuna ipotesi sui valori del potenziale lungo di esse e sul modo

[1] O. M. Corbino, *Azioni elettromagnetiche dovute agli ioni dei metalli deviati dalla traiettoria normale per effetto di un campo*, Nuovo Cimento, ser, VI, vol. I; E. P. Adams, *Some electromagnetic Effects related to the Hall Effect*, Phil. Magazine, vol. XXVII, Sixth Series; E. P. Adams und A. K. Chapman, *The Corbino Effect*, Phil. Mag., vol. XXVIII, Sixth Series.

come sono disposti lungo di esse degli elettrodi puntiformi o lineari, denotiamo con $J_1, J_2, \dots, J_n$ le quantità di elettricità che nell'unità di tempo entrano nelle lamine attraverso le linee stesse.

Abbiansi poi degli elettrodi puntiformi $M_1, M_2 \dots, M_m$ *interni* da cui penetrano delle correnti di intensità $I_1, I_2, \dots, I_m$. Avremo

$$\sum_1^n J_h + \sum_1^m I_k = 0 ,$$

e se una linea chiusa s interna al campo racchiude nel suo interno le linee $s_\alpha, s_\beta, \dots, s_\tau$, e i punti $M_a, M_b, \dots, M_t$, avremo

$$\int \frac{\partial V'}{\partial s} ds = -\int \frac{\partial V}{\partial n} ds = \frac{1}{K}(J_\alpha + J_\beta + \cdots + J_\tau + I_a + I_b + \cdots + I_t).$$

Ciò prova che V' e quindi U è polidroma a meno che tutte le $J_1, J_2, \dots, J_n$, $I_1, I_2, \dots, I_m$ non siano nulle. D'onde il teorema

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione fondamentale sia monodroma è che non esistano elettrodi puntiformi interni, e che la quantità totale di elettricità che entra dagli elettrodi distribuiti lungo ciascuna linea chiusa che fa parte del contorno sia nulla.

Nel caso invece in cui l'area occupata dalla lamina sia semplicemente connessa, *basta che non esistano elettrodi puntiformi interni perchè la funzione fondamentale sia monodroma*, mentre la loro presenza la rende polidroma.

32. Diamo subito un'applicazione dei resultati ora ottenuti. Supponiamo che l'area sia più volte connessa e che tutti gli elettrodi siano *puntiformi*, e distribuiti lungo le linee stesse $s_1, s_2, \dots, s_n$ che formano il contorno. Siano $i_p^{(1)}, i_p^{(2)}, \dots, i_p^{(h_p)}$ le intensità delle correnti che entrano dagli elettrodi distribuiti lungo la linea s_p. La condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione fondamentale sia monodroma è che

$$\sum_1^{h_p}{}_t\, i_p^{(t)} = 0 \qquad (p = 1, 2, \dots, n).$$

Ora se la funzione fondamentale è monodroma noi potremo, ripetendo il ragionamento fatto nel § 23, dimostrare che il campo magnetico non altera la distribuzione delle correnti, mentre se la funzione stessa è polidroma, avremo che l'azione del campo magnetico dovrà far cambiare la distribuzione delle correnti, giacchè quando esso non esiste la funzione fondamentale coincide col potenziale e quindi è monodroma.

Si avrà dunque il teorema seguente:

Se la lamina è più volte connessa e tutti gli elettrodi sono puntiformi e distribuiti al contorno, l'azione del campo magnetico non altererà

la distribuzione delle correnti solo quando la somma delle intensità delle correnti che penetrano dagli elettrodi disposti su ciascuna linea chiusa che forma una parte del contorno sia nulla.

33. Quando la condizione precedente sia soddisfatta, e si conosca la legge della distribuzione delle correnti nella ipotesi che non agisca il campo magnetico, potremo mediante la regola (E′) calcolare il potenziale corrispondente allorchè agisce il campo magnetico, precisamente come nel caso del campo semplicemente connesso, e quindi risolvere completamente il problema.

Resta da risolverlo quando la suddetta condizione non sia soddisfatta.

A tal fine denotiamo con s_1 la linea chiusa che forma il contorno esterno della lamina più volte connessa, con $s_2, s_3, \dots s_n$ le linee chiuse che

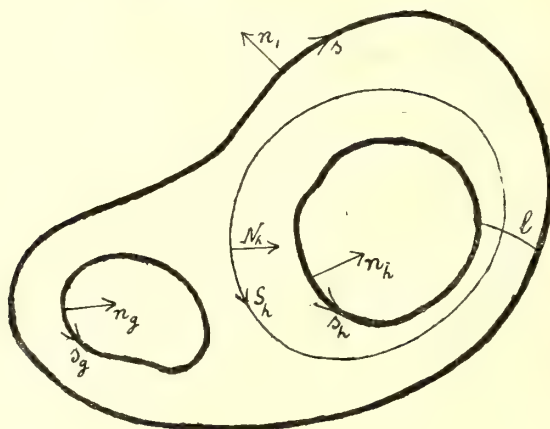



Fig. 15.

formano i contorni interni. Tracciamo una linea l che congiunga s_1 con s_h senza incontrare altre linee del contorno, e immaginiamola sede di una forza elettromotrice 1 diretta nel senso in cui cresce l'arco s_h. Supposto che la lamina non sia soggetta al campo magnetico, il potenziale elettrico φ_h sarà una funzione armonica regolare nel campo occupato dalla lamina stessa che avrà una discontinuità 1 lungo l. Inoltre

$$\frac{\partial \varphi_h}{\partial n_1} = \frac{\partial \varphi_h}{\partial n_2} = \cdots = 0 \;,\; \int_{s_h} \frac{\partial \varphi_h}{\partial s_h} ds_h = -1 \;,\; \int_{s_g} \frac{\partial \varphi_h}{\partial s_g} ds_g = 0 \;,\; 1 < g \gtrless h .$$

φ_h potrà ancora considerarsi come una funzione armonica finita e continua *polidroma* nel campo liberato dal taglio l i cui cicli di polidromia abbracciano s_h e il cui modulo di polidromia è -1. Le funzioni $\varphi_2, \varphi_3, \dots$ dipenderanno soltanto dalla forma geometrica del campo e le chiameremo i suoi *potenziali ciclici elementari*. Denoteremo con $\varphi_2', \varphi_3', \dots$ le loro coniugate [1].

[1] I potenziali ciclici elementari si considerano nella idrodinamica classica per

Ciò premesso supponiamo tolta ogni forza elettromotrice interna nel campo, e chiamiamo W il potenziale elettrico quando le correnti entrano ed escono da elettrodi puntiformi disposti lungo le varie linee chiuse che costituiscono il contorno, V il potenziale elettrico quando agisce il campo magnetico, U la funzione fondamentale.

Sia J_h la somma algebrica delle intensità delle correnti che entrano ed escono dagli elettrodi distribuiti sopra s_h. Se S_h è una linea che abbraccia la sola s_h, avremo

$$J_h = K\int_{S_h} \frac{\partial V}{\partial N_h} dS_h = K\int_{S_h} \frac{\partial W}{\partial N_h} dS_h = -K\int_{S_h} \frac{\partial V'}{\partial S_h} dS_h = -K\int_{S_h} \frac{\partial W'}{\partial S_h} dS_h,$$

ove V′ e W′ sono coniugate di V e W.

Ne segue (Vedi formula E)

$$\int_{S_h} \frac{\partial U}{\partial N_h} dS_h = \int_{S_h} \frac{\partial (V + \lambda V')}{\partial N_h} dS_h = -\frac{\lambda J_h}{K},$$

quindi potremo prendere

$$U = W + \frac{\lambda}{K} \sum_2^n {}_h J_h \varphi_h,$$

giacchè essa soddisfa a tutte le condizioni a cui deve verificare la U.

Per avere V basta applicare la regola (E′) e otterremo

$$V = \frac{W - \frac{\lambda^2}{K} \sum_2^n {}_h J_h \varphi'_h - \lambda \left(W' - \frac{1}{K} \sum_2^n {}_h J_h \varphi_h \right)}{1 + \lambda^2}.$$

Dunque *se si conoscono i potenziali ciclici elementari dell'area più volte connessa occupata dalla lamina, potremo determinare la perturbazione prodotta dal campo magnetico sulle correnti elettriche, qualunque esse siano, purchè entrino ed escano da elettrodi puntiformi situati al contorno.*

Le due formole precedenti ci esprimono il *principio degli elettrodi puntiformi al contorno* modificato nel caso delle lamine più volte connesse (cfr. § 23).

---

ottenere i moti non vorticosi di un fluido in uno spazio più volte connesso limitato da pareti rigide. Essi corrispondono nella teoria della elasticità alle *distorsioni*. Se si conoscono le funzioni regolari armoniche $\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n$ tali che ψ_h si annulla sulle $s_1, \ldots s_n$ eccettuata s_h ove ha il valore 1, potremo ottenere (combinandole linearmente con coefficienti costanti) le φ'_h e quindi potremo ricavarne le φ_h. La conoscenza delle φ_h o delle ψ_h è quindi analiticamente equivalente.

34. Consideriamo il caso particolare in cui la lamina sia un anello limitato da due cerchi concentrici.

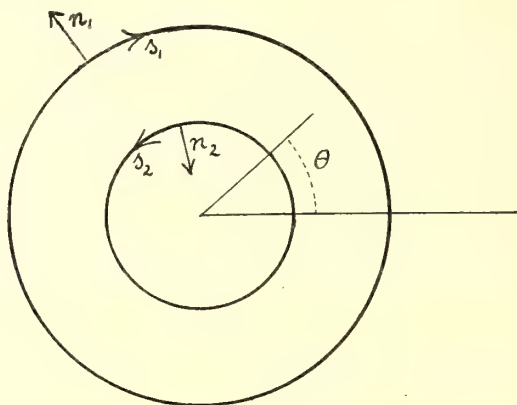



Fig. 16.

In questo caso il potenziale ciclico elementare è $-\frac{\theta}{2\pi}$ ove θ è l'angolo che il raggio vettore spiccato dal centro forma con una direzione fissa

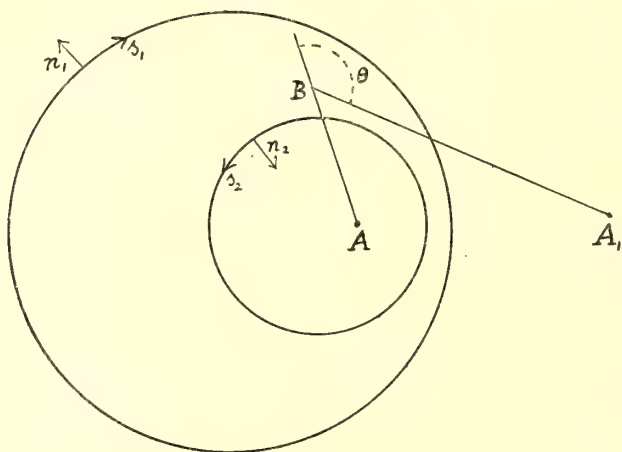



Fig. 17.

la cui funzione coniugata è $\frac{\log r}{2\pi}$. Quindi le formule precedenti divengono

$$U = W - \frac{\lambda}{2\pi K} J_2 \theta \quad , \quad V = \frac{W - \frac{\lambda^2}{2\pi K} J_2 \log r - \lambda \left(W' + \frac{1}{2\pi K} \theta \right)}{1 + \lambda^2} .$$

Se i due cerchi non sono concentrici presi i punti A e A_1 immagini l'uno dell'altro per rapporto ai due cerchi contemporaneamente, il potenziale

ciclico elementare sarà $-\frac{\theta}{2\pi}$ ove θ è il supplemento dell'angolo sotto cui dal punto generico B della lamina si vede il segmento AA_1. La funzione coniugata sarà $\frac{1}{2\pi} \log \frac{AB}{A_1 B}$.

Matematica. — *Sulle superficie isoterme come superficie di rotolamento.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

In due Note pubblicate l'anno scorso nei Rendiconti di questa R. Accademia [1] mi sono occupato di due problemi fondamentali che concernono il rotolamento di superficie applicabili nello spazio euclideo, o, più in generale, negli spazî di curvatura costante.

Un punto invariabilmente legato alla superficie rotolante descrive una superficie che diciamo *superficie di rotolamento*; similmente, un piano trascinato nel rotolamento inviluppa una superficie che diciamo *inviluppo di rotolamento*. Secondo i risultati stabiliti in quelle due Note, qualunque superficie Σ può generarsi infinite volte, sia come superficie, sia come inviluppo di rotolamento; e ciascuna volta la ricerca delle infinite coppie corrispondenti di superficie applicabili dipende da un'equazione a derivate parziali del secondo ordine, ad ogni soluzione di questa corrispondendo una tale coppia di superficie applicabili.

La presente Nota ha per iscopo di stabilire che, se la superficie data Σ è *isoterma* (a linee di curvatura isoterme), si possono trovare ∞^4 generazioni della superficie come superficie di rotolamento, integrando il sistema di equazioni differenziali ordinarie che traduce analiticamente le trasformazioni D_m di Darboux delle generali superficie isoterme [2]. Per tal modo le trasformazioni D_m vengono ad acquistare un nuovo significato per la teoria del rotolamento, ad ogni tale trasformazione di una superficie isoterma Σ corrispondendo una generazione della Σ come superficie di rotolamento. Una delle due superficie applicabili, quella d'appoggio, è data dalla superficie S, luogo dei centri del corrispondente inviluppo conforme di sfere; la superficie

[1] 1) *Sui problemi di rotolamento di superficie applicabili* (seduta del 4 gennaio 1914); 2) *Sul rotolamento di superficie applicabili, in geometria ellittica ed iperbolica* (seduta del 15 febbraio 1914).

Verranno qui citate come Nota 1), Nota 2).

[2] Cfr. Darboux, *Sur la déformation des surfaces du second degré, et sur les surfaces isothermiques* [Annales de l'École normale supérieure, III série, tom. XVI (1899)].

Ved. anche le mie due Memorie: *a) Ricerche sulle superficie isoterme e sulla deformazione delle quadriche* [Annali di matematica, serie 3ª, tom. XI (1905)]; *b) Complementi alle ricerche sulle superficie isoterme* [ibid., tom. XII (1905)].

Qui saranno citate come Memorie *a*) e *b*).

rotolante S_0 è già intrinsecamente definita dalla proprietà: che il sistema coniugato comune alla S_0 ed alla S è quello corrispondente alle linee di curvatura di Σ, e la sua determinazione effettiva discende da quella trasformazione T_m delle superficie isoterme che ho introdotto nella Memoria *b*), come *associata* alla D_m di Darboux.

Nel caso particolare che la superficie isoterma Σ, insieme con la sua trasformata Σ_1, abbia la curvatura media costante (o nulla), la superficie rotolante S_0 è una quadrica rotonda, ed il punto satellite un suo fuoco principale. Si ritrovano così nuovamente i risultati che provengono dalla inversione dei teoremi di Guichard sulle deformate delle quadriche di rotazione [1]. Le generazioni, qui considerate, delle superficie isoterme generali come superficie di rotolamento, ne costituiscono la naturale estensione; solo resta da trattare più da vicino lo studio delle corrispondenti coppie di superficie applicabili, ciò che mi propongo di fare in seguito.

In una prossima seconda Nota dimostrerò che per le superficie *a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura*, considerate quali inviluppi di rotolamento, sussistono proprietà analoghe ed in certo modo *duali* di quelle qui stabilite per le superficie isoterme.

2. Premettiamo alcune osservazioni generali su quegli inviluppi di ∞^2 sfere (della teoria dei sistemi ciclici) sulle cui due falde Σ, Σ_1 si corrispondono le linee di curvatura; ed osserviamo in primo luogo che:

Sulla superficie S, *luogo dei centri delle sfere, alle linee di curvatura delle due falde* Σ, Σ_1, *corrisponde un sistema coniugato.*

Infatti le normali alla prima falda Σ, dopo riflessione sopra S, si cangiano nelle normali di Σ_1 [2]; e poichè le sviluppabili delle due congruenze di normali si corrispondono per ipotesi, esse tagliano, secondo un teorema di Dupin, in un sistema coniugato la superficie riflettente S.

Viceversa, pel teorema stesso di Dupin, se le normali di Σ tagliano una superficie S in guisa che alle linee di curvatura di Σ corrisponda sopra S un sistema coniugato, le sviluppabili della congruenza di normali si conservano per riflessione, e quindi la superficie S è il luogo dei centri di ∞^2 sfere, di cui Σ è una prima falda dell' inviluppo, e la seconda, Σ_1 corrisponde a Σ per linee di curvatura.

Esprimiamo ora analiticamente la condizione cui deve soddisfare il segmento R di normale a Σ, intercetto fra Σ ed S, affinchè alle linee di curvatura di Σ corrisponda sopra S un sistema coniugato.

Riferita la superficie Σ alle sue linee di curvatura (u, v), e mantenendo le consuete notazioni, ricordiamo le equazioni fondamentali:

[1] Cfr. la mia Memoria: *Sulle trasformazioni delle superficie a curvatura costante* [Annali di matematica, 3ª serie, tom. III (1899)].

[2] Cfr. le mie Lezioni, vol. II, § 253.

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u}=\sqrt{E}\,X_1\ ,\ \dfrac{\partial X_1}{\partial u}=-\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_2-\dfrac{\sqrt{E}}{r_2}X_3\,, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial X_2}{\partial u}=\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_1\ ,\ \dfrac{\partial X_3}{\partial u}=\dfrac{\sqrt{E}}{r_2}X_1 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}=\sqrt{G}\,X_2\ ,\ \dfrac{\partial X_1}{\partial v}=\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_2\,, \\ \qquad \dfrac{\partial X_2}{\partial v}=-\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_1-\dfrac{\sqrt{G}}{r_1}X_3\ ,\ \dfrac{\partial X_3}{\partial v}=\dfrac{\sqrt{G}}{r_1}X_2\,. \end{cases}$$

e le due equazioni di Codazzi

$$(2)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{r_1}\right)=\frac{1}{r_2}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\quad,\quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{r_2}\right)=\frac{1}{r_1}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\,.$$

Essendo ora $M\equiv(u\,,v)$ un punto variabile sopra Σ, ed M_0 il punto ove la normale in M incontra Σ, poniamo

$$\overline{MM_0}=R=R(u\,,v)\,,$$

e, per le coordinate $x_0\,,y_0\,,z_0$ di M_0, avremo

$$(3)\qquad x_0=x+RX_3\quad,\quad y_0=y+RY_3\quad,\quad z_0=Z+RZ_3\,.$$

Derivando colle (1), e ponendo

$$(4)\qquad h_1=\sqrt{E}\left(1+\frac{R}{r_2}\right)\quad,\quad h_2=\sqrt{G}\left(1+\frac{R}{r_1}\right),$$

otteniamo

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_0}{\partial u}=h_1X_1+\dfrac{\partial R}{\partial u}X_3 \\ \dfrac{\partial x_0}{\partial v}=h_2X_2+\dfrac{\partial R}{\partial v}X_3\,; \end{cases}$$

indi, per l'elemento lineare ds_0 della S,

$$(6)\qquad ds_0^2=E_0\,du^2+2F_0\,du\,dv+G_0\,dv^2\,,$$

dove

$$(6^*)\qquad E_0=h_1^2+\left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2\quad.\quad F_0=\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v}\quad,\quad G_0=h_2^2+\left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)^2.$$

Dalle (5) i coseni di direzione X_0, Y_0, Z_0 della normale alla S risultano proporzionali alle espressioni

$$X_0 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial R}{\partial u}X_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial R}{\partial v}X_2 - X_3,$$

ed alle due analoghe. D'altra parte, una nuova derivazione delle (5) dà

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial h_1}{\partial v}X_1 + \frac{\partial h_2}{\partial u}X_2 + \frac{\partial^2 R}{\partial u\,\partial v}X_3,$$

ed ora esprimiamo che il sistema (u, v) è coniugato sopra S, scrivendo che si ha

$$S X_0 \frac{\partial^2 x_0}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

Per le formole ora scritte, la condizione richiesta si traduce nella equazione per R:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial v}\frac{\partial R}{\partial u} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v}. \tag{7}$$

3. È importante di osservare, pel nostro scopo, che questa condizione (7), introducendo in calcolo i coefficienti E_0, F_0, G_0 dell'elemento lineare di S, si può scrivere sotto la forma equivalente

$$\frac{\partial^2 R}{\partial u\,\partial v} = \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_0 \frac{\partial R}{\partial u} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_0 \frac{\partial R}{\partial v}, \tag{A}$$

od anche, brevemente,

$$R_{12} = 0, \tag{A*}$$

i simboli di Christoffel $\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_0, \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_0$, o la derivata seconda covariante R_{12}, intendendosi presi rispetto alla forma differenziale (6).

Che la (A) equivalga alla (7), si vede scrivendo i valori effettivi:

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_0 = \frac{G_0\frac{\partial E_0}{\partial v} - F_0\frac{\partial G_0}{\partial u}}{E_0 G_0 - F_0^2}, \quad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_0 = \frac{E_0\frac{\partial G_0}{\partial u} - F_0\frac{\partial E_0}{\partial v}}{E_0 G_0 - F_0^2},$$

poichè, ponendo per un momento

$$\frac{\partial R}{\partial u} = p, \quad \frac{\partial R}{\partial v} = q, \quad \frac{\partial^2 R}{\partial u\,\partial v} = s,$$

dalle (6*) abbiamo

$$E_0 G_0 - F_0^2 = h_2^2 p^2 + h_1^2 q^2 + h_1^2 h_2^2$$

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_0 = \frac{h_2^2 ps + (h_2^2 + q^2) h_1 \frac{\partial h_1}{\partial v} - pq h_2 \frac{\partial h_2}{\partial u}}{h_2^2 p^2 + h_1^2 q^2 + h_1^2 h_2^2}$$

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}_0 = \frac{h_2^2 qs + (h_1^2 + p^2) h_2 \frac{\partial h_2}{\partial u} - pq h_1 \frac{\partial h_1}{\partial v}}{h_2^2 p^2 + h_1^2 q^2 + h_1^2 h_2^2},$$

e, conseguentemente,

$$s - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_0 p - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}_0 q = \frac{h_1^2 h_2^2}{h_2^2 p^2 + h_1^2 q^2 + h_1^2 h_2^2} \left\{ s - \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial v} p - \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial u} q \right\}.$$

Ne risulta appunto che la (A) equivale alla (7).

4. Dalle osservazioni precedenti deduciamo una proprietà relativa alle deformazioni per flessione della superficie S che supponiamo trasporti seco, invariabilmente legati, i segmenti $M_0 M$ normali, negli estremi M, alla superficie Σ. Supponiamo che esista una deformata S_0 della S, tale che nella configurazione S_0 gli estremi M dei detti segmenti si riuniscano in un solo punto O; e dimostriamo che allora: *Il sistema coniugato* (u, v) *di* S, *corrispondente alle linee di curvatura di* Σ, *si conserva coniugato sulla deformata* S_0.

Per dimostrarlo, calcoliamo i coefficienti D_0, D_0', D_0'' della seconda forma fondamentale della S_0, che ha la stessa prima forma fondamentale (6) della S. Siccome, per ipotesi, R è la distanza di un punto variabile sopra S_0 da un punto fisso O, se poniamo

$$\varrho = \frac{1}{2} R^2, \tag{8}$$

dalle formole relative ai parametri differenziali, calcolate al § 46, vol. I, delle mie Lezioni, risulta

$$D_0 = \frac{\varrho_{11} - E_0}{\sqrt{2\varrho - \Delta_1 \varrho}}, \quad D_0' = \frac{\varrho_{12} - F_0}{\sqrt{2\varrho - \Delta_1 \varrho}}, \quad D_0'' = \frac{\varrho_{22} - G_0}{\sqrt{2\varrho - \Delta_1 \varrho}},$$

le derivate seconde covarianti ϱ_{11}, ϱ_{12}, ϱ_{22} ed il parametro differenziale $\Delta_1 \varrho$ essendo calcolati rispetto alla forma differenziale (6). Osservando la posizione (8) e le formole (6*), le precedenti si mutano subito nelle altre

$$D_0 = \frac{R R_{11} - h_1^2}{R\sqrt{1 - \Delta_1 R}}, \quad D_0' = \frac{R_{12}}{\sqrt{1 - \Delta_1 R}}, \quad D_0'' = \frac{R R_{22} - h_2^2}{R\sqrt{1 - \Delta_1 R}}. \tag{9}$$

Ma, essendo soddisfatta la (A), ossia la (A^*), ne risulta $D_0' = 0$, cioè il sistema (u, v) è coniugato anche su S_0, c. d. d.

Se ora si osserva che, nelle nostre ipotesi, quando la superficie S_0 rotola sull'applicabile S, il punto O satellite di S_0 descrive la superficie Σ, possiamo enunciare sotto la seguente forma il risultato ottenuto:

Se alle linee di curvatura di una superficie di rotolamento Σ corrisponde un sistema coniugato sulla superficie S *d'appoggio, questo è il sistema coniugato comune alla superficie rotolante* S_0.

5. Nella Nota 1) ho dimostrato che, per trovare le generazioni di una data superficie Σ come superficie di rotolamento, basta riportare sulle sue normali un segmento variabile R che soddisfi ad una certa equazione del 2° ordine, la quale, supposta riferita la Σ alle sue linee di curvatura u, v, assume la forma (I) del n. 3 della Nota 1). Nelle notazioni attuali questa equazione si scrive:

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{h_1 R}\frac{\partial R}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{h_2 R}\frac{\partial R}{\partial v}\right) = \sqrt{EG}\left\{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\right\},$$

ed ogni sua soluzione R fornisce, nella superficie S luogo degli estremi dei segmenti R di normali a Σ, la superficie d'appoggio in una corrispondente soluzione del problema di rotolamento.

Per venire all'oggetto proprio della presente Nota, supponiamo che la superficie data Σ sia isoterma; in tal caso si vedrà che la (I) ammette soluzioni comuni *dipendenti da quattro costanti arbitrarie* coll'altra equazione del 2° ordine (7), ossia

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial^2 R}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial v}\frac{\partial R}{\partial u} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v},$$

la quale esprime (n. 2) che il sistema (u, v) è coniugato sulla superficie S d'appoggio. E si osservi che, non presentando il sistema delle equazioni simultanee (I) (II) il caso d'involuzione, il numero di quattro costanti è appunto il massimo possibile che può aversi per le soluzioni comuni a due equazioni simultanee del 2° ordine [1].

La ricerca di queste ∞^4 soluzioni, comuni alle equazioni (I) (II) per una superficie isoterma, si identifica colla integrazione del sistema differenziale ordinario, lineare in cinque funzioni incognite, che il Darboux ha dato nella citata Memoria sulle trasformazioni D_m delle superficie isoterme. Abbreviamo la ricerca partendo dal sistema di Darboux ed interpretandolo sotto il nuovo punto di vista.

[1] Cfr. Goursat, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre.* Tome II, chap. VI, n. 21.

6. Essendo isoterma la superficie Σ, introduciamo parametri isometrici u, v, e poniamo, in conseguenza,

$$\sqrt{E} = \sqrt{G} = e^{\theta} .$$

Il corrispondente sistema di Darboux nelle cinque funzioni incognite $\lambda, \mu, w, \sigma, \varphi$, si scrive:

$$(D) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial u} &= -\frac{\partial \theta}{\partial v}\mu - \frac{e^{\theta}}{r_2} w + m e^{\theta}\sigma + m e^{-\theta}\varphi \\ \frac{\partial \mu}{\partial u} &= \frac{\partial \theta}{\partial v}\lambda \\ \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{e^{\theta}}{r_2}\lambda \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= e^{\theta}\lambda \\ \frac{\partial \sigma}{\partial u} &= e^{-\theta}\lambda , \\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} &= \frac{\partial \theta}{\partial u}\mu \\ \frac{\partial \mu}{\partial v} &= -\frac{\partial \theta}{\partial u}\lambda - \frac{e^{\theta}}{r_1} w + m e^{\theta}\sigma - m e^{-\theta}\varphi \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{e^{\theta}}{r_1}\mu \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= e^{\theta}\mu \\ \frac{\partial \sigma}{\partial v} &= -e^{-\theta}\mu , \end{aligned} \right.$$

dove m è una costante arbitraria (non nulla). Il sistema (D) è completamente integrabile e possiede l'integrale quadratico:

$$\lambda^2 + \mu^2 + w^2 - 2m\varphi\sigma = \text{cost.}$$

Per ottenere una trasformazione D_m di Darboux, occorre scegliere i valori iniziali (arbitrarii) delle cinque funzioni incognite, in guisa che la costante nel secondo membro della equazione ora scritta sia nulla, e sia quindi

$$(D^*) \qquad \lambda^2 + \mu^2 + w^2 = 2m\varphi\sigma .$$

Dopo ciò, se si riporta sulle normali di Σ un segmento $R = -\frac{\varphi}{w}$, la superficie S, luogo degli estremi, è il luogo dei centri di un inviluppo

(conforme) di sfere di raggio $= R$, di cui la prima falda è la superficie Σ, e l'altra Σ_1 è una seconda superficie isoterma che corrisponde a Σ per conservazione degli angoli e delle linee di curvatura. Da quest'ultima circostanza segue (n. 2) che il sistema (u, v) è coniugato sopra S: cioè $R = -\frac{\varphi}{w}$ soddisfa alla (II), come del resto è facile di verificare.

Ma noi ora proveremo che, nel tempo stesso, questo valore $R = -\frac{\varphi}{w}$ soddisfa anche a la (I), e per ciò la S è superficie d'appoggio in una generazione della superficie Σ come superficie di rotolamento. Per compiere queste verifiche, si osservi che qui le (4) diventano

$$h_1 = e^\theta\left(1 - \frac{\varphi}{wr_1}\right) \quad , \quad h_2 = e^\theta\left(1 - \frac{\varphi}{wr_2}\right);$$

e formando colle (D) di Darboux le derivate di

$$R = -\frac{\varphi}{w},$$

si trova

$$\frac{\partial R}{\partial u} = -h_1\frac{\lambda}{w} \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial v} = -h_2\frac{\mu}{w}.$$

La equazione (I) da verificarsi resta quindi

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(e^\theta\frac{\lambda}{\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(e^\theta\frac{\mu}{\varphi}\right) = e^{2\theta}\left\{\frac{w^2}{\varphi^2} - \frac{w}{\varphi}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\right\},$$

e, eseguendo le derivazioni a sinistra mediante la (D) stessa, vediamo che questa si cangia precisamente nella $(D^\star)$ ed è quindi verificata.

7. Le proprietà ora riscontrate nelle trasformazioni D_m di Darboux, combinate coi risultati dei numeri precedenti, possono formularsi geometricamente così:

Si consideri un inviluppo conforme di sfere, le cui due falde Σ, Σ_1 sono due superficie isoterme in trasformazione D_m di Darboux, e la superficie S luogo dei centri delle sfere, flessibile ed inestendibile, trasporti seco nelle sue flessioni i segmenti $M M_0$ di normali intercetti fra Σ ed S. Esiste una deformata S_0 della S, per la quale i termini dei segmenti, prima distribuiti sopra Σ, vengono a riunirsi in un punto O, e la deformazione è quella che conserva coniugato il sistema (u, v) della S corrispondente alle linee di curvatura di Σ, Σ_1. Facendo rotolare S_0 sopra S, il punto satellite O descrive la superficie isoterma Σ.

Si vede, adunque, che ad ogni trasformazione D_m di Darboux di una superficie isoterma Σ corrisponde una generazione di questa Σ come superficie di rotolamento, la superficie d'appoggio S essendo il luogo dei centri delle sfere dell'inviluppo conforme. Quanto alla superficie rotolante, essa è già intrinsecamente definita dalla sua seconda forma fondamentale, colle (9) n. 4, e la sua determinazione effettiva si ha colla integrazione di una equazione di Riccati. Per quanto è dimostrato nella Nota 1) al n. 8, la questione si riconduce all'altra di ridurre a *forma normale* del ds'^2 della sfera la forma differenziale quadratica

$$ds'^2 = e^{2\theta}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{w}{\varphi}\right)^2 du^2 + e^{2\theta}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{w}{\varphi}\right)^2 dv^2 , \tag{10}$$

che ha appunto la curvatura $K = +1$. Ma si può ad essa dare un'altra interpretazione geometrica, secondo i risultati della Memoria *b*), in quanto essa equivale alla ricerca di un'altra superficie isoterma $\overline{\Sigma}$, trasformata della Σ per la *trasformazione* T_m *associata* alla D_m di Darboux. E infatti questa nuova superficie isoterma $\overline{\Sigma}$ ha l'elemento lineare

$$ds^2 = \frac{e^{2\theta}}{\varphi^2}(du^2 + dv^2) ,$$

e le curvature principali

$$\frac{1}{\varrho_1} = w - \frac{\varphi}{r_1} \quad , \quad \frac{1}{\varrho_2} = w - \frac{\varphi}{r_2} .$$

onde appunto il suo ds'^2 sferico rappresentativo è quello dato dalla (10).

8. Da ultimo dimostriamo che i risultati qui ottenuti per le superficie isoterme nello spazio euclideo si trasportano inalterati al caso degli spazii a curvatura costante.

Nella Memoria *b*) ho dimostrato che le trasformazioni D_m di Darboux per le superficie isoterme Σ nello spazio di curvatura costante K_0 (positiva o negativa) dipendono da un sistema differenziale, affatto analogo al sistema (D) n. 6, nel quale sono solo da introdursi due modificazioni:

1°) Nei secondi membri delle formole per $\frac{\partial\lambda}{\partial u}, \frac{\partial\mu}{\partial v}$ deve togliersi il termine $K_0 e^\theta\varphi$, lasciando le altre formole inalterate; così:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \frac{\partial\mu}{\partial v} = 2me^\theta\sigma - e^\theta w\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) - \frac{\partial\theta}{\partial u}\lambda - \frac{\partial\theta}{\partial v}\mu - 2K_0 e^\theta\varphi . \tag{11}$$

2°) L'integrale quadratico diventa, ora,

$$\lambda^2 + \mu^2 + w^2 + K_0\varphi^2 - 2m\varphi\sigma = \text{cost} ,$$

e per ottenere una trasformazione D_m, deve farsi nulla la costante nel secondo membro, onde si avrà:

$$\lambda^2 + \mu^2 + w^2 + K_0\varphi^2 = 2m\varphi\sigma\,. \tag{12}$$

Per dimostrare che anche qui ad ogni trasformazione D_m corrisponde una generazione della superficie isoterma Σ come superficie di rotolamento, la superficie S luogo dei centri essendo superficie d'appoggio, basta provare, secondo la Nota 2) (n. 2), che il ds^2, dato da

$$ds^2 = e^{2\theta}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{w}{\varphi}\right)^2 du^2 + e^{2\theta}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{w}{\varphi}\right)^2 dv^2$$

ha la curvatura $= + 1$.

Posto, adunque,

$$H_1 = e^\theta\left(\frac{1}{r_2} - \frac{w}{\varphi}\right)\quad,\quad H_2 = e^\theta\left(\frac{1}{r_1} - \frac{w}{\varphi}\right), \tag{13}$$

si deve verificare che si ha

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\right) + H_1 H_2 = 0\,. \tag{14}$$

Se deriviamo le (13), osservando le (D) e le formole di Codazzi

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{e^\theta}{r_1}\right) = \frac{e^\theta}{r_2}\frac{\partial\theta}{\partial u}\quad,\quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{e^\theta}{r_2}\right) = \frac{e^\theta}{r_2}\frac{\partial\theta}{\partial v}\,,$$

otteniamo

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial H_2}{\partial u} &= H_1\left(\frac{\partial\theta}{\partial u} - e^\theta\frac{\lambda}{\varphi}\right) \\ \frac{\partial H_1}{\partial v} &= H_2\left(\frac{\partial\theta}{\partial v} - e^\theta\frac{\mu}{\varphi}\right), \end{aligned}\right.$$

per cui la (14) diventa

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} - \frac{\partial}{\partial u}\left(e^\theta\frac{\lambda}{\varphi}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(e^\theta\frac{\mu}{\varphi}\right) + \\ &\qquad + \frac{e^{2\theta}}{r_1 r_2} - e^{2\theta}\frac{w}{\varphi}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + e^{2\theta}\frac{w^2}{\varphi^2} = 0\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Se eseguiamo a sinistra le derivazioni colle formole (D), ponendo mente alla (11), ed all'equazione di Gauss per lo spazio curvo,

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \frac{e^{2\theta}}{r_1 r_2} = - K_0\, e^{2\theta}\,,$$

si vede che la (15) si riduce all'identità (12), e trovasi perciò verificata.

Mineralogia. — *Due minerali di Baveno contenenti terre rare: weibyeïte e bazzite.* Nota del Corrispondente E. Artini.

Già da qualche tempo l'ing. E. Bazzi, assiduo ed acuto osservatore dei minerali del granito di Baveno, richiamò la mia attenzione sopra alcuni esemplari da lui raccolti in quella classica località. Avendo egli avuto la grande cortesia di offrirmi per lo studio tale interessante materiale, posso ora render noti i risultati delle mie ricerche, non senza profittare della occasione per presentare pubblicamente all'egregio amico i più vivi e cordiali ringraziamenti.

Un primo risultato di queste ricerche è la constatazione della presenza della *weibyeïte* fra i minerali di Baveno. Si tratta di cristallini bipiramidali, rombici, della dimensione massima di 0,3 mm., impiantati ordinariamente sul quarzo. Le facce ne sono brillanti, ma curve; il colore è giallognolo, come si riconosce bene dove il minerale giace sopra una matrice chiara, mentre appare bruniccio, fino a rosso bruno, dove i cristallini riposano su quarzo incrostato da pulviscolo ematitico. A tale patina ematitica, interposta fra il quarzo e la weibyeïte, si deve anzi se i cristallini di questa, non ostante la loro esiguità, possono essere staccati senza rottura.

Al microscopio di polarizzazione si constata che il minerale è birifrangente, biassico; la birifrazione è fortissima; le direzioni di estinzione coincidono sempre con le diagonali delle sezioni rombe.

Posti sovra un portoggetti, e bagnati con una goccia di HCl, i cristallini si sciolgono subito, facilmente e completamente, con viva effervescenza. La soluzione, liberata per evaporazione dalla maggior parte dell'acido in eccesso, e diluita con una goccia d'acqua, dà, con l'aggiunta di un granuletto di acido ossalico, la ben nota reazione del cerio, nella maniera più nitida e sicura. Salvo il ferro, la cui origine è facile a riconoscere, nessuna traccia di altri metalli potei constatare, quantunque abbia a tale scopo sacrificato varî dei non molti cristallini disponibili.

Quanto alla identificazione specifica del minerale, tra i carbonati di cerio noti finora era da escludersi subito, per le proprietà morfologiche ed ottiche, la parisite, già trovata da Tacconi a Montorfano ([1]). Restavano la weibyeïte di Brögger ([2]) e la ancilite di Flink ([3]), rombiche entrambe. Ma

([1]) E. Tacconi, *Ulteriori osservazioni sopra i minerali del granito di Montorfano.* Rendic. della R. Acc. dei Lincei, vol. XIV, serie 5ª, fasc. 2°, an. 1905.

([2]) W. C. Brögger, *Die Mineralien der Syenitpegmatitgänge der Südnorwegischen Augit-und Nephelinsyenite.* Zeitschr. f. Kryst. XVI, 1890, pag. 650.

([3]) G. Flink, *On the minerals from Narsarsuk on the firth of Tunugliarfik in Southern Greenland.* Meddelelser om Gronland, 1899, XXIV, pag. 49 dell'estratto.

quest'ultima ha sviluppo pseudopiramidale, per combinazione di due prismi rombici, come bene si rileva anche dalla fig. 3, tav. III, del Flink, mentre nel nostro minerale, come in quello di Brögger, l'abito è veramente bipiramidale rombico, e le estinzioni diagonali. Il dubbio, quindi, più non era possibile; ma per maggiore sicurezza della determinazione volli tentar di portare al goniometro il più bello dei cristallini da me staccati. Non senza pena potei misurare, sopra due spigoli omologhi, l'angolo $(111) . (11\bar{1})$, ottenendo valori di 94°.40′ e 96°.20′ (media 95°.30′), abbastanza ben corrispondenti al valore dato da Brögger, di 95°.59′. Una sol volta invece, al bagliore incerto delle faccette, curve e striate, potei misurare lo spigolo $(111) . (1\bar{1}1)$, trovando un valore di circa 54°, che ricorda non troppo da lontano quello dato da Brögger, di 56°.44′.

La grande rarità del materiale, e la estrema piccolezza dei cristalli mi impedirono ulteriori ricerche; potei solo osservare che il minerale va a fondo nella soluzione di Thoulet concentrata, di $d = 3.19$. Io però credo che quanto sopra esposi giustifichi il riferimento dei nostri cristallini alla weibyeïte. Anche nelle druse pegmatitiche del granito di Baveno, come in quelle di Montorfano, si trovano dunque, benchè in quantità estremamente scarsa, carbonati di terre rare.

Ma assai maggiore importanza mi sembra presentare un'altra specie, tra quelle di Baveno dall'ing. Bazzi notate come critiche e singolari. Si tratta di un minerale che si presenta esso pure assai raramente — fu anzi osservato solo nei frammenti di una unica grande geode — in forma di fascetti prismatici di un bellissimo colore azzurro chiaro, impiantati, con molta muscovite secondaria incrostante a piccole rosette, poca laumontite, e albite in nitidi cristallini limpidi e incolori, su cristalli di quarzo ed ortoclasio roseo.

Lo studio morfologico e ottico fu agevole cosa, trattandosi di prismetti che possono raggiungere anche, in qualche esemplare, due mm. di lunghezza, per qualche decimo di mm. di spessore. I prismi sono esagonali, un poco assottigliati verso l'estremità, che è troncata da una nitida faccetta di base; quando sono fascicolati, all'estremità libera si suddividono in varî sottilissimi, ma nitidi subindividui; talora tendono ad assumere quella forma a bariletto che è tanto caratteristica per i minerali del gruppo della piromorfite.

Non si osserva sfaldatura distinta; ma è facile, rompendo trasversalmente uno dei cristallini, ottenere un moncone giacente sulla base. Si può così constatare, mediante la figura di interferenza, che il minerale è uniassico, con carattere ottico negativo; la figura uniassica si presenta nitida, senza deformazioni od anomalie sensibili. La lucentezza è vitrea; la trasparenza quasi perfetta nei minori individui. La birifrazione è energica; il potere rifrangente forte, all'incirca come nella tormalina; gli strati successivi presentano qualche diversità rispetto alla intensità della colorazione, alla birifrazione e al potere rifrangente. Con miscele di monobromonaftalina e

olio di vaselina potei determinare con sufficiente esattezza ($\pm 0,001$) gli indici principali di rifrazione, mediante l'osservazione della linea di Becke. Ottenni:

per il nucleo interno $\varepsilon = 1,608$; $\omega = 1,626$;
per la zona più esterna $\varepsilon = 1,602$; $\omega = 1,623$;

valori tutti riferiti, si intende, alla luce di sodio.

Il pleocroismo è bellissimo; e precisamente si ha:

e = azzurro-cielo intenso;
o = giallo verdognolo, estremamente pallido, quasi incolore.

L'assorbimento è dunque inverso di quello, ben noto, della tormalina.

Il p. sp. determinato con la soluzione di Thoulet, sopra alcuni frammenti purissimi, fu trovato = 2,80.

La durezza è = $6\,^1/_2$.

Al cannello il minerale diventa scuro, opaco, lucido di smalto alla superficie, ma non fonde. La reazione del Bo, eseguita tre volte di seguito, con ogni cura, alla fiamma, alternando con prove di confronto su eguali quantità di tormalina, riuscì costantemente e assolutamente negativa.

Dagli acidi forti, salvo il fluoridrico, il minerale è affatto inattaccabile. Fuso con bisolfato potassico, viene scomposto con molta difficoltà; la soluzione solforica, saggiata con H_2O_2, non dà traccia della reazione, tanto sensibile, del TiO_2.

Da HFl fumante, freddo, sopra un portaggetti difeso con balsamo ben cotto, il nostro minerale è abbastanza rapidamente attaccato; dopo lenta evaporazione, si nota la formazione di *pochissimi* nitidi cristalli esagonali di fluosilicato sodico; si intende bene che il balsamo è intatto, e il vetro non attaccato.

Polverizzato e fuso con carbonato sodico secco, il minerale si disaggrega facilmente; riprendendo con HCl secondo il notissimo metodo, si può riconoscere con sicurezza la presenza di SiO_2 come componente essenziale. Il soluto, filtrato, precipita abbondantemente con NH_3; questo precipitato, fioccoso, giallognolo per Fe, lavato, si ridiscioglie facilmente e completamente in HCl diluito, freddo. La più accurata ricerca, anche microchimica, di Al e Be, da me prima sospettati presenti, riuscì sempre assolutamente negativa. Notai invece la presenza di sensibile quantità di Fe, e sopra tutto la formazione di un precipitato relativamente abbondante, bianco, prima fioccoso, che poi diventa cristallino, determinato dalla aggiunta di acido ossalico alla soluzione cloridrica sensibilmente acida.

Constatata così la presenza di notevole quantità di terre rare, non essendo la massa del minerale disponibile sufficiente ad una separazione

completa e sistematica, eseguii una serie di prove microchimiche, sussidiate da numerosissimi saggi di confronto sui composti delle diverse terre rare più importanti, e relative miscele. Nel corso di tali prove giunsi alla persuasione che il reattivo microchimico il quale determina la formazione di prodotti più distinti e caratteristici, e permette le più sicure conclusioni, è ancora l'acido ossalico.

Una goccia della soluzione cloridrica del precipitato ottenuto con NH_3, leggermente acida, con l'aggiunta di un granuletto di $C_2O_4H_2$, lascia prima riconoscere la formazione di aghetti sottili, con viva birifrazione ed estin-

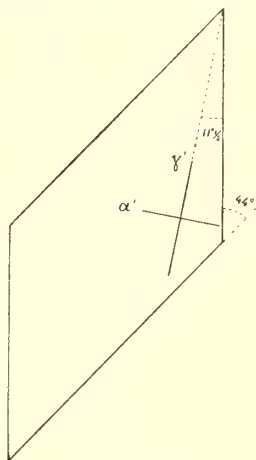
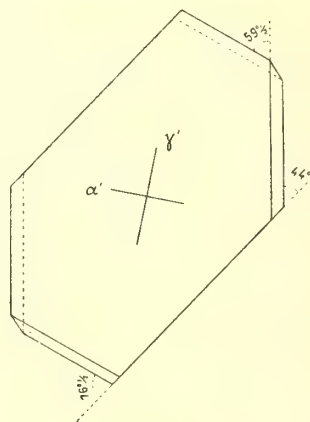



Fig. 1. Fig. 2.

zione positiva parallela all'allungamento, riuniti in croci rettangole, o in gruppi stellati a sei raggi, o in ciuffetti raggiati più complessi; l'aspetto e i caratteri di questo prodotto di reazione son proprio gli stessi degli ossalati dei metalli appartenenti al gruppo del cerio.

Ma più abbondante e caratteristico è un altro prodotto, che si forma poco dopo, in cristallini più grossi assai, e meglio distinti, evidentemente perchè il composto è relativamente più solubile. Si tratta di laminette rombe, nitidissime, con angolo di circa 44°; la birifrazione ne è vivissima; la direzione di estinzione otticamente positiva fa un angolo di 11° $^1/_2$ con uno dei lati, nell'angolo acuto del contorno rombico (fig. 1). Quando la sostanza sia più abbondante, e la goccia di soluzione, molto diluita, si lasci concentrare assai lentamente, si possono avere cristallini più grossetti, del tipo di quelli della fig. 2. Questi sono ancora tabulari; la larga faccia su cui riposano è tagliata, oltre che da due facce di un pinacoide quasi normale ad essa (lati lunghi) e dalle due facce di un altro pinacoide ad essa molto obliquo (lati medî, che fanno 44° coi primi), anche dalle due facce, pure

molto oblique, di un terzo pinacoide, le cui tracce (lati corti) troncano non simmetricamente l'angolo acuto della sezione romba formata dai precedenti; gli angoli esterni del contorno esagono sono, come si può rilevare dalla figura, di 44°, 59° $^1/_2$ e 76° $^1/_2$.

L'obliquità dei pinacoidi, visibile nettamente e costantemente (cfr. figura 2), basta a stabilire che i cristalli sono triclini, e non monoclini giacenti su (010), come si poteva sospettare dalla ispezione superficiale delle laminette più semplici e più sottili; in tutte, del resto, si può riconoscere che dalla larga faccia su cui riposano esce una bisettrice dell'angolo degli A. O., con sensibile e costante, per quanto non grande, obliquità. Qualche volta queste laminette si riuniscono a gruppetti raggiati o stellati, di pochi individui.

Più tardi ancora, ai margini del preparato, con la quasi completa evaporazione del solvente, insieme coi cristalli di acido ossalico in eccesso, si nota la formazione di piccolissimi ma nitidissimi rombododecaedri, perfettamente incolori ed isotropi.

Tre volte ho proceduto alla disaggregazione di piccole quantità di materiale puro, non ostante la difficoltà di ottenerlo; e tutte e tre le volte ottenni gli stessi risultati, con nitidezza e precisione mirabili.

Ma con ciò non ero avanzato di molto, perchè non sapevo a quale elemento raro poter attribuire la formazione di così distinti prodotti. Invano avevo sperimentato ripetute volte con acido ossalico sui composti di cerio, lantanio, neodimio, praseodimio, ittrio, erbio, itterbio, zirconio e torio, e loro miscele; mai ero riuscito a ottenere qualche cosa di pur lontanamente simile. Restava da provare lo scandio, al quale, per vero dire, mi facean pensare insistentemente, oltre alla diffusione di tale elemento nei graniti, dimostrata dai recenti lavori spettrografici di Eberhard ([1]), sopra tutto il peso specifico, relativamente assai basso, del minerale in questione.

Non essendo tuttavia riuscito a procurarmi, nè presso colleghi, nè presso i principali negozianti di prodotti chimici da me interpellati, una piccola quantità di un composto di scandio puro, mi decisi a rivolgermi al prof. R. J. Meyer di Berlino, ben noto per numerosi lavori sulle terre rare, e in modo particolare per il suo metodo di separazione dello scandio dagli altri elementi rari, e per le ricerche sue e dei suoi allievi sopra i composti di questo rarissimo elemento ([2]). Il prof. Meyer, con gentilezza veramente squisita, della quale gli resterò perennemente e profondamente grato, mi

([1]) G. Eberhard, *Ueber die weite Verbreitung des Scandium auf der Erde*, I Sitzb. d. K. preuss. Akad. d. Wiss., an. 1908, XXXVIII, pag. 851; II ibid., an. 1910, XXII, pag. 404.

([2]) Ved. riass. tali ricerche nella recente Memoria sintetica: R. J. Meyer, *Ueber das Skandium. Zusammenfassende Mitteilung über Vorkommen, Darstellung und Chemie des Skandiums.* Zeit. für anorg. Chemie, *86*, an. 1914, pag. 257

mandò subito in dono una notevole quantità di cloruro di scandio puro, di sua preparazione. Con questo prezioso prodotto mi fu agevole di persuadermi che il mio sospetto era fondato: il minerale azzurro del granito di Baveno è realmente un composto di scandio.

Infatti, le soluzioni diluitissime di $ScCl_3 . 6H_2O$, leggermente acide per HCl, saggiate con qualche granulo di acido ossalico, lasciarono sempre riconoscere la formazione di bei cristallini tabulari, a contorno rombico od esagonale, *assolutamente identici*, per valori angolari e per orientazione ottica, a quelli osservati nella soluzione cloridrica del precipitato del gruppo NH_3 ottenuto dal minerale in questione. Nè basta: ai margini del preparato, dopo evaporazione quasi totale, insieme coi cristalli di acido ossalico in eccesso, mi fu agevole di riconoscere anche nei preparati di puro scandio quei piccoli rombododecaedri, così nitidi e così problematici, da me osservati nei primi miei preparati.

Restava da vedersi a che cosa essi potessero attribuirsi; dovendo le lamine rombe riferirsi all'ossalato di scandio $Sc_2 (C_2O_4)_3 . 5H_2O$ già descritto dal prof. R. J. Meyer (« *Enthält die Lösung viel Säure, so bildet sie sich erst allmählich in Form schön irisierender Blättchen* », loc. cit., pag. 284), e non essendo verosimile una così sensibile impurità, comune al mio minerale e al prodotto inviatomi da questo scienziato, mi parve probabile che si trattasse di un sale acido, più solubile, e stabile solamente in presenza di un grande eccesso di $C_2O_4H_2$. Numerose prove microchimiche eseguite sopra soluzioni diluitissime di cloruro di Sc, acide per HCl, con aggiunta di quantità gradatamente crescenti di acido ossalico, mi permisero infatti di riconoscere che, quando l'acido ossalico è scarso, si formano solo ed esclusivamente le tavolette rombe; se l'acido ossalico è in eccesso, ai margini della goccia, dove con la evaporazione si formano i cristalli dell'acido libero, si ha anche sempre formazione di rombododecaedri. Qualora l'eccesso di $C_2O_4H_2$ sia fortissimo, questi ultimi si formano anche nel bel mezzo del preparato, ma sempre da ultimi. Il composto prevalente è dunque dato dalle tavolette rombe od esagone sopra descritte; queste non mancano mai, e formano veramente il prodotto caratteristico della reazione microchimica dello scandio: prodotto che permette di differenziare questo metallo, senza esitazione, da tutti gli altri delle terre rare da me esaminate, e di riconoscerlo anche nelle miscele.

Le dimensioni dei rombododecaedri sono anche notevolmente minori di quelle delle tavolette rombe; in queste la dimensione massima può agevolmente raggiungere mezzo millimetro, mentre i rombododecaedri raramente raggiungono 0,05 mm., e per lo più stanno fra 0,02 e 0,03 mm. Che si tratti di un sale acido, mi par certo; anche perchè tali rombododecaedrini, isolati, separandoli dall'eccesso di acido ossalico libero, e bagnati con pochissima acqua, si scompongono e si intorbidano; con più acqua si sciolgono, ma la

soluzione evaporata non ridà i cristalli primitivi, bensì piccole tavolette rombe. Queste ultime invece, riprese con acqua fino a dissoluzione, si riformano inalterate con la evaporazione.

Da quanto sono venuto esponendo risulta, parmi, che il minerale azzurro di Baveno è un silicato di scandio, con altri metalli di terre rare (cerio ?), ferro e poco sodio. Si tratta evidentemente di una specie nuova, importante sopra tutto perchè questo sembra finora essere l'unico minerale nel quale lo scandio sia un componente essenziale (com'è noto, dalle ultime osservazioni di Eberhard risulta che ciò non può dirsi della wiikite). Di una analisi completa e precisa, anche solamente qualitativa, non è il caso di parlare, data la piccolissima quantità di materiale finora disponibile (tutto insieme il materiale puro da me riunito, saccheggiando i pezzi più ricchi messi a mia disposizione dall'amico ing. Bazzi, raggiunse forse sette od otto centigrammi, quasi interamente consumati nei varii saggi analitici); ma poi che la specie è perfettamente identificata morfologicamente e fisicamente, e noti ne sono almeno i principali componenti, credo di essere in diritto di dar ad essa un nome, chiamandola *bazzite*, in omaggio a colui che l'ha scoperta, riconoscendo fra mille e mille esemplari del nostro granito i minuscoli e rarissimi cristallini azzurri, tanto interessanti e degni di studio.

Matematica. — *Formole di derivazione funzionale.* Nota di E. Daniele, presentata dal Socio V. Volterra.

Raccolgo in questa Nota, ed in una successiva, alcune formole che dànno le derivate di funzioni di linee espresse in forma analitica esplicita. Più che altro, veramente, le funzioni che io considero appartengono al tipo delle funzioni composte; e comprendono all'incirca, o si estendono facilmente a comprendere, i più notevoli casi di derivazione di funzioni esplicite, che si trovano sparsi nei lavori dei varii autori, tralasciando quello delle funzioni analoghe ai polinomii, trattato esaurientemente dal prof. Volterra nel cap. I delle *Leçons sur les équations intégrales et les équations integro-différentielles.*

È noto, tuttavia, quanto sia limitato l'insieme di tali casi, e come d'altra parte non si veda, per le funzioni di linee, la possibilità di una classificazione analoga a quella che si fa per le funzioni ordinarie, che permette di compendiare in una tabella di formole tutto quanto occorre per la derivazione di una qualsiasi funzione del tipo algebrico o trascendente elementare. Perciò, una approfondita esposizione del calcolo delle derivate funzionali dovrebbe inevitabilmente rivolgersi alle funzioni implicite. dove il problema si presenta sotto un aspetto molto più vario e più complicato che non nel corrispondente caso delle funzioni ordinarie. Le Note attuali si possono dunque

considerare come costituenti un paragrafo introduttivo, di carattere necessariamente elementare, alla trattazione sistematica di quel problema.

Credo inutile di fare uno speciale richiamo delle definizioni e notazioni adottate: sono quelle che il prof. Volterra adopera nei suoi lavori e nei due volumi di lezioni, che i matematici ben conoscono.

1. Sia

$$(1) \qquad \begin{cases} F(x) = F(f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) \\ f(x) = f\left|\left[\psi(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}), x\right]\right|, \end{cases}$$

cioè F dipenda in modo ordinario da una funzione $f(x)$ e dalle sue prime n derivate, mentre $f(x)$ dipenda a sua volta da tutti i valori di una funzione $\psi(\xi)$ fra 0 e 1, nonchè da una variabile x. Si può allora pensare F come dipendente, oltrechè da x, da tutti i valori che $\psi(\xi)$ assume fra 0 e 1. Ammessa la derivabilità di F rispetto a f, f', ..., $f^{(n)}$, e supposto che f, considerata come funzione di ψ, sia priva di punti eccezionali, vogliamo calcolare la derivata funzionale di F rispetto a ψ.

Diamo a $\psi(\xi)$ una variazione $\chi(\xi)$ di segno costante e infinitesima in un intervallo $(\mu\,\nu)$ compreso fra 0 e 1, e poniamo

$$\sigma = \int_\mu^\nu \chi(\xi)\, d\xi = \text{incremento dell'area corrispondente alla linea } \psi(\xi);$$

inoltre diciamo δf e δF le variazioni di f e F. Avremo, a meno di infinitesimi d'ordine superiore,

$$\delta f = \int_\mu^\nu f'|[\psi(\xi), x, \eta]|\, \chi(\eta)\, d\eta = \sigma f'|[\psi(\xi), x, \bar\eta]|,$$

dove $\bar\eta$ indica un conveniente punto dell'intervallo $(\mu\,\nu)$; e quindi

$$\delta F = \sum_{r=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial f^{(r)}} \delta f^{(r)} = \sigma \sum_{r=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial f^{(r)}} \frac{\partial^r}{\partial x^r} f'|[\psi(\xi), x, \bar\eta]|.$$

Dividendo i due membri per σ e facendo tendere tutti i punti di $(\mu\,\nu)$ ad uno stesso punto ξ_1, otteniamo infine:

$$(\mathrm{I}) \qquad F'|[\psi(\xi), x, \xi_1]| = \sum_{r=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial f^{(r)}} \frac{\partial^r f'|[\psi(\xi), x, \xi_1]|}{\partial x^r}.$$

Come caso particolare assumiamo

$$(1') \qquad F = F(f) \quad , \quad f = f\left|\left[\psi(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})\right]\right|,$$

cioè F sia funzione ordinaria di una variabile f, che a sua volta dipenda da tutti i valori di una funzione $\psi(\xi)$ fra 0 e 1; la (I) diventa

$$(\mathrm{I}') \qquad F'|[\psi(\xi), \xi_1]| = F'(f) \cdot f'|[\psi(\xi), \xi_1]| .$$

La (I) e la (I′) mostrano una perfetta analogia con le formole che valgono per la derivazione delle ordinarie funzioni composte, come pure per la derivazione intesa secondo la definizione del prof. Pascal [1], quando si consideri una linea $f(x)$ funzione di un'altra linea $\psi(y)$ composta mediante una linea $\varphi(t)$.

2. Il caso delle funzioni composte si ha, meglio che non colle (1) e (1′) del num. precedente, colle formole

$$(2) \qquad F = F|[\overset{b}{\underset{a}{\varphi(x)}}]| \quad , \quad \varphi(x) = \varphi|[\overset{1}{\underset{0}{\psi(\xi)}}, x]| ,$$

le quali permettono di considerare F come dipendente da tutti i valori di $\psi(\xi)$ fra 0 e 1:

$$F = F|[\overset{1}{\underset{0}{\psi(\xi)}}]| .$$

Vogliamo la derivata di F rispetto a ψ in un punto ξ_1 nell'ipotesi che *tanto* $F|[\varphi]|$ *quanto* $\varphi|[\psi]|$ *siano prive di punti eccezionali*. Diamo a $\psi(\xi)$ una variazione $\chi(\xi)$ come al n. 1; si avrà allora, colle stesse notazioni dianzi adoperate, trascurando infinitesimi d'ordine superiore:

$$\delta\varphi = \int_\mu^\nu \varphi'|[\psi(\xi), x, \eta]| \chi(\eta)\, d\eta = \sigma\, \varphi'|[\psi(\xi), x, \bar{\eta}]| .$$

Passando a F, si avrà:

$$\delta F = \int_a^b F'|[\varphi(x), y]| \,\delta\varphi(y)\, dy ;$$

e sostituendo coll'ultima formola:

$$\frac{\delta F}{\sigma} = \int_a^b F'|[\varphi(x), y]| \,\varphi'|[\psi(\xi), y, \bar{\eta}]|\, dy ;$$

al limite, col tendere dell'intervallo $(\mu\nu)$ a zero, si ha infine:

$$(\mathrm{II}) \qquad F'|[\psi(\xi), \xi_1]| = \int_a^b F'|[\varphi(x), y]| \,\varphi'|[\psi(\xi), y, \xi_1]|\, dy .$$

[1] Cfr. le Note: *Sui principii della teoria delle funzioni di linee* (Rend. R. Acc. delle sc. di Napoli, ser. 3ª, vol. XX, 1914).

Come esempio si assuma, nelle (2),

$$\varphi(x) = \varphi\left(\int_0^1 f(\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi\,,\,x\right), \tag{2'}$$

cioè φ sia funzione ordinaria dei due argomenti

$$A = \int_0^1 f(\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi \quad \text{e} \quad x\,,$$

dove supponiamo che $f(\xi)$ sia una funzione fissa. La (I') ci dà

$$\varphi'\,|[\psi(\xi)\,,x\,,\xi_1]| = \frac{\partial\varphi(A\,,x)}{\partial A}\,A'\,|[\psi(\xi)\,,\xi_1]|\,,$$

mentre A' si calcola con formole note [1]:

$$A' = f(\xi_1)\,.$$

Finalmente si ha, essendo $\varphi(x)$ data dalla (2'),

$$F'\,|[\psi(\xi)\,,\xi_1]| = f(\xi_1)\int_a^b F'\,|[\varphi(x)\,,y]|\,\frac{\partial\varphi(A\,,y)}{\partial A}\,dy\,. \tag{II'}$$

L'ipotesi del caso generale sulla mancanza di punti eccezionali per φ, si riduce ora a quella della derivabilità ordinaria di φ rispetto ad A.

Si può osservare che, se si pone

$$F = F(y_1 \dots y_n) \quad , \quad y_i = \varphi_i(z_1 \dots z_m)\,,$$

si ha

$$\frac{\partial F}{\partial z_r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_i}\,\frac{\partial \varphi_i}{\partial z_r}\,, \qquad (r = 1\,,2\,,\dots,m)\,,$$

e da questa formola si deduce la (II) col noto passaggio dal finito all'infinito. In particolare, se

$$y_i = \varphi_i(c_1 z_1 + \cdots + c_m z_m)\,,$$

ove le c sono delle costanti, e si pone

$$c_1 z_1 + \cdots + c_m z_m = \zeta\,,$$

si ottiene

$$\frac{\partial F}{\partial z_r} = c_r\,\Sigma_i\,\frac{\partial F}{\partial y_i}\,\frac{d\varphi_i}{d\zeta}\,,$$

da cui si deduce la (II').

[1] Cfr. Volterra: *Leçons sur les équations intégrales* etc., ch. I, n. VI.

3. Riprendiamo la $F|[\psi]|$ definita dalle (2); ma, conservando l'ipotesi che $F|[\varphi]|$ sia priva di punti eccezionali, supponiamo, invece, che $\varphi|[\psi]|$ dipenda *specialmente* da $\psi(x)$, e scriviamo [1]:

$$\varphi(x) = \varphi\,|[\psi(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}), x]|\,(\psi(x)), \tag{3}$$

mentre per $\delta\varphi$ si abbia

$$\delta\varphi = \sigma\,\varphi'\,[\psi(\xi), x, \eta]| + a\,[\psi(\xi), x]\,\chi(x).$$

Il δF verrà dato da

$$\delta F = \sigma \int_a^b F'|[\varphi(x), y]| \cdot \varphi'\,|[\psi(\xi), y, \eta]|\,dy + \\ + \int_\mu^\nu F'|[\varphi(x), y]| \cdot a\,|[\psi(\xi), y]| \cdot \chi(y)\,dy\,;$$

e dal secondo termine del secondo membro si estrarrà pure un fattore σ, per cui si avrà, in definitiva,

$$F'|[\psi(\xi), \xi_1] = \int_a^b F'\,[\varphi(x), y] \cdot \varphi'\,[\psi(\xi), y, \xi_1]|\,dy + \\ + F'|[\varphi(x), \xi_1]| \cdot a\,|[\psi(\xi), \xi_1]| \tag{III}$$

Assumiamo, in particolare,

$$\varphi(x) = \varphi\left(\int_0^1 f(x, \xi)\,\psi(\xi)\,d\xi\,,\ \psi(x)\right) \tag{3'}$$

cioè φ sia funzione ordinaria dei due argomenti

$$A = \int_0^1 f(x, \xi)\,\psi(\xi)\,d\xi \quad \text{e} \quad \psi(x),$$

ove $f(x, \xi)$ è una funzione fissa, e supponiamo che anche x varii fra 0 e 1. Il calcolo diretto, oppure l'applicazione della (I'), conducono alla formola:

$$F'|[\psi(\xi), \xi_1]| = \int_0^1 F'|[\varphi(x), y]|\,\frac{\partial\varphi(A, \psi(y))}{\partial A}\,f(y, \xi_1)\,dy + \\ + F'\,[\varphi(x), \xi_1] \cdot \left(\frac{\partial\varphi(A, \psi(\xi))}{\partial\psi}\right)_{\xi=\xi_1}. \tag{III'}$$

Ciò che nel caso generale era indicato con a, qui diventa $\dfrac{\partial\varphi(A, \psi)}{\partial\psi}$.

[1] La notazione è del prof. Volterra; veggasi la seconda delle Note *Sulle funzioni chè dipendono da altre funzioni* (Rend. Lincei, 1887, 2° sem., pag. 141).

Come esempio si prenda

$$\varphi(x) = \int_0^1 f(x, \xi)\, \psi(\xi)\, d\xi + \psi(x);$$

avremo

$$F' [\psi(\xi), \xi_1]| = \int_0^1 F'|[\varphi(x), y]| \cdot f(y, \xi_1)\, dy + F'|[\varphi(x), \xi_1]|.$$

Prendiamo invece

$$(3'') \qquad \varphi(x) = \frac{\psi(x)}{\int_0^1 \psi(\xi)\, d\xi};$$

si ottiene:

$$(\mathrm{III}'') \qquad F'|[\psi(\xi), \xi_1]| = -\frac{\int_0^1 F'|[\varphi(x), y]|\, \psi(y)\, dy}{\left(\int_0^1 \psi(\xi)\, d\xi\right)^2} + \frac{F'|[\varphi(x), \xi_1]|}{\int_0^1 \psi(\xi)\, d\xi}.$$

La $F|[\psi]|$ definita dalla $F = F|[\varphi]|$ e dalla (3''), con F funzione arbitraria, dà la soluzione di un'equazione alle derivate funzionali studiata dal prof. Volterra nel num. 2 della Nota *Sulle equazioni alle derivate funzionali* (Rend. Lincei, 1914, 1° sem.). Ricorrendo alla (III''), la verifica della soluzione riesce immediata.

La (3') e la $F = F|[\varphi]|$, che definiscono nel loro insieme la F come funzione di ψ, si possono dedurre, col passaggio dal finito all'infinito, dal sistema

$$F = F(y_1 \dots y_n)$$
$$y_i = \varphi_i(c_{i1} z_1 + \cdots + c_{im} z_m, z_i)$$
$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

che permette di considerare F come funzione di $z_1 \dots z_m$.

Si ha quindi, ponendo

$$c_{i1} z_1 + \cdots + c_{im} z_m = \zeta_i,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \zeta_i} c_{ir} + \frac{\partial F}{\partial y_r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial z_r},$$

dalla quale la (III') è deducibile col solito procedimento.

Matematica. — *Sopra una equazione integro-differenziale del tipo ellittico.* Nota di LUIGI SINIGALLIA, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. Le equazioni integro-differenziali del tipo ellittico sono state studiate dal prof. Volterra (1). Quella, però, che io qui voglio considerare, non è stata trattata nè dal detto Autore, nè da altri. Ad essa sono applicabili i risultati noti per le equazioni dello stesso tipo, quando si conosca la soluzione fondamentale dell'equazione aggiunta: ed è la determinazione di tale soluzione che forma lo scopo principale di questa Nota.

2. L'equazione di cui qui vogliamo occuparci è la seguente:

$$(1) \qquad \Delta^2 u(t) + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f_{10}(t,\tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} f_{01}(t,\tau) \right\} d\tau = 0 ,$$

ove

$$\Delta^2 u(t) = \frac{\partial^2 u(x,y|t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y|t)}{\partial y^2} .$$

Diremo che la funzione $u(x,y|t) \equiv u(t)$ pei valori di t compresi fra 0 e T è nell'area σ limitata dal contorno s, una *soluzione regolare* della (1) quando soddisfa alla (1) e pei detti valori di t ed in tutti i punti $(x,y$ dell'area σ è finita continua assieme con le sue derivate prime e second rispetto ad x,y.

Collo stesso metodo tenuto dal prof. Volterra (loc. cit.) può dimostrarsi che: a) ogni soluzione regolare $u(t)$ della (1) è determinata nell'interno dell'area σ pei valori di t compresi fra 0 e T, se si conoscono per gli stessi valori di t i valori della u sul contorno s dell'area stessa; b) denotando con n la normale esterna al contorno s, e ponendo

$$(2) \qquad \mathrm{H}_s[u,v|\theta] \equiv \int_0^\theta dt \int_s \left\{ v(t) \frac{\partial u(t)}{\partial n} - u(t) \frac{\partial v(t)}{\partial n} \right\} ds +$$
$$+ \int_0^\theta dt \int_t^\theta d\tau \int_s \left\{ \left[v(\tau) \frac{\partial u(t)}{\partial x} - u(t) \frac{\partial v(\tau)}{\partial x} \right] f_{10}(\tau,t) \cos nx + \right.$$
$$\left. + \left[v(\tau) \frac{\partial u(t)}{\partial y} - u(t) \frac{\partial v(\tau)}{\partial y} \right] f_{01}(\tau,t) \cos ny \right\} ds ,$$

(1) Volterra, *Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications* (Acta Mathematica, tom. 35); *Leçons sur les fonctions de lignes* (Paris, 1913); *Equazioni integro-differenziali con limiti costanti* (Rend. Lincei, ser. 5a, vol. 20, 1° sem. 1911).

se $u(t)$ è una soluzione regolare della (1) e $v(x, y | t, \theta) \equiv v(t)$ è una soluzione regolare dell'*equazione aggiunta*

$$(3) \qquad \Delta^2 v(t) + \int_t^\theta \left\{ \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial x^2} f_{10}(\tau, t) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial y^2} f_{01}(\tau, t) \right\} d\tau = 0,$$

si ha (*teorema di reciprocità*)

$$(4) \qquad \mathrm{H}_s [u, v | \theta] = 0 .$$

3. Per avere la soluzione fondamentale della (3), cominciamo col considerare le costanti

$$\alpha^{(0)}_{m-p, p} = \alpha^{(0)}_{p, m-p} = \frac{(-1)^m}{2^{2m}} \frac{\binom{2p}{p}\binom{2m-2p}{m-p}}{\binom{m}{p}}$$

$$\alpha^{(i)}_{m-p, p} = \frac{(-1)^{m+1}}{2^{2(m-i)+1}} \frac{\binom{2p}{p}\binom{2m-2p-2i}{m-p-i}}{i\binom{m-i}{p}}$$

$$(i = 1, 2, \dots, m-p)$$

$$\alpha^{(m-p+i)}_{m-p, p} = \frac{(-1)^{m+i+1}}{2^{2(p-i)+1}} \frac{\binom{2p}{p}\binom{p}{i}}{(m-p+i)\binom{2i}{i}}$$

$$(i = 0, 1, \dots, p),$$

tra le quali sussistono le relazioni

$$\alpha^{(1)}_{m-p, p} = \frac{1}{2} \alpha^{(0)}_{m-p-1, p}, \quad \alpha^{(i)}_{m-p, p} = -\frac{i-1}{i} \alpha^{(i-1)}_{m-p-1, p}$$

$$(i = 2, 3, \dots, m)$$

$$\alpha^{(0)}_{m-p-1, p+1} = -\left(\alpha^{(0)}_{m-p, p} + 2\alpha^{(1)}_{m-p, p}\right); \quad \alpha^{(m)}_{m-p-1, p+1} = -\alpha^{(m)}_{m-p, p}$$

$$\alpha^{(i)}_{m-p-1, p+1} = \frac{i+1}{i} \alpha^{(i+1)}_{m-p, p} - \alpha^{(i)}_{m-p, p} \quad (i = 1, 2, \dots, m-1),$$

dalle quali si deducono subito le altre

$$\alpha^{(1)}_{m-p, p} = \alpha^{(1)}_{p+1, m-p-1}$$

$$\alpha^{(i)}_{m-p, p} = -\alpha^{(i)}_{m-p, p-1} - \alpha^{(i)}_{m-p+1, p-1} \qquad (i = 1, 2, \dots, m-1)$$

$$\alpha^{(i)}_{m-p, p} = \frac{i-1}{i} \alpha^{(i-1)}_{m-p, p-1} - \alpha^{(i)}_{m-p, p-1} \quad (i = 2, \dots, m-1).$$

Per mezzo di queste relazioni si può dimostrare che

$$\sum_{s=i}^{m} \alpha_{m-p,p}^{(s)} \binom{s}{i} = (-1)^i \alpha_{p,m-p}^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\binom{2i}{i-1}}{2^{2i}} \alpha_{m-p,p}^{(i)} = \alpha_{m-p+1,p}^{(0)} + \frac{1}{2} \alpha_{m-p,p}^{(0)} = -\left\{ \alpha_{m-p,p+1}^{(0)} + \frac{1}{2} \alpha_{m-p,p}^{(0)} \right\}:$$

dalla prima di queste identità si deduce che

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{m-p,p}^{(i)} = -\sum_{i=1}^{m} \alpha_{p,m-p}^{(i)}.$$

ed in particolare

$$\sum_{i=1}^{2p} \alpha_{p,p}^{(i)} = 0.$$

4. Se $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$, formiamo le funzioni

$$(5) \quad \begin{cases} \psi_{m-p,p} = \alpha_{m-p,p}^{(0)} \log r + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{m-p,p}^{(i)} \left(\frac{y-b}{r}\right)^{2i} & (m \geqq 2p) \\ \psi_{m-p,p} = \alpha_{m-p,p}^{(0)} \log r + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{p,m-p}^{(i)} \left(\frac{x-a}{r}\right)^{2i} & (m \leqq 2p). \end{cases}$$

Si vede subito che i valori dati per $\psi_{p,p}$ dalle due equazioni (5) coincidono.

Si dimostra facilmente che

$$(6) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \psi_{m-p,p}}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 \psi_{m-p-1,p+1}}{\partial x^2} \\ \Delta^2 \psi_{m-p,p} = -\dfrac{\partial^2 \psi_{m-p-1,p}}{\partial x^2} & (m-p>0) \\ \Delta^2 \psi_{m-p,p} = -\dfrac{\partial^2 \psi_{m-p,p-1}}{\partial y^2} & (p>0). \end{cases}$$

Inoltre, se s è una linea chiusa avente nel suo interno il polo (a, b), ed n è la normale esterna alla linea s, si ha

$$(7) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_s \frac{\partial \psi_{m-p,p}}{\partial n} ds = -\int_s \frac{\partial \psi_{m-p-1,p}}{\partial x} \cos nx \, ds & (m-p>0) \\ \displaystyle\int_s \frac{\partial \psi_{m-p,p}}{\partial n} ds = -\int_s \frac{\partial \psi_{m-p,p-1}}{\partial y} \cos ny \, ds & (p>0). \end{cases}$$

5. Le funzioni $f_{10}(t, \tau)$, $f_{01}(t, \tau)$ si suppongono finite ed integrabili pei valori delle variabili che si considerano. Se poniamo

$$f_{i,h}(t, \tau) = \sum_{j=0}^{\varrho} \int_{\tau}^{t} f_{i+j-\varrho, h-j}(t, \sigma) \, f_{\varrho-j, j}(\sigma, \tau) \, d\sigma \quad (\varrho < i+h).$$

e supponiamo nulla ogni f con indici negativi, la funzione $f_{i,h}(t,\tau)$ è indipendente da ϱ: in particolare

$$f_{i,h}(t,\tau)=\int_\tau^t \left\{ f_{i-1,h}(t,\sigma)\, f_{10}(\sigma,\tau)+f_{i,h-1}(t,\sigma)\, f_{01}(\sigma,\tau)\right\} d\sigma =$$

$$=\int_\tau^t \left\{ f_{10}(t,\sigma)\, f_{i-1,h}(\sigma,\tau)+f_{01}(t,\sigma)\, f_{i,h-1}(\sigma,\tau)\right\} d\sigma ;$$

e se $|f_{10}(t,\tau)|<\mathrm{M}$, $|f_{01}(t.\tau)|<\mathrm{M}$, si ha

$$|f_{i,h}(t,\tau)|<\frac{2^{i+h-1}}{(i+h-1)!}\mathrm{M}^{i+h}|t-\tau|^{i+h-1}.$$

Essendo poi

$$|\alpha_{m-p,p}^{(0)}|<\frac{1}{2} \quad ; \quad |\alpha_{m-p,p}^{(i)}|<\frac{1}{2i} \quad (i=1,2,\ldots,m-p)$$

$$|\alpha_{m-p,p}^{(m-p+i)}|\leq\frac{1}{2(m-p+i)}\binom{p}{i} \quad (i=0,1,\ldots,p),$$

si ha

$$|\psi_{m-p,p}|<\frac{1}{2}\left\{|\log r|+3^m\right\}.$$

Segue subito, di qui, che le serie

$$(8) \qquad \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{m}\psi_{m-p,p}\int_0^t f_{m-p,p}(t,\tau)\,\mathrm{F}(\tau)\,d\tau$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{m}\psi_{m-p,p}\int_t^\theta \mathrm{F}(\tau)\, f_{m-p,p}(\tau,t)\,d\tau$$

[ove $\mathrm{F}(t)$ è una funzione limitata integrabile] pei valori considerati di t, θ in ogni campo che non racchiude il polo (a,b) convergono in modo assoluto ed uniforme.

Parimenti, essendo

$$\left|\frac{\partial\psi_{m-p,p}}{\partial x}\right|<\frac{3^m}{r} \quad ; \quad \left|\frac{\partial\psi_{m-p,p}}{\partial y}\right|<\frac{3^m}{r}$$

$$\left|\frac{\partial^2\psi_{m-p,p}}{\partial x^2}\right|<\frac{2^{2m+1}.m}{r^2} \quad ; \quad \left|\frac{\partial^2\psi_{m-p,p}}{\partial y^2}\right|<\frac{2^{2m+1}.m}{r^2},$$

le serie

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{m}\frac{\partial\psi_{m-p,p}}{\partial x}\int_0^t f_{m-p,p}(t,\tau)\,\mathrm{F}(\tau)\,d\tau ,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{m}\frac{\partial\psi_{m-p,p}}{\partial y}\int_0^t f_{m-p,p}(t,\tau)\,\mathrm{F}(\tau)\,d\tau ,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{m}\frac{\partial^2\psi_{m-p,p}}{\partial x^2}\int_0^t f_{m-p,p}(t,\tau)\,\mathrm{F}(\tau)\,d\tau ,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{m}\frac{\partial^2\psi_{m-p,p}}{\partial y^2}\int_0^t f_{m-p,p}(t,\tau)\,\mathrm{F}(\tau)\,d\tau$$

convergono in modo assoluto ed uniforme in ogni campo che non racchiude il polo (a, b). Lo stesso accade per le serie delle derivate prime e seconde rispetto ad x ed y dei termini della seconda delle serie (8). Concludiamo, così che in ogni campo che non contiene il polo (a, b) le serie (8) sono derivabili, termine a termine, due volte rispetto ad x e due volte rispetto ad y.

6. Posto ciò, si può verificare che la funzione

$$U(x, y \mid t) \equiv U(t) = F(t) \log r + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{m} \psi_{m-p,p} \int_0^t f_{m-p,p}(t, \tau) F(\tau) d\tau$$

soddisfa alla (1), e che la funzione

$$V(x, y \mid t, \theta) \equiv V(t) = F(t) \log r + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{m} \psi_{m-p,p} \int_t^\theta F(\tau) f_{m-p,p}(\tau, t) d\tau$$

soddisfa alla (3); inoltre, se s è una curva chiusa contenente nell'interno il polo (a, b), si ha

$$\int_s \left\{ \frac{\partial V(t)}{\partial n} + \int_t^\theta \left[\frac{\partial V(\tau)}{\partial x} f_{10}(\tau, t) \cos nx + \frac{\partial V(\tau)}{\partial y} f_{01}(\tau, t) \cos ny \right] d\tau \right\} ds =$$
$$= -2\pi F(t).$$

7. Volendo però determinare il valore della soluzione regolare della (1) in un punto (a, b) dell'area σ che assume valori assegnati sul contorno s dell'area stessa, dovremo servirci del teorema di reciprocità. Ora, descrivendo un piccolo circolo c interno all'area σ col centro in (a, b), la (4) ci dà

$$H_s[u, V \mid \theta] + H_c[u, V \mid \theta] = 0,$$

donde, facendo tendere a zero il raggio del circolo c, ricaviamo

$$u(a, b \mid \theta) \equiv u_0(\theta) = \frac{1}{2\pi F(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} H_s[u, V \mid \theta]. \tag{9}$$

Il secondo membro della (9) contiene i valori di u e delle sue derivate sul contorno s: per eliminare tali derivate, basta, al solito, conoscere una soluzione regolare ω della (3) e tale che $V + \omega$ sia nulla sul contorno s. Si avrà allora la formola

$$u(a, b \mid \theta) \equiv u_0(\theta) = \frac{1}{2\pi F(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} H_s[u, V + \omega \mid \theta], \tag{10}$$

che contiene solo i valori di u sul contorno s.

8. Se, invece della (1), si avesse l'equazione

$$\Delta^2 u(t) + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f_{10}(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} f_{01}(t, \tau) \right\} d\tau = X(x, y \mid t).$$

le formole (9) e (10) dovrebbero essere rispettivamente sostituite dalle due seguenti:

(9′)
$$u(a\,,b|\theta)\equiv u_0(\theta)=$$
$$=\frac{1}{2\pi\,F(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big\{H_s[u\,,V|\theta]-\int_0^\theta dt\int_\sigma V(t)\,X(x\,,y|t)\,d\sigma\Big\}$$

(10′)
$$u(a\,,b|\theta)\equiv u_0(\theta)=$$
$$=\frac{1}{2\pi\,F(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big\{H_s[u\,,V+\omega|\theta]-\int_0^\theta dt\int_\sigma (V(t)+\omega(t))\,X(x\,,y|t)\,d\sigma\Big\}\,.$$

Matematica. — *I numeri reali definiti come operatori per le grandezze.* Nota di C. Burali-Forti, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Variazioni della birifrangenza magnetica del ferro colloidale con la temperatura.* Nota di L. Tieri, presentata dal Socio P. Blaserna.

Il Majorana [1], studiando il fenomeno della birifrangenza magnetica in molti campioni di soluzioni colloidali di ferro, trovò l'esistenza di tre tipi diversi di ferro dializzato attivo:

1° tipo: ferro dializzato a netta birifrangenza positiva.

2° tipo: ferro dializzato a birifrangenza negativa.

3° tipo: ferro dializzato che presenta birifrangenza positiva per campi deboli. Successivamente, al crescere del campo, la birifrangenza decresce, e per un certo valore del campo ritorna a zero (punto d' inversione). Per campi più intensi la birifrangenza diventa negativa.

Nel 1903 Schmauss [2], per un campione di ferro Bravais, negativo a temperatura ordinaria, notava una diminuzione di birifrangenza col crescere della temperatura: la birifrangenza si annullava fra 52° e 54°, e diventava positiva a temperature più elevate. Col raffreddamento il liquido riacquistava le proprietà primitive.

In questo lavoro ho studiato come agisce la temperatura sui diversi tipi di ferro dializzato attivo, ottenendo per risultato che ogni campione

(1) Rend. Accad. Lincei, 5ª ser., XII, 1° sem. 1902, pag. 463.

(2) Annalen der Physik, vol. XII, an. 1903, pag. 186.

attivo può passare per tutti e tre i tipi, purchè se ne alteri convenientemente la temperatura. Così, mentre un liquido a birifrangenza magnetica negativa a temperatura ordinaria diventa prima a inversione e poi positivo per riscaldamento, un liquido a birifrangenza positiva a temperatura ordinaria passa al terzo tipo con opportuno raffreddamento; e raffreddato ulteriormente presenta birifrangenza negativa.

Il dispositivo per determinare i valori della birifrangenza del liquido è identico a quello adoperato in altro lavoro ([1]). Un pennello di luce rossa attraversa un nicol con la sezione principale a 45° rispetto alle linee di forza di una elettrocalamita, una vaschetta di vetro contenente il liquido attivo e posta fra le espansioni polari tronco-coniche dell'elettrocalamita, un compensatore di Babinet e un secondo nicol incrociato col primo. Le frange venivano osservate per mezzo di un cannocchiale. La vaschetta contenente il liquido attivo era collocata nell'interno di una provetta: le temperature basse venivano ottenute con evaporazione di etere posto nella provetta; quelle al disopra della temperatura ambiente, col riscaldamento dell'acqua sostituita all'etere.

Riporto, nella tabella che segue, i valori della birifrangenza, in funzione della temperatura, di due campioni di ferro Bravais positivi alla temperatura ordinaria per un campo magnetico costante di 6400 unità, e di un campione negativo per un campo costante di 3300 unità. I tre liquidi sono distinti con le lettere *A*, *B* e *C*.

([1]) Rend. Acc. Lincei vol. XIX, 1° sem. 1910, pag. 377.

Liquido A		Liquido B		Liquido C	
Temperature	Birifragenze in lunghezze d'onda nel rosso	Temperature	Birifrangenze in lnnghezze d'onda nel rosso	Temperature	Birifrangenze in lunghezze d'onda nel rosso
99°	0,05	70°	0,18	95°	0,4
90	0,15	60	0,3	90	0,55
80	0,2	55	0,4	80	1
69,2	0,35	50	0,5	74	1,3
59	0,5	40	0,7	67	1,2
55,4	0,6	28.2	0,9	63,6	1
50,6	0,7	23,4	1	60	0,6
45,4	0,8	13,4	0,75	58	0,4
40	1	10	0,45	57	0,3
37,2	1,1	8	0,25	56	0,2
34	1,3	6	0,05	54,4	0 con birifr. + per campi deboli
28	1,2	5,4	(²)	53,8	— 0,15 id.
26	1,05	5,2	0 con birifr. + per campi deboli	52	— 0,25 id.
20	0,75	4	— 0,2	48,8	— 0,4 id.
15,6	0,3	2	— 0,45	39	— 0,9
13,8	— 0,15 con birifr. + per campi deboli	0	— 0,8	34,4	— 1,1
12,4	— 0,35	— 2	— 1	14,8	— 1,9
11	— 0,65	— 4	— 1,3	12	— 1,9
9	— 1	— 6	— 1,6	8	— 2
7	— 1.5	— 8	— 1,9	0	— 2,1
(¹) 5,2	— 1 campo: 3500 unità			— 4	— 2,2
1,5	— 1,4 id.				
0	— 1,7 id.				
— 2	— 1,9 id.				
— 4	— 1 campo: 2600 unità				
— 6	— 1,3 id.				
— 8	— 1,45 id.				

(¹) Essendo il liquido alquanto dicroico, per determinare con esattezza la birifrangenza, in questa e nelle successive misure, adoperai campi più deboli.

(²) Alla temperatura di 5°,4 il liquido presenta debolissima birifragenza positiva, che aumenta con opportuna diminuzione del campo magnetico (liquido a inversione).

La fig. 1, in cui sono riportate le temperature sull'asse delle ascisse e le birifrangenze in lunghezze d'onda sull'asse delle ordinate, si riferisce alla precedente tabella. I punti con i cerchietti appartengono alla curva A.

Le birifrangenze del liquido A a tali temperature furono dedotte da quelle ottenute sperimentalmente per campi più deboli, applicando la legge di proporzionalità fra birifrangenza e quadrato del campo.

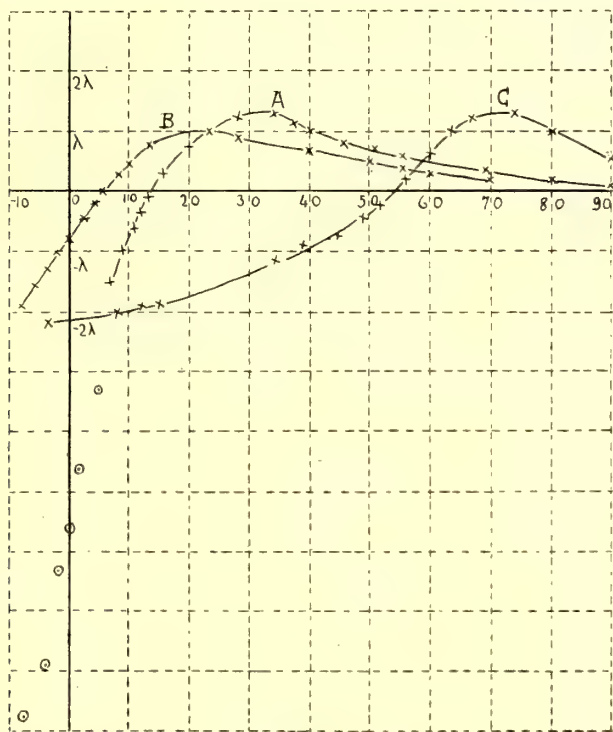



Fig. 1

Nella fig. 2, in cui sono riportati i campi in migliaia di unità sull'asse X e le birifrangenze in lunghezze d'onda sull'asse delle Y, sono disegnate le curve di birifringenza del liquido A per un campo magnetico variante fra 0 e 17000 unità, alle temperature di 12°,8, 14°,4, e 59°; e per un campo variante fra 0 e 10000 unità alle temperature di 7° e 34°. A queste temperature non si potè determinare la birifrangenza per campi più intensi a causa del dicroismo.

Dai diagrammi della fig. 1 e da quelli ottenuti per altri liquidi attivi, si traggono le seguenti conclusioni:

Ogni soluzione colloidale di ferro, che presenti birifrangenza magnetica, acquista per un determinato campo la massima birifrangenza negativa alla temperatura di solidificazione della soluzione colloidale.

Col crescere della temperatura, la birifrangenza negativa va diminuendo e si annulla, per un determinato campo magnetico, ad una temperatura che varia da liquido a liquido.

Per temperature prossime a quella per cui il liquido è inattivo per un determinato campo, il liquido è a inversione.

Aumentando ulteriormente la temperatura, il liquido presenta birifrangenza positiva, la quale aumenta con la temperatura, raggiunge un massimo, e poi diminuisce.

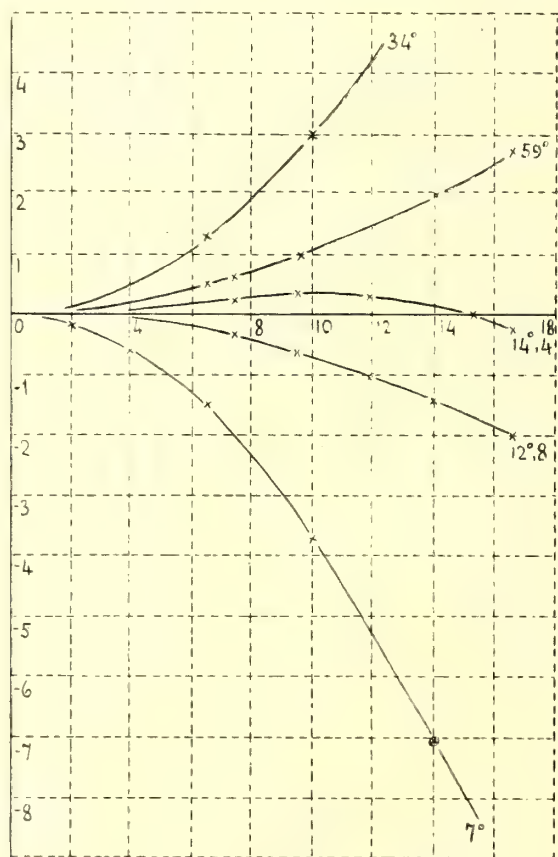



Fig. 2

Quando la soluzione colloidale attiva non presenta sufficiente trasparenza, si suole diluirla in acqua. I liquidi positivi di cui dispongo presentano maggiore attività se si diluiscono con alcool invece che con acqua. Nella fig. 3, sull'asse delle X sono riportate le temperature, e sull'asse delle Y le birifrangenze in lunghezze d'onda per un campo costante di 6400 unità. Il diagramma (1) si riferisce al liquido B diluito con acqua; il diagramma (2) allo stesso liquido diluito in alcool a parità di volumi. E siccome la temperatura di solidificazione della soluzione in alcool è molto più bassa, la curva di birifrangenza può essere prolungata al di là di -8°; e si

ottengono in tal modo liquidi a forte birifrangenza negativa. Così, p. es., il liquido *B* diluito in alcool, alla temperatura di -15° dà una birifrangenza negativa di una lunghezza d'onda per un campo di 1300 unità.

L'ipotesi di Schmauss, confermata da Cotton e Mouton, che fa dipendere la birifrangenza magnetica del ferro dializzato dalla grandezza dei granuli (i granuli più grossi dànno birifrangenza positiva; quelli più piccoli birifrangenza negativa), potrebbe spiegare il comportamento dei diversi tipi di ferro dializzato attivo col variare della temperatura, qualora si ammetta che la birifrangenza passi dall'un segno all'altro, a causa della dilatazione termica

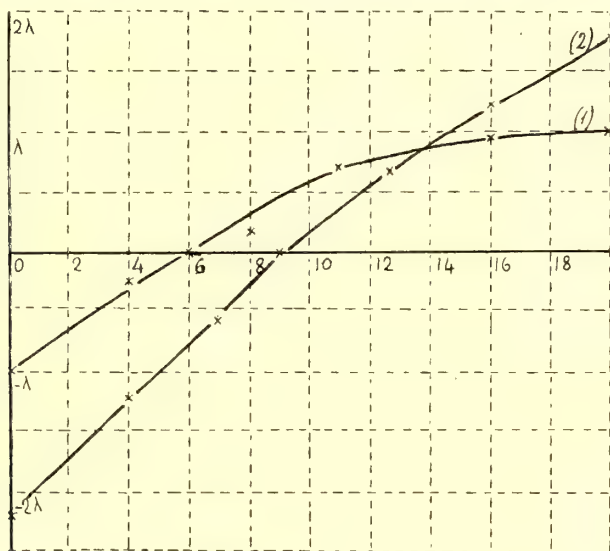



Fig. 3.

dei granuli. La stessa ipotesi spiegherebbe l'aumento di birifrangenza di un liquido a birifrangenza positiva quando si diluisce con alcool, ammettendo che l'alcool determini una diminuzione di grandezza di tutti i granuli. Siccome nel liquido sono presenti granuli a birifrangenza negativa, granuli a birifrangenza positiva e granuli più grossi che non presentano birifrangenza, per la diminuzione di grandezza di tutti i granuli, parte dei positivi diventano negativi e parte degli inattivi passan positivi in modo da avere un aumento di granuli attivi nella soluzione.

L'esame ultramicroscopico non rivela nessuna differenza nella grandezza dei granuli dei liquidi a birifrangenza positiva e di quelli a birifrangenza negativa. Però nei liquidi attivi, qualunque sia il segno della birifrangenza, i granuli sono appena visibili e in numero grandissimo.

Le soluzioni colloidali di ferro che non presentano birifrangenza magnetica, all'esame ultramicroscopico si rivelano o poverissime di granuli o ricche di granuli grossi.

Fisica. — *Su alcune conseguenze della teoria generale del fenomeno di Hall* [1]. Nota di G. Tasca Bordonaro, presentata dal Socio V. Volterra.

Il prof. Corbino studiando il movimento della elettricità in una lamina metallica sottoposta all'azione di un campo magnetico, ottenne le relazioni che legano la intensità della corrente che traversa la lamina alla distribuzione del potenziale V. Ne dedusse che la funzione V soddisfa alla condizione $\Delta^2 V = 0$, e che al contorno libero della lamina, come anche su ogni linea di flusso, è nulla la sua derivata rispetto a una direzione l che fa con la normale un angolo β costante in tutta la lamina. Partendo dalle formole del Corbino, il prof. Volterra volle risolvere il problema della distribuzione dei potenziali e delle correnti in una lamina che venga sottoposta all'azione di un campo magnetico.

Fra le conseguenze dei suoi sviluppi analitici suscettibili di immediata verifica sperimentale, è molto caratteristica quella che estende alla lamina nel campo, in un certo senso, il principio di reciprocità. Egli potè infatti stabilire che, « se in una lamina conduttrice si fa passare una corrente j sotto l'azione di un certo campo magnetico, ed in due punti A′ e B′ si ha una certa differenza di potenziale, otterremo la stessa differenza fra i potenziali dei punti A e B quando si faccia entrare da A′ e uscire da B′ la stessa corrente d'intensità j, e *s' inverta il campo* ». In altri termini la legge di reciprocità, che vale fuori del campo, continua a sussistere quando sulla lamina agisca un campo magnetico, cioè quando la primitiva distribuzione dei potenziali venga modificata per il sovrapporsi di cariche Hall, a condizione che, invertendo gli elettrodi, si inverta anche il campo.

Mi sono proposto di avere la conferma sperimentale di questo notevole risultato.

Adoperai a questo scopo la grande elettrocalamita Weiss esistente nell' Istituto fisico di Roma, con espansioni piane aventi il diametro di cm. 10, e alla distanza di cm. 1,4; in queste condizioni, per una corrente di 4 ampère si ottiene un campo di circa 6700 Gauss. La lamina era della forma indicata nella (fig. 1), con gli elettrodi saldati nei punti indicati nella figura; i filini adduttori erano protetti con tubi di gomma, ad evitare che dei contatti con le espansioni polari potessero turbare le misure.

Questi filini venivano rilegati due a due secondo l'ordine voluto ai serrafili di due interruttori a mercurio a sei pozzetti, essendo gli attacchi

[1] Lavoro eseguito nell' Istituto fisico della R. Università di Roma.

centrali di questi rispettivamente rilegati ai poli di una batteria di accumulatori ed ai capi del galvanometro; riusciva in questo modo agevole il potere permutare gli attacchi degli elettrodi tra la batteria ed il galvanometro, e viceversa.

Allo scopo di mantenere la corrente costante nella lamina al permutare degli attacchi, nel circuito che rilegava la lamina alla batteria era inserita una resistenza zavorra di circa 100 ohm, in modo da potersi ritenere trascurabili le variazioni di resistenza nel circuito stesso al permutare degli elettrodi. Le misure si facevano leggendo con cannocchiale e scala le

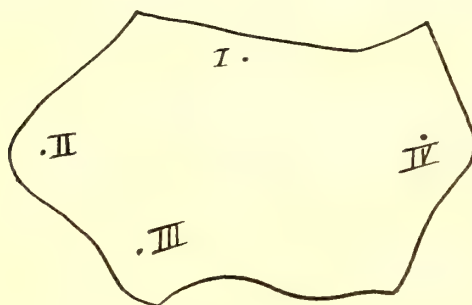



Fig. 1.

deviazioni in un galvanometro di Hartmann e Braun a bobina mobile. Si procedeva nel modo seguente:

Si mandava prima la corrente nell'elettrocalamita, notando in queste condizioni lo zero del galvanometro, e si chiudeva quindi il circuito della lamina, leggendo la prima deviazione subìta dal galvanometro, che si può ritenere esclusivamente dovuta ad effetto Hall, perchè ancora ad esso non si sono sovrapposti gli effetti secondarî dovuti al riscaldarsi degli elettrodi e alle disuguaglianze di temperatura create nella lamina.

Ecco i risultati ottenuti con un campo di 6000 Gauss ed una intensità di corrente nella lamina di amp. 0,2:

	Elettrodi I — III	Elettrodi II — IV
Campo diretto	$V_{II} - V_{IV} = 420$	$V_{I} - V_{III} = 104$
Campo invertito	$V_{II} - V_{IV} = 104$	$V_{I} - V_{III} = 420,5$

Questi numeri dimostrano chiaramente che è vera la legge di reciprocità, e, come richiede la teoria del prof. Volterra, solo quando al permutare degli elettrodi s'inverta anche il campo; la dissimmetria dell'effetto senza

la inversione del campo è anzi per la lamina da me adoperata molto sensibile. Della necessità d'invertire il campo, come ebbe a osservare il prof. Corbino in una seduta della Società italiana di fisica, si può dare la seguente spiegazione intuitiva:

Se immaginiamo che la corrente entri per l'elettrodo II uscendo per IV, e la direzione del campo è tale che le cariche positive vengano spinte per effetto Hall verso la destra di un osservatore che guardi nel senso della corrente, allora l'elettrodo III che anche in assenza del campo per essere più vicino al punto per cui entra la corrente, si trova ad un potenziale più elevato dell'elettrodo I, riceverà nuove cariche positive che ne eleveranno ancora il potenziale rispetto ad I. Se noi permutiamo gli attacchi della batteria

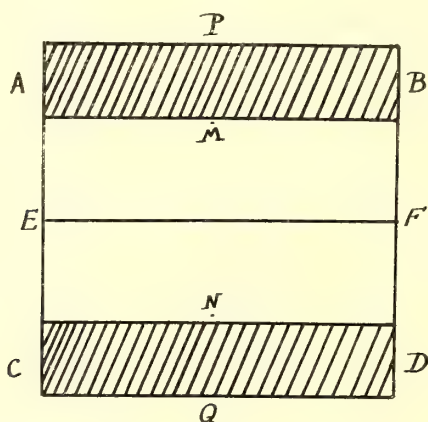



Fig. 2.

per modo che la corrente entri per l'elettrodo III uscendo per I senza invertire il campo, l'elettrodo II si porterà ad un potenziale più elevato, ma l'azione del campo sarà tale da accumulare le cariche positive nell'elettrodo IV portando una depressione alla differenza di potenziale già esistente. In altri termini, perchè l'effetto Hall si sommi o si sottragga sempre alla differenza di potenziale già esistente per la dissimmetrica disposizione degli elettrodi, è necessario anche che si inverta il campo al permutare degli elettrodi.

Fin qui si è trattato di elettrodi puntiformi; ma la teoria del prof. Volterra ci dice che la legge di reciprocità sussiste sempre, anche quando si tratti di elettrodi estesi a potenziale costante, saldati al contorno od all'interno della lamina stessa. Per ottenerne la conferma sperimentale, adoperai un rettangolo di bismuto (fig. 2), con elettrodi di rame saldati lungo i due lati opposti di maggiore lunghezza; mentre nel centro dei due lati liberi erano saldati due filini di rame.

Ecco i risultati ottenuti:

	Elettrodi P, Q	Elettrodi E, F
Campo diretto	$V_E - V_F = 51,5$	$V_P - V_Q = 54$
Campo invertito	$V_E - V_F = 54,5$	$V_P - V_Q - 51$

Anche in questo caso sussiste la legge di reciprocità e l'enunciato del prof. Volterra è completamente verificato.

Nel voler mettere in evidenza la reciprocità invece che con elettrodi, quasi puntiformi, con elettrodi di rame estesi ed al contorno, notai che l'effetto Hall era molto minore di quello che ottenevo con la lamina dissimmetrica, mentre date le condizioni dell'esperienza, si sarebbe dovuto avere nel secondo caso un effetto maggiore.

Già il prof. Corbino aveva notato che per la presenza di elettrodi di piccolissima resistenza saldati al contorno nel caso del rettangolo, l'effetto Hall, massimo al centro del contorno libero, decresce con la legge parabolica fino a zero quando ci si avvicini agli elettrodi di rame; e che anche nel centro si avrà una depressione proporzionale a

$$\int_N^M j_j \, dy ,$$

in cui N e M rappresentano due punti opposti corrispondenti al contorno libero. Questo integrale ha un valore diverso da zero, perchè Jy ha un segno costante lungo l'asse del rettangolo. Ho cercato di trovare il valore di questa depressione: ed a questo scopo feci prima delle esperienze con un rettangolo di bismuto posto in un campo di circa 6000 unità, e ripetendo il procedimento adottato per la verifica della reciprocità.

Le dimensioni del rettangolo erano: EF. = mm. 52, AC. = mm. 22 (fig. 2).

S'inviava prima la corrente per i due elettrodi di rame P e Q saldati lungo AB e CD, misurando la differenza di potenziale sui punti EF; si toglievano quindi gli elettrodi di rame e si ripetevano le misure inviando invece la corrente per gli elettrodi quasi puntiformi M ed N.

Ecco i risultati ottenuti:

Grandi elettrodi rame; effetto Hall aduttori . .	52, 5
Elettrodi puntiformi	318

Questi risultati dimostrano chiaramente che la presenza di elettrodi di rame saldati lungo il contorno, i quali fanno da corto circuito alle cariche di Hall dando luogo a delle correnti vorticose in seno alla lamina stessa,

deprime l'effetto Hall riducendolo, nel nostro caso, a *quasi un sesto del suo valore normale*. Ho definito *valore normale* dell'effetto Hall quello ottenuto con elettrodi adduttori puntiformi applicati al contorno. Questa denominazione si basa sulle seguenti considerazioni:

Il prof. Volterra ha dimostrato che con elettrodi adduttori puntiformi applicati al contorno di una lamina di forma qualsiasi, le linee di corrente sotto l'azione del campo restano quelle che si avevano senza campo. Questo risultato è della più grande importanza ai fini della determinazione della costante di Hall.

E infatti il prof. Corbino ha stabilito che quando le linee di corrente sono le stesse con o senza campo, l'effetto Hall tra due punti del contorno inizialmente allo stesso potenziale diviene, qualunque siano quei due punti:

$$\frac{\varepsilon}{s^2 + \varepsilon^2} \, J \, ,$$

dove J è la corrente totale, per unità di spessore, che traversa la lamina. Esso è perciò identico, a parità della corrente totale, con quello che si sarebbe ottenuto in un rettangolo senza la perturbazione degli elettrodi, cioè con l'effetto Hall normale, pur essendo stato misurato con una lamina di forma qualsiasi, e con elettrodi puntiformi, comunque disposti, purchè al contorno.

Si può dire in altri termini, che l'esperienza eseguita in tal modo permette di avere tang β per qualunque lamina, e appunto questa è la costante galvanomagnetica caratteristica del metallo e del campo. Tale costante non può essere ottenuta con elettrodi estesi applicati al metallo, ed è identica a quella che si può misurare con gli effetti elettromagnetici dovuti al disco percorso da correnti radiali, quali furono descritti e calcolati dal prof. Corbino.

Volendola misurare ricorrendo all'effetto Hall, si sarebbe dovuto ricorrere a elettrodi di resistenza elevatissima, mentre lo stesso risultato si ottiene, in seguito al teorema del prof. Volterra, con semplici elettrodi puntiformi al contorno.

È degno di nota, dal punto di vista storico, che questa disposizione corrisponde in fondo a quella originaria di Hall, in seguito abbandonata dagli sperimentatori che avevan creduto di porsi in condizioni teoricamente più semplici col rettangolo munito di larghi elettrodi su due lati.

È interessante inoltre il notare con quale meccanismo si conservi la legge di reciprocità nel caso di larghi elettrodi di rame:

Gli elettrodi di rame che quando funzionano da adduttori della corrente fanno da corto circuito alle cariche Hall deprimendole, assorbono invece buona parte della corrente quando, permutando gli elettrodi, funzionano da adduttori gli elettrodi puntiformi; ne segue che la intensità di corrente che

traversa il bismuto è solo una frazione della totale inviata, e quindi l'effetto Hall deve anche in questo caso essere depresso. La teoria dimostra e l'esperienza conferma che la depressione è identica nei due casi, ciò che non si sarebbe potuto prevedere per via intuitiva.

Ho ripetuto le esperienze invece che col rettangolo, con un quadrato di bismuto, mettendomi così in condizioni più vicine a quelle dei varî sperimentatori che hanno studiato il fenomeno di Hall specialmente per la determinazione delle costanti elettroniche.

Era infatti utile determinare quanto potè pesare nella misura dell'effetto Hall la presenza di elettrodi saldati al contorno.

Ecco i dati dell'esperienza:

Elettrodi grandi di rame;	effetto Hall	138
" puntiformi;	" "	192

Mentre adoperando il rettangolo l'effetto era appena un sesto del totale, col quadrato la depressione è del 27 % circa, ma è sempre di tale entità da infirmare i risultati finora ottenuti nella determinazione della costante di Hall.

Non è quindi improbabile che il diverso comportamento del bismuto, notato da parecchi autori, sia anche dovuto alla diversità delle condizioni sperimentali relative alla forma della lamina e alla presenza degli elettrodi.

Nè meno notevole è l'influenza che un così forte errore nella valutazione della costante di Hall può avere apportato nei calcoli delle costanti elettroniche di Drude, specialmente per quanto riguarda gli ioni positivi.

Paleontologia. — *Spugne perforanti fossili della Patagonia e di altre località del territorio argentino* [1]. Nota del dott. Paolo Principi, presentata dal Corrisp. Art. Issel.

Lo studio delle spugne perforanti ha avuto un indirizzo sicuro e preciso col Topsent [2], il quale prese in considerazione la struttura dello scheletro e delle singole spicule, anzichè la forma e l'aspetto esterno del corpo, caratteri che possono essere assai variabili anche nella stessa specie. Infatti, talvolta la spugna dà luogo ad un reticolato che è contenuto nelle gallerie da essa scavate: e si ha allora una forma *reticolata*. In altri casi il supporto, su cui vive l'animale, essendo perforato in tutta la sua estensione, la stessa spugna per continuare ad accrescersi diviene *rivestente*; se,

(1) Lavoro eseguito nel R. Museo geologico dell'Università di Genova.

(2) Topsent F., *Contributions à l'étude des Clionides*, Arch. de zoologie exspériment., vol. V *bis*, an. 1887-1890; vol. IX, an. 1891.

infine, il sostegno è globoso, essa può completamente rivestirlo, ed assume quindi una forma *massiccia*.

In Italia il primo a seguire il metodo del Topsent fu il Rovereto (1), il quale descrisse anche una nuova specie di *Thoosa*, la *T. sabatia*, rinvenuta nel Neogene ligure.

Seguendo la nomenclatura esposta dal Delage (2), distingueremo due categorie di spicule: le *megasclere*, che sono di grandi dimensioni e servono di sostegno all'impalcatura generale del corpo; e le *microsclere*, di piccole dimensioni e che si possono considerare come spicule accessorie.

Fino al 1905 i generi, in cui si ripartivano le spugne perforanti, erano tre: *Cliona* (sinonimo di *Vioa*) (3), caratterizzato per la presenza di megasclere; *Thoosa*, senza megasclere e con particolari spicule dette *amphiaster*; *Alectona*, con *oxe* coperti di tubercoli regolarmente disposti. A questi tre generi dobbiamo però aggiungerne altri due descritti nel 1905: *Clionopsis* del Thiele (4), affine alle Clione, e *Clothoosa* del Topsent (5) in cui mancano le microsclere somiche, e gli *aster* coanosomici sono dei veri e proprii *amphiaster*.

Le spugne perforanti studiate nel presente lavoro mi furono comunicate dal prof. G. Rovereto, che le raccolse nei suoi viaggi in Argentina. Esse appartengono tutte al gen. *Cliona*; e quindi noi fermeremo la nostra attenzione su questoi genere, che è anche il più importante e numeroso del gruppo.

Le nuove specie di *Cliona* viventi, illustrate dopo la pubblicazione del Rovereto sono la *Cliona armata* Topsent (6), la *C. margaritifera* Dendy (7), la *C. chilensis* Thiele (8), e la *C. velans* (9) Hentschel.

La specie vivente più diffusa è la *Cliona celata* Topsent, a cui debbono riferirsi anche alcune spugne descritte come entità distinte, ma che invece rappresentano delle modificazioni della Cliona suddetta. Così la *Papillina suberea* O. S., la *Papillina nigricans* O. S., e la *Papillina visa-*

(1) Rovereto G., *Briozoi, anellidi e spugne perforanti del Neogene ligure.* Palaeontographia italica, vol. VII, an. 1901.

(2) Delage et Hérouard, *Traité de zoologie concrète*, vol. II, parte 1a, an. 1899, pag. 231.

(3) L'appellativo di *Cliona*, stabilito dal Grant nel 1826, deve avere la priorità su quello di *Vioa* posto dal Nardo nel 1839.

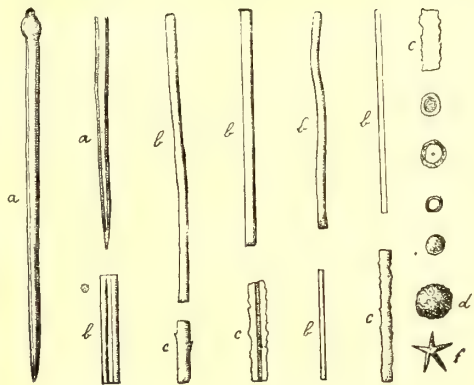
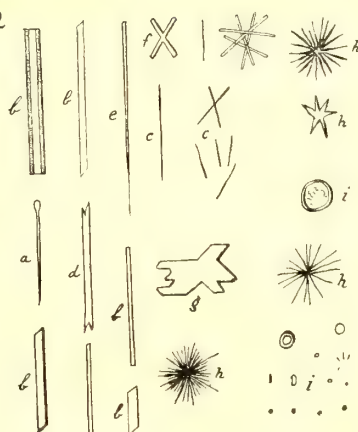
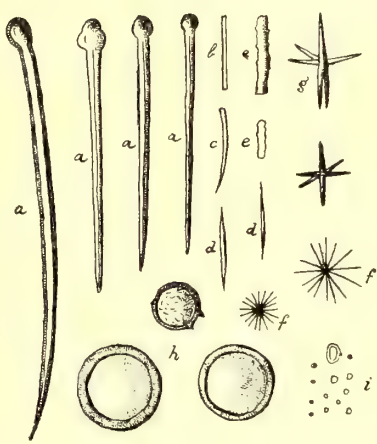
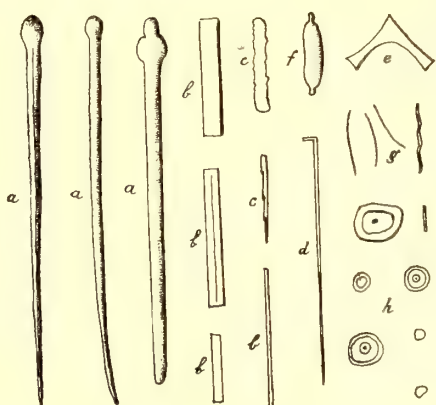
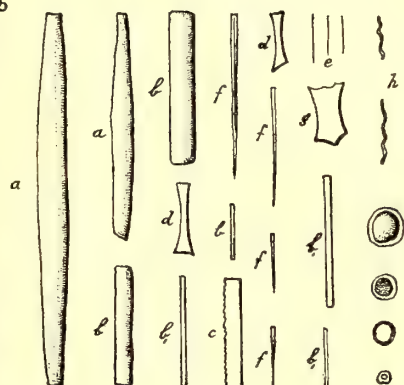
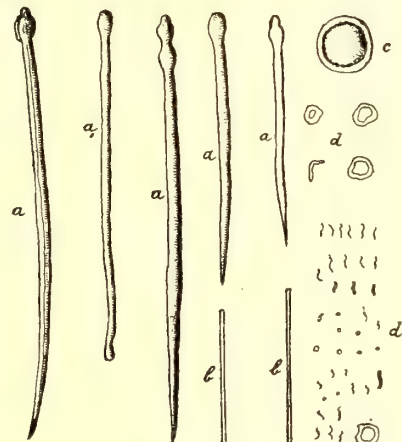
(4) Thiele, I. Zoolog. Jahrbucher, Iena, an. 1905, vol. III suppl., pag. 412.

(5) Topsent, *Bullettin du Muséum de Paris*, an. 1905.

(6) Topsent, *Résultats des campagnes scientifiques accomplies sur son yacht par Albert I*, fascicule XXV, an. 1904, Monaco.

(7) Dendy, *Report Pearl Oyster Fisheries* (*Ceylon*), pag. 128-130, an. 1905, tav. V, fig. 9.

(8) Thiele, I. Zoolog. Jahrbucher, Iena, suppl. vol. III, an. 1905, pag. 409.

(9) Hentschel, *Die Fauna Südwest-Australiens, horsg v. W. Michaelsen u. R. Hartrmeyer*, an. 1909. pag. 388.

1
2
3
4
5
6

viridis O. S. ([1]), non sono altro che delle variazioni dipendenti unicamente dall'ambiente.

Il genere *Cliona* appare nel paleozoico, dove è rappresentato da sole spicule, ma assume la maggior diffusione nelle epoche più recenti. Per parlare unicamente delle specie fossili descritte posteriormente al 1901, ricorderemo la *Cliona hackberryensis* Thomas ([2]) del Devoniano di Jowa, la *Cl. kelheadensis* e *Cl. arbiglandensis* Smith ([3]) del Carbonifero di Solway; la *Cl. cretacea e Cl. glomerata* del Cretaceo d'Inghilterra ([4]), la *Cl. mammillata* e la *Cl. peregrinator* Chapman ([5]) del Terziario di Vittoria, la *Cl. sulphurea* Clark ([6]) del Pleistocene di Maryland.

*
* *

Le specie qui appresso illustrate sono sei, delle quali due (*Cliona entrerriana* e *Cl. Ameghinoi*) appartenenti all'Entrerriano (Miocene), tre al Quaternario (*Cl. americana, Cl. Roveretoi* e *Cl. pampeana*) ed una vivente (*Cliona patagonica*).

Cliona entrerriana Principi (tav. 1, fig. 1).

Questa spugna ricopre alcune valve di *Ostrea patagonica* d'Orb. e proviene dall'Entrerriano (miocene) della punta Norte della penisola Valdéz.

Le megasclere sono costituite da tilostili (*a*), strongili (*b*) e rabidi (*c*). I tilostili sono grandi, diritti, appuntiti ad un estremo, e terminano a guisa di capocchia all'estremo opposto. Gli strongili sono numerosi e rappresentati da bacchette assai lunghe e di varia larghezza. I rabidi sono irregolarmente uncinati lungo ambedue i lati. Le microsclere presentano dei pseudosterraster (*d*) e degli oxyaster (*f*) di piccole dimensioni; ed i corpuscoli (*e*) hanno un contorno rotondeggiante.

Una specie, che presenta qualche analogia con questa ora descritta, è la *Cl. peregrinator* Chapmann del Terziario di Vittoria; ma il diverso sviluppo ed il vario aspetto, che assumono le microsclere nelle due forme, ne permette facilmente la distinzione.

([1]) Vosmaer, Amnesterdam Proces. Scient. k. Akademie Wet., an. 1908, pag. 37.

([2]) Thomas, *A fossil burrowing sponge from the Jova Devunian*, Iowa City Bull. labor. nat. hist. univers., Iowa, an. 1911, pag. 165.

([3]) Smith, *Carboniferous roks of the Solway, Scotland.* Glasgow Transact. geolog. Society, an. 1910, pag. 51.

([4]) Jukes Browne A. I. and Hill. W., *The Cretaceousroks of Britain.* Mem. geolog. Survey, London, an. 1914.

([5]) Chapman, *New or little known Victorian fossile in the National Museum. Some tertiary species.* Victoria Proccedings Royal Society, an. 1907, pagg. 208-209.

([6]) Clark, Maryland Geolog. Survey. *Pliocene and Pleistocene Baltimore*, an. 1904.

Cliona Ameghinoi Principi (tav. I, fig. 2).

Gli esemplari, che si riferiscono a questa specie provengono da Entrerrios nel Paranà e rivestono e perforano delle valve di *Ostrea patagonica* D'Orb.

Tra le megasclere troviamo dei tilostili (*a*) affilati e forniti di una piccola capocchia ad un estremo; gli strongili (*b*) sono numerosissimi, e così pure i rabidi (*c*), che talvolta si sovrappongono intrecciandosi insieme. Esistono pure dei rabidi biforcati (*d*) alle due estremità, degli oxe (*e*) piuttosto scarsi, delle spicole a forma di X (*f*) e delle desme (*g*) con apofisi corte ed irregolari. Gli aster delle microsclere hanno moltissime braccia (*h*), ed i corpuscoli (*i*) sono analoghi a quelli della *Cl. entrerriana.*

È interessante di notare in questa spugna la mancanza dei grandi tilostili, che si osservano in quasi tutte le specie di *Cliona.*

Cliona americana Principi (tav. I, fig. 3).

Questa specie, come pure le altre due seguenti, *Cl. Roveretoi* e *Cl. pampeana*, provengono da Las Talas presso la città di La Plata, dove nel Quaternario medio (parte media del Pampeano) si verificò una invasione marina, che si estese lungo le rive del rio della Plata.

Tale invasione ebbe da Ameghino il nome di « *ingressione belgranense* » e fu da questo naturalista considerata pliocenica [1].

Tra le megasclere si osservano dei tilostili (*a*) molto simili a quelli della *Cliona celata* Grant [2]; esistono, inoltre, degli strongili brevi, degli stili (*c*) un poco ricurvi e dei rabdi (*d*) affilati alle due estremità, i quali mancano nella specie vivente citata. Gli oxyaster (*f*) ed i metaster (*g*) delle microsclere sono assai evidenti, ed i corpuscoli (*i*) hanno un contorno rotondeggiante od ovaliforme. Alcuni pseudosterraster (*h*) si avvicinano a quelli della *Thoosa sabatia* Rovereto.

La specie descritta ha molte analogie anche colla *Cl. thoosina* Topsent [3] e colle *Cl. euryphylla* Topsent [4]; ma se ne distingue per la diversa struttura delle microsclere e dei corpuscoli.

Gli esemplari studiati ricoprivano alcuni ciottoli calcari e frammenti di conchiglie indeterminabili.

(1) Vedi Rovereto G., *Studii di geomorfologia argentina:* parte IV, *La pampa.* Boll. Soc. Geol. ital., an. 1914.

(2) Topsent, *Contrib. à l'étude des Clionides*, Arch. d. zoolog. experim., vol. V *bis*, tav. VII, fig. 1.

(3) Topsent, op. cit., tav. VII, fig. 6.

(4) Topsent, op. cit., tav. VII, fig. 5.

CLIONA ROVERETOI Principi (tav. I, fig. 4).

Le megasclere sono simili a quelle della *Cl. americana*; esistono tuttavia dei rabdi (*b c*) rettangolari, lisci od uncinati. Sono presenti anche delle orthomonene (*d*), spicule caratterizzate da un bastone rettilineo, il quale ad un estremo possiede un clado ad angolo retto; e delle desme (*e*) formate da un corpo centrale costituito da una spicula a due raggi. Alcune spicule (*f*) hanno un aspetto di fuso coi due estremi formati di due piccole appendici distinte dal resto mediante una strozzatura. Le microsclere sono costituite da piccole spire (*g*); i corpuscoli, rotondeggianti, sono simili a quelli della specie precedente (*h*).

Per la forma delle megasclere la *Cl. Roveretoi* si avvicina alla *Cliona vastifica* Topsent [1].

Gli esemplari studiati sono stati rinvenuti sopra alcune conchiglie appartenenti al gen. *Voluta*.

CLIONA PAMPEANA Principi (tav. I, fig. 5).

Le megasclere differiscono da quelle della *Cl. americana* e *Cl. Roveretoi*, perchè mancano dei tilostili veri e proprii e sono presenti, invece, dei rabdi rappresentati da bastoncelli a forma di fuso o rettangolari arrotondati a due estremi, oppure seghettati lungo uno dei lati, e da alcune spicule. Si notano pure dei rafidi (*e*), strongili (*b*), oxe (*f*) e desme (*g*). Tra le microsclere mancano completamente gli aster, ed invece sono presenti delle spire (*h*) a forma di bastoncello ondulato.

I corpuscoli sono analoghi a quelli della *Cl. Roveretoi*, benchè meno numerosi (*i*).

Anche questa specie è stata trovata in alcuni frammenti di *Voluta*.

CLIONA PATAGONICA Principi (tav. I, fig. 6).

La specie qui appresso descritta è vivente e trovasi in una conchiglia di *Venus antiqua* King proveniente da Porto Madryn (Patagonia).

I tilostili (*a*), molto numerosi, sono simili a quelli della *Cl. americana* e *Cl. Roveretoi*, e raggiungono dimensioni notevolissime (circa 6 mm.). Anche gli strongili (*b*) sono assai lunghi, e si osservano dei rabdi (*a*) lievemente sinuosi e terminanti ai due estremi con una specie di rigonfiamento. Le megasclere sono rappresentate dagli pseudosterraster (*c*), ed i corpuscoli sono costituiti come da due sfere concentriche, assai vicine, e si presentano anche sotto l'aspetto di spicule minutissime e filiformi.

Anche questa specie si ricollega al tipo della *Cliona celata*, e per la conformazione dei cospuscoli può paragonarsi alla *Cl. armata* Topsent.

[1] Topsent, op. cit., tav. VII, fig. 3.

Chimica-fisiologica. — *Proprietà chimiche e chimico-fisiche dei muscoli e dei succhi muscolari.* Nota VI [1]: *Sul contenuto in fosforo dei muscoli striati bianchi e rossi.* Nota di G. Quagliariello, presentata dal Corrisp. Filippo Bottazzi [2].

Sul contenuto in fosforo dei muscoli striati e lisci esistono numerose ricerche, ma da nessun autore venne mai determinato, almeno per quanto è a mia conoscenza, il contenuto in fosforo delle due varietà di muscoli striati: bianchi e rossi. Questa ricerca appariva tanto più interessante, in quanto che dai dati del Katz [3], che determinò i costituenti minerali dei muscoli in molte specie animali, risulta che il più elevato contenuto in fosforo si riscontra nei muscoli di coniglio e di pollo, vale a dire di quegli animali in cui i muscoli striati sono in gran parte costituiti da muscoli bianchi.

Ho perciò creduto utile di fare ricerche su tale argomento, determinando, oltre al fosforo totale, anche il fosforo dei fosfatidi, contenuto nelle due specie di muscoli.

Gli animali di cui mi sono servito sono stati il coniglio (*Lepus cuniculus*), il tacchino (*Meleagris gallopavo*), e il gallo (*Gallus domesticus*) Dagli animali dissanguati furono raccolti separatamente i muscoli bianchi e rossi, che, liberati dal connettivo e dal grasso, vennero, mediante una comune macchina tritacarne, ridotti allo stato di poltiglia.

Tale poltiglia, dopo prelevamento d'un campione per la determinazione del residuo secco a 110° C., venne disseccata a 70-80°, e poi ridotta allo stato di polvere omogenea.

Su questa polvere determinai:

a) il residuo secco a 110° C.

b) il fosforo totale;

c) il fosforo dei fosfatidi.

Per la determinazione del fosforo seguii il metodo di Neumann [4]; per la determinazione del fosforo dei fosfatidi un campione di polvere muscolare

(1) Per le Note precedenti, vedi questi Rendiconti, vol. 23 (5), pag. 634, 1914.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di fisiologia della R. Università di Napoli.

(3) Katz I., *Die mineralischen Besthandtheilen des Muskelfleisches*, Pflüg. Arch., Bd. 63, p. 1, 1896.

(4) Neumann A., *Einfache Veraschungsmethode (Säuregemisch-Veraschung) und vereinfachste Bestimmungen von Eisen, Phosphorsäure, Salzsäure und anderen Aschenbestandtheilen unter Benutzung dieser Säuregemisch-Veraschung.* Zeitschr. f. physiol. Chem., Bd. 37, pag. 115, 1902.

(5-6 gr.) venne estratto nell'apparecchio di Soxhlet dapprima con etere e poi con alcool per 24 ore, e nell'estratto, portato a secchezza, determinai il fosforo col metodo innanzi detto.

Nelle seguenti tabelle sono riportati i dati analitici dei miei esperimenti.

Dai dati riferiti risulta:

1°) I muscoli striati, sia bianchi sia rossi, di uccelli (tacchino e gallo) e di coniglio, hanno, in confronto dei muscoli striati degli altri animali, un elevato contenuto in fosforo. Ad esempio, Costantino [1], in alcune ricerche eseguite recentemente in questo Laboratorio, trovò che il contenuto in fosforo dei muscoli striati di bue, calcolato come anidride fosforica, e per 100 grammi di residuo secco, è, in media, di circa grammi 1,6. Dalle mie ricerche risulta per gli uccelli e pel coniglio un contenuto medio di circa 2 grammi %. Questa osservazione è del resto d'accordo con i dati innanzi citati del Katz, che fece le sue determinazioni su varie specie animali, e fra le altre sul coniglio e sul pollo, senza per altro separare, in questi ultimi animali, i muscoli bianchi dai rossi.

2°) I muscoli striati bianchi hanno un contenuto in fosforo totale lievemente superiore a quello dei muscoli rossi. Ciò risulta evidente dalla tabella I, in cui il fosforo è riferito ai muscoli freschi. Dalla tabella II invece, in cui il fosforo vien riferito al residuo secco, si rileva. che su una delle 6 esperienze eseguite (e precisamente la seconda esperienza sul gallo), il fosforo prevale leggermente nei muscoli rossi. Del resto, ripeto, la differenza fra le due specie di muscoli, per ciò che riguarda il fosforo totale, è lievissima.

3°) Molto differente è, invece, il contenuto in fosfatidi. Negli uccelli il fosforo dei fosfatidi rappresenta circa l' 11 % del fosforo totale nei muscoli bianchi, il 22 % nei muscoli rossi; nel coniglio la differenza, senza essere così cospicua, è tuttavia notevole: il 13 % nei muscoli bianchi, il 17 circa nei rossi. Katz (loc. cit.) trovò che il fosforo nell'estratto alcolico dei muscoli di coniglio corrisponde a circa il 12 % del fosforo totale: cifra che corrisponde a quella da me trovata pei muscoli bianchi. Ed è a questa varietà di muscoli che debbono riferirsi le determinazioni dall' autore fatte sul coniglio, giacchè è noto che la musculatura striata di questo animale è costituita quasi esclusivamente di muscoli bianchi.

Nell'estratto alcolico dei muscoli di pollo il Katz trovò il 10 % del fosforo totale. Questa cifra corrisponde a quella da me trovata pei muscoli

[1] Costantino A., *Beiträge zur Muskelchemie.* II. *Ueber den Gehalt der glatten und quergestreiften Säugetiermuskeln an organischen und anorganischen Phosphor.* Bioch. Zeitschr., Bd. 43, pag. 165, an. 1912.

bianchi. Ma il Katz adoperò per le sue analisi i muscoli del petto (bianchi), e della coscia (rossi), così che il suo valore è troppo basso rispetto ai miei, anche se si tien conto che la massa dei muscoli del petto supera sensibilmente quella dei muscoli della coscia.

Se ora si paragonano i miei dati con quelli innanzi citati di Costantino, si nota che i muscoli bianchi (sia di uccelli, sia di coniglio) hanno approssimativamente lo stesso contenuto percentuale di fosforo dei fosfatidi dei muscoli striati di bue; superano questi sensibilmente per il contenuto in fosforo inorganico. I muscoli rossi, invece, hanno un contenuto in fosforo dei fosfatidi notevolmente superiore a quello dei muscoli striati di bue; quasi si equivalgono invece per il loro contenuto in fosforo inorganico.

Conclusione. — Non esistono differenze cospicue fra muscoli bianchi e rossi per ciò che riguarda il contenuto in fosforo totale. Tali differenze esistono invece per ciò che riguarda lo stato chimico del fosforo, i muscoli rossi essendo notevolmente più ricchi di fosfatidi che non i muscoli bianchi.

TABELLA 1.

	100 GRAMMI DI CARNE FRESCA CONTENGONO:													
	Muscoli bianchi							Muscoli rossi						
	Residuo secco a 110°	P_2O_5			P			Residuo secco a 110°	P_2O_5			P		
		totale	dei fosfaditi	inorganico (1)	totale	dei fosfatidi	inorganico		totale	dei fosfatidi	inorganico	totale	dei fosfatidi	inorganico
Tacchino 1	26,02	0,540	0,059	0,481	0,236	0,026	0.210	25,16	0,467	0,107	0,360	0,204	0,047	0,157
Tacchino 2	25,68	0,545	—	—	0 238	—	—	24,24	0,504	—	—	0,220	—	—
Gallo 1	27,96	0,585	0,062	0,523	0.255	0,027	0,228	25,95	0,534	0,117	0,417	0,233	0,051	0,182
Gallo 2	25,34	0,581	—	—	0,254	—	—	23,62	0.569	—	—	0 248	—	—
Coniglio 1	23.55	0.500	0,060	0,440	0,218	0,025	0,193	23,32	0,490	0,082	0,108	0,214	0,036	0,178
Coniglio 2	21,45	0,532	—	—	0,232	—	—	21,60	0,522	—	—	0,228	—	—

TABELLA 2.

	100 GRAMMI DI RESIDUO SECCO CONTENGONO:											
	Muscoli bianchi						Muscoli rossi					
	P_2O_5			P			P_2O_5			P		
	totale	dei fosfatidi	inorganico	totale	dei fosfatidi	inorganico	totale	dei fosfatidi	inorganico	totale	dei fosfatidi	inorganico
Tacchino 1	2,076	0,228	1,848	0,906	0,099	0,807	1,856	0,425	1,431	0,810	0,185	0,625
Tacchino 2	2,121	—	—	0,933	—	—	2,080	—	—	0,908	—	—
Gallo 1	2,029	0,223	1,869	0.914	0,098	0,816	2,057	0,450	1,607	0,898	0,196	0,702
Gallo 2	2,292	—	—	1,001	—	—	2,409	—	—	1,051	—	—
Coniglio 1	2,123	0,261	1,862	0,927	0,114	0,813	2.101	0,352	1,749	0,918	0,154	0,764
Coniglio 2	2,480	—	—	1,083	—	—	2,433	—	—	1,062	—	—

(1) In questa tabella, e nelle successive, la differenza tra il fosforo totale e quello dei fosfatidi è indicato come fosforo organico, soltanto per semplicità di espressione; essendo noto che il fosforo dei fosfatidi non rappresenta tutto il fosforo organico contenuto nei muscoli.

TABELLA 3.

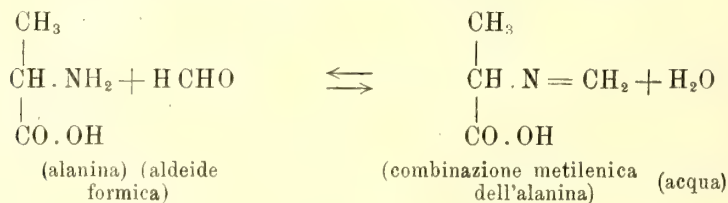
	Su 100 parti di fosforo totale			
	Muscoli bianchi		Muscoli rossi	
	P. dei fosfatidi	P. inorganico	P. dei fosfatidi	P. inorganico
Tacchino . .	10,98	89,02	22,89	77.11
Gallo	10,66	89,34	21,87	78,13
Coniglio. . .	12,99	87,01	16,75	83,25

Chimica fisiologica. — *Sulla possibilità di titolare al formolo il gruppo aminico monosostituito degli aminoacidi* (¹) Nota del dott. ANTONINO CLEMENTI, presentata dal Socio L. LUCIANI.

Un metodo il quale negli ultimi anni si è dimostrato di una grande fecondità nel campo della fisiologia e della chimica fisiologica, poichè ha contribuito a rischiarare alcuni dei problemi fondamentali riguardanti la costituzione della molecola proteica e delle sue pietre strutturali (aminoacidi) e la trasformazione che essi subiscono nell'organismo, è il metodo della titolazione al formolo, di Sörensen [2].

Il Sörensen nella elaborazione del suo metodo, si è fondato sulle ricerche di Schiff [3] il quale dimostrò che è possibile di determinare titrimetricamente la quantità dei gruppi aminici degli aminoacidi quando si escluda la funzione chimica basica del gruppo aminico stesso; ciò si ottiene quando ad una soluzione di aminoacidi venga aggiunta aldeide formica (formolo). La reazione ha luogo secondo la seguente equazione:

$$\begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CH.NH_2 + HCHO \\ | \\ CO.OH \end{array} \quad \rightleftarrows \quad \begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CH.N = CH_2 + H_2O \\ | \\ CO.OH \end{array}$$

(alanina) (aldeide formica) — (combinazione metilenica dell'alanina) (acqua)

[1] Ricerche eseguite nell'Istituto di chimica fisiologica della R. Università di Roma.

[2] Sörensen, *Enzimstudien*. Biochemische Zeitschrift, 7 Band. Seite 45.

[3] Schiff, Ann. der Chemie - 310 - (1899) Ann. der Chemie - 319 (1901) Ann. der Chemie 325 (1902).

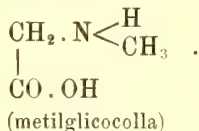
Questo esempio della alanina dimostra come l'idrogeno del gruppo aminico viene occupato da un gruppo metilenico, e la combinazione si comporta alla titolazione come un acido monovalente; se si ha un *diaminoacido*, come l'ornitina che possiede due amino-gruppi liberi, *allo stato di sale*, saranno due le molecole di formaldeide che reagiscono con essi, e l'aminoacido alla titolazione si comporterà come un acido divalente, mettendosi in evidenza la funzione acida anche del radicale acido del sale ([1]).

In questi casi, e in tutti quelli sinora studiati (anche di proteine ben individualizzate come le Protamine di Kossel ([2])) il gruppo aminico NH_2 non presenta nessuno dei due idrogeni sostituiti. Però noi sappiamo che l'idrogeno del gruppo NH_2 può essere parzialmente o totalmente sostituito da un gruppo più o meno complesso, come ad es. da un metile, secondo lo schema $R—N{<}^{H}_{R}$; l'azoto aminico così parzialmente sostituito, ha un grande interesse fisiologico, perchè si riscontra anche nell'organismo in svariate sostanze come ad es. nella sarcosina.

Non è stato finora indagato nè da Schiff, nè da Sörensen, nè dagli altri autori, che hanno elaborato il metodo della titolazione al formolo, se il gruppo aminico degli aminoacidi, anche quando il suo idrogeno sia stato parzialmente sostituito, è capace di reagire colla formaldeide e quindi se anche in questo caso gli aminoacidi siano titolabili col metodo di Sörensen; tale problema presenta un evidente interesse chimico e fisiologico.

Io mi sono proposto di risolverlo, e a tal'uopo ho sperimentato *sulla sarcosina* (*metilglicocolla*), la quale rappresenta l'aminoacido monosostituito più semplice, avente la formula di struttura

$$\begin{array}{l} CH_2 . N{<}^{H}_{CH_3} \\ | \\ CO . OH \end{array} .$$

(metilglicocolla)

Essa, come è noto, insieme col nucleo guanidinico, prende parte alla costituzione della molecola della creatina e della creatinina, che si riscontra in svariati tessuti dell'organismo e nell'urina; per azione della barite sulla creatina e anche sulla teobromina e caffeina, si ha formazione di sarcosina.

La sarcosina è stata da me sottoposta all'analisi secondo le modalità indicate per la titolazione al formolo da Sörensen ([3]). Sperimentalmente ho così proceduto:

([1]) Clementi Antonino, *Ricerche sull'arginasi*: *un nuovo metodo titrimetrico per le ricerche dell'arginasi.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Classe di scienze fisiche e naturali, vol. XXIII, serie 5ª, 2° sem. 1911.

([2]) Kossel und Gaurillow, *Weitere Untersüchüngen über die freien Amido gruppen der Proteinstoffe. Zeitschr. f. Phys. Chemie, Bd. 81, s. 174.*

([3]) Sörensen (loc. cit.); Jessen-Hansen, *Die Formoltitration.* Handbuch der Biochemischen Albeitsmetoden. 6 Band. Seite 262.

1ª *Analisi* — Gr. 0,0891 di metilglicocolla (peso molecolare 89,1) vengono sciolti in 10 cc. di acqua distillata; la soluzione risulta, così, $^1/_{10}$ *n*. Si aggiungono 20 cc. della miscela di formolo, preparata secondo le indicazioni di Sörensen, e altrettanti se ne aggiungono alla soluzione di controllo rappresentata da 10 cc. di acqua distillata bollita (la soluzione di sarcosina si scolora; quella di controllo acquista un colore rosa, leggermente più intenso). Subito si comincia la titolazione diretta, mediante NaOH $\frac{n}{5}$, e si giunge alla sopratitolazione fino a 6 cc. di NaOH $\frac{n}{5}$; si rititola con HCl $\frac{n}{5}$, e si ottengono le cifre riportate nella Tabella I:

Tabella I.

Sostanza analizzata	Colore dell'indicatore adoperato (Fenolftaleina)	Quantità adoperata di NaOH $\frac{n}{5}$ in cc. nella titolazione diretta	Quantità adoperata di HCl $\frac{n}{5}$ in cc. per la rititolazione	Quantità di NaOH $\frac{n}{5}$ calcolata in base ai dati ottenuti mediante la rititolazione con HCl $\frac{n}{5}$
Soluzione di controllo Acqua 10 cc.				
Miscela di Formolo 20 cc.	Rosa pallido. .	0,00	—	—
	Rosso evidente	0.10	—	—
	Rosso intenso .	0,20	—	—
	Sovratitolazione	0,30		
	Rosso intenso .	—	0,15	0,15
	Rosso evidente	—	0,20	0,10
Soluzione di Sarcosina $\frac{1}{10}$ *n* 10 cc.				
Miscela di Formolo 20 cc.	Effiorescenza rosa inferiore al rosa pallido del controllo.	3,30	—	—
	Rosa pallido come il controllo	3,80	—	—
	Rosso evidente	4,50	—	—
	Rosso intenso .	4,90	—	—
	Sovratitolazione	6,00		
	Rosso intenso	—	1,05	*4,95*
	Rosso evidente	—	1,40	*4,60*
	Rosa pallido .	—	2,15	3,85
	Rosa più pallido del controllo. .	—	2,50	3,50

Dalle cifre ottenute per la titolazione della soluzione di sarcosina sottraendo le cifre ottenute per la titolazione della prova di controllo, risulta che, per titolare 10 cc. di sarcosina $^1/_{10}$ n, sono necessarii cc. 4,5 di NaHO $^1/_5$ n per raggiungere il colore rosso evidente della fenolftaleina (secondo stadio di Sörensen) e cc. 4,8 di NaOH $^1/_5$ n per raggiungere il colore rosso intenso della fenolftaleina (terzo stadio di Sörensen).

Facendo il calcolo dell'azoto che così viene titolato, rispetto a quello che teoricamente dovrebbe essere titolato, si ottengono le cifre riportate nella Tabella II:

TABELLA II.

SOSTANZA adoperata per l'analisi	INDICATORE adoperato	QUANTITÀ ADOPERATA di NaOH $\frac{N}{5}$		*Osservazioni*
		in cc.	in °/₀ del calcolato	
10 ccm. di soluzione $\frac{1}{10}n$ di *sarcosina* (metilglicocolla)	Fenolftaleina (colore rosso evidente) . . (2° stadio)	4,50	90,0	—
	Fenolftaleina (colore rosso intenso) . . . (3° stadio)	4,80	96,0	—

Il risultato ottenuto in questa analisi dimostra, che la *sarcosina reagisce positivamente con la formaldeide, e nella titolazione eseguita secondo il metodo di Sörensen, si comporta come un acido monobasico.*

2ª *Analisi* — Gr. 0,1782 di sarcosina vengono sciolti in 20 cc. di acqua distillata. La soluzione risulta, così, $^1/_{10}$ n. Si aggiungono 20 cc. di miscela di formolo preparata secondo le indicazioni di Sörensen, e altrettanti se ne aggiungono alla soluzione di controllo (20 cc. di acqua distillata bollita): la soluzione di sarcosina si scolora; quella di controllo acquista una colorazione rosa, leggermente più intensa. Subito si comincia la titolazione diretta mediante NaOH $\frac{n}{5}$, e si a sovratitola fino a 11 cc.; quindi si rititola con H Cl $\frac{n}{5}$, si ottengono così le cifre indicate nella Tabella III.

TABELLA III.

SOSTANZA analizzata	Colore dell'indicatore adoperato (fenolftaleina)	Quantità adoperata di NaOH $\frac{n}{5}$ in cc. nella titolazione diretta	Quantità adoperata di HCl $\frac{n}{5}$ in cc. per la rititolazione	Quantità di NaOH $\frac{n}{5}$ calcolata in base ai dati ottenuti mediante la rititolazione con HCl $\frac{n}{5}$
Soluzione di controllo Acqua 10 cc.				
Miscela di Formolo 20 cc.	Rosa pallido. .	0,0	—	—
	Rosso evidente	0,1	—	—
	Rosso intenso.	0,3	—	—
	Sovratitolazione	0,50		
	Rosso intenso.	—	0,20	0,30
	Rosso evidente	—	0,40	0,10
Soluzione di sarcosina $\frac{n}{10}$ 20 cc.				
Miscela di Formolo 20 cc.	Efflorescenza rosa inferiore al rosa pallido del controllo.	6,50	—	—
	Rosa pallido come il controllo.	7,60	—	—
	Rosso evidente	*9,00*	—	—
	Rosso intenso	*9,70*	—	—
	Sovratitolazione	11,00		
	Rosso intenso	—	1,30	*9,70*
	Rosso evidente	—	1,90	*9,10*
	Rosa pallido. .	—	3,20	7,80
	Rosa più pallido del controllo .	—	4,10	6,90

Dalle cifre ottenute nella titolazione della soluzione, sottraendo le cifre ottenute nella titolazione della prova di controllo, risulta che, per titolare 20 cc. di sarcosina $^1/_{10}$ n, sono necessarî cc. 9 di NaOH $^1/_5$ n per raggiungere il colore rosso evidente della fenolftaleina (secondo stadio di Sörensen), e cc. 9,4 di NaOH $^1/_5$ n per raggiungere il colore rosso intenso della fenolftaleina (terzo studio di Sörensen).

Facendo il calcolo dell'azoto che così viene titolato rispetto a quello che teoricamente dovrebbe risultare, si ottengono le cifre visibili nella seguente tabella:

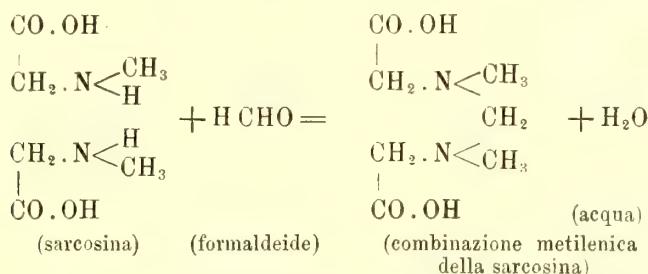
TABELLA IV.

SOSTANZA adoperata per l'analisi	INDICATORE adoperato	QUANTITÀ ADOPERATA di NaCH $\frac{n}{5}$		*Osservazio*
		in cc.	in °/₀ del calcolato	
20 ccm. di soluzione $\frac{1}{10}n$ di *sarcosina*.(metilglicocolla)	Fenolftaleina (colore rosso evidente) . . (2° stadio)	9,00	90,00	
	Fenolftaleina (colore rosso intenso). . . (3° stadio)	9,40	94,00	

I risultati ottenuti in questa analisi dimostrano che *la sarcosina reagisce positivamente colla formaldeide, e nella titolazione secoudo il metodo di Sörensen, si comporta come un acido monobasico.*

Dato il comportamento di acido monobasico della sarcosina nella titolazione al formolo, come risulta dalle espcrienze surriferite, si deduce che la sarcosina e l'aldeide formica reagiscono fra loro secondo la seguente equazione:

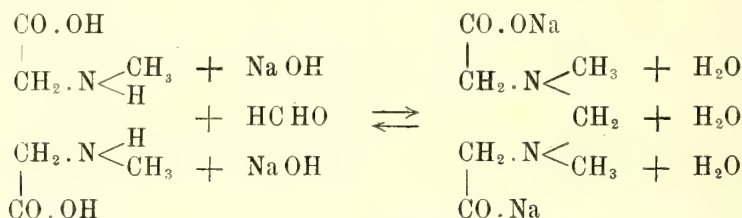
$$\begin{array}{l} CO.OH \\ | \\ CH_2.N<^{CH_3}_{H} \\ \\ CH_2.N<^{H}_{CH_3} \\ | \\ CO.OH \end{array} + HCHO = \begin{array}{l} CO.OH \\ | \\ CH_2.N<CH_3 \\ \qquad\quad CH_2 \\ CH_2.N<CH_3 \\ | \\ CO.OH \end{array} + H_2O$$

(sarcosina) (formaldeide) (combinazione metilenica della sarcosina) (acqua)

dove due molecole si sarcosina si uniscono a una molecola di formaldeide dando luogo alla combinazione metilenica della sarcosina, più una molecola di acqua; la funzione acida del carbossile delle due molecole di sarcosina viene così messa in evidenza e si lascia determinare quantitativamente coll'idrato di sodio.

Se rispetto al risultato finale la sarcosina, analogamente alla glicocolla, si comporta come un acido monobasico, vi è una lieve differenza nel comportamento della glicocolla e, rispettivamente, della sarcosina, nel senso che le cifre ottenute nella titolazione al formolo, della sarcosina, sono più basse di quelle che si ottengono nella titolazione della glicocolla. Infatti, mentre, ad es., per titolare fino al secondo e al terzo stadio 10 cc. di soluzione $^1/_{10}$ *n*

di glicocolla, Sörensen impiegò un numero di cc. di $Ba(OH)_2 \frac{n}{5}$ corrispondenti al 99 % del calcolato, per titolare 10 cc. di sarcosina $^1/_{10}$ n fino al secondo stadio io ho impiegato 4,5 cc. di NaOH $^1/_5$ n corrispondenti al 90 % del calcolato; e per raggiungere il terzo stadio della colorazione della fenolftaleina, ne ho impiegati 4,8 corrispondenti al 96 % del calcolato.

Come si vede, il comportamento della sarcosina si avvicina di più a quello osservato da Sörensen per l'alanina ed altri aminoacidi, che non a quello della glicocolla. Gli stessi fattori già invocati da Sörensen si possono invocare per spiegare questo comportamento della sarcosina. Anzitutto il fatto che il sistema, il quale si origina durante la titolazione con NaOH,

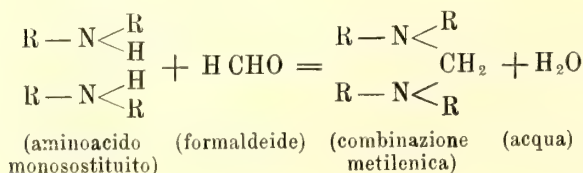
$$\begin{array}{llcll} CO.OH & & & CO.ONa & \\ | & & & | & \\ CH_2.N\genfrac{}{}{0pt}{}{<CH_3}{<H} & + NaOH & & CH_2.N\genfrac{}{}{0pt}{}{<CH_3}{<} & + H_2O \\ & + HCHO & \rightleftarrows & \quad CH_2 & + H_2O \\ CH_2.N\genfrac{}{}{0pt}{}{<H}{<CH_3} & + NaOH & & CH_2.N<CH_3 & + H_2O \\ | & & & | & \\ CO.OH & & & CO.Na & \end{array}$$

è reversibile, e l'aumento del numero degli idrossilioni della soluzione fa ritardare il decorrere della reazione da sinistra a destra; d'altra parte si aggiunga il fatto, del comportamento diverso, rispetto all'indicatore fenolftaleina, dell'acqua e degli acidi forti da una parte, e delle soluzioni di acidi deboli, come sono le combinazioni metileniche, dall'altra. Ciò sembra stare in rapporto, secondo le ricerche di Sörensen, con una diversa concentrazione degli idrogenioni: così che, *nel caso della sarcosina* come nel caso dell'alanina rilevato da Sörensen, si ha *un passaggio lento da uno stadio all'altro della colorazione della fenolftaleina*, laddove per la soluzione di controllo bastano in genere da 0,1 a 0,2 cc. di NaOH $\frac{n}{5}$ per fare passare la concentrazione degli idrogenioni da 10^{-8} $10^{-8,4}$ (primo stadio) a $10^{-8,7}$ $10^{-8,8}$ (secondo stadio) e 10^{-9} $10^{-9,1}$ (terzo stadio).

Le conclusioni generali che si ricavano dalle presenti ricerche, sono le seguenti:

1°) *Il gruppo aminico degli aminoacidi, anche se monosostituito, reagisce colla aldeide formica.*

2°) *La reazione avviene tra una molecola di aldeide formica e due molecole dell'aminoacido monosostituito, legandosi il metilene a due atomi di* N, *secondo lo schema:*

$$\begin{array}{ccccc} R-N\genfrac{}{}{0pt}{}{<R}{<H} & & & R-N<^{R} & \\ & + HCHO & = & \quad CH_2 & + H_2O \\ R-N\genfrac{}{}{0pt}{}{<H}{<R} & & & R-N<_{R} & \end{array}$$

(aminoacido monosostituito) (formaldeide) (combinazione metilenica) (acqua)

3°) *L'amino acido monosostituito presenta il comportamento di un acido monobasico nella titolazione al formolo secondo il metodo di Sörensen.*

4°) *Per rilevare tale comportamento è necessario proseguire la titolazione fino a raggiungere il colore rosso intenso della fenolftaleina.*

Zoologia. — *A proposito delle spermatofore di Carybditeuthis maculata ritenute spugne parassite.* Nota preliminare di Silvia Mortara [1], presentata dal Socio B. Grassi.

Avendo iniziato, per consiglio del prof. Grassi, uno studio su alcune specie di Cefalopodi abissali [2], voglio esporre in una breve Nota le osservazioni da me fatte sulle spermatofore nella *Carybditeuthis maculata*, riservandomi di pubblicare a suo tempo altre più estese ricerche con le tavole illustrative.

Nella femmina della *Carybditeuthis*, aprendo il mantello dal dorso e togliendo il gladio, ho trovato, in tutti gli individui da me osservati, caudalmente rispetto al muscolo collare, una speciale area pieghettata che fa parte della parete dorsale del sacco viscerale, ed ha la forma di un cerchio troncato nella parte posteriore. Su quest'area posa un corpo tondeggiante, che ha forma press'a poco di una lente piana dorsalmente, convessa ventralmente, e che con una porzione del suo contorno aderisce completamente al margine posteriore dell'area stessa. Questo corpo, se non viene levato accuratamente, può apparire bucherellato come un favo. Accurate osservazioni mi hanno mostrato che esso è contenuto entro una specie di saccoccia, la quale ha una parete ventrale formata dall'area pieghettata, di cui ho parlato, e una parete dorsale formata da una porzione del mantello. Le due pareti sono congiunte l'una all'altra posteriormente.

Ho voluto in particolare modo studiare questo corpo, descritto come *una spugna acalcarea* da chi prima di me l'ha osservato [3], e mi sono facilmente persuasa, già dalle dilacerazioni, che si tratta invece di *un insieme di spermatofore*, deposte evidentemente dal maschio durante l'accoppiamento.

La ricerca bibliografica [4] e lo studio istologico hanno convalidato le mie osservazioni.

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Ringrazio il dott. Cotronei che mi ha guidata nella ricerca.

(3) A. Vivanti, assistente all'Istituto zoologico della R. Università di Pavia, diretto dal prof. Mazzarelli (*Contributo alla conoscenza dei Cefalopodi abissali del Mediterraneo*, nell'Arch. zool. ital., vol. VII, 1914).

(4) Racovitza, Arch. Zool. Exper., t. II. S. 3.

Infatti il corpo in esame, dilacerato, lascia subito scorgere un numero grandissimo di spermatozoi contenuti dentro cavità speciali.

Con opportuni metodi di fissazione e colorazione ho potuto vedere che l'area pieghettata è rivestita da un epitelio altissimo, e che questo non si riscontra più al margine posteriore, dove non si trovano più le pieghe, e neppure in tutta la parete dorsale della saccoccia.

Sui tagli, il corpo risulta formato della unione di tanti tubuli, con direzione prevalentemente dorso-ventrale, che, per quanto ho potuto vedere, sono disposti a raggera e terminano assottigliati dorsalmente. Questi tubuli contengono una quantità grandissima di spermatozoi, fuori che nella suddetta porzione terminale assottigliata, dove si trova soltanto una sostanza apparentemente mucosa. Hanno una sottile parete propria, amorfa, e sono collegati gli uni agli altri da una sostanza cementante, la quale si colora differentemente dalla parete propria; essa forma uno strato continuo dorsalmente, congiungente tutto l'insieme delle spermatofore con la parete dorsale della saccoccia. Sulla natura di questa speciale sostanza non posso dir nulla: essa non è certamente formata da cellule. Come si comportano i tubuli dal lato ventrale, non ho ancora stabilito.

Per controllo delle mie ricerche ho voluto tagliare anche la *tasca delle spermatofore* del maschio, che, nell'individuo sessualmente maturo, è completamente piena di spermatofore, disposte longitudinalmente, le une vicino alle altre. Usando gli stessi metodi, ho avuto una sicura conferma alle mie prime osservazioni perchè ho trovato le stesse sezioni di tubuli, con sottile parete propria amorfa, contenenti moltissimi spermatozoi. Nelle osservazioni finora compiute non ho qui trovato alcuna sostanza cementante fra le spermatofore, che si mostrano indipendenti tra loro, per quanto vicine, e si possono isolare facilmente, tirandole fuori dalla tasca che le contiene.

Il fatto da me osservato trova riscontro nelle osservazioni compiute su altri Cefalopodi (zona pieghettata nell'area copulatrice di *Rossia macrosoma*), nei quali pure il maschio deposita un gran numero di spermatofore durante l'accoppiamento.

Come, nella specie da me studiata, e per quali ragioni, tale deposizione avvenga nella regione dorsale; quale porzione delle spermatofore vengad epositata nella femmina, e come gli spermi arrivino a fecondare le uova mature all'uscita dell'ovidutto, non potrei per ora dire con certezza; ma mi riservo di far conoscere in seguito le mie osservazioni in proposito, con un lavoro esteso, nel quale entrerò in maggiori particolari.

Chimica. — *Il sistema nitroglicerina - cotone nitrato. Estrazione della nitroglicerina dalla balistite per distillazione nel vuoto a temperatura ordinaria* (¹). Nota II di D. CHIARAVIGLIO e O. M. CORBINO, presentata dal Socio E. PATERNÒ.

Nel pallone schematicamente rappresentato dalla fig. 1, il tappo, a chiusura ermetica per alti vuoti, porta una lunga appendice tubulare, dentro la

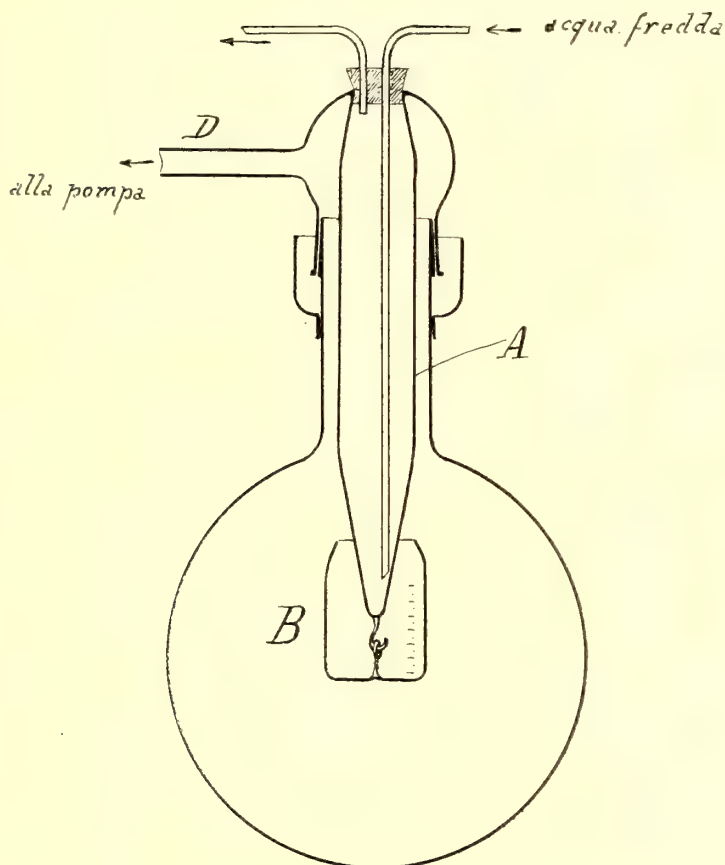



FIG. 1.

quale circola dell'acqua fredda. Il fondo del pallone fu riempito di truccioli finissimi di balistite, dello spessore di pochi centesimi di millimetro. Essi furono ottenuti adattando un rasoio bulino a una solida piallatrice per metalli, in modo da far discendere la lama di qualche centesimo di millimetro

(¹) Lavoro eseguito nel « Laboratorio chimico per le sostanze esplosive » del Ministero degli interni in Roma.

per volta, con l'aiuto di una fine vite micrometrica; il campione di balistite, situato nel posto spettante al metallo da piallare era una lastra dello spessore di circa un millimetro.

L'appendice tubulare *A*, terminata a cono, regge un bicchiere di vetro *B*, che ne copre l'estremità, cosicchè, se delle gocce si condensano sull'appendice medesima, esse, scorrendo lungo il tubo, finiscono col raccogliersi nel serbatoio. Sulla parete di questo era incisa una scala millimetrata, per poter misurare la variazione di livello del distillato.

Per mezzo della diramazione *D*, l'apparecchio fu innestato alla pompa Gaede a mercuro e al provino di Mac-Leod; si poteva così praticare nel pallone una rarefazione molto elevata, e misurare la pressione residua. Come sempre, un palloncino pieno di anidride fosforica serviva a trattenere il vapore d'acqua; mentre una piegatura a U del tubo di comunicazione tra la pompa e il pallone si faceva pescare in una miscela di ghiaccio e sale, in modo da impedire che i vapori di mercurio della pompa giungessero in misura sensibile nel pallone.

Tutto l'apparecchio venne introdotto in un grande termostato ad aria che permetteva di mantenere le pareti del pallone a una temperatura costante e regolabile con un sistema di riscaldamento elettrico; mentre una corrente di acqua a circa 10°, che passava continuamente nell'appendice *A*, ne manteneva sempre fredda la parete.

Un termometro era immerso nei trucioli di balistite; attraverso alle finestre di vetro, di cui è provveduto il termostato ad aria, si poteva osservare il livello del liquido nel serbatoio *B*, e la temperatura dei trucioli. Già a temperatura ordinaria, ch'era alquanto più alta di quella del refrigerante, si manifestò una ben netta condensazione di vapori nel tubo. Elevando poi a circa 30° la temperatura del pallone, la condensazione si fece molto più copiosa; le goccioline, ingrossandosi, scorrevano in basso raccogliendosi nel serbatoio *B*. Il liquido condensato aumentava col tempo, ma la rapidità della distillazione si andava sempre più rallentando, cosicchè dopo alcuni giorni il livello del distillato più non manifestò variazioni apprezzabili.

Fu necessario sorvegliare col provino Mac-Leod l'andamento della pressione, e mettere in funzione la pompa appena la pressione non era molto bassa. Nelle nostre esperienze essa è stata mantenuta sempre inferiore ad $^1/_{1000}$ di millimetro di mercurio. In queste condizioni il liquido raccolto era costituito dalla nitroglicerina, che si era separata dai trucioli di balistite deposti nel fondo del pallone.

L'esperienza conduce egualmente a un risultato positivo, sebbene in un tempo più lungo, ricorrendo, anzichè a dei trucioli, ad un'ordinaria placca di balistite. Così, con una placca di circa un millimetro di spessore, e arrotolata in cilindro, si potè (tenendola per circa 11 giorni a 32° nell'interno del pallone, mentre il refrigerante era mantenuto a 0°) abbassare dal 48 °/₀ a circa il 32 °/₀

il contenuto in nitroglicerina. La nitroglicerina estratta era perfettamente incolore, e al saggio di Abel manifestò una costante di stabilità corrispondente a 15 minuti primi. Trovammo però preferibile di operare con balistite in trucioli; nè parve necessario di tenere a 0° il refrigerante, essendo sufficiente la temperatura di 12° ottenuta per circolazione dell'acqua di città. In una esperienza, eseguita in queste condizioni con trucioli da 0,04 mm. di spessore e mantenendo a 30° la temperatura del pallone, dopo 16 giorni il livello del liquido raccolto non manifestò ulteriori variazioni; abbassando un poco la temperatura del refrigerante, si ebbe ancora una lieve variazione del livello. La balistite adoperata era di aspetto non buono; ma non si aveva ragione di ritenerla estremamente alterata. Essa conteneva inizialmente il 50,4 % di nitroglicerina; dopo ne conteneva il 32 %. Il distillato era di colore giallastro, e marcava già a freddo col saggio di Abel; effettivamente, dopo pochi giorni si decompose spontaneamente.

Infine un terzo campione di balistite, ridotto pure in trucioli da 0,04 mm., fu tenuto per nove giorni alla temperatora ambiente, 17°, mentre il refrigerante era a 14°; e ciò fu sufficiente perchè nel serbatoio si raccogliessero circa gr. 6,5 di nitroglicerina su 100 gr. di balistite. Dopo otto giorni di riscaldamento a 30°, si ebbero altri 22 gr. di distillato; ma già negli ultimi tre giorni il livello si era mantenuto invariato. Venne allora elevata fino a 40°, la temperatura della balistite mentre il refrigerante si trovava a 16°; e si estrassero, così, ancora altri 6 gr. di liquido, in circa quattro giorni, dei quali gli ultimi due non ebbero quasi nessun effetto. La balistite primitiva conteneva il 51 % di nitroglicerina; questa si ridusse al 20,4 % dopo l'esperienza. Il liquido ottenuto, non ostante la più alta temperatura dell'estrazione, era perfettamente incolore, e aveva una stabilità corrispondente a 18' nel saggio di Abel.

Abbiamo voluto esporre con abbondanti dati numerici i risultati di queste nostre esperienze, poichè se da un lato possono considerarsi come inverse di quelle riferite nella prima Nota, dall'altro sembra a noi che abbiano un interesse pratico piuttosto notevole.

Nella prima Nota ponemmo in rilievo varie analogie tra il fenomeno dell'assorbimento del vapor d'acqua da parte della cellulosa secca, e quello del vapore di nitroglicerina da parte della cellulosa nitrata. Le esperienze ora riferite mostrano che l'analogia fra i due sistemi acqua - cellulosa, nitroglicerina - cellulosa nitrata, esiste anche quando si consideri, invece dell'assorbimento, l'emissione dei vapori del liquido da una miscela di solido e liquido contenente una proporzione, di questo, superiore ad un certo limite. Come esiste per la cellulosa secca una cifra di ripresa d'acqua (umidità) dipendente dalla temperatura e dall'umidità dell'ambiente, così sembra esistere per la cellulosa nitrata un limite all'assorbimento dei vapori di nitroglicerina, limite dipendente essenzialmente dalla temperatura del sistema.

Dal punto di vista pratico, le nostre esperienze hanno interesse, sia perchè fenomeni simili a quelli ora descritti possono avere luogo in seno agli esplosivi relativamente ricchi di nitroglicerina (oltre il 40 %), quando in questi, per lente oscillazioni di temperatura, la nitroglicerina tende a portarsi alla superficie dei pezzi (essudare); sia perchè le esperienze possono facilitare la ricerca del grado di stabilità degli esplosivi da guerra del tipo della balistite.

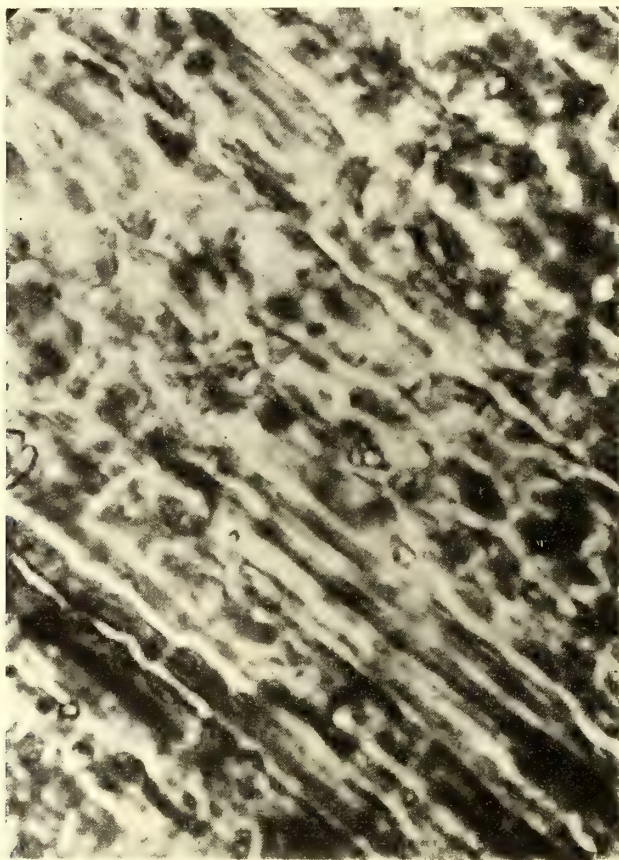



Fig. 2.

Sono note le grandi difficoltà che s' incontrano in tali determinazioni. Or il metodo da noi adoperato permette che da un campione di balistite si estragga la maggior parte del suo contenuto in nitroglicerina, senza elevarne la temperatura al disopra dei limiti che si raggiungono normalmente nella stagione estiva e nelle santebarbare delle navi; e così dati importanti possono dedursi nei riguardi della nitroglicerina che la balistite contiene. Il successo del metodo risiede nella proprietà da noi messa in evidenza: che cioè la nitroglicerina distilla a freddo, conservando inalterate le sue caratteristiche almeno per quanto riguarda la stabilità. A questo proposito

è molto significativa l'esperienza seconda, che pur essendo eseguita a temperatura più bassa di quella della terza, diede un distillato di cui era imminente la decomposizione, dimostrando così le pessime qualità che si sospettavano nella balistite da cui era stata estratta.

Tornando alle esperienze generali con le balistiti ordinarie, ci resta da riferire sulle alterazioni di struttura che l'esplosivo presenta dopo il trattamento sovra indicato, che ne abbassa dal 50 al 30 circa il contenuto percentuale di nitroglicerina.

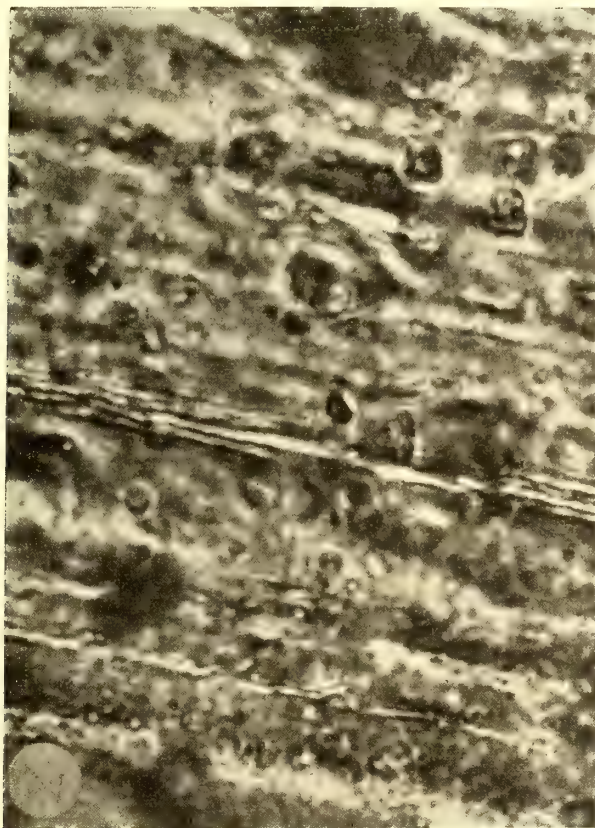



Fig. 3.

L'aspetto esterno dei trucioli non appare notevolmente modificato; e così, dopo l'esperienza eseguita con una lamina da un millimetro non piallata, potemmo constatare che non si erano prodotti sensibili mutamenti nella trasparenza, ma solo un piccolo irrigidimento nella sua struttura elastica.

Vennero pertanto eseguite delle microfotografie dei trucioli, prima e dopo il trattamento. Le figg. 2 e 3 riproducono appunto i fotogrammi rispettivamente ottenuti (ingrandimento 2000): a noi sembra che non ostante l'estrazione di una così rilevante parte di nitroglicerina, i mutamenti isto-

logici osservabili sono troppo piccoli per poter essere affermati sicuramente, tanto più che differenze forse altrettanto rilevanti si constatano fra le diverse regioni di uno stesso truciolo prima del trattamento. Ci proponiamo di eseguire una prova più dimostrativa, fotografando nella stessa regione un truciolo su un vetrino, prima e dopo di averlo sottoposto all' azione del vuoto.

La lunga osservazione dell'andamento delle pressioni al manometro, durante il trattamento che si faceva subire alla nitroglicerina e alla balistite, ci ha persuasi che i gas misurati al manometro non possono avere per sola origine le non perfette chiusure a vuoto dell'intero apparecchio, e nemmeno lo sviluppo delle atmosfere gassose aderenti ai corpi sottoposti all'azione del vuoto.

Non è improbabile che possiamo riuscire a raccogliere sistematicamente e ad analizzare questi prodotti gassosi che vengono fuori dagli esplosivi da noi cimentati. In tal caso noi riteniamo che se ne possan dedurre informazioni di molto interesse sulla lenta decomponibilità a freddo degli esplosivi più importanti, potendosi fare a meno di cimentarli, per la prova, a temperature elevate cui non corrispondono affatto le condizioni normali di conservazione.

E. M.

pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-XXIV. (1892-1915). Fasc. 3°. Sem. 1°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIII. (1892-1914). Fasc. 7°-8°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-X. Fasc. 14°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

RENDICONTI — Febbraio 1915.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 febbraio 1915.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

ERRATA CORRIGE

A pag. 241, ultima riga dell'annotazione:	giunge	giunse
» 243, intestazione della tabella:	veloci	velocità
» 245, tabella:	Graz 54 30	Graz 53 59

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 5 aprile 1915.* **N. 5.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 marzo 1915.

Volume XXIV°. — Fascicolo 5°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 marzo 1915.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle superficie a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura come inviluppi di rotolamento.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

1. Proseguendo le ricerche della mia antecedente comunicazione in questi Rendiconti [1], mi occupo qui delle superficie a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura, considerate come *inviluppi di rotolamento*.

Si sa che qualsiasi superficie Σ può generarsi infinite volte come inviluppo di un piano che accompagna, in sistema rigido, una superficie S_0 mentre questa rotola sopra una superficie applicabile S. La ricerca di queste infinite generazioni della superficie data Σ come inviluppo di rotolamento, dipende da un'equazione a derivate parziali del secondo ordine, formata in altra mia Nota [2]; ad ogni soluzione di questa equazione corrisponde una coppia (S_0, S) di superficie applicabili che dà una delle generazioni richieste.

Ora, se le linee di curvatura della superficie Σ hanno un'immagine sferica isoterma, accade che la detta equazione del secondo ordine ha a comune una soluzione, *con quattro costanti arbitrarie*, coll'altra pure del secondo ordine la quale esprime che, sulla superficie S d'appoggio, alle linee di curvatura di Σ corrisponde un sistema coniugato. Si trovano queste ∞^4 soluzioni co-

[1] *Sulle superficie isoterme come superficie di rotolamento* (Seduta del 21 febbraio 1915); nel testo citata come *nota B*).

[2] *Sui problemi di rotolamento di superficie applicabili* (questi Rendiconti, seduta del 4 gennaio 1914); nel testo citata come *nota A*).

muni integrando quel sistema differenziale ordinario che si presenta nelle trasformazioni delle superficie d'area minima dedotte dalla inversione del teorema di Guichard [1]. Per dare ai risultati una migliore forma geometrica, conviene introdurre le più generali trasformazioni delle superficie a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura, che corrispondono alle dette trasformazioni delle superficie minime, e del resto si deducono subito da queste particolari combinate colle trasformazioni di Combescure. Esse furono trattate distesamente da Eisenhart [2], e verranno qui indicate come trasformazioni E_m, ponendo in evidenza (come per le D_m di Darboux) la costante m da cui dipendono, che rappresenta il parametro del paraboloide rotondo nel teorema di Guichard. Ogni superficie Σ a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura, fissata la costante m, possiede ∞^3 superficie trasformate Σ' della medesima specie per mezzo di una E_m. La superficie Σ ed una qualunque delle trasformate Σ' sono le due falde di un inviluppo di sfere a linee di curvatura corrispondenti, la cui superficie luogo dei centri delle sfere indichiamo con S. Ora, se alla S, supposta flessibile ed inestendibile, si immaginano invariabilmente legati, al modo di Beltrami, i segmenti di normali alla Σ terminati alla superficie S, si vedrà che esiste una particolare configurazione S_0 della S, per la quale i termini dei detti segmenti, prima distribuiti sopra Σ, hanno per luogo, dopo la deformazione di S in S_0, un piano π (normale ai segmenti stessi). Ed allora, se la S_0 rotola sopra S seco trascinando come satellite il piano π, questo verrà ad inviluppare la superficie Σ. Così: *ad ogni trasformazione E_m di una superficie Σ a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura corrisponde una generazione di questa superficie come inviluppo di rotolamento.*

È importante poi di osservare che il sistema coniugato comune alla superficie d'appoggio S ed alla rotolante S_0 è quello che sulla S corrisponde alle linee di curvatura di Σ, precisamente come accadeva per le generazioni delle superficie isoterme quali superficie di rotolamento, considerate nella Nota precedente. La superficie rotolante S_0 è, così, già intrinsecamente definita; ma nel caso attuale si ha l'ulteriore semplificazione che la sua ricerca in termini finiti non richiede più l'integrazione di un'equazione di Riccati, effettuandosi con quadrature.

Come esempio si trattano qui le superficie coi due sistemi di linee di curvatura piane, e se ne trova una generazione come inviluppi di rotolamento, nella quale la superficie d'appoggio e la rotolante sono superficie di trasla-

[1] Cfr. la mia Nota: *Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie d'area minima* (questi Rendiconti, agosto 1899); od anche le mie *Lezioni*, vol. II, § 351.

[2] *Surfaces with isothermal representation of their lines of curvature and their transformations.* Transaction of the American mathematical Society, vol. IX (1908) e vol. XI (1910).

zione con curve generatrici in piani perpendicolari, corrispondendosi queste curve nell'applicabilità.

2. Abbiasi una superficie Σ, dapprima qualunque, che riferiamo alle sue linee di curvatura (u, v); e indichiamo con

$$(1) \qquad ds'^2 = e\,du^2 + g\,dv^2$$

il quadrato del suo elemento lineare sferico rappresentativo, con r_1 ed r_2 i raggi principali di curvatura, che soddisferanno alle equazioni di Codazzi

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial u}(r_1\sqrt{g}) = r_2 \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial v}(r_2\sqrt{e}) = r_1 \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v} .$$

Sopra ciascuna normale alla Σ riportiamo un segmento $R = R(u, v)$; e sia S la superficie luogo degli estremi, alle cui flessioni immaginiamo invariabilmente legati i segmenti stessi (n. 1). Affinchè esista una deformata S_0 della S, per la quale gli estremi dei detti segmenti si distribuiscano sopra un piano π, occorre e basta che R soddisfi alla equazione del secondo ordine (II) della Nota A) n. 3. Se poniamo

$$(3) \qquad h_1 = \sqrt{e}(R + r_2) \quad , \quad h_2 = \sqrt{g}(R + r_1) ,$$

questa equazione si scrive

$$(I) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{g}{e}}\frac{1}{R + r_2}\frac{\partial R}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{e}{g}}\frac{1}{R + r_1}\frac{\partial R}{\partial v}\right) = \sqrt{eg} .$$

La corrispondente deformata S_0 si trova con sole quadrature, poichè si conosce allora la distanza R di un suo punto variabile dal piano fisso π (ved. *Lezioni*, vol. I, § 109). I coefficienti della seconda forma fondamentale di S_0, che indichiamo con D_0, D'_0, D''_0, sono dati dalle formole

$$(4) \quad D_0 = \frac{R_{11}}{\sqrt{1 - \Delta_1 R}} \quad , \quad D'_0 = \frac{R_{12}}{\sqrt{1 - \Delta_1 R}} \quad , \quad D''_0 = \frac{R_{22}}{\sqrt{1 - \Delta_1 R}} ,$$

dove il parametro differenziale e le derivate seconde covarianti di R s'intendono calcolati rispetto al ds^2 comune delle due superficie applicabili S, S_0.

Supponiamo, di più, che *alle linee di curvatura* (u, v) *di* Σ *corrisponda sopra* S *un sistema coniugato*. Questa condizione si traduce, per R, nell'altra equazione del secondo ordine [nota B) n, 2]:

$$(II) \qquad \frac{\partial^2 R}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial v}\frac{\partial R}{\partial u} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v} ,$$

o anche, semplicemente, $R_{12} = 0$. Ma allora la media delle (4) mostra che avremo $D'_0 = 0$, cioè il sistema (u, v) sarà coniugato anche sopra S_0. Ora

quando S_0 rotola sopra S il piano satellite π inviluppa la superficie Σ, e possiamo enunciare il risultato seguente, analogo a quello finale del n. 4 della Nota B):

Se, nel rotolamento di una superficie S_0 *sopra una superficie applicabile* S, *un piano* π *satellite di* S_0 *inviluppa una superficie* Σ *alle cui linee di curvatura corrisponda sopra* S *un sistema coniugato, questo è il sistema coniugato comune alla superficie d'appoggio* S *ed alla rotolante* S_0,

3. Da ora in poi supporremo che la superficie Σ abbia rappresentazione isoterma delle sue linee di curvatura, e verremo a provare che in tal caso le due equazioni del secondo ordine (I) e (II) hanno ∞^4 soluzioni comuni. Per questo introdurremo le trasformazioni E_m di Eisenhart, deducendole geometricamente da quelle particolari delle superficie minime.

Avendo Σ rappresentazione isoterma delle linee di curvatura, esiste una superficie d'area minima (determinata a meno di un'omotetia) con la stessa immagine sferica delle linee di curvatura. A questa superficie minima, che diremo $\overline{\Sigma}$, applichiamo una delle ∞^3 trasformazioni che provengono dall'inversione del primo teorema di Guichard (*Lezioni*, vol. II, § 351), e sia $\overline{\Sigma}'$ la superficie minima derivata. Si sa che $\overline{\Sigma}, \overline{\Sigma}'$ sono le due falde di un inviluppo (conforme) di sfere e si corrispondono per le loro linee di curvatura, per cui il sistema ∞^2 di circoli normali a $\overline{\Sigma}, \overline{\Sigma}'$ in coppie di punti corrispondenti è un *sistema ciclico*. A questo sistema ciclico applichiamo una trasformazione di Combescure (*Lezioni*, vol. II, § 416), che lo cangi in un altro sistema ciclico, e di più in guisa che la trasformata della superficie minima $\overline{\Sigma}$ sia la superficie data Σ. In questo abbiamo ancora disponibile una costante arbitraria, p. es. il raggio del circolo normale a Σ in un punto iniziale. Nel nuovo sistema ciclico diciamo Σ' la superficie corrispondente alla superficie minima trasformata $\overline{\Sigma}'$, colla quale Σ' avrà a comune l'immagine (isoterma) delle linee di curvatura. Ora le due superficie Σ, Σ' ambedue a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura, sono alla loro volta le due falde di un inviluppo di sfere e le linee di curvatura si corrispondono sulle due falde. Il passaggio da Σ a Σ' comporta, per quanto si è visto, *quattro* costanti arbitrarie, e dà appunto una trasformazione E_m.

4. Per dare alle formole delle trasformazioni E_m la forma meglio adatta al nostro scopo, introduciamo parametri isometrici u, v sulla sfera, e scriviamo il ds'^2 sotto la forma

$$ds'^2 = e^{-2\theta}(du^2 + dv^2),$$

onde il ds^2 della superficie minima $\overline{\Sigma}$ potrà scriversi

$$ds^2 = e^{2\theta}(du^2 + dv^2).$$

Conviene anche trascrivere le formole relative ai coseni di direzione del triedro principale (X_1, X_2, X_3), e cioè:

$$
(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial v} X_2 - e^{-\theta} X_3 \;, & \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = \dfrac{\partial \theta}{\partial v} X_1 \;, \quad \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = e^{-\theta} X_1 \\[2ex] \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{\partial \theta}{\partial u} X_2 \;, & \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial u} X_1 + e^{-\theta} X_3 \;, \quad \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = -e^{-\theta} X_2 \,. \end{cases}
$$

Ed ora riportiamo dal § 351 delle *Lezioni* (vol. II) le formole di trasformazione per le superficie minime scritte sotto forma lineare nelle quattro funzioni incognite

$$\lambda \,, \mu \,, w \,, \varphi \,;$$

abbiamo il sistema fondamentale seguente:

$$
(A)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \lambda}{\partial u} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial v} \mu + (me^{\theta} - e^{-\theta}) w + me^{-\theta} \varphi \;, \quad \dfrac{\partial \mu}{\partial u} = \dfrac{\partial \theta}{\partial v} \lambda \,, \\[2ex] \qquad\qquad \dfrac{\partial w}{\partial u} = e^{-\theta} \lambda \;, \quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} = e^{\theta} \lambda \\[2ex] \dfrac{\partial \lambda}{\partial v} = \dfrac{\partial \theta}{\partial u} \mu \;, \quad \dfrac{\partial \mu}{\partial v} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial u} \lambda + (me^{\theta} + e^{-\theta}) w - me^{-\theta} \varphi \,, \\[2ex] \qquad\qquad \dfrac{\partial w}{\partial v} = -e^{-\theta} \mu \;, \quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} = e^{\theta} \mu \,, \end{cases}
$$

dove m indica una costante arbitraria. Questo sistema (completamente integrabile) possiede l'integrale quadratico

$$\lambda^2 + \mu^2 + w^2 - 2m\varphi w = \text{cost} \,,$$

e, per ottenere una trasformazione D_m della superficie minima $\overline{\Sigma}$, occorre dare un valore nullo alla costante del secondo membro, onde risulta

$$(A^{\star})\qquad \lambda^2 + \mu^2 + w^2 = 2m\varphi w \,.$$

Se indichiamo con (ξ, η, ζ), (ξ', η', ζ') le coordinate di due punti corrispondenti sopra $\overline{\Sigma}, \overline{\Sigma}'$, abbiamo (*Lezioni*, loc. cit.):

$$(6)\qquad \xi' = \xi - \frac{1}{mw} (\lambda X_1 + \mu X_2 + w X_3) \,, \text{ ecc.}$$

mentre i coseni di direzione (X'_3, Y'_3, Z'_3) della normale alla $\overline{\Sigma}'$ sono dati da

$$(7)\qquad X'_3 = \frac{1}{m\varphi} \{ \lambda X_1 + \mu X_2 + (w - m\varphi) X_3 \} \,, \text{ ecc.}$$

5. Ciò premesso, denotiamo con x, y, z le coordinate di un punto mobile sulla superficie Σ ed avremo

$$\frac{\partial x}{\partial u} = r_2 \frac{\partial X_3}{\partial u} \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial v} = r_1 \frac{\partial X_3}{\partial v} ,$$

ossia per le (5)

$$(8) \qquad \frac{\partial x}{\partial u} = e^{-\theta} r_2 X_1 \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial v} = - e^{-\theta} r_1 X_2 ,$$

dove i raggi principali di curvatura soddisferanno alle equazioni di Codazzi

$$(9) \qquad \frac{\partial r_1}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial u}(r_1 - r_2) \quad , \quad \frac{\partial r_2}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial v}(r_2 - r_1) .$$

Siano ora x', y', z' le coordinate del punto corrispondente sulla Σ' dedotta dalla Σ con una E_m (n. 3). Siccome la congiungente i punti (x, y, z), (x', y', z') deve essere parallela a quella dei punti (ξ, η, ζ), (ξ', η', ζ'), dalle (6) risulta che potremo porre

$$(10) \qquad x' = x + \tau(\lambda X_1 + \mu X_2 + w X_3)$$

colle altre due analoghe, dove rimarrà da determinare τ in modo conveniente. Per questo ci serviamo della condizione che la normale alla Σ' deve avere i coseni di direzione (X'_3, Y'_3, Z'_3), e quindi sussistono le due relazioni

$$S X'_3 \frac{\partial x'}{\partial u} = 0 \quad , \quad S X'_3 \frac{\partial x'}{\partial v} = 0 .$$

Calcolando queste, mediante le (5), le (8) e le (A), si ottiene per τ il sistema lineare del primo ordine:

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial u} &= - \left(e^{\theta} \frac{\lambda}{\varphi} + e^{-\theta} \frac{\lambda}{w} \right) \tau - \frac{e^{-\theta} r_2}{m} \frac{\lambda}{\varphi w} \\ \frac{\partial \tau}{\partial v} &= - \left(e^{\theta} \frac{\mu}{\varphi} - e^{-\theta} \frac{\mu}{w} \right) \tau + \frac{e^{-\theta} r_1}{m} \frac{\mu}{\varphi w} . \end{aligned} \right.$$

Questo è un sistema completamente integrabile, e si ha con una quadratura l'integrale generale dalla formola

$$(12) \qquad \varphi w . \tau = C - \frac{1}{m} \int (e^{-\theta} r_2 \lambda du - e^{-\theta} r_1 \mu dv) ,$$

con C costante arbitraria, l'espressione sotto il segno $\int$ essendo in effetto un differenziale esatto, a causa delle (A) e delle (9).

Le formole (10) definiscono le superficie Σ' trasformate della Σ per una E_m, dove figurano, oltre m, tre costanti arbitrarie. Si osservi che le normali a Σ, Σ' in punti corrispondenti s'incontrano in un punto (x_0, y_0, z_0), le cui coordinate sono

$$(13) \qquad x_0 = x + m\varphi\tau X_3,$$

e queste definiscono la superficie S luogo dei centri delle sfere, colle due falde Σ, Σ' dell'inviluppo. Il raggio R delle sfere è dato da

$$(13^*) \qquad R = m\varphi\tau.$$

6. Ora passiamo a verificare che questo valore R soddisfa all'equazione (I) n. 2, la quale nel caso attuale diventa

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{R + r_2}\frac{\partial R}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{R + r_1}\frac{\partial R}{\partial v}\right) = e^{-2\theta}.$$

Dalla (13*) derivando, otteniamo per le (A) e per le (II):

$$\frac{\partial R}{\partial u} = -e^{-\theta}(R + r_2)\frac{\lambda}{w} \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial v} = e^{-\theta}(R + r_1)\frac{\mu}{w}.$$

e la precedente diventa

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(e^{-\theta}\frac{\mu}{w}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(e^{-\theta}\frac{\lambda}{w}\right) = e^{-2\theta}.$$

Eseguendo le derivazioni colle (A), questa si riduce subito alla (A*) e trovasi quindi verificata.

In modo simile si potrebbe riscontrare, colle precedenti, che $R = m\varphi\tau$ soddisfa anche la (II) n. 2; ma questo segue anche da che sulle due falde Σ, Σ' dell'inviluppo di sfere si corrispondono le linee di curvatura, e per ciò (Nota B) sulla superficie S luogo dei centri il corrispondente sistema (u, v) è coniugato.

Dopo queste verifiche risulta dal n. 2 che la superficie S ammette una deformata per flessione S_0, tale che in S_0 i termini dei segmenti vengono ad avere per luogo un piano π, sicchè quando S_0 rotola sopra S il piano π inviluppa la superficie Σ. Così, in effetto, ad ogni trasformazione E_m della superficie Σ corrisponde una generazione di questa superficie come inviluppo di rotolamento; la superficie S d'appoggio è la superficie luogo dei centri delle sfere e la rotolante S_0 si ha con quadrature.

7. Fra le superficie Σ a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura vi sono le superficie coi due sistemi di linee di curvatura piane, le cui immagini sferiche delle linee di curvatura sono due fasci ortogonali di circoli. Però noi qui considereremo solo il caso generale quando le due rette, coniugate rispetto alla sfera, che sono gli assi dei due fasci di piani dei

circoli non sono tangenti alla sfera e non passano per il centro. In questo caso Eisenhart ha dimostrato (n. 8, m. c.) che, se si prende $=\frac{1}{2}$ la costante della trasformazione E_m, questa può applicarsi in guisa che anche la trasformata Σ' abbia linee di curvatura piane, ed allora la superficie S luogo dei centri delle sfere è una *superficie di traslazione* con curve generatrici in piani perpendicolari, e queste curve dànno il sistema coniugato corrispondente alle linee di curvatura di Σ.

È d'altra parte noto (cfr. *Lezioni*, vol. II, § 252) che queste superficie di traslazione ammettono una deformazione continua ad un parametro che conserva coniugato il detto sistema, le curve generatrici mantenendosi in piani perpendicolari; quindi se ne conclude che la superficie rotolante S_0 è appunto una di queste deformate.

Ma noi vogliamo ora invertire queste considerazioni e dimostrare il teorema:

Sopra una superficie S *di traslazione, con curve generatrici in piani perpendicolari, si faccia rotolare una superficie applicabile* S_0 *della medesima classe, che trasporti seco, come piano satellite, un piano* π *ortogonale ad ambedue i sistemi di piani delle curve di traslazione di* S_0. *Questo piano* π *inviluppa una superficie* Σ *coi due sistemi di linee di curvatura piane.*

In questo modo si ottiene, come inviluppo di rotolamento, qualunque superficie a linee di curvatura piane della classe generale sopra indicata.

8. Alla dimostrazione del teorema enunciato premettiamo la deduzione di alcune formole più generali, che tornano utili in altre ricerche. Consideriamo una superficie S_0, pel momento arbitraria, ed i segmenti rettilinei calati dai punti di S_0 normalmente sopra un piano fisso π, che prendiamo per piano xy; e questi segmenti si pensino invariabilmente collegati alla S_0 nelle sue flessioni. Se la S_0 assume, deformandosi, la configurazione S, il luogo dei termini dei detti segmenti diventerà una superficie Σ, ortogonale ai segmenti stessi, e noi vogliamo calcolare gli elementi relativi alla congruenza delle normali di Σ.

Come nella mia prima Memoria sul rotolamento [1], scriviamo le equazioni parametriche di S_0 sotto la forma ordinaria

$$x_0 = u \quad , \quad y_0 = v \quad , \quad z_0 = z_0(u, v) ,$$

e facciamo uso delle notazioni di Monge

$$p = \frac{\partial z_0}{\partial u} \quad , \quad q = \frac{\partial z_0}{\partial v} \quad , \quad r = \frac{\partial^2 z_0}{\partial u^2} \quad , \quad s = \frac{\partial^2 z_0}{\partial u \partial u} \quad , \quad t = \frac{\partial^2 z_0}{\partial v^2}$$

[1] *Alcune ricerche sul rotolamento di superficie applicabili* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XXXVIII, an. 1914).

per le derivate prime e seconde di z_0. I coefficienti E_0, F_0, G_0; D_0, D'_0, D''_0 delle due forme fondamentali di S_0 in coordinate u, v saranno:

$$E_0 = 1 + p^2 \quad , \quad F_0 = pq \quad , \quad G_0 = 1 + q^2$$

$$D_0 = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \quad , \quad D'_0 = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \quad , \quad D''_0 = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

Per la deformata S i coefficienti della prima forma restano gli stessi E_0, F_0, G_0, e quelli della seconda si indicheranno con D, D', D''.

Ora i coseni di direzione α, β, γ dei raggi della congruenza delle normali a Σ, nella configurazione S, sono dati dalle formole (M. c., § 3)

$$\alpha = \frac{p}{1+p^2+q^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{q}{1+p^2+q^2}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{X}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \, ,$$

colle analoghe per β, γ avendo indicato con x, y, z le coordinate di un punto mobile su S, con X, Y, Z i coseni di direzione della normale.

Dal calcolo eseguito al § 21 della Memoria ora citata, introducendo i coefficienti delle due forme fondamentali della congruenza:

$$\begin{cases} E' = S\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)^2 \quad , \quad F' = S\frac{\partial \alpha}{\partial u}\frac{\partial \alpha}{\partial v} \quad , \quad G' = S\left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)^2 \\ e = S\frac{\partial \alpha}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} \quad , \quad f = S\frac{\partial \alpha}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \quad , \quad f' = S\frac{\partial \alpha}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} \quad , \quad g = S\frac{\partial \alpha}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} \, , \end{cases}$$

risultano i valori seguenti:

$$(15) \qquad \begin{cases} E' = \Delta^2 + \Delta'^2 \quad , \quad F' = \Delta'(\Delta + \Delta'') \quad , \quad G' = \Delta'^2 + \Delta''^2 \\ e = -\Delta \quad , \quad f = f' = -\Delta' \quad , \quad g = -\Delta'' \, , \end{cases}$$

dove abbiamo posto per brevità

$$(16) \quad \Delta = \frac{D - D_0}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \quad , \quad \Delta' = \frac{D' - D'_0}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \quad , \quad \Delta'' = \frac{D'' - D''_0}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

Di qui, formando l'equazione differenziale delle sviluppabili della congruenza, e sopprimendo il fattore non nullo $\Delta\Delta'' - \Delta'^2$, troviamo

$$(17) \qquad \Delta' du^2 + (\Delta'' - \Delta)\, du\, dv - \Delta' dv^2 = 0 \, .$$

Ora supponiamo che la superficie S_0 sia una superficie di traslazione, colle curve generatrici in piani paralleli ai piani coordinati $x = 0$, $y = 0$, onde sarà $D'_0 = 0$, cioè $s = 0$. Supponiamo di più che anche la S sia di traslazione colle curve generatrici $u = \text{cost}$, $v = \text{cost}$, ed avremo anche $D' = 0$, e per ciò $\Delta' = 0$. Allora la (17) dimostra che le sviluppabili della congruenza sono le $u = \text{cost}$, $v = \text{cost}$, cioè a dire: *al sistema coniugato comune di* (S, S_0) *corrisponde sopra* Σ *il sistema delle linee di curvatura.*

Proviamo che queste sono curve piane, verificando che le loro immagini sferiche sono circoli, Dalle (15) abbiamo pel ds'^2 sferico

$$ds'^2 = \Delta^2 du^2 + \Delta''^2 dv^2 ,$$

e se denotiamo con $\frac{1}{\varrho'_u}$, $\frac{1}{\varrho'_v}$ le curvature geodetiche delle linee sferiche $u = \text{cost}$, $v = \text{cost}$ valgono le formole

$$-\frac{1}{\varrho'_u} = \frac{1}{\Delta\Delta''}\frac{\partial\Delta''}{\partial u} \quad , \quad -\frac{1}{\varrho'_v} = \frac{1}{\Delta\Delta''}\frac{\partial\Delta}{\partial v} .$$

Ma in generale dalle equazioni di Codazzi e di Gauss risultano le seguenti:

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{\partial\Delta'}{\partial u} - \frac{\partial\Delta}{\partial v} = \frac{q}{1+p^2+q^2}(t\Delta - 2s\Delta' + r\Delta'') \\ \frac{\partial\Delta'}{\partial v} - \frac{\partial\Delta''}{\partial u} = \frac{p}{1+p^2+q^2}(t\Delta - 2s\Delta' + r\Delta'') \\ \Delta\Delta'' - \Delta'^2 = -\frac{t\Delta - 2s\Delta' + r\Delta''}{1+p^2+q^2} . \end{cases}$$

Applicandole al caso attuale ove $\Delta' = 0$, ne risulta

$$\frac{1}{\varrho'_u} = -p \quad , \quad \frac{1}{\varrho'_v} = -q ,$$

quindi $\frac{1}{\varrho'_u}$ è funzione di u soltanto, $\frac{1}{\varrho'_v}$ di v soltanto cioè le linee $u = \text{cost}$, $v = \text{cost}$ sono circoli. c. d. d.

9. Terminiamo col dare, in termini finiti, le equazioni delle due superficie applicabili di traslazione S_0, S e quelle della superficie Σ a linee di curvatura piane come inviluppo di rotolamento.

Scriviamo prima le equazioni parametriche della S_0:

$$S_0) \qquad x_0 = u \quad , \quad y_0 = v \quad , \quad z_0 = \varphi(u) + \psi(v) ,$$

con $\varphi(u)$, $\psi(v)$ rispettive funzioni arbitrarie, la prima di u, la seconda di v. Quelle della superficie applicabile S della medesima classe, dipendenti da una costante arbitraria k, saranno:

$$S) \quad x = \int\sqrt{1 + (1 - k^2)\varphi'^2(u)}du \quad , \quad y = \int\sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\psi'^2(v)}\,dv ,$$

$$z = k\varphi(u) + \frac{\psi(v)}{k} ,$$

$$\left(\varphi'(u) = \frac{d\varphi}{du} \quad , \quad \varphi'(v) = \frac{d\psi}{dv}\right) .$$

Calcolando di qui, secondo le (14), i coseni α, β, γ, ove si ponga per brevità:

$$\sqrt{1+(1-k^2)\varphi'^2(u)} = \mathrm{U} \quad , \quad \sqrt{1+\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\psi'^2(v)} = \mathrm{V}\, ,$$

troviamo:

$$(18) \qquad \alpha = \frac{\varphi'(u)(\mathrm{U}-k\mathrm{V})}{1+\varphi'^2(u)+\psi'^2(v)} \quad , \quad \beta = \frac{\psi'(v)\left(\mathrm{V}-\frac{\mathrm{U}}{k}\right)}{1+\varphi'^2(u)+\psi'^2(v)}$$

$$\gamma = \frac{k\varphi'^2(u)+\frac{\psi'^2(v)}{k}+\mathrm{UV}}{1+\varphi'^2(u)+\varphi'^2(v)}\, .$$

Da queste formole seguono le altre

$$\begin{cases} \mathrm{U}\alpha+\varphi'(u)(k\gamma-1)=0 \\ \mathrm{V}\beta+\frac{\psi'(v)}{k}(\gamma-k)=0 \end{cases}$$

le quali dimostrano che le linee sferiche $u = \text{cost}$ sono circoli i cui piani passano per la retta

$$x=0 \quad , \quad z=\frac{1}{k}\, ,$$

e le $v = \text{cost}$ circoli nei piani per la retta

$$y=0 \quad , \quad z=k\, ;$$

queste due rette sono polari reciproche rispetto alla sfera (non tangenti).

Quanto alle coordinate ξ, η, ζ di un punto della superficie Σ a linee di curvatura piane u, v considerata come inviluppo di rotolamento, sono date dalle formole

$$(19) \qquad \begin{cases} \xi = \int\sqrt{1+(1-k^2)\varphi'^2(u)}\,du - [\varphi(u)+\psi(v)]\,\alpha \\ \eta = \int\sqrt{1+\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\varphi'^2(v)}\,dv - [\varphi(u)+\psi(v)]\,\beta \\ \zeta = k\varphi(u)+\frac{\psi(v)}{k} - [\varphi(u)+\psi(v)]\,\gamma\, . \end{cases}$$

avendo α, β, γ i valori (18).

Il teorema enunciato alla fine del n. 7 è così dimostrato. Osserviamo da ultimo il caso particolare notevole che la superficie S_0 di traslazione sia il paraboloide rotondo, col piano direttore come piano satellite: *Se il paraboloide rotondo rotola sopra una delle sue ∞^1 superficie di traslazione applicabili, il piano direttore inviluppa la più generale superficie minima a linee di curvatura piane* (esclusa la superficie minima d'Enneper ed il catanoide).

Fisica matematica. — *Sulle correnti elettriche in una lamina metallica sotto l'azione di un campo magnetico.* Nota III del Socio Vito Volterra.

35. Passiamo a dare la soluzione del problema nel caso in cui gli elettrodi, supposti di resistenza trascurabile, costituiscano delle porzioni del contorno. Ritorniamo quindi alle condizioni esaminate nel § 3.

Supponiamo che si sia potuto rappresentare conformemente l'area σ, semplicemente connessa (fig. 3), entro un parallelogrammo $abcd$ nel piano ξ, η in modo tale che sia

$$\widehat{bad} = \frac{\pi}{2} - \beta .$$

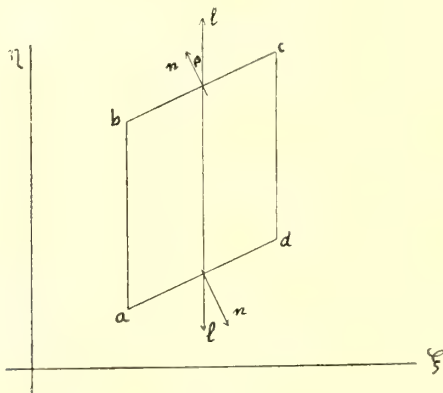



Fig. 18.

Supponiamo, inoltre, che i lati ab e cd siano paralleli all'asse η, e che i tratti dei contorni ab e AB, bc e BC, cd e CD, da e DA si corrispondono respettivamente.

Prendiamo la funzione

$$V = M\xi + N ,$$

ove M ed N denotano due costanti, e consideriamo V come funzione di ξ e η. Essa sarà costante lungo i lati ab e cd, e lungo bc e ad avremo

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 .$$

È facile riconoscere che lungo bc e cd le direzioni η e $-\eta$ sono respet-

tivamente inclinate dell'angolo β rispetto alla normale esterna n ai lati stessi.

Consideriamo ora ξ come funzione di x e y, e riportiamo la funzione V sopra l'area σ nel piano x, y. Essa resulterà armonica e regolare, sarà costante sopra le porzioni del contorno AB e CD, mentre lungo le porzioni BC e AD, avremo

$$\frac{\partial V}{\partial l} = 0 .$$

Servendoci dell'arbitrarietà delle costanti M ed N, potremo ridurre i valori di V eguali ai valori dati lungo AB e CD, e perciò V sarà il potenziale richiesto. È facile riconoscere l'ordine di infinito delle derivate di ξ rispetto a x e y nei punti angolosi del contorno.

36. Supponiamo che σ sia un quadrato. Cominciamo dal prendere sull'asse reale del piano complesso z due punti a e $-a$, e poniamo

$$Z = \int_0^z (a^2 - z^2)^{\nu-1}\, dz \tag{13}$$

$$Z_1 = \int_0^z (a^2 - z^2)^{\mu-1}\, dz . \tag{13'}$$

Mentre z si muove nel semipiano corrispondente al coefficiente dell'immaginario positivo, Z e Z_1 si muovono respettivamente entro due triangoli

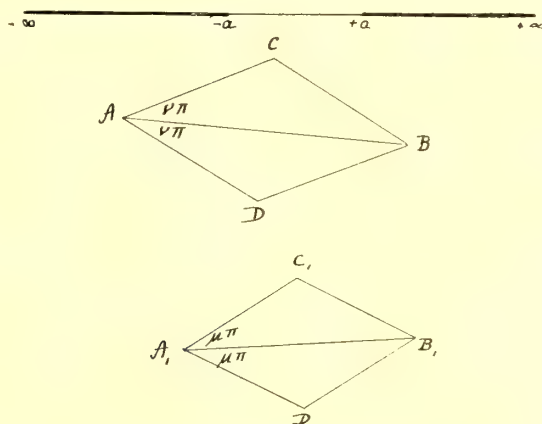



Fig. 19.

isosceli ABC e $A_1B_1C_1$ i cui angoli alla base hanno respettivamente le aperture $\nu\pi$ e $\mu\pi$. Applicando quindi il principio di simmetria, mentre z percorre tutto il suo piano sezionato con due tagli $-a\ -\infty$ e $+a\ +\infty$ Z e Z_1 si muovono respettivamente nei rombi ACBD e $A_1C_1B_1D_1$.

Prendendo $\nu = \frac{1}{4}$ il primo rombo diventa un quadrato, e prendendo

$$\mu = \frac{1}{4} - \frac{\beta}{2\pi}$$

il secondo rombo diviene un parallelogrammo avente un angolo eguale a $\frac{\pi}{2} - \beta$. Per mezzo di una rotazione

$$Z_1' = Z_1 \, e^{i\left(\frac{1}{2} - \mu\right)\pi}$$

si riduce il secondo rombo ad avere una coppia di lati paralleli ad un asse, e perciò ci mettiamo nelle condizioni della figura 18 ed otteniamo la rappresentazione conforme del quadrato nel parallelogrammo, che ci risolve il problema di *determinare il potenziale e la distribuzione delle correnti in una lamina quadrata soggetta ad un campo magnetico, allorchè due lati opposti sono i due elettrodi di resistenza nulla da cui entra ed esce la corrente, gli altri due lati sono liberi ed isolati.*

È ovvio che avendo preso $\nu = \frac{1}{4}$, l'integrale (13) è ellittico, ed infatti ponendo $a^2 - z^2 = x^4$, e $a = 1$, si ha

$$Z = \int_0^z \frac{dz}{(a^2 - z^2)^{\frac{3}{4}}} = -2 \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} .$$

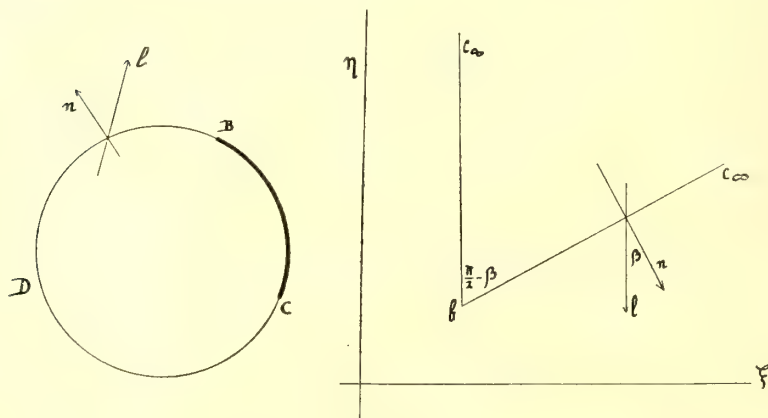



Fig. 20.

37. Esaminiamo ora il caso considerato nel § 6, e supponiamo che la lamina sia circolare. Tutta la questione si riduce a costruire una funzione armonica regolare W di cui si conosce il valore lungo l'arco BC, mentre si conosce il valore di $\frac{dW}{dl}$ lungo l'arco CDB.

Rappresentiamo conformemente il cerchio entro un angolo di apertura $\frac{\pi}{2} - \beta$ nel piano $\xi\eta$ (fig. 20), in modo che il lato bc_∞ parallelo ad η corrisponda all'arco BC, ed il lato inclinato bc_∞ corrisponda all'arco BDC il vertice B corrisponda a B e il punto c_∞ all'infinito al punto C. Riportiamo nell'angolo i valori di W. Allora $\frac{\partial W}{\partial \eta}$ sarà nota sopra i due lati dell'angolo, e poichè è armonica, potremo calcolare $\frac{\partial W}{\partial \eta}$ internamente all'angolo, d'onde si ricaverà W.

È evidente che si giungerebbe allo stesso resultato se un lato dell'angolo fosse parallelo a ξ e corrispondesse all'arco BC, e l'altro lato inclinato corrispondesse all'arco BDC e si considerasse il $\frac{\partial W}{\partial \xi}$ anzichè il $\frac{\partial W}{\partial \eta}$.

Ma per trattare questo caso, che svolgeremo nei §§ seguenti, è utile impiegare le funzioni di variabili complesse introdotte alla fine del § 14. È specialmente interessante esaminare la questione quando $\beta = \frac{n-2}{n}\pi$, giacchè mediante una opportuna rappresentazione conforme e quindi l'applicazione del doppio principio delle immagini considerato (§ 18) si giunge alla soluzione in modo molto semplice.

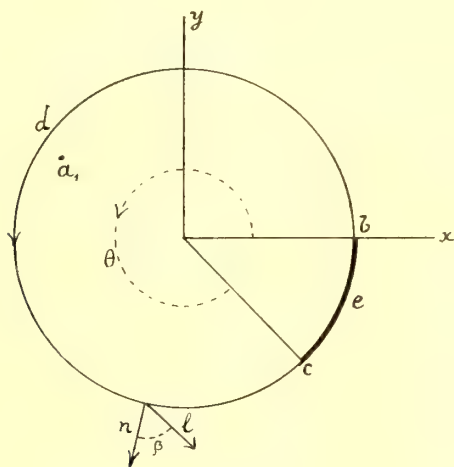



Fig. 21.

38. Mediante la funzione

$$Z = \frac{z e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{z - 1}$$

si rappresenta (fig. 21) l'area interna ad un cerchio di raggio 1, col centro

all'origine, situato nel piano z, nel semipiano $Z = X + iY$ (fig. 22) corrispondente ai valori positivi di Y. Se consideriamo i punti del contorno del cerchio aventi per indice $z = e^{i\omega}$ si trova per Z

$$Z = \frac{\operatorname{sen} \frac{\omega - \theta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}},$$

quindi corrispondono ai punti dell'asse reale nel piano Z, ed in particolare a $0 < \omega < \theta$ corrisponde il semiasse reale negativo, e a $\theta < \omega < 2\pi$ corrisponde il semiasse reale positivo.

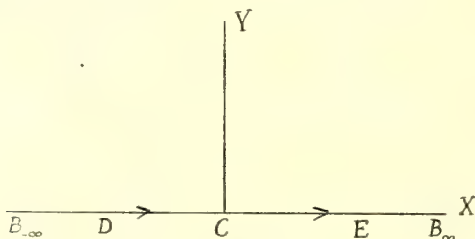



Fig. 22.

Supposto

$$0 < \mu < 1,$$

e posto $\zeta = Z^{\mu}$ si ottiene la rappresentazione conforme del semipiano nell'angolo di apertura $\pi\mu$ (fig. 23) in modo che al semiasse reale positivo in Z corrisponde il semiasse reale positivo in ζ, e al semiasse reale negativo il raggio spiccato dall'origine γ inclinato di $\pi\mu$ sul detto semiasse positivo, ossia mediante

$$(14) \qquad \zeta = \left(\frac{z e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{z - 1} \right)^{\mu}$$

rappresenteremo il cerchio nell'angolo.

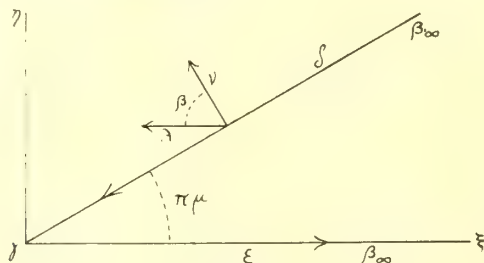



Fig. 23.

Posto

$$z = r\, e^{i\omega}\ , \ \zeta = \xi + i\eta = \varrho\, e^{i\varphi}$$

per $0 < \omega < \theta$, $r = 1$, avremo

$$\zeta = \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \right)^{\mu} e^{i\mu\pi}, \quad \text{cioè} \quad \varrho = \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \right)^{\mu}, \quad \varphi = \mu\pi$$

per $\theta < \omega < 2\pi$, $r = 1$, avremo

$$\zeta = \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\omega - \theta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \right)^{\mu}, \quad \text{cioè} \quad \xi = \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\omega - \theta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \right)^{\mu}, \quad \eta = 0.$$

Derivando le relazioni

$$\varrho = \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \right)^{\mu}, \quad \xi = \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\omega - \theta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \right)^{\mu}$$

rispettivamente rapporto a ϱ e a ξ, si trova

$$1 = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \right)^{\mu} \frac{d\omega}{d\varrho} = -\frac{\mu}{2} \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\left(\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2} \right)^{1-\mu} \left(\operatorname{sen} \frac{\omega}{2} \right)^{1+\mu}} \frac{d\omega}{d\varrho}$$

$$1 = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\omega - \theta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \right)^{\mu} \frac{d\omega}{d\xi} = \frac{\mu}{2} \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\left(\operatorname{sen} \frac{\omega - \theta}{2} \right)^{1-\mu} \left(\operatorname{sen} \frac{\omega}{2} \right)^{1+\mu}} \frac{d\omega}{d\xi},$$

d'onde

$$\text{(15)} \qquad \frac{d\omega}{d\varrho} = -\frac{2}{\mu} \frac{\left(\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2} \right)^{1-\mu} \left(\operatorname{sen} \frac{\omega}{2} \right)^{1+\mu}}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}, \quad 0 < \omega < \theta$$

$$\text{(15')} \qquad \frac{d\omega}{d\xi} = \frac{2}{\mu} \frac{\left(\operatorname{sen} \frac{\omega - \theta}{2} \right)^{1-\mu} \left(\operatorname{sen} \frac{\omega}{2} \right)^{1+\mu}}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}, \quad \theta < \omega < 2\pi.$$

Abbiasi ora la funzione $w(z) = u + iv$ regolare entro il cerchio e al contorno di esso. Consideriame z come funzione di ζ invertendo la (14), e sostituiamo nella precedente funzione, otterremo

$$w(z(\zeta)) = w_1(\zeta)$$

che sarà regolare nell' interno e al contorno dell'angolo. Calcoliamo

$$u_2 + i v_2 = w_2(\zeta) = \frac{dw_1}{d\zeta} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + i \frac{\partial v}{\partial \xi}. \tag{16}$$

Per far ciò supponiamo noti i valori di u lungo l'arco ceb in funzione di ω. Denotiamoli con $L(\omega)$ e formiamo la loro derivata rispetto ad ω che indicheremo con $L'(\omega)$.

Sia poi l una direzione inclinata dell'angolo $\beta = \frac{\pi}{2} - \pi\mu$ sulla normale esterna n al cerchio, e formiamo $\frac{\partial u}{\partial l}$ che indicheremo con $M(\omega)$. Ciò posto avremo lungo il semiasse ξ positivo $\gamma\varepsilon\beta_\infty$ in virtù della (15′)

$$u_2 = \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \omega}\frac{d\omega}{d\xi} = L'(\omega)\,\frac{2}{\mu}\,\frac{\left(\operatorname{sen}\frac{\omega-\theta}{2}\right)^{1-\mu}\left(\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right)^{1+\mu}}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}},$$

e lungo il lato $\gamma\delta\beta_\infty$ se λ è inclinata di β rispetto alla normale ν

$$u_2 = \frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{\partial u}{\partial \lambda} = -\frac{\partial u}{\partial l}\left(-\frac{d\omega}{d\varrho}\right) = -M(\omega)\,\frac{2}{\mu}\,\frac{\left(\operatorname{sen}\frac{\theta-\omega}{2}\right)^{1-\mu}\left(\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right)^{1+\mu}}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}.$$

Se nella (16) sostituiamo a ζ il valore (14), otterremo

$$w_2(\zeta(z)) = u_2(x, y) + i v_2(x, y)$$

e u_2 lungo l'arco bdc sarà

$$-\frac{2}{\mu}M(\omega)\,\frac{\left(\operatorname{sen}\frac{\theta-\omega}{2}\right)^{1-\mu}\left(\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right)^{1+\mu}}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}},$$

e lungo l'arco ceb sarà

$$\frac{2}{\mu}L'(\omega)\,\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)^{1-\mu}\left(\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right)^{1+\mu}}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}.$$

Dunque noi conosciamo al contorno del cerchio i valori della parte reale u_2 della funzione $w_2(\zeta(z))$. Ci sarà per conseguenza facile, applicando una formula ben nota, calcolare w_2 entro il cerchio. La formula che impiegheremo sarà

$$w_2(\zeta(z)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_2(\omega)\,\frac{e^{i\omega}+z}{e^{i\omega}-z}\,d\omega + iC,$$

ove con $u_2(\omega)$ si sono denotati i valori di u_2 al contorno del cerchio, e C è una costante reale.

Resulterà quindi, poichè per $z=1$ deve aversi $w_2=0$,

$$w_2(\zeta(z)) = -\frac{1}{\pi\mu}\int_0^\theta M(\omega)\frac{\left(\operatorname{sen}\frac{\theta-\omega}{2}\right)^{1-\mu}\left(\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right)^{1+\mu}}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\left(\frac{e^{i\omega}+z}{e^{i\omega}-z}-\frac{e^{i\omega}+1}{e^{i\omega}-1}\right)d\omega$$

$$+\frac{1}{\pi\mu}\int_\theta^{2\pi} L'(\omega)\frac{\left(\operatorname{sen}\frac{\omega-\theta}{2}\right)^{1-\mu}\left(\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right)^{1+\mu}}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\left(\frac{e^{i\omega}+z}{e^{i\omega}-z}-\frac{e^{i\omega}+1}{e^{i\omega}-1}\right)d\omega.$$

Ma dalla (14) segue

$$\frac{d\zeta}{dz}=2\mu i\, e^{i\frac{\theta}{2}(1-\mu)}\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{(z-e^{i\theta})^{1-\mu}(z-1)^{1+\mu}},$$

per conseguenza con operazioni semplici potremo calcolare

$$\frac{dw}{dz}=\frac{dw}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz}=w_2(\zeta(z))\frac{d\zeta}{dz},$$

ed otterremo

$$(17)\quad \frac{dw}{dz}=\frac{2}{\pi}\frac{e^{i\frac{\theta}{2}(1-\mu)}}{(z-e^{i\theta})^{1-\mu}(z-1)^{\mu}}\left\{\int_0^\theta M(\omega)\frac{\left(\operatorname{sen}\frac{\theta-\omega}{2}\right)^{1-\mu}\left(\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right)^{\mu}e^{i\frac{\omega}{2}}}{z-e^{i\omega}}d\omega\right.$$

$$\left.-\int_\theta^{2\pi} L'(\omega)\frac{\left(\operatorname{sen}\frac{\omega-\theta}{2}\right)^{1-\mu}\left(\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right)^{\mu}e^{i\frac{\omega}{2}}}{z-e^{i\omega}}d\omega\right\}.$$

Con una quadratura calcoleremo quindi w a meno di una costante, e separando la parte reale dalla parte immaginaria si avrà la funzione armonica u a meno di una costante che si determinerà facilmente.

Dunque, se lungo l'arco bdc conosciamo $\frac{\partial u}{\partial l}$, e lungo l'arco ceb conosciamo u, potremo ricavare la funzione armonica u entro il cerchio.

Da quanto è stato stabilito nel § 6 si vede che il problema della *distribuzione delle correnti in una lamina circolare, allorchè la corrente entra da uno (o anche da più) elettrodi puntiformi interni ed esce da un elettrodo costituito da un arco del contorno di resistenza trascurabile*, è completamente risolubile applicando le formule precedenti.

La quadratura da eseguirsi per ricavare w dalla (17) si calcola facilmente allorchè $\mu = \frac{1}{n}$, essendo n un numero intero. Ma in questo caso il metodo delle immagini ci conduce, come vedremo nel paragrafo seguente, molto più facilmente alla soluzione.

39. Sia α_1 un punto interno all'angolo $\delta\gamma\varepsilon$ che supporremo di ampiezza $\pi\mu = \frac{\pi}{n}$, essendo n un numero intero.

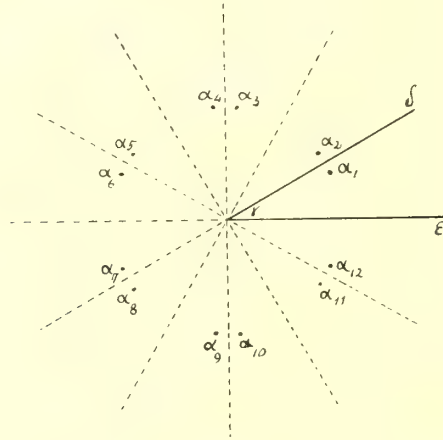



Fig. 24.

Completiamo la divisione dello spazio in angoli tutti eguali a $\frac{\pi}{n}$, e specchiamo il punto α_1 nei diversi raggi ottenendo i punti $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ (¹). Formiamo quindi le due funzioni della variabile complessa ζ

$$(18) \qquad \Phi = \sum_1^n {}_h\, e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} \left[\log(\zeta - \alpha_{2h-1}) - e^{-\frac{2\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2h}) \right]$$

$$(18') \qquad \mathrm{F} = \sum_1^n {}_h\, e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} \left[e^{\frac{\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2h-1}) - e^{-\frac{\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2h}) \right],$$

le quali sono legate dalla relazione

$$(18'') \qquad \mathrm{F} = e^{\frac{\pi i}{n}}\, \Phi$$

e studiamone le proprietà. È facile riconoscere che ciascun termine non cambia mutando h in $h+n$. Infatti

$$\alpha_g = \alpha_{g+2n},$$

(¹) Nella figura 24 abbiamo preso $n = 6$, $\beta = 60°$. Osserviamo che il minimo valore di n è 2, nel qual caso si ha $\beta = 0$.

giacchè dopo $2n$ riflessioni le immagini si riproducono, ed inoltre abbiamo

$$e^{-\frac{2(h+n-1)\pi i}{n}} = e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} .$$

Potremo dunque in qualsiasi termine sostituire h' ad h, senza alterarlo, purchè sia

$$h' \equiv h \pmod{n}.$$

Ciò posto α_{2h-1} e α_{2k} sono immagini l'uno dell'altro rispetto al raggio $\gamma\varepsilon$ quando

$$2h - 1 + 2k = 2n + 1 ,$$

e α_{2h-1} e α_{2k}, sono immagini l'uno dell'altro rispetto al raggio $\gamma\delta$ quando

$$2h - 1 + 2k' = 2n + 3 .$$

Dalle equazioni precedenti si ricava

$$k = n - h + 1 \quad , \quad k' = n - h + 2 .$$

Prendiamo ora i due termini seguenti della somma (18)

$$e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} \log(z - \alpha_{2h-1}) ,$$

$$- e^{-\frac{2(k-1)\pi i}{n}} e^{-\frac{2\pi i}{n}} \log(z - \alpha_{2k}) = - e^{\frac{2(h-1)\pi i}{n}} \log(z - \alpha_{2k}) .$$

La loro somma sarà

$$e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} \log(z - \alpha_{2h-1}) - e^{\frac{2(h-1)\pi i}{n}} \log(z - \alpha_{2k}) ,$$

ed essa avrà costante la parte reale sul raggio $\gamma\varepsilon$ (cfr. § 19).

Dunque i termini di Φ possono accoppiarsi in modo che la parte reale della somma di ciascuna coppia è costante lungo $\gamma\varepsilon$. Ne segue che su questo raggio la parte reale di Φ è costante.

Consideriamo i due termini della somma (18')

$$e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} e^{\frac{\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2h-1}) ,$$

$$- e^{-\frac{2(k'-1)\pi i}{n}} e^{-\frac{\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2k'}) = e^{\frac{2(h-1)\pi i}{n}} e^{-\frac{\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2k'}) .$$

La loro somma sarà

$$e^{-\frac{(2h-3)\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2h-1}) - e^{\frac{(2h-3)\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2k'}) ,$$

la cui parte reale è costante lungo il raggio $\gamma\delta$; dunque i termini di F possono accoppiarsi fra loro in modo che la parte reale della somma di ciascuna coppia è costante lungo $\gamma\delta$. Quindi anche F avrà la parte reale costante su questo raggio.

Prendiamo ora

$$\varphi = -\frac{J}{2\pi K}\Phi \tag{19}$$

$$f = -\frac{J}{2\pi K i \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}} F. \tag{19'}$$

È evidente che φ avrà la parte reale costante sul raggio $\gamma\varepsilon$, e f avrà la parte immaginaria costante sul raggio $\gamma\delta$, ossia la derivata normale della parte reale di f sarà nulla su $\gamma\delta$. Ma si riconosce facilmente in virtù della (18″) che

$$f = \frac{e^{-i\beta}}{\cos\beta}\varphi$$

quando si prenda $\beta = \frac{n-2}{2n}\pi$. Dunque, se assumiamo la parte reale di φ come potenziale elettrico, la parte reale di f sarà la corrispondente funzione fondamentale (§ 14). Separiamo in f e φ la parte reale dalla parte immaginaria scrivendo

$$\varphi = V + iV' \quad , \quad f = U + iU',$$

avremo allora, che V e U sono respettivamente il potenziale elettrico, e la funzione fondamentale relativi alla distribuzione delle correnti lungo una lamina indefinita limitata dai raggi $\gamma\varepsilon$ e $\gamma\delta$, quando la corrente di intensità J entri dal polo α_1 ed esca da un elettrodo indefinito di resistenza trascurabile disposto lungo il lato $\gamma\varepsilon$, mentre $\gamma\delta$ è libero ed isolato, nella ipotesi che la lamina sia soggetta all'azione del campo magnetico, e l'angolo β sia

$$\left(\frac{n-2}{2n}\right)\pi .$$

40. Poniamo ora in (19) e (19′) (cfr. formula (14))

$$\zeta = \left(\frac{z e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{z-1}\right)^{\frac{1}{n}} .$$

otterremo la rappresentazione conforme dell'angolo $\varepsilon\gamma\delta$ (fig. 24) nel cerchio (fig. 21) ed al punto α_1 corrisponderà il punto a_1 interno al cerchio, tale che

$$\left(\frac{a_1 e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{a_1 - 1}\right)^{\frac{1}{n}} = \alpha_1 .$$

Ne segue che i numeri complessi $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \dots, \alpha_{2n-1}$ saranno gli n valori della radice

$$\sqrt[n]{\frac{a_1 e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{a_1 - 1}},$$

mentre le $\alpha_2, \alpha_4, \dots, \alpha_{2n}$ saranno i loro coniugati, cioè chiamando a'_1 il numero complesso coniugato di a_1 saranno gli n valori della radice

$$\sqrt[n]{\frac{a'_1 e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{a'_1 - 1}}.$$

Avremo dunque:

Se $\beta = \frac{n-2}{2n}\pi$, *e*

$$\zeta = \left(\frac{z e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{z - 1}\right)^{\frac{1}{n}} .$$

e se le α_{2h-1} *e le* α_{2h} *denotano respettivamente gli* n *valori delle radici*

$$\sqrt[n]{\frac{a_1 e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{a_1 - 1}}, \quad \sqrt[n]{\frac{a'_1 e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{a'_1 - 1}}$$

(*essendo* a'_1 *il coniugato di* a_1), *le parti reali di*

$$\varphi = -\frac{J}{2\pi K}\sum_1^n {}_h\, e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}}\left[\log(\zeta - \alpha_{2h-1}) - e^{\frac{-2\pi i}{n}}\log(\zeta - \alpha_{2h})\right]$$

$$f = -\frac{J}{2\pi K i \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}\sum_1^n {}_h\, e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}}\left[e^{\frac{\pi i}{n}}\log(\zeta - \alpha_{2h-1}) - e^{\frac{-\pi i}{n}}\log(\zeta - \alpha_{2h})\right]$$

sono respettivamente il potenziale elettrico e la funzione fondamentale di una distribuzione di correnti entro il cerchio di raggio 1 (fig. 21), *allorchè la corrente entra dall'elettrodo puntiforme interno* a_1 *ed esce*

dall'elettrodo di resistenza trascurabile bec, *mentre la porzione* bdc *del contorno è libera ed isolata, nella ipotesi che la lamina circolare sia soggetta all'azione del campo magnetico.*

41. Supponiamo adesso che l'*elettrodo puntiforme* a_1 *vada al contorno in un punto dell'arco* bdc, avremo allora

$$\alpha_{2h-1} = \alpha_{2h}$$

e, posto $a_1 = e^{i\omega}$ con $\omega < \theta$, queste quantità saranno gli n valori della radice

$$\sqrt[n]{\frac{e^{i\omega} e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\omega} - 1}},$$

ossia gli n valori di

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta-\omega}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}\right)^{\frac{1}{n}} e^{\frac{(2h-1)\pi i}{n}}$$

per $h = 1, 2, \ldots, n$, e quindi avremo

$$f = -\frac{J}{\pi K}\sum_1^n{}_h\, e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} \log\left(\zeta - \sqrt[n]{\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta-\omega}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}\, e^{\frac{(2h-1)\pi i}{n}}\right)$$

$$\varphi = -i\frac{J\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{\pi K}\sum_1^n{}_h\, e^{-\frac{(2h-1)\pi i}{n}} \log\left(\zeta - \sqrt[n]{\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta-\omega}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}\, e^{\frac{(2h-1)\pi i}{n}}\right).$$

ove per $\sqrt[n]{\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta-\omega}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}$ va preso il valore positivo e si deve sempre supporre di sostituire a ζ l'espressione

$$\zeta = \left(\frac{ze^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{z-1}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

ERRATA CORRIGE ALLA NOTA II

Pag. 294, linea 21 *dopo le parole*: in cui manchi il campo magnetico *aggiungere*: se non per un fattore costante di proporzionalità eguale al rapporto delle conducibilità.

Pag. 301, linea 1ª e 2ª *invece di*: nel campo *sostituire*: alla lamina.

Pag. 301 linea 2ª *dopo le parole*: il potenziale elettrico *aggiungere*: (senza campo magnetico, ma ridotto nel rapporto tra le conducibilità della lamina, prima e dopo l'azione del campo stesso).

Geologia. — *Ambiente geologico del terremoto della Marsica* (13 gennaio 1915). Nota del Socio Carlo De Stefani.

Il terremoto del 13 gennaio 1915, che turbò sì gravemente la Marsica, si è manifestato particolarmente nel versante tirreno come gli altri terremoti più violenti che in questo e nel passato secolo hanno devastato regioni italiane (Liguria, Calabria), e si è manifestato ora nella più massiccia e più elevata regione dell'Appennino, e assai dappresso al termine meridionale della medesima di fronte alle ampie valli del Volturno e del Garigliano.

Infatti le montagne del Velino e del Sirente, i massicci della montagna Grande, del monte Genzana, del monte Greco, compresi nell'area delle più violente manifestazioni, superano i 2000 metri.

Il maggiore massiccio del Gran Sasso, e quelli, pure ragguardevoli, del Terminillo, del Pizzo di Sivo, del Morrone, della Maiella, della Meta, dei monti Simbruini ed Ernici, pur superiori ai 4000 metri, sono rimasti fuori dell'area epicentrale, sebbene in gran parte compresi nell'area sismica.

Quest'area epicentrale della Marsica è costituita da rocce tutte sedimentarie e con grande prevalenza da rocce del Secondario superiore e del Terziario. Infatti gli strati più antichi, per quanto finora si conosce, appartengono al Lias inferiore o forse al Retico. Prevalgono, come in tutta la parte centrale dell'Appennino, i calcari a scogliera della Creta.

Come si verifica il più delle volte nelle contrade i cui fondi marini, per lunghe età, non furono eccessivamente disturbati, i terreni successivi fino al Miocene medio sono quasi esclusivamente calcarei con qualche elemento organogenico siliceo, qua e là disperso. Una volta principiata la *facies* calcarea nel Trias, che talora apparisce nell'àmbito dell'Appennino centrale, la *facies* si è perpetuata nel Lias, nel Giura superiore, nella Creta, nell'Eocene, perfino nel Miocene medio, ed ebbe la sua culminazione appunto nelle scogliere a *rudiste* dei mari cretacei a temperature subtropicali. Lungi dalle Alpi e dalle isole cristalline od altrimenti antiche, oggi in molta parte seppellite e scomparse, del Tirreno, della Toscana, dell'Italia centrale, delle Calabrie, le materie avventizie d'origine meccanica, grosse o sottili, tanto estese nell'Appennino settentrionale ed un poco meno nella parte meridionale che si avvicina alle Calabrie, mancarono alla parte centrale dell'Appennino della quale ora si ragiona, onde questa è quasi interamente calcarea.

Le montagne dianzi accennate e le altre minori della regione percossa, sono tutte conformate a pieghe regolari, talora lunghissime come quella che

dai monti di Fossombrone termina ai Sibillini ed al Pizzo di Sevo, talora più brevi come quella della Maiella che è quasi fuori del campo sismico.

Le dette pieghe sono costituite da alternanze di anticlinali e di sinclinali. Esse sono in massima parallele fra loro e dirette da nord-ovest a sud-est, con leggere deviazioni locali come in tutto l'Appennino a partire dal Colle di Cadibona: però nel caso nostro la loro direzione coincide con la direzione geografica dell'Appennino; anzi dà il motivo a questa, mentre da Cardibona alla Val di Magra, nell'Appennino settentrionale, esse sono normali alla direzione geografica. Non è bensì da credere che le circostanze tettoniche si manifestino sempre con assoluta semplicità, poichè anzi le pieghe si decompongono in ellissoidi allungate, isolate o reciprocamente incastrate secondo la direzione dominante, talora con fitti ripiegamenti secondarî, specie quando si tratti delle rocce più plastiche, e con parziali rovesciamenti estesi fino ai terreni Miocenici e prevalentemente, sebbene non esclusivamente, secondo i due versanti adriatico o tirreno, verificatisi verso i due mari che cingono l'Appennino. Se pur nella presente regione sismica si hanno esempî di locale immersione di strati, mancano però sicuramente quei carreggiamenti di rocce da lontane regioni, sia occidentali, sia orientali, che alcuni scienziati stranieri vollero applicare più specialmente, a dir vero, agli Appennini adiacenti, fondandosi sopra le carte geologiche e sopra frasi fatte, piuttosto che sullo studio dei terreni.

Nella regione sismica della Marsica e delle contrade confinanti, come del resto in tutto l'Appennino fra la Liguria occidentale e le Calabrie, ma più assai che non nella parte settentrionale di esso, il sollevamento ha grandemente spostato i terreni del Miocene medio. Questi, nella Catena del Pizzo di Sivo sono sollevati fin sopra 2000 metri, e, oltre a ciò, prendono parte a quasi tutte le pieghe, stretti nei sinclinali, con strati non rare volte anche verticali e parzialmente invertiti. Giudico che la prima emersione della regione abbia avuto luogo durante il Miocene superiore o poco innanzi, perchè strati di tale età, poco spostati, occupano i *piani* o *campi* perfettamente eguali ai *polja* Balcanici, alquanto sopra 1000 m., in mezzo ai calcari secondarî del Gran Sasso e della Maiella. Essi sono costituiti, per quel poco che se ne conosce, da argille d'acqua dolce o salmastra, talora gessifere e lignitifere. Non avrebbero potuto originarsi altro che in una regione emersa e per di più, ritengo, ancor poco alta sopra il livello del mare, perchè altrimenti i campi carsici, invece di riempirsi d'acqua e di sedimenti fangosi, si sarebbero vuotati per condotti interni, come avviene nei campi carsici più alti. Lo stesso fatto si verificò in mezzo ai calcari della penisola Balcanica; ma questa è alquanto più antica, ed i campi furono riempiti da formazioni continentali, per lo meno del Miocene medio.

Adunque nella regione nostra, dal Miocene superiore in poi, calcolo sia stato un sollevamento di alquanto più che 1000 metri.

Il Pliocene marino non littorale, nel versante adriatico, in regione rispondente alla Marsica, sale in taluni punti, verso 600 metri, e, come in tutto quel versante dell'Appennino, inclina regolarmente dal monte verso il mare. Verso il Tirreno, da quelle parti, lo stesso Pliocene sale ad altezze alquanto minori ed è, come nel rimanente versante tirreno, orizzontale o inclinato in direzioni differenti, forse anche per il maggiore frastagliamento del versante, ma non, in ogni modo, con regolarità costante, da mare a monte.

Vi è dunque una dissimmetria fra i due versanti, dalla Liguria alla Calabria, dissimmetria che non vien meno nè manco in rispondenza alla regione sismica in parola.

Cotali circostanze dimostrano, in conclusione, che il corrugamento di questa parte, come del rimanente Appennino, è relativamente recentissimo; si sarebbe anticipata di 30 anni la geologia generale dell'Appennino, qualora si fossero da 30 anni ammesse la predetta osservazione e quella estensione del Miocene da altri notata e che solo ora troppo lentamente va facendosi strada.

Risulta, inoltre che il corrugamento ha avuto per conseguenza un innalzamento degli strati, meno intenso però e con modi diversi da quelli di Liguria e di Calabria; e risulta che insieme coll'innalzamento la massa dell'Appennino, da un capo all'altro, alzandosi, descrive — si direbbe — una specie di rotazione dalla parte dell'Adriatico, avente per fulcro l'asse di questo mare. Non è escluso che tutto l'insieme di questi varî movimenti vada verificandosi tuttora, quantunque con quella lentezza che è insita a tutti i movimenti geologici misurabili solo con cicli di tempi.

Cominciata l'emersione dell'Appennino, data la concavità dei sinclinali interposti fra ogni singola piega e catena montuosa, data la natura assai più friabile ed erodibile delle rocce terziarie che ne riempiono il fondo, le acque superficiali si fecero strada in mezzo ai medesimi, entro valli longitudinali secondanti le pieghe e la direzione geografica dell'Appennino da NO a SE. In molti casi formarono anche laghi e paduli: p. es. sull'Aterno, sul Gizio, sul Liri, ecc. ecc.

Tale è il caso della più alta parte di tutte le valli principali e dei torrenti secondarii del versante Adriatico e del versante Tirreno a ponente del Gran Sasso e della Maiella (alto Sangro, Gizio, Aterno, Sagittario, Salto, Turano, Liri, Amaseno). Pur finalmente le acque dovevano andare al mare; e quando non poterono uscire per emissarî di bacini lacustri precedentedentemente formati (come nel grande bacino del Tevere e in quello del Liri), si aprirono la strada a traverso qualche svasamento più basso, incidendolo sempre più e formandovi delle valli trasversali, *sovrimposte* come dicono i geografi, ed hanno seguitato il loro cammino riunendo *a croce* (*crosswise* secondo il Davis) le valli longitudinali confluenti incontrate per via. Così ad attestare la relativa antichità della erosione e della concomitante

degradazione meteorica principiate almeno verso la fine del Pliocene, rimangono le dette valli trasversali a V amplissimamente aperto come quelle del Pescara a valle di Popoli, del Sagittario, del Sangro, del Velino, della Nera, valli che interrompono lungamente gli anticlinali in modo da farli quasi ritenere appartenenti a catene geograficamente diverse, benchè geologicamente une.

In questo modo ritengo che, almeno nella regione presente (come del resto nell'Appennino settentrionale dalla Liguria sino alla Toscana dove il versante Tirreno è più ripido), questo versante, per mezzo di lente catture, si sia gradatamente avanzato e si vada avanzando a spese del versante adriatico. Contemporaneamente alla corrosione meccanica si è avanzata la dissoluzione chimica dei calcari, che ha dato e dà luogo ai fenomeni carsici ed alle cavità interne così generali nelle masse montuose delle quali parliamo.

Il fenomeno deve essere cominciato, pur esso, almeno al finire del Pliocene: ma ad ogni modo è assai meno progredito del fenomeno carsico della penisola Balcanica oltre l'Adriatico, perchè questa è più antica della nostra.

Tali sono i lineamenti generali litologici, stratigrafici, tettonici e morfologici della regione, e le differenze essenziali dalle altre regioni sismiche accennate, Ligure e Calabrese, dove fra altre cose i fenomeni carsici mancano o sono ben più limitati.

Queste premesse sono indispensabili per chi si proponesse tentare l'indagine sulle cause del terremoto.

Se osserviame le località denunziate come più colpite dal terremoto, o epicentrali, queste sono situate nel fondo delle vallate, sopra i terreni più recenti dei sinclinali, perciò costituiti da terreni avventizii, con materiali mobili, relativamente poco alti sopra il fondo dei rispettivi sinclinali, quindi franosi, specialmente qualora siano in pendìo. Questi terreni appunto furono turbati da fenditure, da faglie e da rovinose frane. Una linea con numerose ramificazioni, appunto come il ramo secco di un albero, riunirebbe i varii paesi più danneggiati. Questa è la conseguenza; ma non certo la disposizione dei sismi. I luoghi abitati sono lungo il pendìo delle valli; solo per rara eccezione sull'alto dei pendii e sulla roccia solida. Però anche paesi situati sopra roccia solida non franosa, salvo alcune eccezioni, ebbero danni per la franosità e risentirono egualmente l'energia delle scosse. È indubitabile che le vibrazioni investirono con eguale energia tutte le località vallive e montagnose, salvo forse la maggiore dispersione avvenuta verso le alture maggiori.

Non risulta, per ora, che le cavità carsiche interne abbiano in uno od in altro punto ammortito le vibrazioni, come sarebbe da aspettarsi: ma forse ciò deriva, come accennavo, dalla poca estensione delle cavità e dall'età del fenomeno carsico.

Se delimitiamo l'area di massima intensità o epicentrale, come suol farsi con varia approssimazione per ogni terremoto, vediamo che essa descrive una ellisse limitata ad O dai monti Simbruini ed Ernici, ad E dalle catene del monte Rotella, del Morrone, del Gran Sasso, sulle cui solide pendici occidentali sono pur tanti paesi che sentirono relativamente meno danni per la solidità del sottosuolo; a N dai monti di Cittaducale e d'Antrodoco; a S dal massiccio della Meta e dagli ampî bacini inferiori del Volturno e del Garigliano i cui terreni avventizii assai alti contribuirono forse a disperdere l'energia. L'area ellittica così descritta investe non piccolo numero di pieghe appenniniche, ed investe anche la linea di spartiacque fra Adriatico e Tirreno e la parte assiale della Penisola, specialmente qualora si prescinda dai terreni vulcanici geologicamente recenti, tanto estesi lungo il litorale a ponente. Il suo asse maggiore, senza coincidere col detto spartiacque poichè rimane tutto nel versante Tirreno, diretto da NO a SE, è parallelo alla direzione geografica della Penisola e dell'Appennino ed alla direzione tettonica delle pieghe che costituiscono la regione. Quest'area sismica coincide dunque con una regione di massimo e regolare corrugamento altresì soggetta a sollevamento recente e notevole, quantunque di origine non recentissima e di velocità non grande, corrugamento e sollevamento che verosimilmente sono tuttora in azione.

Le circostanze della Calabria e della Liguria occidentale sono parte molto, parte poco differenti. La Calabria è regione di rocce eminentemente cristalline ed antiche. Le montagne vi sono antichissime, e le manifestazioni dei relativi perturbamenti tettonici, se ve ne furono, furono scontate e cessate da cicli geologici; inoltre, dopo svariate vicende geologiche, il sollevamento e l'emersione dal mare, fra i maggiori finora notati, sono geologicamente recentissimi e rapidissimi.

La Liguria occidentale è costituita pur essa prevalentemente da rocce antiche e da terreni del Paleozoico e del Secondario più antico plasmate e ripiegate, a quanto sembra, in età posteriori alla prima formazione delle montagne Calabresi e Peloritane. Ivi dunque i movimenti orogenetici, più recenti che non nella Calabria, sono più antichi che non nella Marsica. Essa pure fu soggetta ad un sollevamento abbastanza notevole dalla parte del Tirreno, con emersione dei terreni pliocenici di mare abbastanza profondo in strati orizzontali o quasi, disposti lungo il litorale odierno; ma il sollevamento successivo, atto ad innalzare strati postpliocenici relativamente recenti, è incomparabilmente minore che non in Calabria e forse alquanto minore che non nelle regioni periferiche alla Marsica. In genere il sollevamento della Penisola lungo il mare Tirreno va diminuendo d'intensità da mezzogiorno verso settentrione.

Tutte e tre le principali regioni sismiche italiane di questo e del secolo scorso combinano nel trovarsi dalla parte del mare Tirreno che dal Miocene

in poi fu ed è sede della più intensa vulcanicità. Tutte e tre le regioni, per la accennata circostanza della dissimmetria esistente fra i due versanti, presentano la particolarità che le vibrazioni sismiche provenienti a dirittura dal Tirreno in Liguria e in Calabria, o dalla parte di questo nella Marsica, rimangono attutite quando passano al versante adriatico oltre che dalla distanza anche e principalmente dalla alta veste dei terreni appartenenti al Terziario superiore, i quali, non più orizzontali o quasi, ma sempre dal più al meno inclinati, costeggiano l'Adriatico.

Dalle coincidenze sopra notate dell'area sismica della Marsica con una regione appenninica di intensissimo corrugamento e di sollevamento non antico, non ci sembra senz'altro si possa arrivare ad una origine così detta tettonica del terremoto, come si trattasse di causa ed effetto.

Nelle rocce compatte della regione scossa non fu indizio di fratture e di faglie tali da dar pretesto a considerarle come cause del sisma.

Le rocce calcaree che prendono parte alle pieghe dell'Appennino si può supporre si estendano, al più, di 3 a 4000 metri sotto il fondo dei sinclinali, p. es. sotto la valle del Liri o il lago del Fucino. Al di sotto potranno essere altri 4 a 5 km. di rocce cristalline antiche, pari a quelle di Calabria. Per quanto si può dedurre dall'osservazione, le massime piegature degli strati terrestri si originano non proprio alla superficie ma a poca distanza da questa, e si vanno perdendo a profondità non grandi, anche per la variata plasticità delle rocce e per l'aumento delle temperature e delle pressioni. Ora un terremoto così energico, e che ha avuto così estesa ripercussione come quello del 13 gennaio scorso, non può essere derivato da frattura di strati rocciosi interni non manifestatasi al di fuori, conseguente al ripiegamento loro entro una diecina di km. di profondità. Per un terremoto come questo, originatosi a profondità maggiori, occorre cercare altra causa: e questa, al solito, mi pare non possa essere che la vulcanicità.

Il mare Tirreno, dal Miocene in poi, dal Capo d'Aglio a Ustica, fu tutto un campo vulcanico, tuttora attivissimo. Il versante tirreno della Marsica, tutto lungo il littorale, dal vulcano Laziale, a Bracciano, alla Tolfa, al Cimino, a Bolsena e oltre, è accompagnato da numerosa serie di vulcani spenti, alcuni dei quali per lo meno, come i Cimini e quello di Bolsena, principiarono durante il Pliocene per terminare nel Postpliocene superiore in tempi geologicamente recentissimi. Un'altra serie di numerosi piccoli vulcani, dovuti a singole o per lo meno a brevi eruzioni posteriori al Pliocene, sta più internamente e quasi al limitare della regione epicentrale, parallelamente a questa, lungo la valle del Sacco situata in ampio sinclinale fra monti calcarei pure cretacei e terziarii. Essa termina a sud col grandioso vulcano di Rocca Monfina, situato in mezzo a rocce calcaree, probabilmente in parte sventrate ed esplose.

A settentrione poi della stessa regione epicentrale, presso Rieti, sono i due vulcanetti d'età recente ma non esattamente determinata, di Coppaeli e di San Venanzio, la cui roccia a Mellilite, rarissima altrove, merita essere ricordata perchè ricchissima di calcio; ed essendosi manifestata in mezzo a potenti masse calcaree verrebbe fatto di credere che il magma vulcanico locale interno sia sgorgato da profondità di sì pochi chilometri da assimilare parti calcaree di quelle. Ambedue i vulcani sorgono, in sostanza, come quelli della Valle del Sacco, in mezzo alle stesse rocce calcaree scosse dal presente sisma e ravvicinati assai all'asse o spartiacque dell'Appennino. Tutti questi vulcani, situati nel fondo delle depressioni, dànno l'idea di essersi così manifestati nei luoghi di minore resistenza.

Secondo logiche induzioni si può ritenere che la formazione dei detti vulcani della Valle del Sacco e del territorio Reatino in mezzo ad una regione simile a quella epicentrale del terremoto attuale e soggetta essa pure alle scosse, in contrade nelle quali mai prima del Pospliocene si erano manifestati vulcani, si può ritenere, dico, che sia stata preceduta da violenti terremoti che molti, se ne fossero stati testimoni, avrebbero attribuito a causa tettonica. Quando un condotto vulcanico è aperto, i terremoti circostanti sono leggeri; se il condotto è fortemente otturato, come l'Epomeo in occasione dei terremoti di Casamicciola del secolo scorso, come il Vesuvio nell'anno 79, i terremoti sono violenti, e così può essere se la così detta crosta terrestre presenta resistenze sufficienti ad impedire la nuova apertura di un vulcano. Io credo, in sostanza, che il terremoto del 13 gennaio non possa attribuirsi ad altra causa che non sia vulcanica.

Qualora la superficie terrestre avesse dovuto rompersi sotto l'energia delle scosse, ciò avrebbe avuto luogo, come nelle regioni contigue precedentemente citate, nei luoghi *minoris resistentiae*. Dice il Martinelli, in un suo lavoro preliminare [1], che di esso terremoto « viene esclusa in modo asso- « luto l'origine vulcanica intesa come tentativo di eruzione in un edificio « vulcanico, e suggerita invece una causa determinante nella tettonica della « regione, *modificata, se si vuole, da trasformazione meccanica dell'energia* « *termica degli strati sottostanti alla crosta* ». Ma con ciò appunto si rientra nella causa vulcanica.

Già dai più antichi tempi, dopo studî del Darwin e del Dana, si ammette la coincidenza delle regioni vulcaniche con regioni di sollevamento: tale coincidenza ho ammessa da gran tempo anche in Italia, e verosimilmente andrà estesa, oltre che ai sollevamenti, anche ai corrugamenti della crosta superficiale. Le eruzioni basiche nei mari profondissimi dell'Eocene superiore dell'Appennino, là dove nei cicli geologici immediatamente prece-

[1] G. Martinelli, *Prime osservazioni sul terremoto italiano del 13 gennaio 1915* (Bull. Soc. sismol. ital., vol. XVIII).

denti non era stato indizio di vulcanicità, segnalano il primo inizio della formazione dell'Appennino e della Penisola italiana. La coincidenza del lento sollevamento e dell'intenso corrugamento, probabilmente permanenti, e della sismicità della Marsica, l'abbiamo già notata. Verosimilmente si tratta di manifestazioni multiformi di attività endogena unica, e sotto tale punto di vista la causa vulcanica può essere ricondotta alla causa tettonica. Ma se per causa tettonica si intendano faglie e fratture o frane esterne od interne di strati appartenenti alla crosta superficiale solida, questa, secondo me, si deve nei casi nostri presenti escludere senz'altro. Cotali difficilissime questioni sono più sollecitamente e più recisamente definite dai profani: troppo si pretende col chiedere agli scienziati la *vera* interpretazione di tutto; ed in casi incerti val meglio rispondere: *ignoramus.*

Meccanica. — *Sulla teoria delle distorsioni elastiche.* Nota II del Socio Carlo Somigliana.

Matematica. — *Sulla risoluzione di certe equazioni integrali di Volterra.* Nota del Corrisp. O. Tedone.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Petrografia. — *Su alcune rocce della Terra del Fuoco: II, Scisti cristallini* [1]. Nota del Corrisp. Federico Millosevich.

Gli scisti cristallini sono largamente rappresentati nella collezione del dottor De Gasperi, perchè formano parte importante della costituzione geologica della regione della Terra del Fuoco da lui percorsa [2]. Fra le rocce di questo gruppo predominano per abbondanza le filladi tipiche o rocce affini; abbastanza comuni gli scisti cloritici ed i micascisti; piuttosto scarsamente rappresentati sono gli gneiss, e tutti da rocce del tipo dei paragneiss. Maggior diffusione hanno gli scisti con anfibolo, che compaiono con rocce delle due

(1) Lavoro eseguito nel Gabinetto di mineralogia del R. Istituto di studî superiori di Firenze.

(2) In altre regioni della Terra del Fuoco è stata notata la prevalenza di siffatta formazione geologica. Vedansi fra gli altri gli studî geologici di D. Lovisato nelle opere: G. Bove, *Expedicion austral argentina: informes preliminares,* Buenos Aires 1883; idem, *La spedizione antartica* in Boll. Soc. geogr. ital., 1883, pag. 5; D. Lovisato, *Una escursione geologica nella Patagonia e nella Terra del Fuoco,* ibidem, 333.

famiglie degli scisti anfibolici propriamente detti e delle anfiboliti. Alla formazione degli scisti cristallini si ricollegano delle quarziti, tutte più o meno scistose e con elementi accessorî varii.

Gneiss cornubianitico.

Loc. Cima Sella. — Roccia poco scistosa, compatta, di color verdechiaro.

Sebbene per l'aspetto esteriore questa roccia non si presenti come uno gneiss, ritengo di doverla ascrivere a questa famiglia, perchè mineralogicamente consta di quarzo, feldspato alcalino, feldspato calcico-sodico e mica.

Al microscopio mostra una massa costituita da un intreccio minuto di quarzo e mica, in seno alla quale si trovano abbondantemente frammenti angolosi irregolari di quarzo e feldspati, ed anche, benchè più raramente, individui dei medesimi minerali con contorno cristallino distinto.

Il quarzo è per lo più in frammenti irregolari, fessurati e con estinzioni ondulose.

Il feldspato alcalino, che è il più abbondante, è ortoclasio tipico (α' e γ' nettamente inferiori a 1,5354) [1]: è un pò torbido per incipiente caolinizzazione, ha ben distinte le tracce delle sfaldature principali e, oltrechè in frammenti, si trova anche in cristalli interi spiccatamente idiomorfi. Una caratteristica di questi grossi cristalli feldspatici è quella di essere attraversati da zone costituite dallo stesso intreccio della massa fondamentale della roccia, in modo da dare apparenze analoghe a taluni fenomeni di riassorbimento, che si osservano negli interclusi porfirici delle rocce eruttive. Qui evidentemente si tratta invece di un fenomeno di metamorfismo prodotto dalla ricristallizzazione della massa fondamentale cementante.

Il feldspato calcico-sodico, con indici α' e γ' uguali o di poco inferiori a n della collolite e inferiori nettamente ad ω ed ε del quarzo e con estinzioni simmetriche di 10°-12°, si può ritenere per un oligoclasio-albite. I suoi cristalli sono generalmente più piccoli, e quasi sempre a contorno netto.

Il materiale micaceo è quasi esclusivamente costituito da muscovite-sericite; magnetite, apatite e zircone sono elementi del tutto accessorî.

Per la natura filladica della massa cementante i minerali suaccennati, e per lo stato frammentario di molti di essi, la roccia è indubbiamente da riferirsi ai paragneiss o gneiss sedimentarii.

Hornfelsite.

Loc. Isola Tres Mogotes. — Roccia compatta, di color bigio, impregnata di limonite.

Al microscopio in una massa fondamentale quarzoso-micacea come quella della roccia precedente, ma con in più parecchia clorite, presenta numerosi

[1] n della collolite = 1,5354.

granuli di quarzo e di feldspati. La differenza dalla roccia precedente è data dalla minor quantità di questi minerali e dal loro presentarsi sempre in granuli di dimensioni non grandi.

I feldspati sono anche qui ortoclasio tipico e un termine acido delle miscele oligoclasiche. La mica è ancora muscovite-sericite.

Relativamente abbondanti i minerali ferriferi, e specialmente la pirite, alterata spesso in limonite.

Ne ho fatto, non ostante le molte analogie, un tipo distinto dalla precedente, soprattutto per il suo più spiccato carattere di arenaria ricristallizzata e metamorfizzata.

Gneiss filladico porfiroide.

Loc. Rio dell'Ancoraggio nel Seno Pigafetta. — Roccia scistosa, di color grigio-chiaro con chiazze elittiche rossastre.

Microscopicamente si nota una massa fondamentale formata da un aggregato allotriomorfo granulare di quarzo di grana variabile, ora più grossolana, ora più fina.

Quando la grana è fina, al quarzo sono intimamente commiste delle squame di mica sericite; quando la grana è grossa, questa manca quasi del tutto. In ogni modo la sericite unita anche a biotite forma delle concentrazioni nella massa, che anche all'esame macroscopico appaiono come chiazze elittiche rossastre per incipiente alterazione ocracea.

Caratteristico è il modo di presentarsi, in seno a questa massa, del quarzo e dei feldspati, che hanno l'aspetto di veri e proprî interclusi porfirici.

Il quarzo ha quasi sempre il contorno cristallino di una bipiramide, e mostra numerose linee di frattura.

Il feldspato alcalino, che è tipico ortoclasio, si trova in individui idiomorfi di grandi dimensioni: ha apparenza un po' torbida e alterazione parziale in caolino e muscovite. Anche in questi cristalli di ortoclasio si notano, come in quelli dello gneiss cornubianitico prima descritto, anzi in modo più spiccato, i fenomeni di attraversamento o di riassorbimento della massa fondamentale cementante nella massa del cristallo.

Il feldspato calcico-sodico ha cristalli quasi sempre non geminati, i cui caratteri ottici li fanno ritenere per albite (α' e γ' di poco inferiori a n e nettamente inferiori a ω ed ε).

La mica più abbondante è muscovite in lamine o in individui scheletrimorfi; e più raramente si notano lamine di biotite con pleocroismo dal giallo-chiaro al giallo-legno, e qualche volta anche in tinte verdi per trasformazione cloritica.

Clorite poi in squamette, come pure sericite e biotite, si intrecciano con i granuli di quarzo della massa fondamentale formandovi anche quelle con-

centrazioni cui si è dianzi accennato. Abbondante è la pirite in cristalli cubici.

Le descrizioni di questa e delle rocce precedenti mostrano che fra di loro corrono parecchi punti di contatto, specialmente per la loro genesi e per la loro composizione mineralogica; le ho tenute distinte, quasi esclusivamente per peculiarità di composizione quantitativa e di struttura.

Una prova della difficoltà di una esatta classificazione e distinzione fra tali rocce si trova nella multiforme e discorde nomenclatura delle medesime secondo i varî autori.

Gneiss cloritico-epidotico.

Loc. Fra L. Fagnana e L. Roca. — Roccia verde, spiccatamente scistosa.

La tessitura esterna e la struttura sono proprie degli gneiss tipici.

Il materiale lamellare più abbondante, e disposto secondo i piani di scistosità, è clorite; vi si associano in scarsa misura biotite e muscovite.

Il quarzo è in granuli o anche in grossi individui, per lo più allotriomorfi.

Il feldspato alcalino (ortoclasio) è assai scarso; abbonda invece il feldspato calcico-sodico in individui di dimensioni considerevoli e con elevato grado di idiomorfismo, che, dalle estinzioni simmetriche di pochi gradi e dagli indici di rifrazione uguali o di poco superiori ad n, si possono ritenere miscele oligoclasiche.

Un costituente essenziale ed abbondante è l'epidoto in cristalletti e in granuli di color giallognolo con vivi colori di interferenza e pleocroismo sensibile.

La pirite è frequente, anche in grossi cristalli nella massa della roccia.

Micascisti.

Loc. Morena frontale del ghiacciaio Negri. — Fra gli abbondanti ciottoli di questa morena, raccolti dal De Gasperi, si trovano due varietà di micascisti un po' dissimili per l'aspetto esterno, ma non per la composizione e struttura. L'uno ha tessitura più grossolana e colore rossastro, mentre l'altro è più minuto e di color grigio.

Ambedue, al microscopio, si mostrano costituiti in prevalenza da quarzo e da mica biotite con altri minerali accessorî.

Il quarzo forma aggregati granulari di grana più o meno grossa, che si adunano spesso nella roccia in lenti di dimensioni variabili ed anche in straterelli.

La mica più abbondante e caratteristica è la biotite rosso-bruna; e con essa si unisce e concresce muscovite limpida, in minor quantità.

Elementi accessorî sono clorite, magnetite, zircone, epidoto, apatite.

Scisto cloritico.

Loc. Insland Bay nel canale Gabriel. — Roccia verde-scuro uniforme, poco scistosa.

Al microscopio mostra un fitto aggregato squamoso di clorite (clinocloro) con poco quarzo, per lo più disposto in vene o lenti che attraversano la massa cloritica.

In mezzo alle lamine cloritiche si mostrano, come accessorî, anche biotite e muscovite; ma l'elemento accessorio più interessante è un feldspato calcico-sodico, che per la sua rifrazione e per il valore degli angoli di estinzione simmetrica deve ritenersi una miscela andesinica con circa 35 % di An.

Filladi.

Sono le rocce piò comuni della collezione, e le descrivo insieme perchè, pur con qualche differenza strutturale e di composizione quantitativa, hanno caratteri fondamentali uguali. Provengono delle seguenti località: Rio dell'Ancoraggio nel Seno Pigafetta, Barra del Porto Sicurezza, Baia Ainsworth, Cima Sella ecc. Sono rocce nettamente scistose, lucenti, di un colore variabile, secondo i varii campioni, dal grigio-chiaro, al grigio-verdastro, al grigio-nero.

Al microscopio mostrano tutte un fitto e intimo aggregato di granuli di quarzo con squame di una mica incolora, chiara o appena verdognola, da ritenersi come sericite. Le quantità relative di questi due componenti principali sono variabili, come anche variabili sono quelle dei due accessorî costanti, che sono un minerale cloritico e una sostanza carboniosa non meglio determinabile. La struttura è quella delle filladi tipiche (scisti sericitici o filliti sericitiche).

In qualche varieta si trovano nella massa filladica granuli o cristalletti di quarzo e di feldspato, i quali segnano un termine di passaggio a quei tipi di paragneiss precedentemente descritti.

Una varietà del Rio Ancoraggio nel Seno Pigafetta, per l'abbondanza di clorite, può definirsi come uno *scisto sericitico-cloritico*, mentre alcune delle Baia Ainsworth, per la copia delle sostanza carboniosa, sono delle vere *filladi carboniose*.

Quarziti.

Loc. Sponda S-O del Seno Pigafetta, Baia..... — Rocce granulari scistose, con poco materiale lamellare bigio-verde lucente.

L'esame microscopico dimostra che si tratta di rocce affini alle precedenti, nelle quali peraltro il materiale lamellare sericitico o cloritico è in quantità assai subordinata a quella del quarzo in aggregato granulare, che

ne costituisce la parte essenziale. Per l'andamento e la disposizione in strati paralleli del materiale lamellare, queste rocce sono da ascriversi alle quarziti scistose tipiche.

Scisto anfibolico.

Loc. Morena frontale del ghiacciaio Negri. — Roccia grigio-verde scura, a grana fina e nettamente scistosa.

Distinguo dalle anfiboliti, seguendo il Rosenbusch, questa varietà di roccia, perchè all'esame microscopico mostra assoluta assenza di feldspato. Elemento predominante è l'anfibolo (orneblenda normale) in distinti cristalli prismatici con lo schema d'assorbimento normale e sui toni $\mathfrak{a}$ verde-gialliccio chiaro, $\mathfrak{b}$ verde, $\mathfrak{c}$ verde-azzurrognolo. L'angolo $c\,\mathfrak{c}$ risulta in media di 15°; notisi peraltro che qualche misura mi ha dato valori intorno ai 25°. Meno abbondante è il quarzo in aggregato granulare xenomorfo; rari sono magnetite, apatite e zircone.

Anfiboliti.

Loc. Seno tranquillo, Fiord Negri. — In questa località si trovano tre varietà di anfiboliti di color grigio-verde, diverse fra loro per tessitura esterna più o meno granulare, tutte con scistosità poco evidente.

Le differenze sono confermate dall'esame microscopico: e ciò non deve recar meraviglia, qualora si rifletta che sono proprie di tali rocce variazioni locali di struttura e di composizione anche in un campo assai ristretto.

Gli elementi essenziali sono anfibolo e feldspato calcico-sodico; accessorî in ordine di frequenza si riscontrano biotite, quarzo, clorite, epidoto, muscovite, granato, ilmenite.

L'anfibolo è quasi sempre prevalente, e si presenta, secondo i varî campioni, in elementi più grandi o più piccoli, sempre però nettamente idiomorfi. Appartiene alla comune orneblenda, con i seguenti caratteri: $\mathfrak{c} \overset{=}{>} \mathfrak{b} > \mathfrak{a}$; $\mathfrak{c}$ verde-grigio scuro, $\mathfrak{a}$ verde-gialliccio; $c\,\mathfrak{c} = 15°$ circa.

Il feldspato calcico-sodico è per lo più allotriomorfo rispetto all'anfibolo, alcuni cristalli del quale sono nettamente inclusi nel feldspato. Dove le geminazioni sono distinte, e talora anche con le due leggi albite e Carlsbad, è possibile una esatta determinazione, che porta ad una andesina basica con circa 45 % di An.

Il quarzo non frequente, e in quantità sparsa e variabile, si presenta, oltrechè in granuli, anche in imperfette sferoliti ed in taluni caratteristici aggregati mirmekitici con il feldspato.

La biotite si trova in poche lamine di dimensioni abbastanza grandi, con pleocroismo minore del normale e sulle tinte giallo-verdi per incipiente cloritizzazione.

Rara assai la muscovite.

Elemento accessorio caratteristico è il granato di color giallo-chiaro, in granuli tondeggianti piuttosto che in netti cristalli. L'epidoto è in rari granuli, quasi incolori.

Infine gli ossidi di ferro, in gran parte ilmenite, si trovano in quantità assai variabile da campione a campione.

Fisiologia. — *Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci di animali omeotermi.* Nota VI: *Il fenomeno dell'addizione di due contrazioni successive indagato nel preparato diaframmatico*, del Corrispondente F. Bottazzi.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Su di una reciprocità tra deformazioni e distorsioni.* Nota di G. Colonnetti, presentata dal Socio V. Volterra.

In una classica serie di Memorie sull'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi, il prof. Volterra ha dimostrato la possibilità di creare, in essi, degli stati di equilibrio differenti dallo stato naturale, senza l'intervento di alcuna forza esterna, mediante certe operazioni a cui Egli ha dato il nome di *distorsioni* (1).

È noto che tra i due sistemi di sforzi generati da due dati sistemi di distorsioni sussiste una reciprocità affatto analoga a quella che il Betti ha stabilita fra i due sistemi di spostamenti che derivano da due dati sistemi di forze esterne (2).

Io mi propongo qui di dimostrare che una reciprocità esiste pure fra il sistema delle tensioni interne prodotte da una data sollecitazione esterna ed il sistema degli spostamenti che nello stesso corpo elastico vengono determinati da una data distorsione.

(1) V. Volterra, *Un teorema sulla teoria della elasticità* (Rend. R. Accademia dei Lincei, 5ª serie, vol. XIV); *Sull'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi* (ibid., (5ª serie, vol. XIV); *Sulle distorsioni dei solidi elastici più volte connessi* (ibid., 5ª serie, vol. XIV); *Sulle distorsioni dei corpi elastici simmetrici* (ibid., 5ª serie, vol. XIV); *Contributo allo studio delle distorsioni dei solidi elastici* (ibid., 5ª serie, vol. XIV); *Sulle distorsioni generate da tagli uniformi* (ibid., 5ª serie, vol. XIV); *Nuovi studii sulle distorsioni dei solidi elastici* (ibid., 5ª serie, vol. XV); *Sull'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi* (Il nuovo Cimento, 5ª serie, vol. X e XI); *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes* (Ann. éc. norm., 3, tom. XXIV).

(2) Cfr. ad es. V. Volterra, *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes* (Ann. éc. norm., 3, tom. XXIV) a pag. 432 e seg.

Sia S lo spazio, connesso — in generale, anzi, a connessione multipla, — occupato da un corpo elastico in equilibrio sotto l'azione di un dato sistema di forze esterne. Indicheremo con Σ la superficie, chiusa, che lo limita, e con σ un diaframma arbitrariamente tracciato attraverso quello spazio, cioè una superficie contenuta tutta entro S, la quale non seghi se stessa ed abbia il suo contorno su Σ.

Se si immagina, lungo quel diaframma, operato un taglio nel corpo elastico dato, il primitivo stato di equilibrio di questo si può conservare, dopo il taglio, immutato se si immaginano applicate alle due faccie del taglio due distribuzioni di forze, ovunque equivalenti alle tensioni interne che nel corpo dato inizialmente si trasmettevano attraverso la superficie σ.

Detto φ il potenziale elastico unitario, ed indicate con

$$X, Y, Z$$

le componenti secondo tre assi coordinati della forza esterna applicata all'elemento generico di volume dS, riferite all'unità di volume, e con

$$X_n, Y_n, Z_n$$

le analoghe componenti, riferite all'unità di area, della pressione applicata all'elemento generico di normale n delle superfici Σ e σ, le condizioni di equilibrio si riassumono notoriamente nella relazione

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} 0 = & \int_S \delta\varphi \,.\, dS + \int_S (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)\, dS + \\ & + \int_\Sigma (X_n\delta u + Y_n\delta v + Z_n\delta w)\, d\Sigma + \\ & + \int_\sigma [X_n(\delta u_\alpha - \delta u_\beta) + Y_n(\delta v_\alpha - \delta v_\beta) + Z_n(\delta w_\alpha - \delta w_\beta)]\, d\sigma \end{aligned} \right.$$

nella quale

$$\delta u, \delta v, \delta w$$

stanno a denotare le componenti, secondo gli stessi assi, dello spostamento di un punto generico di S o di Σ *in una qualsiasi deformazione possibile del corpo elastico* TAGLIATO;

$$\delta u_\alpha, \delta v_\alpha, \delta w_\alpha$$

e

$$\delta u_\beta, \delta v_\beta, \delta w_\beta$$

essendo i valori di

$$\delta u, \delta v, \delta w$$

relativi ad un punto generico di σ considerato come appartenente rispetti-

vamente all'una ovvero all'altra faccia del taglio. Più precisamente, assunta al solito come positiva la direzione della normale a Σ che è rivolta verso l'interno di S, si dovranno intendere contraddistinte coll'indice α le componenti dello spostamento di un punto di σ se lo si considera come appartenente a quella faccia del taglio rispetto a cui la normale a σ entra in S, e coll'indice β quelle relative allo stesso punto considerato come appartenente all'altra faccia del taglio rispetto a cui la normale a σ esce da S.

Noi supporremo che il moto relativo delle due faccie del taglio sia un semplice moto rigido nello spazio: cioè che

$$\delta u_\alpha - \delta u_\beta = l' + q'z - r'y$$
$$\delta v_\alpha - \delta v_\beta = m' + r'x - p'z$$
$$\delta w_\alpha - \delta w_\beta = n' + p'y - q'x.$$

con l', m', n', p', q', r', costanti.

La variazione di configurazione che il corpo elastico subisce è allora, in generale, una distorsione di Volterra. di cui

$$l', m', n', p', q', r'$$

sono le caratteristiche. Fa eccezione soltanto il caso in cui, per opera del taglio praticato secondo σ, lo spazio S avesse cessato di essere connesso: in questo caso il fenomeno si riduce ovviamente ad un semplice spostamento rigido di una delle due porzioni in cui il corpo è rimasto diviso rispetto all'altra.

Comunque stiano le cose, dette

$$u', v', w'$$

le componenti dello spostamento così determinato in un punto generico di S o di Σ, e posto, al solito,

$$x'_x = \frac{\partial u'}{\partial x} \qquad y'_z = \frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z}$$
$$y'_y = \frac{\partial v'}{\partial y} \qquad z'_x = \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x}$$
$$z'_z = \frac{\partial w'}{\partial z} \qquad x'_y = \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y}$$

la (1) si trasforma facilmente nella relazione

$$(2)\ \begin{cases} \int_S (Xu' + Yv' + Zw')\, dS + \int_\Sigma (X_n u' + Y_n v' + Z_n w')\, d\Sigma + \\ + \int_\sigma [X_n(l' + q'z - r'y) + Y_n(m' + r'x - p'z) + Z_n(n' + p'y - q'x)]\, d\sigma = \\ = -\int_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_x} x'_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y_y} y'_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z_z} z'_z + \frac{\partial \varphi}{\partial y_z} y'_z + \frac{\partial \varphi}{\partial z_x} z'_x + \frac{\partial \varphi}{\partial x_y} x'_y \right) dS \end{cases}$$

che noi scriveremo sotto la forma

$$
(2')\left\{\begin{aligned}
&\int_S (Xu' + Yv' + Zw')\, dS + \int_\Sigma (X_n u' + Y_n v' + Z_n w')\, d\Sigma + \\
&+ Ll' + Mm' + Nn' + Pp' + Qq' + Rr' = \\
&= -\int_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_x} x'_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y_y} y'_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z_z} z'_z + \frac{\partial \varphi}{\partial y_z} y'_z + \frac{\partial \varphi}{\partial z_x} z'_x + \frac{\partial \varphi}{\partial x_y} x'_y \right) dS
\end{aligned}\right.
$$

denotando, per brevità, con

$$
\begin{aligned}
L &= \int_\sigma X_n\, d\sigma & P &= \int_\sigma (Z_n y - Y_n z)\, d\sigma \\
M &= \int_\sigma Y_n\, d\sigma & Q &= \int_\sigma (X_n z - Z_n x)\, d\sigma \\
N &= \int_\sigma Z_n\, d\sigma\ , & R &= \int_\sigma (Y_n x - X_n y)\, d\sigma
\end{aligned}
$$

le sei caratteristiche del sistema di tensioni interne relative a σ.

Ora è facile dimostrare che il secondo membro di questa equazione è identicamente nullo.

L'asserto è evidente nel caso in cui le u', v', w' individuano un semplice moto rigido nello spazio, perchè allora si ha, in ogni punto di S,

$$x'_x = y'_y = z'_z = y'_z = z'_x = x'_y = 0\,.$$

Nel caso generale, in cui si verifica la distorsione propriamente detta, si può osservare che, per l'equilibrio, deve riescire soddisfatta una equazione del tipo (1) per forze nulle così in S come su Σ, e per variazioni δu, δv, δw, affatto qualunque. Ora se tali variazioni si prendono precisamente eguali agli spostamenti u, v, w che nel sistema elastico dato sono prodotti dal dato sistema di forze esterne, siccome in ogni punto di σ riesce

$$\delta u_\alpha = \delta u_\beta \quad , \quad \delta v_\alpha = \delta v_\beta \quad , \quad \delta w_\alpha = \delta w_\beta$$

quella equazione si riduce a

$$0 = \int_S \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x'_x} x_x + \frac{\partial \varphi'}{\partial y'_y} y_y + \frac{\partial \varphi'}{\partial z'_z} z_z + \frac{\partial \varphi'}{\partial y'_z} y_z + \frac{\partial \varphi'}{\partial z'_x} z_x + \frac{\partial \varphi'}{\partial x'_y} x_y \right) dS\,,$$

e poichè, per una nota proprietà delle forme quadratiche,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi'}{\partial x'_x} x_x + \frac{\partial \varphi'}{\partial y'_y} y_y + \frac{\partial \varphi'}{\partial z'_z} z_z + \frac{\partial \varphi'}{\partial y'_z} y_z + \frac{\partial \varphi'}{\partial z'_x} z_x + \frac{\partial \varphi'}{\partial x'_y} x_y = \\
&\qquad = \frac{\partial \varphi}{\partial x_x} x'_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y_y} y'_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z_z} z'_z + \frac{\partial \varphi}{\partial y_z} y'_z + \frac{\partial \varphi}{\partial z_x} z'_x + \frac{\partial \varphi}{\partial x_y} x'_y
\end{aligned}
$$

se ne conclude che

$$\int_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_x} x'_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y_y} y'_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z_z} z'_z + \frac{\partial \varphi}{\partial y_z} y'_z + \frac{\partial \varphi}{\partial z_x} z'_x + \frac{\partial \varphi}{\partial x_y} x'_y \right) dS = 0$$

come si voleva dimostrare.

La (2') assume pertanto la forma caratteristica

$$(3) \qquad \begin{cases} \int_S (Xu' + Yv' + Zw')\, dS + \int_\Sigma (X_n u' + Y_n v' + Z_n w')\, d\Sigma + \\ + Ll' + Mm' + Nn' + Pp' + Qq' + Rr' = 0 \end{cases}$$

la quale esprime il teorema:

« La somma dei prodotti delle sei caratteristiche del sistema di tensioni interne che in un corpo elastico in equilibrio si sviluppano in corrispondenza di una data sezione, per le corrispondenti caratteristiche di una distorsione, è eguale e contraria al lavoro che le forze esterne, applicate al corpo stesso, eseguirebbero nel cambiamento di configurazione a cui quella distorsione darebbe origine ».

Se si introduce il concetto di *distorsione unitaria negativa*, chiamando così ogni distorsione le cui caratteristiche siano tutte nulle, eccezion fatta soltanto per una, a cui si attribuisce il valore fisso —1, si può enunciare il teorema sotto la forma:

« Ciascuna delle sei caratteristiche del sistema di tensioni interne, che in un corpo elastico in equilibrio si sviluppano in corrispondenza di una data sezione, è misurata dal lavoro che le forze esterne applicate al corpo eseguirebbero qualora su questo si operasse la corrispondente distorsione unitaria negativa »

Così espresso, il teorema non è nuovo: chi scrive aveva già cercato di darne una dimostrazione generale in una breve Nota che ha avuto tre anni or sono l'onore di comparire in questi stessi Rendiconti [1].

E già molti anni prima, il principio, qui espresso nella sua forma più generale, era stato in qualche caso particolare intuito, ed applicato utilmente alla risoluzione di qualche problema di equilibrio iperstatico [2].

In una prossima Nota io mi propongo di precisare la portata di queste applicazioni mettendo in evidenza in qual modo la dimostrata reciprocità fra deformazioni e distorsioni riconnetta alla teoria del Volterra alcuni fra i più importanti capitoli della scienza delle costruzioni.

[1] G. Colonnetti, *Sul principio di reciprocità* (Rend. R. Accademia dei Lincei, 5ª serie, vol. XXI); cfr. anche: *Introduzione teorica ad un corso di statica dei corpi elastici* (lez. litogr., Genova 1912); *Sul principio di reciprocità* (Giorn. del genio civile, 1913).

[2] Cfr. ad es. W. Ritter, *Anwendungen der graphischen Statik*, Dritter Teil, Zürich 1900, pp. 89 e seg.

Meccanica. — *Sulle vibrazioni di una corda elastica in un mezzo resistente.* Nota II del dott. FRANCESCO SBRANA, presentata dal Corrisp. O. TEDONE.

6. Ci occuperemo ora brevemente delle verifiche alle quali abbiamo innanzi accennato.

Per adoperare formule non molto complicate, possiamo supporre dapprima $f(\xi)=0$. Sostituendo, in questa ipotesi, nella (8), il valore di $\varphi(\eta)$ dato dalla (8'), troviamo l'equazione:

$$\int_0^{\eta_0} F(\xi) \Big\{ I_0(\eta_0-\xi) - I_0\left(\sqrt{\eta_0^2-\xi^2}\right) - \\ - \int_\xi^{\eta_0} I_0(\eta_0-\eta) \frac{\partial}{\partial\xi} I_0\left(\sqrt{\eta^2-\xi^2}\right) d\eta \Big\} d\xi = 0$$

nella quale $F(\xi)$ è una funzione arbitraria. Dev'essere dunque:

$$\int_\xi^{\eta_0} I_0(\eta_0-\eta) \frac{\partial}{\partial\xi} I_0\left(\sqrt{\eta^2-\xi^2}\right) d\eta = I_0(\eta_0-\xi) - I_0\left(\sqrt{\eta_0^2-\xi^2}\right). \tag{12}$$

Allo stesso risultato si giunge quando si passa a verificare che il valore di $\varphi(\eta)$ dato dalla (9') soddisfa alla (9).

Supponiamo ora che le (10), (10') siano scritte per η_0 compreso tra l e $2l$, ritenendo sempre $f(\xi)=0$. Sostituiamo, nella (10), a $\varphi(\eta)$, dove questa funzione compare con $\eta < l$, l'espressione data dalla (8'), e dove compare con η compreso tra l e $2l$, il valore dato dalla (10'). Nella identità che ne deve risultare, una parte contiene esplicitamente la sola $F(\xi)$, la parte rimanente contiene esplicitamente la sola $\psi(\eta)$. L'espressione che contiene la sola $F(\xi)$ è la seguente:

$$-\int_0^l I_0(\eta_0-\eta) \Big\{ F(\eta) - \int_0^\eta F(\xi) \frac{\partial}{\partial\xi} I_0\left(\sqrt{\eta^2-\xi^2}\right) d\xi \Big\} d\eta + \\ + \int_0^l F(\xi)\, I_0\left(\sqrt{\eta_0^2-\xi^2}\right) d\xi + \\ + \int_l^{\eta_0} I_0(\eta_0-\eta)\, d\eta \int_0^l F(\xi) \frac{\partial}{\partial\xi} I_0\left(\sqrt{\eta^2-\xi^2}\right) d\xi ,$$

e si trova subito che si annulla, quando si ritenga valida la (12). Infatti, con qualche semplice scambio di integrazioni, essa si può trasformare nell'altra:

$$\int_0^l F(\xi) \Big\{ I_0\left(\sqrt{\eta_0^2 - \xi^2}\right) - I_0(\eta_0 - \xi) +$$
$$+ \int_\xi^{\eta_0} I_0(\eta_0 - \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} I_0\left(\sqrt{\eta^2 - \xi^2}\right) d\eta \Big\} d\xi \,.$$

L'espressione che contiene esplicitamente la sola $\psi(\eta)$ si scrive:

$$- \int_l^{\eta_0} I_0(\eta_0 - \eta)\, \psi(\eta - l)\, d\eta -$$
$$- l \int_l^{\eta_0} I_0(\eta_0 - \eta)\, d\eta \int_0^{\eta - l} \frac{I_0\left(\sqrt{(\xi - \eta)^2 - l^2}\right)}{\sqrt{(\xi - \eta)^2 - l^2}} \psi(\xi)\, d\xi +$$
$$+ \int_0^{\eta_0 - l} I_0\left(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - l^2}\right) \psi(\eta)\, d\eta \,,$$

e, per quanto abbiamo ora dimostrato, deve per proprio conto annullarsi. Mutando, nei primi due integrali, η in $\eta - l$, e facendo nel secondo uno scambio di integrazioni, troviamo che deve sussistere l'equazione:

$$\int_0^{\eta_0 - l} \psi(\eta) \Big\{ I_0\left(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - l^2}\right) - I_0(\eta_0 - \eta - l) -$$
$$- l \int_\eta^{\eta_0 - l} \frac{I_1\left(\sqrt{(\eta - \xi - l)^2 - l^2}\right)}{\sqrt{(\eta - \xi - l)^2 - l^2}} I_0(\eta_0 - \xi - l)\, d\xi \Big\} d\eta = 0 \,,$$

e poichè in essa $\psi(\eta)$ è una funzione arbitraria, deve aver luogo l'identità

$$(13) \qquad l \int_\eta^{\eta_0 - l} \frac{I_1\left(\sqrt{(\eta - \xi - l)^2 - l^2}\right)}{\sqrt{(\eta - \xi - l)^2 - l^2}} I_0(\eta_0 - \xi - l)\, d\xi =$$
$$= I_0\left(\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 - l^2}\right) - I_0(\eta_0 - \eta - l) \,.$$

Alla stessa formula si perviene, quando si fa l'analoga verifica per $\psi(\eta)$, essendo η compreso tra l e $2l$, e per $\varphi(\eta)$ e $\psi(\eta)$, essendo η compreso in uno degli intervalli successivi. Se supponessimo $F(\xi) = 0$, otterremmo le relazioni che si hanno anche dalle (12), (13), derivando ambo i membri rapporto a η_0.

7. Passiamo ora a dimostrare le identità (12), (13). La identità (12) è una conseguenza immediata delle altre due:

$$(14) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \frac{I_1(x_0 - x)\, I_0(x_1 - x)}{x_0 - x}\, dx = I_1(x_1 - x_0) \\ \displaystyle\int_r^{t_1} \frac{I_1(t_1 - t)}{t_1 - t} I_0\left(\sqrt{t^2 - r^2}\right) dt = \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial r}\right) I_0\left(\sqrt{t_1^2 - r^2}\right) \end{cases}$$

dimostrate dal prof. Tedone (1). Infatti, la seconda di queste relazioni, mutando in essa r in ξ, e t_1 in η, si può scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial\xi} \mathrm{I}_0\left(\sqrt{\eta^2-\xi^2}\right) = \int_\xi^\eta \frac{\mathrm{I}_1(\eta-t)}{r-t} \mathrm{I}_0\left(\sqrt{t^2-\xi^2}\right) dt - \frac{\partial}{\partial\eta} \mathrm{I}_0\left(\sqrt{\eta^2-\xi^2}\right),$$

Moltiplichiamo ambo i membri per $\mathrm{I}_0(\eta_0-\eta)\,d\eta$, e integriamo rapporto a η tra i limiti ξ e η_0; tenendo conto della prima delle (14) otteniamo subito la (12).

Per dimostrare la (13), possiamo osservare che si ha:

$$\int_\eta^{\eta_0-l} \left\{ \mathrm{I}_0\left(\sqrt{(\eta-\xi-l)^2-l^2}\right) \frac{\partial}{\partial\xi} \mathrm{I}_0(\eta_0-\xi-l) + \right.$$
$$\left. + \mathrm{I}_0(\eta_0-\xi-l) \frac{\partial}{\partial\xi} \mathrm{I}_0\left(\sqrt{(\eta-\xi-l)^2-l^2}\right) \right\} d\xi =$$
$$= \mathrm{I}_0\left(\sqrt{(\eta-\eta_0)^2-l^2}\right) - \mathrm{I}_0(\eta_0-\eta-l),$$

ovvero, eseguendo le derivazioni sotto l'integrale a primo membro:

$$-\int_\eta^{\eta_0-l} \left\{ \mathrm{I}_0\left(\sqrt{(\eta-\xi-l)^2-l^2}\right) \mathrm{I}_1(\eta_0-\xi-l) + \right.$$
$$\left. + \mathrm{I}_0(\eta_0-\xi-l) \frac{\mathrm{I}_1\left(\sqrt{(\eta-\xi-l)^2-l^2}\right)}{\sqrt{(\eta-\xi-l)^2-l^2}} (\eta-\xi-l) \right\} d\xi =$$
$$= \mathrm{I}_0\left(\sqrt{(\eta-\eta_0)^2-l^2}\right) - \mathrm{I}_0(\eta_0-\eta-t).$$

È quindi evidente che la (13) è conseguenza dell'altra:

$$\int_\eta^{\eta_0-l} \left\{ \mathrm{I}_0\left(\sqrt{(\eta-\xi-l)^2-l^2}\right) \mathrm{I}_1(\eta-\xi-l) + \right.$$
$$\left. + \mathrm{I}_0(\eta_0-\xi-l) \frac{\mathrm{I}_1\left(\sqrt{(\eta-\xi-l)^2-l^2}\right)}{\sqrt{(\eta-\xi-l)^2-l^2)}} (\eta-\xi) \right\} d\xi = 0. \tag{15}$$

È più agevole forse verificare quest'ultima relazione della prima, e tale verifica si conduce a termine facilmente, partendo dallo sviluppo in serie delle funzioni di Bessel che compaiono sotto l'integrale a primo membro, e seguendo la stessa dimostrazione della seconda delle (14) data dal professore Tedone.

8. Si può notare che i precedenti risultati si estendono senza difficoltà al caso in cui gli estremi della corda, invece di essere fissi, si muovano secondo leggi assegnate. Le equazioni integrali, da cui dipendono le funzioni incognite, sono della stessa forma, solo i termini noti risultano modificati; ed alla loro soluzione si può arrivare con lo stesso metodo precedente.

(1) Ved., *Sulla integrazione* ecc. questi Rendiconti, seduta 31 maggio 1913; *Sulla espressione analitica dell'integrale generale dell'equazione delle onde smorzate,* seduta 18 gennaio 1914.

Matematica. — *Sugli integrali abeliani riducibili.* Nota I di Gaetano Scorza, presentata dal Corrisp. G. Castelnuovo.

Due (*) sono i teoremi classici sugli integrali abeliani ([1]) riducibili a cui han condotto e nei quali si raccolgono ricerche ben note di Weierstrass, Picard e Poincaré. L'uno (che dal nome di chi gli dette la più ampia portata diremo *teorema* di Poincaré) afferma che se una varietà algebrica di irregolarità superficiale p ammette un sistema di q integrali (semplici, di 1ª specie) riducibili con $2q$ periodi ridotti, ammette anche un sistema di $p-q$ integrali riducibili con $2(p-q)$ periodi ridotti, i due sistemi costituendo insieme un sistema di p integrali linearmente indipendenti: l'altro stabilisce che se una varietà algebrica ammette μ integrali ellittici linearmente dipendenti ($\mu \geq 3$) ne ammette senz'altro un'infinità discontinua.

Di questo secondo teorema il Severi ha dato recentemente ([2]) una elegante dimostrazione geometrica e un'ampia generalizzazione, facendo ricorso al primo, a un risultato di Castelnuovo e a due sue notevoli osservazioni sul sistema congiungente e sul sistema intersezione di due sistemi regolari di integrali riducibili appartenenti a una stessa varietà algebrica; quanto al primo è ormai classica la bella dimostrazione geometrica che ne dette il Castelnuovo nelle sue ricerche sugli integrali semplici delle superficie algebriche irregolari ([3]).

Nel considerare le conseguenze a cui conduce il teorema di Poincaré per le funzioni abeliane a un numero qualunque di variabili semplicemente singolari, ho visto che, per far perdere ad esse un certo apparente aspetto di poca plausibilità, occorreva stabilire un legame fra quel teorema e le relazioni bilineari a coefficienti interi che legano i periodi di due integrali semplici di 1ª specie appartenenti a una stessa varietà algebrica qualsiasi.

(*) Avevo già spedito (16 febbraio u. s.) il manoscritto di questo lavoro al prof. Castelnuovo per la presentazione all'Accademia, quando ho saputo che il prof. Rosati stava preparando una Nota sullo stesso argomento, procedendo in un modo che presenta qualche punto di contatto col mio. La sua Nota esce contemporaneamente a questa negli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino

([1]) Qui adoperiamo la frase integrali abeliani in un senso un po' più generale dell'ordinario, come risulta chiaramente dal contesto del discorso.

([2]) Severi, *Sugli integrali abeliani riducibili* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (5), vol. XXIII, 1914, 1° sem. pp. 581 e 641).

([3]) Castelnuovo, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (5), vol. XIV, 1905, pp. 545, 593, 655), pag. 596.

Utilizzando l'idea che mi ha condotto già, per via rapida e spontanea, al teorema di Humbert sulle funzioni iperellittiche singolari ([4]) e che, come mostrerò altrove, porta anche alla sua completa generalizzazione, mi sono imbattuto così in un procedimento che non solo fornisce con tutta chiarezza l'espressione di quel legame quanto mai intimo e semplice, ma ritrova il teorema di Poincaré e le due osservazioni del Severi per una via agevole e piana: anzi, essa potrebbe dirsi al tutto elementare se in un punto (che, per altro, è essenziale) non fosse necessario far ricorso al teorema di esistenza delle funzioni abeliane nella forma che gli detti due anni fa ([5]).

Partendo da un determinato sistema primitivo di cicli lineari sulla riemanniana della assegnata varietà algebrica di irregolarità superficiale p, rappresento omograficamente il sistema lineare dei suoi integrali semplici di 1ª specie sui punti di un S_{p-1} imaginario immerso in un S_{2p-1} reale; cerco di caratterizzare gli spazi rispondenti ai sistemi regolari di integrali riducibili appartenenti alla varietà, e trovo che essi sono gli S_{q-1} $(o<q<p)$ dell'S_{p-1} per cui passano (eventualmente) degli S_{2q-1} *razionali* dello spazio ambiente.

Da questo punto di vista, le relazioni bilineari fra i periodi degli integrali si traducono subito in sistemi nulli *razionali* che hanno uno spazio unito (o *totale*) in quell'S_{p-1} e nello spazio imaginario coniugato $\overline{S}_{p-1}$; e poichè di quelle relazioni, qualunque sia la varietà considerata, ne esiste sempre almeno una, restano collegati al prescelto sistema primitivo di cicli lineari uno o infiniti sistemi nulli razionali, costituenti in ogni caso una totalità assimilabile a quella dei punti razionali di un conveniente spazio lineare (di dimensione $\leq p^2-1$).

Tra questi sistemi nulli chiamo *principali* quelli che provengono dalle relazioni bilineari soddisfacenti alla nota diseguaglianza di Riemann e dimostro, come di dovere, che questa nozione (com'è facile prevedere *a priori*) ha carattere invariante rispetto al cangiamento del sistema primitivo di cicli lineari.

Ciò posto, si vede subito che se tra quei sistemi nulli ve n'è uno singolare di specie $2q$, il suo S_{2q-1} singolare dà luogo per la varietà all'esistenza di un sistema regolare di q integrali riducibili con $2q$ periodi ridotti.

L'utilizzazione di questo fatto, che poi risulta invertibile, e della corrispondenza stabilita da un sistema nullo fra gli S_{2q-1} e gli $S_{2(p-q)-1}$ dello spazio ambiente, conduce allora, con qualche altra osservazione nuova, al teorema di Poincaré e fornisce il legame richiesto fra la presenza di sistemi

([4]) Scorza, *Sulle funzioni iperellittiche singolari* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (5), vol. XXIII, 1914, 2° sem., pag. 566).

([5]) Scorza, *Sul teorema di esistenza delle funzioni abeliane* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tom. XXXVI, 1913, 2° semestre).

regolari riducibili e le particolarità delle relazioni bilineari a cui soddisfano i periodi degli integrali (semplici di 1ª specie) appartenenti alla varietà algebrica considerata.

Precisamente, la presenza di un sistema regolare di integrali riducibili è rivelata dall'abbassarsi della *caratteristica* di qualcuna di quelle relazioni bilineari, la caratteristica di una relazione bilineare generica essendo data sempre dal doppio dell'irregolarità della varietà.

1. Siano $u_1, u_2, \dots u_p$ p integrali semplici di 1ª specie indipendenti di una varietà algebrica V_p, di irregolarità superficiale p (che, volendo, si può supporre una varietà di Jacobi o di Picard), e sia

$$(\mathrm{I}) \qquad \left| \begin{matrix} \omega_{1,1} & \omega_{1,2} & \dots & \omega_{1,2p} \\ \omega_{2,1} & \omega_{2,2} & \dots & \omega_{2,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{p,1} & \omega_{p,2} & \dots & \omega_{p,2p} \end{matrix} \right|$$

la tabella dei loro periodi corrispondenti a un determinato sistema primitivo di $2p$ cicli lineari della riemanniana di V_p.

In uno spazio Σ a $2p-1$ dimensioni, nel quale sia fissato un sistema di coordinate proiettive omogenee, diciamo ω_j $(j = 1, 2 \dots p)$ il punto che ha per coordinate

$$(1) \qquad \omega_{j,1}, \omega_{j,2}, \dots \omega_{j,2p},$$

e $\bar{\omega}_j$ il punto che ha per coordinate le quantità complesse coniugate delle (1)

$$\bar{\omega}_{j,1}, \bar{\omega}_{j,2} \dots \bar{\omega}_{j,2p}.$$

Poi indichiamo con τ lo spazio determinato dai punti $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_p$ e con $\bar{\tau}$ quello che congiunge i punti $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots \omega_p$.

Poichè il determinante formato con le coordinate dei punti ω_j e $\bar{\omega}_j$ si riduce, a meno di un fattore numerico (non nullo), a quello formato con le parti reali e i coefficienti dell'imaginario i degli elementi della (I) ([6]), esso è, per un noto teorema ([7]), diverso da zero e quindi i due spazi τ e $\bar{\tau}$ sono due S_{p-1} (imaginari coniugati) indipendenti ([8]).

([6]) Scorza, loc. cit.[5], n. 4, nota[7] a pie' di pagina.

([7]) Vedi per es. Krazer, *Lehrbuch der Thetafunktionem* (Teubner, 1903), pag. 111.

([8]) Dal fatto che lo spazio τ è imaginario segue subito il lemma che Severi stabilisce nel n. 2 della sua Memoria: *Le corrispondenze fra i punti di una curva variabile in un sistema lineare sopra una superficie algebrica* (Mathematische Annalen, Bd. 74, 1913, pag. 515) generalizzando una osservazione di Klein-Fricke (*Vorlesungen über die Theorie des elliptischen Modulfunktionen*, Teubner, 1892, Bd. II, pag. 540).

Ogni sistema lineare A, di dimensione $q-1$, di integrali semplici di 1ª specie di V_p si riflette in uno spazio lineare α di τ, avente la stessa dimensione.

Diremo che α è l'*imagine* di A, e lo spazio $\bar{\alpha}$ di $\bar{\tau}$, imaginario coniugato di α, si dirà l'*imagine coniugata* di A.

2. Si osservi che lo spazio τ fornisce coi suoi punti una rappresentazione omografica del sistema lineare ∞^{p-1} degli integrali semplici di 1ª specie di V_p, appena si faccia corrispondere a uno di questi integrali (determinato, naturalmente, a meno di una costante *moltiplicativa* e di una costante *additiva*) il punto di τ che ha per coordinate i suoi $2p$ periodi relativi al fissato sistema primitivo di cicli lineari di V_p.

La posizione di τ (e quindi di $\bar{\tau}$) in Σ dipende dunque non dalla scelta degli integrali $u_1, u_2 \dots u_p$, ma da quella del sistema primitivo di cicli lineari sulla riemanniana di V_p. E, per fatti ben noti, il mutamento di quest'ultima scelta porta soltanto a cambiare τ e $\bar{\tau}$ con due spazi di Σ che possano dedursi da essi con una omografia rappresentata da una sostituzione lineare a coefficienti interi di modulo ± 1; cioè, come diremo, con una omografia unimodulare razionale.

3. Per quanto si tratti di cose semplici e note, rammentiamo, per la chiarezza dell'esposizione, che un S_k di Σ si dice *razionale* se coincide con Σ o, altrimenti, se i mutui rapporti delle sue coordinate, definite nel solito modo della geometria proiettiva iperspaziale, sono numeri razionali; di guisa che, in questo secondo caso, le sue coordinate si possono sempre supporre a dirittura intere.

Un S_k che contenga $k+1$ punti indipendenti razionali, o che appartenga a $2p-1-k$ iperpiani razionali indipendenti è un S_k razionale; viceversa, un S_k razionale contiene sempre un tal gruppo di punti razionali (se $k>0$ ne contiene, anzi, infiniti) e sta sempre in un tal gruppo di iperpiani razionali (anzi in infiniti, se $k<2p-2$).

Evidentemente lo spazio congiungente e lo spazio intersezione di due spazi razionali di Σ sono anch'essi degli spazi razionali ([9]).

Un sistema nullo dello spazio Σ, rappresentato da un'equazione del tipo

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p} a_{r,s}\, y_r\, x_s = 0$$

(dove le x e le y sono le coordinate di due punti qualunque di Σ coniugati rispetto al sistema nullo, e le $a_{r,s}$ sono gli elementi di un determinante emisimmetrico d'ordine $2p$), si dirà *razionale* se i mutui rapporti

([9]) Cfr. Rosati, *Sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (5), vol. XXII, 1913, 2° sem., pag. 431), n. 7.

delle $a_{r,s}$ sono numeri razionali, cioè se le $a_{r,s}$ si possono supporre numeri interi.

Lo spazio polare di un S_h razionale rispetto a un sistema nullo razionale è, evidentemente, razionale; e un sistema nullo razionale di Σ, che sia singolare di specie h (dove h è necessariamente pari, una volta che Σ ha dimensione dispari) ([10]), avrà, naturalmente, per spazio singolare (o *centro*, o *asse*) un S_{h-1} razionale.

Infine un sistema nullo di un S_k razionale di Σ si dirà razionale se si può concepire come indotto in S_k da un sistema nullo razionale di Σ.

4. Se i punti di un S_k di Σ sono a due a due coniugati rispetto a un determinato sistema nullo di Σ, cioè, se il complesso lineare, che il sistema nullo definisce, contiene tutte le rette di S_k, diremo col Kantor ([11]), che il sistema nullo o il relativo complesso lineare ha in S_k uno *spazio totale.*

Ricordiamo, a questo proposito, che se un sistema nullo (o complesso lineare) di Σ ha per centro o asse un S_{2l-1}, i suoi spazi totali sono tutti e soli quelli contenuti negli spazi totali di dimensione massima. Questi ultimi sono della dimensione $p+l-1$ e ognuno di essi passa per il centro del sistema nullo (o complesso lineare) considerato ([12]).

5. Ciò premesso, dimostriamo che:

Se la varietà V_p *ammette un sistema* A, ∞^{q-1}, *di integrali riducibili con* $2q$ *periodi ridotti,* l'S_{2q-1} *congiungente le imagini* α *e* $\bar{\alpha}$ *di* A *è uno spazio razionale.*

E infatti se, per fissar le idee, q integrali indipendenti del sistema A sono appunto gli integrali $u_1, u_2, \dots u_q$, indicando con $\Omega_{j,k}$ $(k=1, 2 \dots 2q)$ i periodi ridotti dell'integrale u_j $(j=1, 2 \dots q)$, esistono, per definizione, dei numeri interi $h_{l,k}$ $(l=1, 2 \dots 2p;\ k=1, 2 \dots 2q)$ per cui si ha:

$$\omega_{j,l} = \sum_{k=1}^{k=2q} h_{l,k}\, \Omega_{j,k} \qquad (j=1, 2, \dots q\ ;\ l=1, 2, \dots 2p). \tag{2}$$

Ma allora sarà pure, indicando con $\overline{\Omega}_{j,k}$ la quantità complessa coniugata di $\Omega_{j,k}$,

$$\overline{\omega}_{j,l} = \sum_{k=1}^{k=2q} h_{l,k}\, \overline{\Omega}_{j,k} \qquad (j=1, 2, \dots q\ ;\ l=1, 2, \dots 2p). \tag{3}$$

([10]) Vedi per es. Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* (Pisa, Spoerri, 1902), pag. 105.

([11]) Kantor, *Theorie der linearen Strahlencomplexe im Raume von r Dimensionen* (Crelle's Journal, vol. 118, an. 1897).

([12]) Palatini, *Sui complessi lineari di rette negli iperspazi* (Giornale di Matematiche di Battaglini, vol. XLI, 1903), n. 2.

Or si considerino in Σ i $2q$ punti razionali aventi per coordinate gli elementi delle singole righe della matrice

$$(4)\qquad \left|\begin{matrix} h_{1,1}\;, & h_{2,1}\;, & \dots & h_{2p,1} \\ h_{1,2}\;, & h_{2,2}\;, & \dots & h_{2p,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{1,2q}\;, & h_{2,2q}\;, & \dots & h_{2p,2q} \end{matrix}\right| ;$$

in virtù delle (2) e (3) lo spazio che li congiunge contiene i punti $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_q, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots \bar{\omega}_q$, quindi esso coincide con l'S_{2q-1} congiungente gli spazi α ed $\bar{\alpha}$, e questo è, come volevasi, uno spazio razionale.

Osservazione. — Il ragionamento fatto esclude evidentemente che la caratteristica della matrice (4) possa essere inferiore a $2q$ e quindi esclude, in particolare, che gli elementi di una sua riga possano essere tutti nulli.

Ciò dimostra, incidentalmente, il teorema ben noto che un sistema lineare completo di integrali riducibili non può avere dimensione superiore alla metà del numero dei periodi ridotti, diminuito di 2 ([13]).

Col Severi ([14]), un sistema come il sistema A del teorema precedente si dirà un *sistema regolare* di integrali riducibili.

6. Il ragionamento del numero precedente è senz'altro invertibile, e quindi:

Se esiste in Σ un S_{2q-1} razionale $(q < p)$ appoggiato a τ secondo un S_{q-1} α (e quindi anche a $\bar{\tau}$ secondo l'S_{q-1} $\bar{\alpha}$ imaginario coniugato di α), α è l'imagine di un sistema regolare ∞^{q-1} di integrali riducibili di V_p.

Per brevità di discorso, l'S_{2q-1} razionale che in virtù delle osservazioni fatte vien collegato biunivocamente a un sistema regolare A di integrali riducibili di V_p si dirà l'*asse* di A e si indicherà con A_1.

7. Se L ed M sono, rispettivamente, il sistema lineare intersezione e il sistema lineare congiungente di due sistemi regolari A e B di integrali riducibili di V_p, le imagini λ e μ di L ed M sono, rispettivamente, lo spazio intersezione e lo spazio congiungente delle imagini α e β di A e B; inoltre, attesa l'indipendenza di τ e $\bar{\tau}$, è chiaro che lo spazio intersezione e lo spazio congiungente degli assi A_1 e B_1 di A e B sono, rispettivamente, gli spazi congiungenti λ e μ con i loro spazi imaginari coniugati $\bar{\lambda}$ e $\bar{\mu}$.

Ma poichè A e B son razionali, tali son pure lo spazio secondo cui si intersecano e quello a cui appartengono, dunque:

([13]) Castelnuovo Enriques, *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions* (Annales scientifiques de l'École normale supérieure, tom. XXII, 1906, pag. 339), n. 1; Severi, *Lezioni di Geometria algebrica* (Padova, Draghi, 1908), pag. 338.

([14]) Severi, loc. cit.[2], pag. 582.

Il sistema intersezione e il sistema congiungente di due sistemi regolari di integrali riducibili di V_p sono anch'essi dei sistemi regolari ([15]), *e i loro assi sono, ordinatamente, lo spazio intersezione e lo spazio congiungente degli assi dei due sistemi dati.*

Di qua segue che:

Due sistemi regolari distinti di integrali riducibili di V_p sono certo indipendenti se nessuno dei due contiene un sistema regolare di dimensione inferiore alla propria.

Meccancia. — *Resistenza effettiva e resistenza ohmica.* Nota di A. Signorini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Matematica. — *Sulle soluzioni fondamentali delle equazioni integro-differenziali.* Nota di N. Zeilon, presentata dal Socio V. Volterra.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Un indotto per correnti continue, senza collettore nè contatti striscianti, fondato sulle azioni elettromagnetiche di seconda specie.* Nota di O. M. Corbino o G. C. Trabacchi, presentata dal Socio P. Blaserna.

1. In alcuni lavori antecedenti ([1]), uno di noi ha illustrato una serie di fenomeni anormali che si manifestano quando la corrente elettrica traversa i conduttori metallici sottoposti all'azione di un campo magnetico. Mentre negli effetti comuni delle correnti le due specie di ioni, che trasportano l'elettricità positiva e negativa nei due sensi opposti, esercitano azioni che si sommano, in modo inseparabile, nel totale effetto osservato, la presenza di un campo magnetico, il quale agisce deviando in diversa misura le due correnti ioniche fluenti con diversa velocità, dà origine ad altri fenomeni di tipo differenziale, dei quali era noto fino allora l'effetto Hall.

Si designa sotto questo nome quel fenomeno pel quale in una lamina metallica, sotto l'azione del campo magnetico, le linee di corrente restano, in certe condizioni, inalterate, ma ruotano rispetto ad esse le antiche linee equipotenziali.

([15]) Severi, loc. cit. [2], pp. 584 e 585.

([1]) O. M. Corbino, *Azioni elettromagnetiche dovute agli ioni dei metalli*, N. Cim., vol. I, giugno 1911.

È stato dimostrato [1] che nel caso più generale si modificano insieme le linee di corrente e le linee equipotenziali, in tal modo che in tutta la lamina esse si incontrano sotto un angolo $\frac{\pi}{2} - \beta$ costante, caratteristico del metallo, e crescente con l'intensità del campo. Mentre la deviazione delle linee equipotenziali, che costituisce l'effetto Hall, può mettersi in evidenza col metodo delle sonde rilegate al galvanometro, la distorsione delle linee di corrente è meno semplice a constatare, ma dà luogo ad alcuni fenomeni elettromagnetici singolari, che il Corbino chiamò « di seconda specie ». Il caso estremo della semplice deviazione delle linee equipotenziali si può realizzare, come dimostrò il prof. Volterra [2], applicando elettrodi puntiformi al contorno della lamina. L'altro caso estremo si realizza con le lamine a connessioni multiple, aventi i contorni come elettrodi: per esempio con un disco circolare avente un elettrodo al centro e uno alla periferia; restano allora del tutto invariate le linee equipotenziali primitive, mentre vengono distorte le linee di flusso.

Cessa pertanto l'effetto Hall, mentre si accentuano gli effetti elettromagnetici, che furono studiati appunto in queste condizioni dal Corbino per il bismuto e l'antimonio, e, più recentemente, da Adams e Chapman [3] per questi ed altri dodici metalli. Nei riguardi dei due fenomeni i diversi metalli presentano caratteristiche non del tutto corrispondenti. Invero, per l'effetto Hall si constatano enormi differenze da metallo a metallo, e gli effetti dipendono dallo spessore della lamina; invece l'altro è indipendente dallo spessore, e le differenze da metallo a metallo sono di molto attenuate. Così l'effetto Hall varia da 1 a 2,000,000 in una serie di elementi che comincia col platino e finisce col tellurio; l'altro effetto varia solo da 1 a 150, cominminciando dal cobalto e terminando col bismuto.

Il carattere anormale di questi fenomeni elettromagnetici si rivela subito dalle qualità che assume un disco percorso da correnti radiali, il quale per effetto del campo si trasforma in una lamina magnetica a correnti circolari; e più specialmente dal fatto che le forze elettromagnetiche che ne risultano, fra il disco e il campo, e le f. e. m. induttive radiali destate allo stabilire del campo, sono indipendenti dal senso di questo, contrariamente a ciò che avviene per le azioni di Ampère e per l'induzione di Faraday.

Ma altri effetti, non meno singolari, possono ottenersi, dando al metallo altre forme, come ci proponiamo di esporre in questa Nota. Siamo infatti

[1] O. M. Corbino, *Il movimento della elettricità in una lamina metallica sotto l'azione di un campo*, Rend. Linc., vol. XXIV, pag. 213, an. 1915.

[2] V. Volterra, *Sulle correnti elettriche in una lamina metallica sotto l'azione di un campo magnetico*. Rendic. Linc., vol. XXIV, pag. 220, an. 1915.

[3] E. P. Adams e A. Chapman, *The Corbino Effect*. Phil. Mag., vol. 28°, pag. 692, an. 1915

riusciti a costruire, con due telai ortogonali di nastro metallico, un modello di indotto il quale presenta la seguente curiosa proprietà:

Esso, sottoposto all'azione di un campo e percorso da una corrente continua attraverso a due punti fissi, senza contatti striscianti, si comporta come un indotto munito di collettore Pacinotti e di spazzole, costantemente orientate a 90° dal campo esterno, comunque ruotino il campo o l'indotto.

In conseguenza di questa proprietà, si possono realizzare le seguenti disposizioni:

1°) inviando una corrente continua per i due contatti fissi, che possono essere costituiti dai due punti di appoggio dell'albero, l'indotto ruota uniformemente in un campo fisso, con una coppia costante, proporzionale al quadrato del campo;

2°) muovendo l'indotto con velocità costante nel campo, si sviluppa una forza elettromotrice continua e costante fra le punte dell'albero, senza contatti striscianti;

3°) disponendolo in un campo rotante Ferraris, e tenendolo fermo, si ottiene fra gli stessi due punti fissi dell'albero una f. e. m. continua e costante.

Si vede, perciò, che l'apparecchio permette, utilizzando queste azioni elettromagnetiche anormali, di sottrarsi alla finora inviolata validità del principio teorico, per il quale *non si possono ottenere rotazioni elettromagnetiche permanenti con correnti continue, nè forze elettromotrici costanti per virtù di movimento o di induzione su organi fissi, senza ricorrere a contatti striscianti (su cerchi di raggio diverso da zero), ovvero a resistenze periodicamente variabili (raddrizzatori elettrolitici* ecc.) [1].

Crediamo opportuno di aggiungere che l'apparecchio, da noi costruito, mentre gode effettivamente le proprietà sovra indicate, non ha alcuna pretesa di utilizzazione industriale; e ciò, sia per la piccola entità degli effetti osservati, sia per le pessime condizioni di rendimento. Agiscono, ad accentuare queste ultime, le rilevanti perdite per correnti di Foucault, che sono però ineliminabili; poichè tutto ciò che gioverebbe a diminuirle attenua in egual misura l'effetto utile.

Questo risulta, come si è detto, proporzionale al quadrato del campo dello statore: e così l'indotto, funzionando da motore, *non inverte il suo movimento all'invertire del campo*; esso ruoterebbe con un senso costante anche in un campo alternativo, e anche in questo, se girato per forza meccanica, genererebbe una forza elettromotrice pulsante, ma sempre di un senso.

[1] Sulla necessità dei contatti striscianti anche nella induzione unipolare, si veda H. Poincaré, L'*Eclair. électr.* tom. XXIII, p. 41; 1900. Vi si troverà la distinzione essenziale fra veri contatti striscianti, e contatti puntiformi, i quali ultimi non consentono il moto con correnti continue o lo sviluppo di f. e. m. costanti.

Infine, l'effetto utile è sensibilmente proporzionale al coefficiente caratteristico degli effetti elettromagnetici di seconda specie, per il metallo adoperato, quale risulta dalle misure di Corbino e di Adams.

2. Un telaio rettangolare (fig. 1) ha i lati anch'essi rettangolari e costituiti dalle lastrine sottili α, β, γ, δ. La prima, tratteggiata nella figura, è di bismuto; le altre sono di rame. Due fili di rame sono saldati nei punti di mezzo M e N della lastra di bismuto; e per essi può essere mandata una corrente continua I.

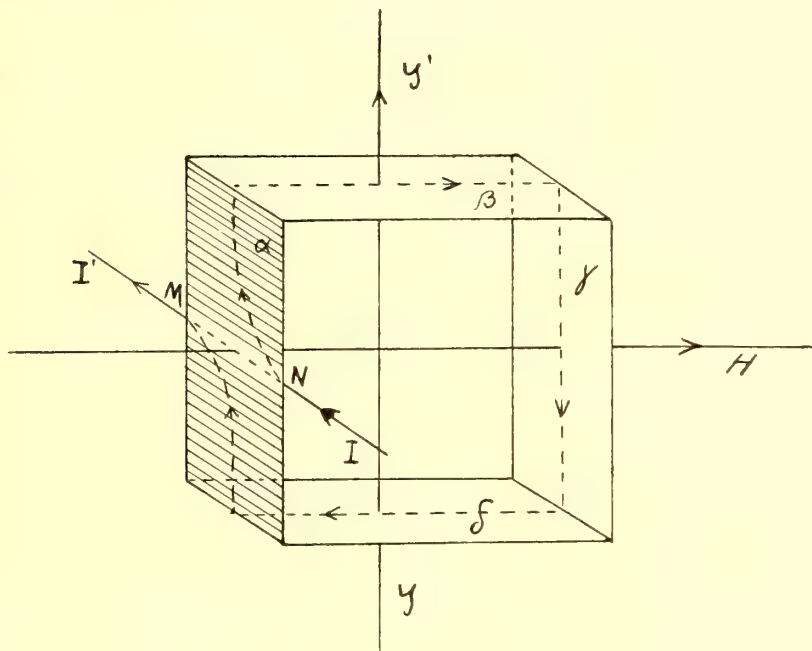



Fig. 1.

Si supponga il telaio disposto nel campo magnetico H H normale alla lastrina di bismuto. Allora la corrente che giunge in N sarà *parzialmente* distorta dal campo, e una parte circolerà nel telaio, trasformandolo in una lamina magnetica che tenderà a ruotare nel campo, intorno all'asse Y Y'.

Durante la rotazione il telaio, visto dall'alto, prenderà l'aspetto della fig. 2, dove la lamina si proietta in M N. Se si indica con ϑ l'angolo formato dalla normale al telaio col campo in una fase del giro, a produrre la corrente distorta nel telaio sarà attiva solo la componente $H \operatorname{sen} \vartheta$ del campo, e perciò la corrente distorta i sarà proporzionale ad $H \operatorname{sen} \vartheta$ e alla corrente principale I: avremo dunque

$$i = \mathrm{KHI} \operatorname{sen} \vartheta ,$$

dove K è una costante. Il telaio avrà un'energia di posizione nel campo, essa varierà di dW per una ulteriore rotazione $d\vartheta$, e avremo

$$\frac{dW}{d\vartheta} d\vartheta = i dN ,$$

dove dN indica la variazione del flusso di forza attraverso la superficie S del telaio in conseguenza del moto. Avremo perciò

$$\frac{dW}{d\vartheta} = i \frac{dN}{d\vartheta} = i \frac{d(SH \cos \vartheta)}{d\vartheta} = - i SH \operatorname{sen} \vartheta .$$

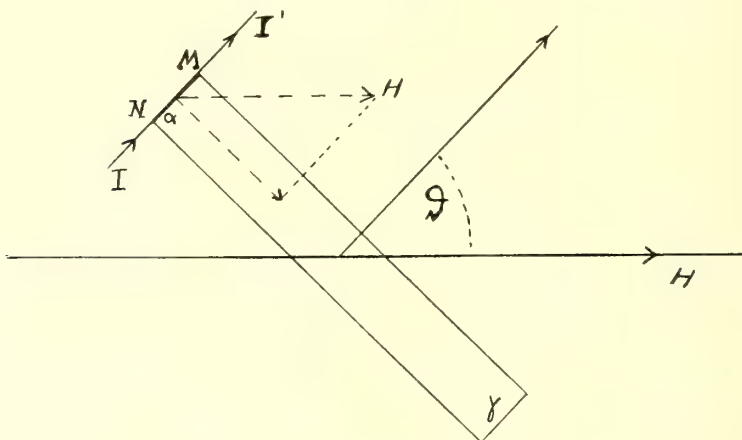



Fig. 2.

Ma $\frac{dW}{d\vartheta}$ misura la coppia C_1 agente sul telaio; avremo perciò, in valore assoluto,

$$C_1 = i SH \operatorname{sen} \vartheta = KSIH^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta .$$

Così, per un giro intero, C_1 ha un valore medio diverso da zero.

Se un secondo telaio identico è disposto a 90° dal primo, avremo una seconda coppia

$$C_2 = KSIH_2 \cos^2 \vartheta ,$$

e perciò la coppia totale agente sul sistema rigido dei due telai sarà

$$C = KISH^2 .$$

Questa è costante per qualunque valore di ϑ, così come avverrebbe di un indotto munito di un collettore di Pacinotti ideale, cioè con un numero

infinito di lamine, e nel quale le spazzole restassero *invariabilmente connesse* col campo, a 90° da questo, comunque ruotino il campo o l'indotto.

Per valutare K, si consideri la (1) per $\vartheta = \frac{\pi}{2}$; cioè nella posizione della fig. 1. Si avrà

$$i = \mathrm{KIH}\,.$$

La costante K può determinarsi con una esperienza diretta, misurando l'azione induttiva del telaio su una bobina all'invio della corrente I; ma può anche prevedersi con un calcolo approssimativo, di cui diamo il risultato.

Se si indica con E la costante del metallo introdotta dal Corbino col nome di « momento ionico differenziale » (¹), con a ed l la larghezza e la lunghezza della lamina, e si trascura la resistenza della parte in rame del telaio di fronte a quella della lastrina di bismuto, sarà approssimativamente

$$\mathrm{K} = \mathrm{E}\frac{a}{l}\,.$$

Sostituendo nella espressione della coppia otteniamo così

$$\mathrm{C} = \mathrm{ES}\frac{a}{l}\,\mathrm{IH}^2\,.$$

Adunque la coppia non si inverte col campo, è proporzionale alla intensità della corrente principale I e alla costante E del metallo, e non dipende dallo spessore della lastrina. Ricorderemo che nel bismuto si ha, all'incirca, $\mathrm{E} = 5.\ 10^{-5}$ in unità elettromagnetiche. Col bismuto si otterranno effetti più cospicui; ma risultati qualitativamente identici si avrebbero con telai omogenei di qualunque metallo.

La fig. 3 rappresenta i due telai incrociati, con le lastrine di bismuto NM, N'M'. Essi devono essere isolati l'uno dall'altro nel montarli sul medesimo asse. Le connessioni elettriche son fatte dai fili AN, MN', M'B, di cui gli estremi A e B son saldati alle due metà superiore e inferiore dell'albero, isolate fra loro, e quindi, attraverso alle punte di sostegno, possono essere rilegati alla sorgente. Occorre che il circuito principale AN MN' M'B

(¹) Si trova facilmente che la costante E è legata all'angolo β (di cui sono mutuamente ruotate, in ogni punto di una lamina metallica, la normale alla linea di flusso e la linea equipotenziale), dalla relazione

$$\mathrm{tang}\,\beta = \mathrm{EH}\,.$$

non presenti aree perforabili dalle linee di forza del campo, e ciò allo scopo di evitare le azioni perturbatrici di tipo amperiano.

Lo stesso apparecchio permette di ottenere fra gli estremi A e B una f. e. m. costante, qualora sia ruotato uniformemente nel campo; essa è data, come è facile di riconoscere applicando il principio dell'energia, da

$$\varepsilon = \frac{C\omega}{I} = ES\frac{a}{l}H^2\omega\,,$$

dove ω indica la velocità angolare.

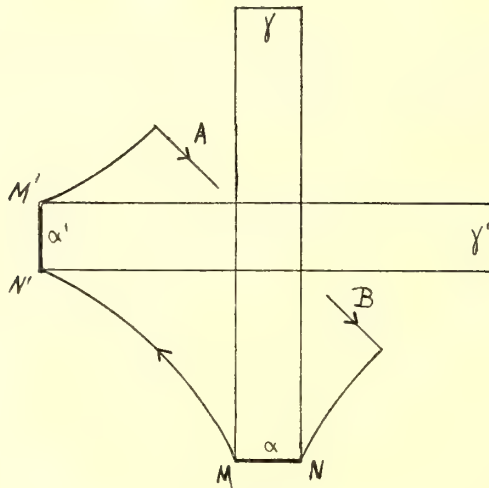



Fig. 3.

E infine una f. e. m. eguale si ottiene se l'apparecchio fisso è immerso in un campo Ferraris, ruotante con velocità ω, come in un indotto Pacinotti di cui le spazzole siano trascinate, in moto sincrono, a 90° dal campo rotante.

Sui dettagli costruttivi e sui particolari delle esperienze, che sono conformi alle previsioni, riferiremo in una prossima Nota.

Fisica. — *Arco e scintilla.* Nota di A. OCCHIALINI in risposta al prof. LA ROSA. Presentata dal Corrisp. A. BATTELLI.

In un lavoro pubblicato nel « Nuovo Cimento » sotto lo stesso titolo di questa Nota ([1]), ho cercato di stabilire i criteri per distinguere il fenomeno della scintilla da qualunque altra forma di conduzione stazionaria, ed in particolare dall'arco. Precisamente concludevo che la fase finale della scintilla di scarica di un condensatore è un arco, perchè appunto di questa forma di conduzione esige la condizione caratteristica per esistere, cioè il catodo rovente. Inoltre richiamavo, che i miei precedenti lavori avevano dimostrato che la fase con la quale un arco si inizia, è una scarica transitoria che offre tutte le apparenze della fase iniziale della scintilla, ossia della così detta pilota; ed aggiungevo altri fatti a sostegno della mia tesi. Osservavo che questa era in contrasto con quanto il La Rosa aveva scritto in una sua Memoria, dove, pur non trattandosi esplicitamente delle relazioni fra l'arco e la scintilla, si veniva ad affermare che, alla scarica iniziale di un arco non poteva darsi il nome di scintilla, perchè il campo elettrico necessario per produrla non era elevato quanto quello delle comuni scintille. E portavo le ragioni per le quali, secondo me, la distinzione del La Rosa doveva ritenersi non conforme ai fatti suggeriti dall'analisi del fenomeno.

Il prof. La Rosa risponde ora in una Nota pubblicata in questi rendiconti ([2]); ma, lasciando quasi completamente da parte la questione per la quale egli era stato chiamato in causa, fa una critica alle mie esperienze e alla loro interpretazione. Questa critica parte sempre da inesatta comprensione di ciò che ho scritto, forse per effetto di una troppo concisa esposizione da parte mia e dell'omissione di particolari sperimentali che mi riservavo di riportare per intero in una pubblicazione che, secondo i miei desiderii, avrebbe dovuto succedere immediatamente alla prima comunicazione e che ho dovuto ritardare per ragioni indipendenti dalla mia volontà. Comunque, sono in grado di confermare integralmente i fatti esposti nella mia Nota e di sostenere immutate le interpretazioni che di questi fatti ho dato.

Cominciamo col precisare bene i fatti. Al La Rosa la mia esperienza sulle scintille troncate non appare dimostrativa, perchè non sa se si sia tenuto il debito conto « dell'alterazione inevitabile della resistenza complessiva del circuito elettrico, dovuta alla sostituzione dell'elettrodo liquido a quello metallico; sostituzione, che, facendo crescere lo smorzamento, può dar luogo a tutte o a parte delle modificazioni che sono state attribuite alla

([1]) Nuovo Cimento *7*, 365, 1914.
([2]) Rend. Acc. Lincei *24*, 234, 1915.

presenza dell'elettrodo non arroventabile ». Forse se il Prof. La Rosa avesse notato la circostanza chiaramente espressa, che le scintille con elettrodo liquido si presentano *assai più violente e rumorose delle altre*, si sarebbe persuaso che lo smorzamento non poteva attribuirsi del tutto alla resistenza, e la mia conclusione, che da un certo momento la scarica di un condensatore esige gli elettrodi roventi, non gli sarebbo apparsa dubbia. Certo la stessa conclusione sarebbe stata più evidente se non avessi taciuto il fatto, da me ripetutamente constatato, che il numero delle oscillazioni che si ottengono con l'elettrolito è lo stesso, tanto se questo ha uno spessore di 4 o 5 centimetri, quanto se lo spessore è ridotto a 2 mm. Anche un foglio di carta da filtro bagnato con la soluzione e disteso sopra una lastra metallica dà lo stesso numero di mezze oscillazioni.

Ma, soprattutto, l'alterazione della resistenza del circuito, dovuta alla sostituzione dell'elettrodo liquido con quello metallico, è tutt'altro che inevitabile; ed io l'ho evitata in diversi modi. Basti qui citarne uno: si ponga l'elettrolito in un recipiente metallico abbastanza largo e profondo 4 o 5 cm., e nel centro, portato da una bacchetta di vetro, si ponga un dischetto di metallo di pochi millimetri di diametro che possa emergere appena dal liquido o possa restare immerso per un paio di mm. al di sotto della superficie dell'elettrolito. Allora la scintilla potrà scoccare fra un elettrodo sovrastante al recipiente e il dischetto, oppure fra l'elettrodo e l'elettrolito, senza che la resistenza del circuito sia sensibilmente alterata.

Ebbene, operando così, si ottiene sempre ciò che ho riferito nel mio lavoro: il numero delle oscillazioni della scintilla sull'elettrolito risulta 1/4 o 1/5 del numero che si osserva fra elettrodi metallici. Che se poi si volesse conoscere l'influenza che la resistenza dell'elettrolito può avere nelle circostanze più sfavorevoli delle mie esperienze, comunicherò che con le soluzioni da me adoperate in un recipiente metallico di 10 cm. di diametro e di 5 cm. di profondità ho notato fra metalli (dischetto emergente) 28 mezze oscillazioni, mentre sopprimendo la resistenza liquida ne ho osservate 33. Tenendo conto che con l'elettrodo elettrolitico se ne vede sempre 7, si conclude che se l'effetto smorzante della resistenza elettrolitica nel caso più sfavorevole è del 15 °/₀, quello dell'inarroventabilità dell'elettrodo è del 75 °/₀.

Il La Rosa ferma poi la sua attenzione sulle circostanze in cui si presentano le righe di scintilla nell'arco; e nel ricordare che io già una volta riferii che l'arco tra carboni emette nella fase iniziale uno spettro di righe, dice che allora dubitò che io facessi confusione fra questo spettro di righe e lo spettro di scintilla del carbonio. Per dimostrare quanto fosse infondato il suo dubbio, riferirò che nel lavoro al quale allude il La Rosa c'è il seguente passo...... « Certo le righe della scintilla non appariscono nell'arco iniziale e di ciò mi sono accertato osservando lo spettro di una

scintilla scoccata fra carboni, della quale un' immagine ottenuta con un obbiettivo era portata nel punto in cui un' arco si adesca ». (Nuovo Cimento *19*, 314, 1910).

Riguardo poi alla presenza di righe di scintilla in un arco interrotto mediante soffiamento magnetico, senza l' impiego di condensatori, il La Rosa crede che questo fatto sia in contradizione con altri da lui osservati. Ma io ricorderò che nella stessa sua Memoria è citata e ammessa la comparsa di righe di scintilla in circostanze quasi identiche alle mie, cioè in un arco interrotto con un soffio d' aria.

Precisamente è il Crew che fatto questa osservazione nel 1904 constatando nelle circostanze suddette l' apparizione della riga di scintilla del magnesio (λ 4481) in un arco fra elettrodi di magnesio. È vero che nel mio lavoro non ho indicato che l'elettrodo sul quale si imposta l'arco soffiato era precisamente di magnesio, come ho taciuto delle precauzioni necessarie per mantenere l' elettrodo freddo, ma il fatto mi pareva così noto da non doverci insistere più che tanto.

Il La Rosa, tentando di ripetere questa esperienza, non sapendo che elettrodi io avessi adoperato, si crede « autorizzato di ritenerli di carbone ». Veramente non so come potesse prendersi questa autorizzazione, tanto più che nello stesso mio lavoro tutte le altre osservazioni spettroscopiche sono fatte sul magnesio.

Eppure che il carbone fosse proprio da escludere si doveva dedurre dal fatto che le righe di alta eccitazione compariscono soltanto finchè l'elettrodo non è diventato caldo; ora il carbone si riscalda con eccessiva facilità.

Questo vide benissimo il Ludewig che scrisse:..... « all'Occhialini non è riuscito col suo dispositivo (quello delle scintille a basso potenziale) di ottenere anche con carbone uno spettro di scintilla. *Questo comparve immediatamente nella ripetizione delle sue esperienze raffreddando bene l' elettrodo laterale* » (Ann. d. Phys. *42*, 661, 1913).

Il Ludewig stesso, del resto, con una modificazione del mio dispositivo (modifizierte Occhialini-Schaltung) e con uno speciale raffreddamento dell'elettrodo ottenne la trasformazione dello spettro del carbonio mediante un arco interrotto senza l' impiego di condensatori (Id. pag. 658, fig. 22).

Infine il La Rosa fa un rilievo sopra una mia interpretazione dei risultati dell'analisi spettrale. Secondo il La Rosa stando alle idee da me propugnate, i due spettri ottenuti lasciando inalterate le condizioni del circuito e sostituendo l'elettrodo liquido a quello metallico, dovrebbero semplicemente differire per gli elementi spettrali caratteristici della seconda fase della scarica, cioè di quella che si identifica con un arco, e che viene soppressa dalla sostituzione dell'elettrodo; eppure, prosegue sempre il La Rosa, la semplice ispezione degli spettrogrammi riprodotti mostra che nello spettro della scin-

tilla troncata mancano proprio gli elementi spettrali che, secondo le esperienze di Battelli e Magri, dovrebbero essere emessi dalla pilota e dalle primissime oscillazioni.

Vediamo bene questo punto. Nel mio lavoro sono riportate tre coppie di spettrogrammi riferibili a scintille ordinarie e a scintille troncate in tre diverse condizioni di circuito: piccola, media e grande autoinduzione.

Il La Rosa non dice che l'unico spettrogramma in cui manca ciò che viene emesso dalla pilota e dalle prime oscillazioni è quello ottenuto con grande autoinduzione. Ora proprio nella Memoria di Battelli e Magri è mostrato che con alta auto-induzione spariscono dalla scintilla le righe d'alta eccitazione. Questo è il fatto spettroscopico. Io osservo che nello stesso tempo che l'alta eccitazione si affievolisce fino a sparire, si affievolisce anche la pilota fino a sparire, o meglio fino a diventar così debole e sottile che sulla lastra riprodotta nella fig. 3 o nella tavola alla fig. VII del mio lavoro non si riesce alla prima a vedere.

Dunque quel processo che è costituito dalla pilota e che si ripete nelle primissime oscillazioni può essere invisibile, e in tal caso lo spettro della scintilla è tutto d'arco. Allora, se in queste condizioni la scintilla è troncata sopprimendo l'unica cosa che c'era rimasta, ossia l'arco, come potremo aspettarci che comparisca ancora lo spettro della pilota? Infatti non comparisce e ciò che si vede è il povero spettro della scarica a bagliore, quella che si può stabilire con una tensione di 400 volta circa fra un anodo metallico e un catodo elettrolitico.

Maggior concordanza fra il lavoro di Battelli e Magri e il mio non potrebbe essere desiderata.

Il sostanziale della discussione, cioè la possibilità di trovar criterî netti per distinguere l'arco dalla scintilla, è dal La Rosa ridotto alla timida affermazione che allo stato attuale delle nostre conoscenze si possa ancora sostenere la teoria da me combattuta, e all'osservazione che non mancano fatti che potrebbero mettere in imbarazzo la tesi da me sostenuta. Questi fatti mi sarei aspettato di conoscere, pronto eventualmente a rinunciare alle mie vedute davanti alla loro evidenza. Per altro se questi fatti si riducono tutti, come afferma il La Rosa, all'esistenza di diversi tipi di arco, è molto dubbio che essi riescano a mettere in serio imbarazzo un'argomentazione che non distingue fra scariche stazionarie, siano esse archi di vari tipi o anche scariche a bagliore.

Fisica terrestre. — *Velocità di propagazione del terremoto Marsicano del 13 gennaio 1915.* Nota di G. Agamennone, presentata dal Socio E. Millosevich.

1. Scopo d'una mia Nota precedente ([1]) fu quello di far subito conoscere le ore esatte in cui questo disastrosissimo terremoto cominciò a perturbare i sismografi di M. Cassino, Rocca di Papa e Roma, i più vicini alla regione colpita, e di trarne qualche conclusione circa la posizione dell'epicentro. Oltre a ciò, riportai le ore di varî altri osservatorii italiani, e di alcuni anche esteri, e volli anche tentare un primo calcolo sulla velocità di propagazione delle onde sismiche, le più veloci. Infine, accennai allo straordinario numero di repliche (quasi 750) registrate all'Osservatorio di Rocca di Papa sino a tutto il 6 febbraio ([2]).

Ora che m'è pervenuta la risposta di varî altri osservatorii, ritengo utile un nuovo tentativo di calcolo della velocità di propagazione, il cui valore riuscirà più sicuro, anzitutto perchè basato sopra un maggior numero di dati, e poi anche perchè deve essere arrecata una correzione alle ore di Roma e di Granata, quali furono pubblicate nella mia precedente Nota. Infatti, dopo un più attento esame al sismogramma di Roma, si riconobbe un lieve errore nella misura della *parallasse*, causato dall'inesattezza della squadra adoperata; errore che risultò di 2 secondi in più, sicchè l'ora precisa è **$7^h\,52^m\,53^s$** invece di $7^h\,52^m\,55^s$. Questa differenza, già di per sè così piccola, si fa ancor meno sentire nella media dei dati orarii di M. Cassino, Rocca di Papa e Roma, assunta quale punto di partenza pel calcolo della velocità, e che si riduce a **$7^h\,52^m\,52^s$** circa, invece di $7^h\,52^m\,53^s$, già da noi utilizzata. Un errore meno insignificante è stato riconosciuto nel dato orario, già comunicato da Granata, il quale, da $7^h\,55^m\,44^s$, va cambiato in **$7^h\,56^m\,3^s$**.

2. Nella tabella che segue sono riportate le varie località con a fianco la loro distanza da Avezzano (lat. 42° 2′ c. N, long. 13° 25′ c. E), assunto quale epicentro provvisorio, ed il loro tempo rispettivo. Nell'antipenultima colonna sono riportate le *velocità medie superficiali* calcolate in base all'ora media ($7^h\,52^m\,52^s$) sopra accennata e che si riferisce alla distanza media di 70 km. dal presunto epicentro; mentre nella penultima colonna si trovano quelle ottenute mediante il confronto dei dati orarî delle singole lo-

([1]) G. Agamennone, *Il recente terremoto nella Marsica e gli strumenti sismici* (Rend. della R. Acc. dei Lincei; seduta del 7 febbr. 1915).

([2]) Dal 6 febbraio al 6 marzo ne sono state registrate altre 150 circa, della stessa origine!

calità con l'ora media ($7^h\ 53^m\ 11^s$) delle due ore, assai concordanti, d'Ischia e di Valle di Pompei, la quale corrisponde ad una distanza media di 155 km. da Avezzano.

Distanza da Avezzano	Località	Ora osservata (t. m. E. C.)	Velocità al secondo basandosi sull'ora media $7^h\ 52^m\ 52^s$	$7^h\ 53^m\ 11^s$	$7^h\ 53^m\ 11^s - 8^s = 7^h\ 53^m\ 3^s$
		h m s			
Km. 64 c.	Montecassino . .	7 52 50			
» 68 c.	Rocca di Papa .	7 52 54 ± 3s			
» 78 c.	Roma	7 52 53 ± 2s			
» **70**	Media	**7 52 52 c.**			
» 150 c.	Ischia	7 53 12	m. 4000		
» 160 c.	Valle di Pompei	7 53 10	» 5000		
» **155**	Media	**7 53 11**	» **4500**	m. 4500	m. 7730 c.
» 220 c.	Siena (Osservanza)	7 53 0	» (18,750)	(negativa)	(negativa)
» 220 c.	» (Università)	7 53 40 ± 10s	» (3130 c.)	m. (2240 c.)	m. (1760 c.)
» 320 c.	Pola	7 53 27	» 7140 c.	» (10,310 c.)	» 6880 c.
» 360 c.	Taranto	7 53 31	» 7440 c.	» (10,250)	» 7320 c.
» 380 c.	Venezia	7 55 37	» (1880 c.)	» (1540 c.)	» (1460 c.)
» 390 c.	Padova	7 53 39	» 6810 c	» 8390 c.	» 6530 c.
» 400 c.	Trieste	7 53 39	» 7020 c.	» 8750	» 6810 c.
» 410 c.	Treviso	7 53 31	» 8720 c.	» (12,750)	» (9110 c.)
» 420 c.	Chiavari	7 53 47	» 6360 c.	» 7360 c.	» 6020 c.
» 440 c.	Mileto	7 53 40	» 7710 c.	» (9830 c.)	» 7700 c.
» 500 c.	Catania	7 54 18	» (5000)	» (5150 c.)	» (4600)
» 530 c.	Carloforte	7 54 37	» (4330 c.)	» (4360 c.)	» (3990 c.)
» 540 c.	Mineo	7 53 30	» (12,370 c).	» (20,260 c.)	» (14,260 c.)
» 560 c.	Moncalieri	7 54 6	» 6620 c.	» 7360 c.	» 6430 c.
» 580 c.	Graz	7 53 59	» 7610 c.	» 8850 c.	» 7590 c.
» 600 c.	Domodossola . .	7 54 30	» (5410 c.)	» (5630 c.)	» (5110 c.)
» 720 c.	Vienna	7 54 16	» 7740 c.	» 8690 c.	» 7740 c.
» 900 c.	Heidelberg . . .	7 54 35	» 8060 c.	» 8870 c.	» 8100 c.
» 940 c.	Darmstadt	7 54 45	» 7700 c.	» 8350 c.	» 7700 c.
» 940 c.	Barcellona	7 54 45	» 7700 c.	» 8350 c.	» 7700 c.
» 1300 c.	Amburgo	7 55 33	» 7610 c.	» 8060 c.	» 7630 c.
» 1540 c.	Granata	7 56 3	» 7700 c.	» 8050 c.	» 7690 c.
» 6640 c.	Cambridge . . . . (Mass. U. S. A.)	8 2 45	» 11,080 c.	» 11,300 c.	» 11,140 c.
» 6780 c.	Ottawa (Canadà).	8 2 57	» 11,090 c.	» 11,310 c.	» 11,150 c.

Nell'antipenultima colonna, subito si rivelano assai sospetti i valori ottenuti da *Siena* (Osserv.), *Siena* (Univ.), *Venezia* e *Mineo*, e destano qualche

dubbio quelli relativi a *Catania*, *Carloforte* e *Domodossola*, i cui dati orarî possono essere inesatti per qualcuna delle regioni già esposte nella mia Nota precedente; ed è per questo che ho racchiuso tra parentesi i predetti 7 valori. Nella penultima colonna ho posto la parentesi non solo ai valori corrispondenti alle stesse 7 località, ma anche a quelle di Pola, Taranto, Treviso e Mileto, per il fatto che raggiungono cifre troppo alte e poco verosimili. Se si confrontano tra loro i valori corrispondenti delle due anzidette colonne, si troverà che, eccezion fatta per quelli di Siena (Univ.), Venezia e Carloforte, le velocità della penultima colonna sono tutte più alte, e la differenza si va in generale attenuando col crescere della distanza.

3. Questo fatto farebbe sospettare troppo elevata l'ora media ($7^h\ 53^m\ 11^s$) d'Ischia e di Valle di Pompei, assunta quale punto di riferimento per il calcolo della penultima colonna. A prima giunta, parrebbe impossibile ogni dubbio in proposito, non solo per il grande accordo tra le due ore che hanno fornito la media, ma altresì per il modo indipendente col quale si ha il tempo-campione nelle due predette località; ma poi riflettendovi su, e considerando che un errore, sia pure di pochi secondi, nell'ora in questione può essere la causa dei valori così anormali della penultima colonna, il sospetto non può più sembrare tanto infondato. Così, diminuendo, ad es., di solo 8 secondi l'ora accennata, e cioè riducendola a $7^h\ 53^m\ 3^s$, diminuisce subito la variazione della velocità con la distanza, e si ottengono valori (quelli dell'ultima colonna) in assai miglior accordo con quelli della antipenultima. Ora la differenza di un 8 secondi è tutt'altro che impossibile negli attuali osservatorî, anche di 1° ordine, a causa delle tante cause d'errore che possono ancora inquinare i dati orarî. Prova ne sia: anzitutto i sensibili errori probabili di Siena (Univ.), Rocca di Papa e Roma, le sole località che han creduto di indicarli; poi le correzioni che si sono dovute arrecare alle primitive ore di Roma e Granata, già pubblicate; indi i dati orarî di alcuni osservatorî non affatto sicuri; e infine quelli certamente errati, e di molto, per altre stazioni, ciò che salta subito agli occhi costruendo l'*odografo*, cioè riportando sopra un foglio a quadretti le distanze come *ascisse*, e le ore come *ordinate* di tutte le località.

4. Ricostruendo l'odografo, ma omettendo i 7 dati orarî dubbî o certamente errati, il suo andamento generale mostra che la velocità si è mantenuta press'a poco costante fino alla massima distanza considerata (Granata). Per tradurre meglio in cifre questo fatto, ho condensato i rimanenti 20 dati orarî in 6 valori medî, ciascuno risultante dall'aggruppamento di 2 o più ore, nel modo che sembrava più naturale dall'ispezione dell'odografo. Si ottengono così 6 punti fittizî, costituiti come segue:

Al I punto (M. Cassino, Rocca di Papa e Roma, con distanze da 64 a 78 km.) competono l'ora media **$7^h\ 52^m\ 52^s$** e la distanza media di **70** km.

Al II punto (Ischia e Valle di Pompei, con distanze da 150 a 160 km.) competono l'ora media $7^h\ 53^m\ 11^s$ e la distanza media di **155** km.

Al III punto (Pola, Taranto, Padova, Trieste, Treviso, Chiavari e Mileto con distanze da 320 a 440 km.) competono l'ora media $7^h\ 53^m\ 36^s$ e la distanza media di circa **391** km.

Al IV punto (Moncalieri, Graz e Vienna, con distanze da 560 a 720 km.) competono l'ora media $7^h\ 54^m\ 7^s$ e la distanza media di **620** km.

Al V punto (Heidelberg, Darmstadt e Barcellona, con distanze da 900 a 940 km.) competono l'ora media $7^h\ 54^m\ 42^s$ e la distanza media di c. **927** km.

Al VI punto (Amburgo e Granata, rispettivamente a 1300 e 1540 km.) competono l'ora media $7^h\ 55^m\ 48^s$ e la distanza media di **1420** km.

Combinando i dati di ogni punto fittizio con quelli del I o II, assunti come termine di confronto, si ottengono le seguenti velocità medie superficiali al secondo:

Distanze medie da Avezzano	Velocità in base al I punto con l'ora m. $7^h 52^m 52^s$		II punto con l'ora m. $7^h 53^m 11^s$		II punto modificato con l'ora $7^h 53^m 3^s$
km. 155	m. (4470) c.		m. (4470) c.		m. 7730 c.
» 391 c.	» 7300 c.		» 9440		» 7150 c.
» 620	» 7330 c.		» 8300 c.		» 7270 c.
» 927 c.	» 7790 c.		» 8480 c.		» 7800 c.
» 1420	» 7670 c.		» 8060 c.		» 7670 c.
	m. 6912	media generale	m. 7750	media generale	m. 7524
	m. 7522 c.	media con l'esclusione del 1° valore	m. 8570		

5. Da questo prospetto si vede come, volendo mantenere inalterata l'ora media, basata su Ischia e Valle di Pompei, si abbia nelle prime due colonne una velocità straordinariamente bassa (m. 4470) in corrispondenza della distanza media di 155 km. (1), ed inoltre un salto enorme nei valori della velocità passando da detta distanza all'altra successiva, e relativamente tenue, di 391 km. Colpisce infine, nella colonna di mezzo, la decrescenza della velocità con la distanza, dopo che il 2° valore è più che raddoppiato in confronto del 1°. Queste gravissime anomalie spariscono nell'ultima colonna, sol per aver diminuito di appena 8 secondi l'ora media spettante al II punto. Questo fatto è assai eloquente e concorre a confermare il dubbio sull'esattezza delle ore d'Ischia e di Valle di Pompei.

(1) Nella mia Nota precedente avevo creduto di giustificare le velocità così modeste, che risultavano per Ischia e Valle di Pompei, con la stessa incerta posizione dell'epicentro e le relativamente tenui distanze del medesimo dalle predette località. Ma poi, dopo più matura riflessione, ho finito per persuadermi che, per ispiegare differenze così notevoli, bisognava invocare un'incertezza troppo grande per il punto da cui irraggiò il moto sismico.

La media di tutti i valori, escluso il primo, della 1ª colonna è di m. 7522, cioè quasi identica a quella (m. 7524) della 3ª colonna e poco diversa dalla media (m. 7465) dei 15 valori che restano nell'antipenultima colonna della tabella a pag. 430, dopo l'esclusione di quelli tra parentesi e dei due relativi alle località americane (¹).

In base a questa nuova velocità di circa 7530 m., supposta valevole anche dall'epicentro fino alla distanza di 70 km., quest'ultima sarebbe ancora stata percorsa in circa 9 secondi, e perciò l'ora all'epicentro risulta adesso come segue:

$$7^h\,52^m\,52^s - 9^s = 7^h\,52^m\,43^s$$

6. In quanto ad una sensibile variazione della velocità con la distanza, parrebbe che anche questa volta non fossimo autorizzati ad ammetterla, anche se ci volessimo attenere ai valori della 1ª colonna e senza alterare l'ora media di Ischia e Valle di Pompei. Come spiegare, infatti, l'enorme salto della velocità tra i 155 e 391 km., poi la stazionarità tra 391 e 620 km., e infine la diminuzione tra 927 e 1420 km.? Ove poi si prendesse in considerazione l'ultima colonna, si troverebbe la velocità dapprima lievemente decrescente e poi crescente, per ritornare, in ultimo, quasi al valore primitivo.

Se questa variazione realmente esiste, almeno per le località più distanti, la medesima dev'essere così tenue da restare ancora mascherata da errori, sebbene piccoli, nelle ore osservate, oppure influenzata dalla diversa costituzione geologica delle regioni attraversate (²). È quello che io ho sempre trovato nei miei calcoli sulla velocità di propagazione dei numerosi terremoti da me studiati, a partire da quelli di Zante del 1893, purchè non si avesse da fare con distanze superiori ai 2000 km. Ed una buona conferma a questo mio modo di vedere è venuta anche dal valente direttore del R. Osservatorio geodinamico di Casamicciola il quale ha studiato la propagazione dei terremoti Calabri dell'8 settembre 1905, del 23 ottobre 1907 e 28 dicembre 1908 (³). Infatti, avendo egli condotto il calcolo della velocità con

(¹) La tenue differenza tra quest'ultima cifra e quella (m. 7690) che si ottenne nell'altra mia Nota in base ai 10 valori più attendibili, è in parte spiegata con le correzioni adesso arrecate alle ore di Roma e Granata.

(²) Trattandosi, nel caso nostro, di velocità medie superficiali, sarebbe strano il non volere ammettere la possibilità di tale variazione, se non altro pel fatto che, mentre la propagazione si può effettuare anche per le corde, nei nostri calcoli figurano, invece, le distanze arcuali, di guisa che, man mano che crescono le distanze, si fa vieppiù sentire la differenza tra le lunghezze delle corde e quelle dei rispettivi archi di circolo massimo terrestre: e per tal fatto la nostra velocità deve indubbiamente aumentare. Rimando, a tal proposito, a due mie Note pubblicate in collaborazione del compianto mio collega professor F. Bonetti e presentate alla R. Acc. dei Lincei nelle sedute del 6 e 20 gennaio del 1895.

(³) G. Grablovitz, *Sulla velocità della propagazione sismica* (Boll. della Soc. sism. ital., vol. XIII, pag. 259).

due metodi diversi, e cioè supponendo dapprima costante la velocità, almeno entro 2500 km., e poi uniformemente variabile, trovò che era quasi indifferente riguardare la progressione rettilinea nel 1° caso o curvilinea nel 2°, poichè gli errori residui non presentavano se non differenze inapprezzabili tra retta e curva.

7. Che poi la velocità cresca effettivamente, ed anzi in modo sensibilissimo, con una assai maggiore distanza, è dimostrato in modo evidente dal valore di quasi 11100 metri che vien fuori concordemente per Cambridge (lat. 42° 23′ N, long. 71° 8′ W) e per Ottawa (lat. 45° 24′ N, long. 75° 43′ W), distanti rispettivamente 6640 e 6780 km. da Avezzano. E siccome non vi può essere alcun dubbio sull'esattezza delle ore di queste due località, e così pure sull'ora media, presa da me quale punto di riferimento a soli 70 km. dall'epicentro, così dobbiamo ritenere sicura la predetta velocità. Nè a spiegare la grande differenza tra la stessa e quella (circa 7530 metri) da noi trovata quale media per tutte le stazioni situate sino a 1540 km. dall'epicentro, può invocarsi la maggiore lunghezza di circa 300 km. dell'arco di circolo massimo che passa per Avezzano e ciascuna località americana, per rispetto alla corda che lo sottende; poichè, introducendo nel calcolo la lunghezza di quest'ultima, la velocità di 11100 metri si abbasserebbe per non più di un 500 metri. Bisogna dunque ritenere che, effettuandosi la propagazione lungo la corda, la velocità cresca in modo ragguardevole sol per la natura degli strati profondi attraversati, i quali, nel caso nostro, raggiungono la massima profondità di quasi 850 km., lungo la corda Avezzano-Cambridge e di ben 880 km. per la corda Avezzano-Ottawa! [1].

Quando saranno conosciuti i dati orarî di tanti altri osservatorî sparsi su tutta la terra, sarà possibile una più esauriente ricerca sul meccanismo di propagazione di questo terremoto il quale, quasi a compenso degli immensi danni arrecati, avrà potuto contribuire anch' esso alla soluzione di non pochi problemi, ancora oscuri e che interessano in sommo grado la sismologia [2].

[1] Per dare un'idea concreta della lunghezza di queste corde, dirò che la prima è una ventina di km. più corta, e la seconda un centinaio di km. più lunga del lato dell'esagono regolare inscritto nel circolo massimo terrestre, lato che si sa uguagliare il raggio stesso (km. 6370 circa) del nostro globo.

[2] Nel licenziare le bozze di stampa ci sono pervenuti i bollettini sismici degli osservatorî di *Cracovia* e *S. Fernando* (presso Cadice) alle distanze rispettive di circa 1020 e 1780 km. da Avezzano. Poichè l'inizio del sismogramma è avvenuto nei medesimi rispettivamente a $7^h\,54^m\,40^s$ e $7^h\,56^m\,15^s$, così combinando questi dati orarî con l'ora media $7^h\,52^m\,52^s$ relativa alla distanza media di 70 km. dall'epicentro, ne risulta una velocità di circa 8800 metri per Cracovia e 8420 per S. Fernando. Valori ben più alti verrebbero fuori, ove si volesse assumere, quale punto di confronto, l'ora media $7^h\,53^m\,11^s$, desunta dai dati d'Ischia e di Valle di P.

Chimica. — *Sui composti di vanadiurea* [1]. Nota di G. A. BARBIERI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

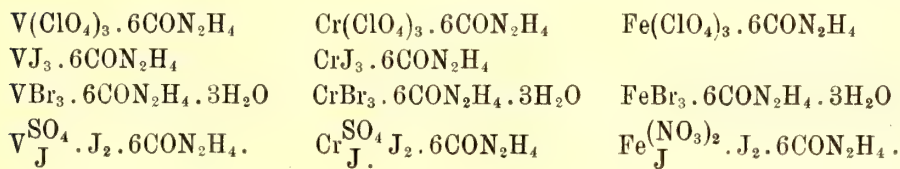
Le ricerche di E. Petersen [2], di I. Locke e H. Edwards [3], e specialmente di A. Piccini [4] e dei suoi allievi, hanno messo in luce l'analogia che esiste tra i composti del vanadio trivalente e quelli del cromo trivalente. I composti presi in considerazione furono sali idrati (cloruro, bromuro, ioduro) e sali doppî (fluoruri, cianuri, tiocianati, allumi, ossalati). In base ai risultati di tali ricerche, si può dire che il vanadio trivalente dà origine a cationi idrati e ad anioni complessi che differiscono da quelli corrispondenti del cromo soltanto per una minore stabilità in soluzione.

È ben noto che il cromo, oltre che con molecole di acqua e con radicali acidi, può formare ioni complessi con molecole di urea, di ammoniaca e di basi organiche. In due Note precedenti [5] ho mostrato che il ferro trivalente, la cui analogia col cromo, nei sali idrati e nei sali doppî, ricorda in tutto quella del vanadio trivalente, può dare, coll'urea e con alcune basi organiche, complessi analoghi a quelli del cromo.

Allo scopo di chiarire l'unica parte rimasta oscura nei rapporti tra il vanadio e il cromo, mi parve opportuno di estendere al vanadio le ricerche da me compiute per il ferro. Come prevedevo, ho ottenuto tanto composti di vanadiurea quanto vanadiammine.

Intorno a queste ultime riferirò in una prossima Nota. Espongo nella presente i risultati che ho avuto con l'urea.

I composti di vanadiurea hanno la formula generale $VX_3 . 6CON_2H_4$ e sono perfettamente analoghi ai composti corrispondenti di ferri- e cromiurea, come risulta dall'esame delle seguenti formule:

$V(ClO_4)_3 . 6CON_2H_4$	$Cr(ClO_4)_3 . 6CON_2H_4$	$Fe(ClO_4)_3 . 6CON_2H_4$
$VJ_3 . 6CON_2H_4$	$CrJ_3 . 6CON_2H_4$	
$VBr_3 . 6CON_2H_4 . 3H_2O$	$CrBr_3 . 6CON_2H_4 . 3H_2O$	$FeBr_3 . 6CON_2H_4 . 3H_2O$
$V{}^{SO_4}_{J} . J_2 . 6CON_2H_4$.	$Cr{}^{SO_4}_{J} J_2 . 6CON_2H_4$	$Fe{}^{(NO_3)_2}_{J} . J_2 . 6CON_2H_4$.

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica generale dell'Università di Ferrara.

[2] I. pr. Chem. [2] 40_{51} (1889).

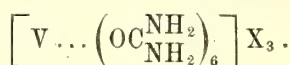
[3] Am. Chem. I, 20_{594} (1898).

[4] Piccini, Z. anorg. Ch., 11_{106} (1895), 13_{441} (1896); Piccini e Brizzi, Z. anorg. Ch., 19_{394} (1899); Cioci, Z. anorg. Ch., 19_{311} (1899).

[5] Rendiconti Accad. Lincei, XIX, $2°_{591}$ (1910); XXII, $1°_{367}$ (1913).

Questi composti rassomigliano fra di loro anche nel colore. I composti di cromiurea (ad anione incoloro) sono verdi; quelli di ferriurea sono azzurrognoli e quelli di vanadiurea sono di un bel verde azzurro. I perioduri sono tutti rosso-bruni. Non mi è stato possibile preparare il bicromato e il permanganato di vanadiurea perchè l'acido cromico e l'acido permanganico ossidano il vanadio trivalente anche in presenza di urea.

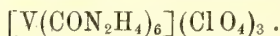
Mi sembra ovvio di attribuire ai composti di vanadiurea la costituzione proposta a A. Werner [1] per i corrispondenti composti di cromo, cioè considerarli derivati dagli aquosali per sostituzione delle sei molecole di acqua con sei molecole di urea che restano legate attorno all'atomo metallico centrale mediante valenze secondarie di ossigeno, come è espresso dalla formula:

$$\left[V \ldots \left(OC\begin{matrix}NH_2\\NH_2\end{matrix}\right)_6\right]X_3 .$$

La sostituzione delle molecole di acqua colle molecole di urea si compie per i sali di vanadio, come per i sali di ferro, a freddo, mentre per i sali di cromo [2] è possibile soltanto a caldo. Ciò prova che gli ioni idrati di vanadio e di ferro sono assai meno stabili degli ioni idrati di cromo.

Anche il complesso $[V(CON_2H_4)_6]$ è, come il complesso $[Fe(CON_2H_4)_6]$, molto meno stabile del complesso $[Cr(CON_2H_4)_6]$. Esso esiste in soluzione soltanto in presenza di un grande eccesso di urea.

Parte sperimentale.

Perclorato di vanadiurea.

$$[V(CON_2H_4)_6](Cl\,O_4)_3 .$$

Gr. 5 di anidride vanadica in polvere vennero sospesi in 40 cc. di una soluzione di acido solforico al 25 % e trattati con una corrente di anidride solforosa, prima a freddo, poi a caldo. Si ottenne un liquido turchino limpido, nel quale tutto il vanadio era contenuto nella forma VX_4. Questo liquido, previa eliminazione dell'eccesso di anidride solforosa mediante ebullizione, venne sottoposto in una capsula di platino alla riduzione elettrolica. La capsula fungeva da catodo. Il liquido anodico, una soluzione di acido solforico al 20 %, era contenuto in un vaso poroso che lo separava dal liquido catodico. L'anodo era un filo di platino.

S'impiegò una densità di corrente al catodo di circa tre ampères per dm.^{2}, e si prolungò l'elettrolisi finchè il liquido catodico assunse un bel colore verde e diede le reazioni dei sali del vanadio trivalente (ad es. precipitato

(1) Ann., 322 $_{296}$ (1902).
(2) Pfeiffer, Ber. 36 $_{1926}$ (1903).

verde con ammoniaca). La soluzione verde venne versata in un bicchiere, addizionata di urea in sostanza fino quasi a saturazione, e poi vi si aggiunse la soluzione di gr. 20 di perclorato sodico in poca acqua. Si ottenne subito un abbondante precipitato cristallino verde-azzurro, che venne spremuto alla pompa, lavato con poca acqua e con alcool, e infine seccato nel vuoto su acido solforico.

In questa sostanza il vanadio venne dosato come anidride vanadica per calcinazione, previo ripetuto trattamento a caldo con acido nitrico concentrato. L'acido perclorico venne determinato per via indiretta. La sostanza venne trattata con carbonato di bario sospeso in acqua; e dal bario passato in soluzione e dosato come solfato, si calcolò l'acido perclorico.

	Calcolato per $[V(CON_2H_4)_6](ClO_4)_3$	Trovato
V	7,19	7,26
N	23,70	23,40
Cl	15,00	15,12

Il perclorato di vanadiurea allo stato di secchezza è stabile all'aria: non si ossida, nè assorbe umidità. In acqua è poco solubile a freddo, più solubile a caldo. La sua soluzione, appena preparata, è verde, ma diventa rapidamente giallo-bruna. Ciò è dovuto all'idrolisi; infatti, per aggiunta di un acido, ricompare la colorazione verde. In una soluzione concentrata di urea il perclorato e gli altri sali di vanadiurea si sciolgono con colorazione verde-azzurra persistente, perchè in tali condizioni il complesso $[V(CON_2H_4)_6]$ è abbastanza stabile.

Bromuro di vanadiurea.

$[V(CON_2H_4)_6]Br_3 . 3H_2O$.

Questo composto si può preparare tanto aggiungendo un eccesso di urea a una soluzione concentrata di $VBr_3 . 6H_2O$ preparato secondo Piccini e Brizzi [1], quanto aggiungendo urea e bromuro sodico a una soluzione di solfato di vanadio trivalente preparato come fu detto sopra per il perclorato.

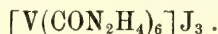
È una polvere cristallina di un verde-azzurro chiaro, solubile, in acqua, con colorazione bruna e, in presenza di un acido o di una grande eccesso di urea, con colorazione verde.

Nell'analisi di questa sostanza il bromo venne determinato volumetricamente col metodo Volhard, previa eliminazione del vanadio con carbonato di bario [2].

[1] Z. anorg. Ch., 19_{398} (1899).

[2] A. Piccini, Z. anorg. Ch., 13_{442} (1897).

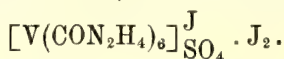
	Calcolato per $[V(CON_2H_4)_6]Br_3 . 3H_2O$	Trovato
V	7,23	7,29
N	23,85	23,76
Br	34,02	34,20

Ioduro di vanadiurea.

$$[V(CON_2H_4)_6]J_3 .$$

Si ottenne aggiungendo urea e ioduro sodico, ambedue in eccesso, ad una soluzione concentrata di $V_2(SO_4)_3$. Cristalli aghiformi verdi-azzurri, solubili in acqua, con colorazione bruna.

	Calcolato per $[V(CON_2H_4)_6]J_3$	Trovato
V	6,44	6,47
N	21,23	21,18
I	48,09	47,89

Perjoduro - solfato di vanadiurea.

$$[V(CON_2H_4)_6]^{J}_{SO_4} . J_2 .$$

Aggiungendo ad una soluzione di $V_2(SO_4)_3$ una soluzione di joduro sodico e jodio, si ha tosto un precipitato rosso-bruno costituito di aghetti microscopici. Non può sorgere il dubbio che il vanadio contenuto in questo composto appartenga a una forma di combinazione superiore alla trivalente, e cioè che lo jodio abbia agito come ossidante, perchè è noto che l' acido jodidrico riduce il V^{IV} a V^{III} con liberazione di jodio.

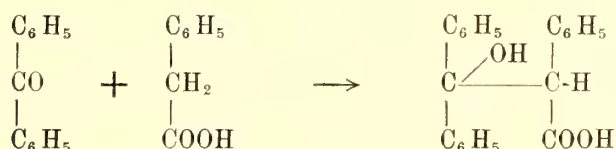
Lo jodio totale venne determinato col metodo Volhard, previa riduzione dello jodio addizionato a jodio-jone mediante acqua ossigenata e soda caustica.

	Calcolato per $[V(CON_2H_4)_6]SO_4 . J . J_2$	Trovato
V	5,74	5,67
N	18,93	18,82
I	42,89	42,65
S	3,61	3,50

Chimica. — *Sopra alcuni derivati dell'acido β-trifenil-lattico* [1]. Nota di R. DE FAZI, presentata dal Socio E. PATERNÒ.

Per azione della luce, sopra una mescolanza di benzofenone ed acido fenil-acetico, il prof. Paternò e G. Chieffi [2] avevano ottenuto un composto dalla formula $C_{21}H_{18}O_3$, al quale attribuirono la costituzione di acido β-trifenil-lattico.

Ammisero cioè che il benzofenone e l'acido fenil-acetico si fossero combinati secondo lo schema seguente:

$$\begin{matrix} C_6H_5 \\ | \\ CO \\ | \\ C_6H_5 \end{matrix} \quad + \quad \begin{matrix} C_6H_5 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ COOH \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} C_6H_5 & & C_6H_5 \\ | & \diagup OH & | \\ C & \text{———} & C\text{-}H \\ | & & | \\ C_6H_5 & & COOH \end{matrix}$$

per analogia con altre simili condensazioni che avvengono fra composti che contengono il gruppo CO e quelli che contengono il gruppo CH_2.

Dal prof. Paternò ebbi un poco di questo acido, da lui ottenuto per la prima volta, per cercare di prepararne alcuni derivati, e per vedere se il suo comportamento chimico fosse in accordo con la formula di costituzione attribuitagli.

A questo scopo cercai dapprima di disidratare questo acido nella speranza di ottenere l'acido β-trifenil-acrilico, per confrontarlo con quello che era stato preparato da Heyl e Meyer [3].

Questi autori infatti, riscaldando a 220° il dicloro-difenil-metano con il cianuro di benzile, avevano ottenuto il nitrile dell'acido β-trifenil-acrilico, che per saponificazione, trasformarono nell'ammide e poi nell'acido β-trifenil-acrilico. Lo stesso acido ottennero saponificando l'etere metilico dell'acido β-trifenil-acrilico che si forma riscaldando a 220° il dicloro-difenil-metano con l'etere metilico dell'acido fenil-acetico. In questa ultima reazione, come prodotto secondario ottennero una sostanza, in cristalli rossi splendenti, che fonde a 150-151°, e che riconobbero per α-β-difenil-indone.

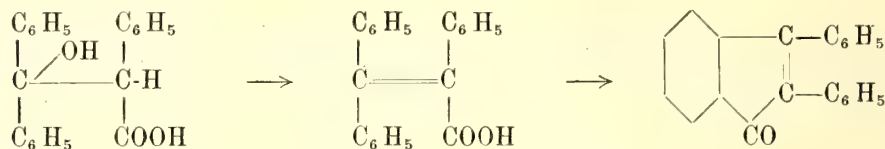
Per azione dell'anidride fosforica, sull'acido del prof. Paternò, ho ottenuto il difenil-indone di Heyl e Meyer. La formazione di questo prodotto conferma la costituzione attribuita all'acido β-trifenil-lattico. L'anidride fosforica avrebbe eliminato prima una molecola di acqua formando l'acido β-tri-

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Roma.

[2] Paternò e Ghieffi, Gazz. Chim. Ital.. *40* (2) 323 (1910).

[3] Heyl e Meyer, Ber. *28*, 2787 (1895).

fenil-acrilico, poi un'altra, dando luogo alla formazione del difenil-indone, secondo lo schema seguente:

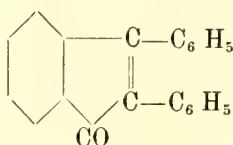
$$\begin{array}{cc} C_6H_5 & C_6H_5 \\ | \;\diagup OH & | \\ C & \!\!\!-\!\!-\!\!-C\text{-}H \\ | & | \\ C_6H_5 & COOH \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc} C_6H_5 & C_6H_5 \\ | & | \\ C & \!\!\!=\!\!=\!\!=C \\ | & | \\ C_6H_5 & COOH \end{array} \longrightarrow C_6H_4\begin{array}{l} \diagup C-C_6H_5 \\ \quad\;\, \| \\ \diagdown C-C_6H_5 \\ \;\; CO \end{array}$$

Quantunque io non sia riuscito a trasformare l'acido β-trifenil-lattico in acido β-trifenil-acrilico, pur tuttavia ho ottenuto l'etere etilico dell'acido β-trifenil-acrilico, facendo passare una corrente di HCl gassoso attraverso ad una soluzione alcoolica dell'acido β-trifenil-lattico

Ho tentato di ottenere l'etere etilico dell'acido β-trifenil-lattico, preparando il sale d'argento di questo acido e facendovi agire lo ioduro di etile. Ho ottenuto però una sostanza, che all'analisi non dà risultati corrispondenti per l'etere etilico dell'acido β-trifenil-lattico. La piccola quantità di sostanza non mi ha permesso di fare altre ricerche per chiarire la sua costituzione.

Ho anche tentato di fare la sintesi dell'acido β-trifenil-lattico con una reazione analoga a quella con la quale Rupe e Busolt (¹) avevano preparato l'acido β-difenil-lattico.

Ho fatto agire, a caldo, il benzofenone e l'etere etilico dell'acido fenil-bromo-acetico in presenza di zinco, per ottenere l'etere etilico dell'acido β-trifenil-lattico; ma ho ottenuto un prodotto, difficile a purificarsi, sul quale, per ora, non ho fatto altre ricerche. Non avendo più acido β-trifenil-lattico, sono costretto perciò a interrompere il lavoro finchè non ne avrò preparato dell' altro.

Azione dell'anidride fosforica sull'acido β-trifenil-lattico.
α-β-Difenil-indone.

$$C_6H_4\begin{array}{l} \diagup C-C_6H_5 \\ \quad\;\, \| \\ \diagdown C-C_6H_5 \\ \;\; CO \end{array}$$

Ho disciolto gr. 2 di acido β-trifenil-lattico in 800 cc. di xilene, e alla soluzione ho aggiunto poi circa gr. 10 di anidride fosforica. Ho lasciato reagire a b. m. per 5 ore. Dopo pochi minuti, la soluzione, che era incolora, è divenuta di colore giallo arancio-intenso.

Dopo avere distillato in corrente di vapore lo xilene, nel pallone rimane una sostanza semisolida, di colore granato. Estraendo questa con etere e

(¹) Rupe e Busolt, Ber. *40*, 4537 (1907).

facendo poi distillare il solvente, resta un olio che, per raffreddamento, cristallizza in prismi di colore rosso-granato.

Si discioglie, non molto, nell'alcool etilico bollente, e per raffreddamento non si deposita nulla.

Lasciando svaporare lentamente l'alcool, a temperatura ordinaria, si depositano dei bellissimi prismi, ben formati, di colore rosso rubino. Fondono a 151-153°.

Da gr. 2 di acido β-trifenil-lattico, si ottengono circa gr. 0,50 di questo prodotto.

Si dissecca a 100° e si analizza:

sostanza gr. 0,2283	CO_2 gr. 0,7453		H_2O gr. 0,1064
donde °/₀	trovato	C 89,03	H 5,21
$C_{21}H_{14}O$	calcolato	C 89,40	H 4,90

Questa sostanza è insolubile nell'acqua; è solubile nell'alcool etilico e metilico; più solubile in acetone e in benzolo.

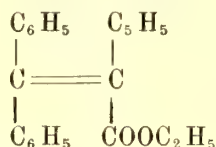
Neppure a caldo si discioglie negli idrati alcalini.

Con H_2SO_4 concentrato, a freddo, dà una bella colorazione verde-smeraldo; a caldo il colore verde passa prima al giallo-arancio, poi al rosso-rubino.

Non si decolora con anidride solforosa.

Ha caratteri identici all'α-β-difenil-indone che Heyl e Meyer [1] avevano ottenuto come prodotto secondario nella saponificazione dell'etere metilico dell'acido β-trifenil-acrilico.

Etere etilico dell'acido β-trifenil-acrilico.

$$\begin{array}{ll} C_6H_5 & C_5H_5 \\ | & | \\ C = & C \\ | & | \\ C_6H_5 & COOC_2H_5 \end{array}$$

Ho disciolto gr. 3 di acido β-trifenil-lattico in 300 cc. di alcool etilico; ed ho fatto passare attraverso a questa soluzione, una corrente di HCl gassoso, fino a completa saturazione. La reazione avviene con svolgimento di calore, e occorre raffreddare esternamente il recipiente. La soluzione da incolora, diviene di colore giallo-scuro.

Dopo aver lasciato stare per 12 ore, a temperatura ordinaria, ho distillato l'alcool, ed ho ripreso il residuo con una soluzione diluita di bicarbonato di sodio, fino a reazione alcalina. Precipita così una sostanza polverosa, di colore grigio scuro, solubile in acqua bollente, più solubile nell'alcool.

[1] Heyl e Meyer, loc. cit.

Dalla soluzione alcoolica, per aggiunta di acqua, precipita una sostanza fioccosa di colore bianco sporco.

È solubilissima in benzolo e acetone, anche a freddo.

Si cristallizza da una mescolanza di acqua ed alcool (1 : 1). Si hanno, così, degli aghetti bianchi, che fondono a 119-120°.

La sostanza, disseccata a 100°, si analizza:

sostanza gr. 0,2081 CO_2 gr. 0,6404 H_2O gr. 0,1136

donde °/₀	trovato	C 83,93	H 6,10
$C_{23}H_{20}O_2$	calcolato	C 84,20	H 6,10

Questo etere dà, con H_2SO_4 concentrato, a freddo, una bella colorazione verde smeraldo, che, per riscaldamento, passa al rosso arancio e poi al rosso rubino.

Azione dello ioduro di etile
sul sale d'argento dell'acido β-trifenil-lattico.

Su gr. 5,2 del sale d'argento dell'acido β-trifenil-lattico, ben disseccato, in 20 cc. di alcool, ho fatto agire, a caldo, per 1 ora, cc. 15 di ioduro d'etile.

La soluzione, da incolora, diviene di colore giallo pallido, e al fondo del recipiente si deposita lo ioduro d'argento. Filtro, lavo bene con alcool bollente; poi distillo tutto l'alcool e lo ioduro d'etile, che non ha reagito. Rimane così un olio, denso, di colore rosso scuro, che per raffreddamento cristallizza. Si discioglie molto facilmente in alcool etilico.

Anche questo prodotto, così ottenuto, si colora, a freddo, con H_2SO_4 concentrato, in un bel verde smeraldo; a caldo passa dal colore arancio al rosso rubino.

Si cristallizza da una mescolanza di acqua ed alcool (1: 1). Si hanno, così, dei grossi prismi trasparenti, incolori, che fondono a 116-119°.

La sostanza, disseccata a 100°, è stata analizzata:

I	sostanza gr. 0,2419	CO_2 gr. 0,7318	H_2O gr. 0,1339
II	sostanza gr. 0,2561	CO_2 gr. 0,7746	H_2O gr. 0,1403
III	sostanza gr. 0,2390	CO_2 gr. 0,7232	H_2O gr. 0,1336

donde °/₀ trovato:

C 82,51 — 82,49 — 82,53
H 6,19 — 6,13 — 6,25

I risultati analitici ottenuti sono molto differenti dal calcolato per la formula $C_{23}H_{22}O_3$, dell'etere etilico dell'acido β-trifenil-lattico, per la quale si calcola

C °/₀ 79,8 H °/₀ 6,3.

Per ora non saprei che formula attribuire a questa sostanza: esperienze che mi propongo di eseguire in seguito, potranno forse chiarirne la costituzione.

Cristallografia. — *Sullo zolfo di Zonda - S. Juan* (Repubblica Argentina). Nota di C. PERRIER, presentata dal Socio C. PARONA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sui borati. Sistema* Na^2O, B^2O^3, H^2O a 60°. Nota I di U. SBORGI e F. MECACCI, presentata dal Socio R. NASINI.

In una serie di Note precedenti vennero studiati, da uno di noi [2], diversi sistemi costituiti da B^2O^3, H^2O e ossidi di metalli alcalini e alcalino-terrosi a 30°, dal punto di vista della regola delle fasi, allo scopo di precisare la composizione dei borati formantisi come fasi stabili, ottenendo insieme le loro curve di solubilità, coi metodi che in dette Note vennero ampiamente descritti.

Degli alcalini il sistema Na^2O - B^2O^3 - H^2O era stato già studiato da Dukelski [3], a 30°: cosicchè, proseguendo ora il nostro studio a temperature diverse da 30°, riprendiamo appunto da quel sistema. In questa Nota riferiamo intorno ai resultati ottenuti a 60° per tutta la parte del diagramma che riguarda i composti che si ottengono come fase solida a partire dall'acido borico sino al metaborato; prossimamente riferiremo sui composti dal metaborato sino alla soda caustica.

I borati di sodio descritti più o meno sicuramente fin qui sono quelli che riportiamo nella tabella seguente, insieme colle loro composizioni centesimali.

La notazione adottata nella tabella è la consueta, e cioè: il primo numero indica le molecole di Na^2O; il secondo le molecole di B^2O^3; il terzo le molecole di H^2O.

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica generale della R. Università di Pisa.

[2] U. Sborgi, *Sui borati*. Questi Rendiconti, anni 1912, 1913, 1914.

[3] M. Dukelski, Zeitschr. f. anorgan. Chemie *50* (1906) 38 e seguenti.

TABELLA I.

Composto	Composizione centesimale			SPERIMENTATORI [1]
	Na_2O %	B_2O_3 %	H_2O %	
1-1-4	30.43	34.29	35.28	Benedikt (Ber. deutsch. chem. Ges. *7*, 700).
1-1-4.5	29.14	32.85	38.01	Atterberg (Oefvers af K. Vetensh. Akad. Förh. 1874, 6, 16).
1-1-5.5	26.87	30.29	42.83	Atterberg, loc. cit.
1-1-6	25 86	29.16	44.98	Berzelius (Pogg. Ann. *34*. 566): Bechi (Sillim. Journ. [2] *19* Nr. 55, p. 120).
1-1-8	22 49	25.35	52.16	Ditscheiner (Ber. deutsch. Ges. 7 402); Rammelsberg (Pogg. Ann. *49*. 460).
1-2-4	22.66	51.07	26.27	Schweizer (Lieb. Ann. *76*, 267).
1-2-5	21.26	47.93	30 81	Buron. Payen, Soubeiran, Pellerin etc.
1-2-10	16.25	36.63	47.12	Vohl, Phillips, Campbell, Berzelius, Schweizer, Stromeyer Marignac, Bechi etc.
1-3-x	22.82	77.18	—	Spiegel (Chem. Ztg. 1904, 750).
1-4-10	11.89	53.63	34.48	Bolley (Ann. Pharm. *68*, 122).
1-5-10	10.49	59.11	30.40	Atterberg, loc. cit.
1-6-12	8.89	60.17	30.94	Tünnermann (Kastn. Arch. *20*, 8).
2-5-x	26.19	73.81	—	Barthe (J. Pharm. Chim. [6] *1*, 303).

Nello studio a 30°, il Dukelski confermò la esistenza, come fasi stabili solide, dei composti 1-1-4, 1-1-8, 1-2-10 e 1-5-10. Ecco ora quanto risulta dalle nostre esperienze a 60°:

I modi di esperienza ed i metodi analitici da noi adoperati sono del tutto uguali a quelli già descritti nelle precedenti Note; e per brevità stimiamo opportuno di rimandare a quelle.

Per la estrazione dei campioni di soluzione adopravamo le solite pipette due volte ricurve; ma usavamo di riscaldarle a circa 60° prima di introdurle nella soluzione, a fine di evitare variazioni di temperatura nelle zone della soluzione dove avveniva l'estrazione.

La preparazione dei miscugli posti a reagire venne fatta nei modi più variati, come apparisce dalla tabella che segue: così talvolta ponevamo a reagire acido borico, soda caustica ed acqua; talvolta partivamo da un borato preformato con aggiunta della base o dell'acido ecc., per constatare se si giungeva agli stessi punti o a punti di una stessa curva per tutte le vie possibili, il che meglio ci assicurava di aver raggiunto l'equilibrio. Del resto, ci assicuravamo di aver raggiunto l'equilibrio analizzando campioni estratti successivamente. Nella tabella seguente riportiamo anche gli intervalli di tempo, durante i quali ciascun miscuglio veniva tenuto in agitazione in termostato.

[1] Cfr. Gmelin Kraut's, Handb. d. anorg. Chemie, Bd. II, Abt 1 (1906), pag. 415 e seguenti.

TABELLA II.

Numero d'ordine	Sostanze poste a reagire	Tempo di agitazione in termostato	Soluzione Na_2O %	Soluzione B_2O_3 %	Soluzione H_2O %	Resto Na_2O %	Resto B_2O_3 %	Resto H_2O %	Corpo di fondo
1	Acido borico, Acqua	6 giorni	—	7.39	92.61	. . .	. . .	. . .	
2	Acqua, Borace, Ac. borico	2 »	0.58	9.63	89.79	0.24	39.96	59.80	H_3BO_3
3 *a*)	» » »	4 »	1.38	13.68	84.94	. . .	. . .	. . .	
3 *b*)	» » »	5 »	1.39	13.92	84.69	0.44	43.20	56.36	»
4 *a*)	Acqua, Soda caustica e	10 »	2.91	20.13	76.96	. . .	. . .	. . .	
4 *b*)	Acido borico	11 »	2.92	20.26	76.82	1.21	42.47	56.32	»
5 *a*)	Acqua, Soda caustica e	5 »	3.22	21.06	75.72	. . .	. . .	. . .	
5 *b*)	Acido borico	9 »	3.08	20.74	76.18	0.88	44.03	55.09	»
6 *a*)	Acqua, Soda caustica e	5 »	3.44	22.51	74.05	. . .	. . .	. . .	
6 *b*)	Acido borico	6 »	3.41	22.29	74.30	3.26	45.60	51.40	H_3BO_3 1-5-10
7	Acqua, Soda c., Ac. borico	2 »	3.44	22.17	74.39	. . .	. . .	. . .	
8	Acqua, Borace, Ac. borico	6 »	3.40	22.59	74.01	5.44	42.05	52.51	»
9 *a*)	Acqua, Soda caustica e	9 »	3.36	21.67	74.97	. . .	. . .	. . .	
9 *b*)	Acido borico	11 »	3.22	21.94	74.74	7.57	46.45	45.98	1-5-10
10	Acqua, Borace, Ac. borico	3 »	4.40	23.76	71.84	8.36	46.91	44.73	»
11	Acqua, Soda c., Ac. borico	3 »	4.46	24 07	71.47	11.10	59.40	29.50	»
12	Acqua, Soda, Ac. tetraborico	7 »	5.10	25.62	69.28	8.56	46.80	44.64	»
13	Acqua, Soda c., Ac. borico	1 »	5.45	27.08	67.47	10.71	58.83	30.46	»
14 *a*)	» » »	8 »	6 11	28.94	64.95	. . .	. . .	. . .	
14 *b*)	» » »	9 »	6.08	28.38	65.54	8.90	48.82	42.28	»
15 *a*)	Acqua, Borace e Acido bo-	7 »	6.38	29.13	64.49	. . .	. . .	. . .	
15 *b*)	rico.	8 »	6 29	28.77	64.94	6 80	33,23	59.97	»
16	Acqua, Soda caustica 1-5-10	9 »	6.35	29.50	64.15	—	—	—	
17	» » »	2 »	7.15	30.26	62.59	8.84	45.43	45.71	»
18 *a*)	Soda, Acido borico,	3 »	8.41	33.77	57.82	—	—	—	
18 *b*)	Acqua	5 »	8.29	33.57	58.14	9.35	44.73	45.92	»
19 *a*)	» » »	3 »	8.84	34.91	56.25	—	—	—	
19 *b*)	» » »	4 »	8.53	34.31	57.16	9.52	44.04	46.44	»
20	Acqua, Soda c., Ac. borico	3 »	11.29	41.47	47.24	12.83	47 81	39.36	1-5-10 + 1-2-5
21 *a*)	Acqua, Soda caustica e	4 »	11.14	39.90	48.96	. . .	. . .	. . .	
21 *b*)	Acido borico	6 »	11.02	39.90	49.08	18.83	46.69	34.84	1-2-5

Segue: TABELLA II.

Numero d'ordine	Sostanze poste a reagire	Tempo di agitazione in termostate	Soluzione			Resto			Corpo di fondo
			Na_2O %	B_2O_3 %	H_2O %	Na_2O %	B_2O_3 %	H_2O %	
22 *a*)	Acqua, Soda caustica, Bo-	4 giorni	8.42	28.05	63.53	...	...	...	1-2-5
22 *b*)	race, Acido borico......	5 »	8 32	27.98	63.70	15.25	39.13	45.62	»
23 *a*)	Acqua, Borace e Acido bo-	9 »	8.15	27.59	64 26	...	...	...	
23 *b*)	rico...............	11 »	7.96	27.11	64.93	8.68	28.88	62.44	»
24 *a*)	Acido borico, Borace e	9 »	7.77	25.70	66 53	...	...	...	»
24 *b*)	Acqua............	11 »	7.77	25.73	66.50	12.18	33.52	54.30	»
25	Acqua, Soda c., Ac. borico	3 »	7.57	24 41	68 02	...	...	...	
26	» » »	2 »	6.84	20.40	27.24	...	...	...	
27	» » »	14 »	6 48	19.75	73.77	10.95	28.59	60.46	»
28	Acqua, Borace, Ac. borico	2 »	5.77	16.58	77.65	13 94	32.23	53.83	»
29	Acqua, Soda c., Ac. borico	4 »	5.65	14.89	79.46	10.80	26.17	63.03	»
30	Acqua, Soda c., 1-5-10...	16 »	5 60	14.32	80.08	13.79	35.94	50.27	»
31 *a*)	Acqua, Borace.......	3 »	5.14	11.75	83.11	...	...	...	
31 *b*)	» »	4 »	5.07	11.72	83.21	12.86	29.18	57.96	»
32 *a*)	Acqua, Soda caustica e	24 ore	5 03	11.16	83.81	...	...	...	
32 *b*)	Acido borico........	48 »	5 15	11.77	83.08	18.55	42.11	39.34	»
33	Acqua, Soda c., Borace..	3 giorni	5.78	10.83	83.39	14.68	32.52	52.80	»
34 *a*)	» » » ..	3 »	6.95	11.42	81.63	...	...	...	
34 *b*)	» » » ..	4 »	6.95	11.50	81 55	17.50	38.45	44.05	»
35	» » » ..	3 »	10.32	15.26	74.42	17 86	37.33	44.81	»
36	Acqua, Borace, Ac. borico	2 »	10.48	15.29	74.23	16.59	33.43	49.98	»
37 *a*)	Acqua, Soda caustica e	4 »	11.48	16.57	71.95	...	...	...	
37 *b*)	Borace............	5 »	11.58	16.62	71.80	18.89	40.57	40.54	»
38 *a*)	»	3 »	13.03	18.54	68.43	...	...	...	
38 *b*)	»	4 »	12.97	18.62	68.41	18.04	35.88	46 08	»
39	Acqua, Soda c., Ac. borico	4 »	13.17	18.57	68.26	...	...	...	
40	Acqua, Soda c., Borace..	2 »	13.10	18.65	68.25	...	...	...	
41 *a*)	Acqua, Soda c., Ac. borico	3 »	13.36	18.90	67.74	...	...	...	
41 *b*)	» » »	5 »	13.31	18.75	67.94	18.54	37.57	43.89	»
42 *a*)	Acqua, Soda caustica e	6 »	13.45	19.27	67.28	...	...	...	
42 *b*)	Borace............	8 »	13.51	19.10	67.39	18.58	37.98	43.44	»

Segue: TABELLA II.

Numero d'ordine	Sostanze poste a reagire	Tempo di agitazione in termostato	Soluzione Na_2O %	Soluzione B_2O_3 %	Soluzione H_2O %	Resto Na_2O %	Resto B_2O_3 %	Resto H_2O %	Corpo di fondo
43	Acqua, Soda c., Ac. borico	2 giorni	14.06	19.77	66.17	...	...	...	
44 *a*)	Acqua, Soda caustica . . .	5 »	14.16	19.98	65.86	...	...	...	
44 *b*)	Borace	7 »	14.12	19.97	65.91	17.62	33.85	48.53	1-2-5
45	» » »	4 »	16.03	22.61	61.36	...	...	...	
46 *a*)	Borace, Soda caustica e	3 »	15.89	22.47	61.64	...	...	...	
46 *b*)	Acqua	5 »	16.13	23.05	60.82	19.17	37.66	43 17	»
47 *a*)	» » »	8 »	16 41	23.38	60.20	...	...	...	
47 *b*)	» » »	9 »	16.38	23 38	60.24	16.93	27.28	55.79	»
48 *a*)	Acqua, Soda caustica e	2 »	16.32	23.03	60.65	...	...	...	
48 *b*)	Acido borico	10 »	16.44	23.45	60.11	18.99	36.16	44.85	»
49	» » »	3 »	17.20	23 87	58.93	...	...	...	
50	Acqua, Soda, Ac. tetraborico	10 »	18.49	25.94	65.57	20.55	39.91	39.54	»
51	Acqua, Soda c., Ac. borico	27 »	19.43	27.09	53.48	20.77	40.63	38.60	»
52	» » »	4 »	21.25	31.06	47.69	21.38	43.45	35.17	»
53 *a*)	» » »	12 »	22 39	32.85	44 76	...	...	...	
53 *b*)	» » »	13 »	22.21	32.49	45.30	22.36	45 45	32.19	»
54	Soda c., Acqua, Ac. borico	60 »	22.21	32.17	45.62	22.35	40.87	36.88	»

Come apparisce da questi risultati (¹), a 60° noi troviamo come fasi stabili dopo l'H^3BO^3, il pentaborato decaidrato 1-5-10, ed il diborato pentaidrato (borace con 5 molecole di acqua) 1-2-5.

Dobbiamo notare che il punto invariante tra il composto 1-5-10 e l' 1-2-5 è dato dalla sola esperienza 20. Tentammo ripetutamente e per diversissime vie di riottenerlo, ma sempre il miscuglio posto in termostato finiva per divenire semisolido, in modo che era impossibile estrarre il campione della soluzione in quantità adatta per l' analisi. Stiamo ancora facendo esperienze in proposito e torneremo su questo in seguito quando completeremo il presente diagramma. Anche è difficilissimo ottenere il punto invariante tra il diborato (1-2-5) ed il metaborato il quale, come risulta dalle esperienze che abbiamo in corso, segue immediatamente al diborato.

(¹) Il diagramma che si può ricavare colle solite regole grafiche da questi resultati verrà pubblicato insieme ai diagrammi delle esperienze che abbiamo in corso.

Per quanto riguarda la composizione delle fasi solide, essa risulta con molta precisione dalle linee di coniugazione le quali convergono con tutta regolarità nei punti rispondenti all'1-5-10 e all'1-2-5. Tuttavia, poichè le convergenti dell'1-5-10 formano un angolo assai acuto e, come è noto, questo può sempre ingenerare dubbî sull'esattezza delle conclusioni, volemmo a maggior sicurezza preparare il composto 1-5-10, e analizzarlo dopo averlo separato dalla soluzione ed asciugato rapidamente tra carta da filtro.

I resultati che ottenemmo sono quelli delle esperienze 11 e 13 (Resto) i quali concordano bene con la composizione teorica dell'1-5-10 (vedi tabella I), dentro i limiti degli inevitabili errori sperimentali. Dalla esperienza 11 si ricava poi anche la composizione della soluzione del composto 1-5 nell'acqua pura; non così dalla esperienza 13 nella quale si aveva un eccesso dei due componenti in soluzione. Giova notare che appunto allo scopo di avere la composizione della soluzione la esperienza 11 venne condotta nel modo seguente: Si preparò il composto mischiando acido borico, soda caustica ed acqua in quantità pesate; poi si decantò la soluzione sovrastante, si lavò per decantazione il precipitato, si aggiunse acqua e si lasciò in termostato sino ad equilibrio; allora si analizzò la soluzione, e quindi, dopo separato ed asciugato, il corpo di fondo.

Invece, nella esperienza 13 non si lavò per decantazione; e solo si asportò il corpo di fondo, si asciugò e si analizzò.

I valori trovati colla esperienza per la composizione della soluzione dell'1-5 in acqua pura, concordano bene con quelli che si possono ricavare dal diagramma coi mezzi grafici consueti: da quei valori si ha che la solubilità di 1-5 nell'acqua pura a 60° è data da 39,92 di sale anidro in 100 p. di acqua.

Anche per l'1-2-5 si cercò sperimentalmente la composizione della sua soluzione in acqua pura partendo da borace puro ed acqua. I valori che si ottennero sono quelli della esperienza 31; ed essi pure concordano pienamente con quelli ricavabili con mezzi grafici. La solubilità del borace a 60° è data perciò da 20,18 di sale anidro in 100 parti di acqua [1].

Come abbiamo già detto, riferiremo prossimamente sulle esperienze attualmente in corso, dalla curva del diborato a quella della soda caustica.

[1] Horn und van Wagener (Amer. Ch. Journ. *30*, 347, an. 1903) dànno per punto di trasformazione dell'1-2-10 in 1-2-5 circa 60°, e a circa 60° trovano 20 gr. di sale anidro in 100 grammi di acqua (confr. Landolt-Börnstein, Physikalisch-Chemische Tabellen, 1905); Van't Hoff e Blasdale (Ber. Berl. Acad., 1905, pag. 1086) trovarono dilatometricamente, come punto di trasformazione, 60°.

Embriologia vegetale. — *Contribuzione all'embriologia delle Euphorbiaceae.* Nota del dott. E. Carano [1], presentata dal Socio R. Pirotta.

Le specie di *Euphorbiaceae* finora esaminate dal punto di vista embriologico si comportano in due modi differenti: le une, e sono la grande maggioranza, producono un gametofito a 8 nuclei, ordinati nell'interno del sacco embrionale nel modo tipico per le Angiosperme; le altre, ancora scarse in numero (*Euphorbia procera*, *E. palustris*, *E. virgata*, *Acalypha* sp.), producono invece un gametofito in cui i nuclei sono precisamente il doppio del caso ordinario, e cioè 16, così disposti da formare quattro triadi all'estremità dei due diametri longitudinale e trasversale del sacco, ed un nucleo secondario nel centro, risultante dalla fusione di quattro di essi.

Il Modilewski, al quale dobbiamo le prime osservazioni sulle *Euphorbiaceae* a gametofito 16-nucleato, esprimeva in uno dei suoi lavori [2] il parere che, estendendo le ricerche a nuove specie di questa famiglia, sarebbe stato possibile trovarne di quelle in cui fossero riuniti i caratteri dell'una e dell'altra delle due serie. Ed accennava brevemente ad *Euphorbia lucida*, riserbandosi però di sottoporla ad un più accurato esame prima di darne un giudizio definitivo.

A me sembra, però, che un caso siffatto non meriterebbe quell'interesse che potrebbe invece meritare un altro in cui si presentasse un comportamento intermedio fra le due serie. Ora questo caso è realizzato in *Poinsettia pulcherrima*, una specie da noi diffusamente coltivata per la vivacità del colore delle sue brattee, e che qualche anno fa è stata oggetto di studio da parte della signorina Donati [3].

Il gametofito 16-nucleato nelle specie di *Euphorbia* suddette ripete la sua origine da ciò, che fra i quattro nuclei provenienti dalla divisione riduzionale della cellula madre delle megaspore, non si formano membrane; sicchè, non individualizzandosi quattro distinte megaspore, i nuclei di riduzione rimangono nella medesima cavità, e, per mezzo di due successive divisioni, ne producono in definitiva sedici.

[1] Lavoro eseguito nel R. Istituto botanico di Roma.

[2] Modilewski I., *Ueber die anomale Embryosackentwicklung bei Euphorbia palustris L. und anderen Euphorbiaceen.* Berichte d. deutsch. bot. Gesellsch., Bd. XXIX, 1911, pag. 433.

[3] Donati G., *Ricerche embriologiche sulle Euphorbiaceae.* Annali di botanica, vol. XI, 1913.

In *Poinsettia pulcherrima* le cose procedono, nel caso più frequente, secondo il modo tipico: vi è cioè un'unica cellula madre che, dividendosi riduzionalmente, genera quattro megaspore disposte in pila, tre delle quali vanno a male, ed una, l'inferiore, mediante tre divisioni dà luogo ad un gametofito 8-nucleato. Eccezionalmente però le megaspore, separate sempre da distinta parete e disposte piuttosto che in pila, in tetrade, germinano tutte e quattro, accennando così alla produzione di quattro sacchi embrionali distinti. In altri casi due megaspore germinano e due degenerano; in altri infine ne germinano tre; in una parola in *Poinsettia pulcherrima* vi è la tendenza a sviluppare più di una delle megaspore provenienti dalla medesima cellula madre.

Ora se noi stabiliamo un confronto fra il comportamento di *Euphorbia procera*, *palustris* etc., e quello della nostra pianta, vediamo che esiste una notevole corrispondenza: in entrambi i casi la cellula madre produce quattro nuclei di riduzione, i quali però, mentre nel primo caso, non essendo separati fra loro da pareti, dànno origine ad un gametofito complessivo di 16 nuclei, nel secondo, essendo separati da pareti, generano quattro gametofiti distinti.

In un prossimo lavoro spero di dare maggiori dettagli in proposito, ed anche le figure illustrative.

Fisiologia vegetale. — *Sui procedimenti culturali suscettibili di provocare un aumento di zucchero negli steli del Mais.* Nota di O. Munerati e G. Mezzadroli, presentata dal Socio R. Pirotta.

Come è notorio, l'estrazione dello zucchero dal granturco è stata oggetto di numerosi studî e tentativi, che risalgono allo scorcio del secolo XVIII e inizio del secolo XIX (*); nel 1839 Pallas affacciava poi nettamente il concetto di asportare le spiche immature come mezzo per accumulare una maggior quantità di zucchero nello stelo [1]; nel 1879 Dureau parlava di una industria dello zucchero di granturco negli Stati Uniti [2].

(*) È opportuno di ricordare che Berti Pichat rivendicava la priorità dell'idea all'italiano Mirabelli (*Istituzioni di agricoltura*, Torino, vol. IV). Si veggano inoltre altre notizie in Legier E., *Histoire des origines de la fabrication du sucre* (*Essais sur la fabrication du sirop de maïs*), Paris 1901; Borgnino G. C., *Cenni storico-critici sulle origini dello zucchero in Italia*, Bologna 1910; Stohmann, *Handbuch der Zuckerfabrikation*, Berlin 1874.

[1] Compt. rend. Académie sciences, tome VII, pag. 692.

[2] Dureau G., *L'industrie du sucre de sorgho et de maïs aux Etats Unis*. Journal des fabricants de sucre, 26 mars 1879.

Nel 1906 il chimico americano F. L. Stewart di Murrysville (Pensilvania) brevettava come nuovo il procedimento culturale preconizzato da Pallas, di asportare cioè le spiche allorchè « l'amido granulare comincia a depositarsi nelle cariossidi, ossia quando la sostanza liquida contenuta nel seme comincia a prendere un aspetto opaco o lattescente » (1). Più tardi lo Stewart completava il suo metodo suggerendo la concomitante asportazione della infiorescenza maschile.

La comunicazione dello Stewart doveva mettere evidentemente il campo industriale a rumore. Si parlava già di una Società costituitasi nella stessa Pensilvania, con un capitale di 10 milioni di dollari; di una prima grande fabbrica a Pittsburg (2) e di un'altra a Cuba. Per i climi caldi littoranei degli Stati Uniti e della Repubblica Argentina si pronosticavano due raccolti all'anno, con prodotti di 1300 e più quintali per ettaro di steli, e quindi con un ricavo, per ettaro, di 200 quintali di zucchero, 250 ettolitri di alcool e 250 quintali di cellulosa come sottoprodotto, cioè, per il solo zucchero, il quadruplo di quanto possano dare la barbabietola e la canna: la detronizzazione di queste culture era frattanto vaticinata come verificabile a non lunga scadenza, e nell'Europa il monopolio della produzione dello zucchero sarebbe passato dalle regioni del nord a quelle del sud.

Era naturale che in ogni paese, dove la cultura del granturco è praticata con successo, si ripetessero le prove, e che le riviste agronomiche e tecnico-industriali le andassero poi man mano segnalando. Le prime indagini in Europa, che a noi consti, furono compiute in Ungheria da G. Doby, con resultanze molto incoraggianti (3); seguirono, sempre in Europa, le ricerche di E. Heckel a Marsiglia, pure con esito lusinghiero (l'A. si servì di una varietà di *mais* a grande sviluppo, il granturco gigante di Serbia, mentre più tardi Heckel considerava particolarmente degno di attenzione il granturco della Costa d'Avorio, che contiene normalmente il 10 % di saccarosio) (4); da segnalarsi, ugualmente in Francia, le indagini di Ph. Vilmorin

(1) Stewart F. L., *Verfahren zur Erzeugung von Maiszucker*. Zeitschrift des Vereins der Deut. Zuckerindustrie, LVI Jahrg. (1906), pag. 567.

(2) *The utilizazion of maize plant* (Indian Corn) *for sugar*, ecc., The American Sugar Industry, vol. XII (1910), n. 1, pag. 12.

(3) Doby G., *Zucker-, Cellulose und Alkoholfabrikation aus Mais*. Chemiker Zeitung, XXXIV Jahrg. (1910), n. 149, pag. 1330.

(4) Heckel E., *De l'influence de la castration mâle, femelle et totale sur la formation du sucre dans les tiges du maïs et du sorgho sucré* (Compt. rend. Acad. des sciences, tome 155, 1912, n. 16, pag. 686); *De la castration chez les végétaux, son influence sur le maïs et les sorghos au point de vue de la production du sucre* (Revue scientifique, LI (1913), n. 8, pag. 225); *Sur la castration mâle du maïs géant de Serbie* (Compt. rend. Académie des sciences, tome 159 (1914), I, pag. 16.

ed F. Levallois con deduzioni poco ottimistiche (¹): ad ogni modo gli A.A. troverebbero preferibile le varietà a seme zuccherino (*Z. M. saccharata*). Nelle Indie Olandesi N. Marx conduceva una serie di esperienze che lo portavano ad affermare come il succo ricavabile dal granturco, sia per il basso tenore in zucchero, sia per le sue impurità, non può valorizzarsi industrialmente (²). Negli Stati Uniti quel Ministero di Agricoltura incaricava C. F. Clark di stabilire, con studî varî, la importanza del problema, e lo sperimentatore concludeva che, pur giungendo l'asportazione delle spiche immature ad aumentare di parecchio, particolarmente in alcune varietà, il contenuto zuccherino dello stelo, la qualità industriale del prodotto è molto al di sotto di quella della canna (³).

Vanno infine citate le esperienze compiute su larga scala in Argentina da I. Bohle (che si servì, per le sue indagini di natura industriale, di una piccola fabbrica di zucchero a Tucuman), il quale A. concludeva un suo rapporto prevedendo « molto lontano ancora il giorno in cui si possa parlare di fabbricazione di zucchero di mais nell'Argentina » (⁴).

* * *

Spinti dal desiderio di portare un modesto e occasionale contributo allo studio del problema nella bassa valle Padana, dove il granturco trova delle condizioni particolarmente propizie di sviluppo, credemmo di intraprendere alcune indagini tanto nel 1913 quanto nel 1914.

Esperienze del 1913.

Nel 1913 ponemmo a raffronto la facoltà saccarigena del granturco gigante di Serbia (suggerito da Heckel) e di una delle più reputate varietà, pure a grande sviluppo, della plaga padana, il « friulotto ».

Da un appezzamento uniforme, nel quale le due varietà erano state espressamente seminate ai primissimi di aprile, prelevammo, il 28 luglio, un campione per un primo saggio; e nello stesso giorno, a varii gruppi alterni di piante, destinate ad analisi successive, vennero asportate rispettivamente: le sole spiche (a grano immaturo); la sola infiorescenza maschile; le spiche e l'infiorescenza maschile insieme. Un altro gruppo si tenne evidentemente come testimonio.

(¹) Vilmorin Ph. e Levallois F., *Contribution à l'histoire du sucre de maïs*, Revue scientifique LI (1913), I, 13, pag. 396.

(²) Marx N., *Sugar from corn*, The Louisiana Planter XLIX (1912), 14, pag. 225.

(³) Clark C. F., *Preliminary report on sugar production from maize*. U. S. Dept. of Agriculture, Bureau of Plant Industry, Circ. 111, febr. 1913.

(⁴) Bohle I., *Die Fabrikation von Rohrzucker aus Mais*. Die deutsche Zuckerindustrie, XXXIX Jahrg. (1914), n. 24, pag. 528.

Una lieve grandinata, sopraggiunta verso la metà di agosto, laciniava parzialmente il fogliame, così che l'esperienza veniva alquanto a perdere del suo valore.

Un'analisi fu però egualmente eseguita il 22 settembre. I risultati di essa figurano nel qui unito prospetto, nel quale, per brevità, sono tralasciate le indicazioni relative al peso delle piante, lunghezza degli steli, ecc.:

	Granturco locale « Friulotto »					Granturco gigante di Serbia				
	Analisi il 28 luglio 1913 (all'inizio della prova)	Analisi il 22 settembre 1913				Analisi il 28 luglio 1913 (all'inizio della prova)	Analisi il 22 settembre 1913			
		Piante normali	Asportazione infiorescenza maschile	Asportazione spiche	Asportazione spiche e infior. maschile		Piante normali	Asportazione infiorescenza maschile	Asportazione spiche	Asportazione spiche e infior. maschile
	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%
Grado Brix nel sugo	8.5	6.2	7.8	11.5	11.70	6.95	8	6.7	11	12.1
Saccarosio . .	1.26	1.75	2.92	5.46	6.12	1.67	1 33	1.72	5.15	4.56
Purezza	14.8	28.20	37.40	47.4	52.30	24.0	16.6	25.6	46.8	37.6
Riduttori . . .	2.45	1.22	1.56	2	1.56	2.30	1.26	1.79	1.40	1.56
Sostanza secca % steli. . .	19.37	21.30	26	25.45	24.83	15.61	21.38	22.17	24.64	26.90
Ceneri % sost. secca	4.68	5.79	5.93	4.46	4.50	5.37	4.84	4.39	3.67	3.76
Ceneri % steli	0.91	1.22	1.54	1.13	1.11	0.84	1.03	1.41	0.90	1.01

Altre determinazioni, fatte successivamente per il solo saccarosio, palesarono una degradazione ancora più rapida. Anche nelle condizioni più propizie (asportazione delle spiche e della infiorescenza maschile) lo zucchero era mescolato a materiali eminentemente melassigeni, e tali quindi da togliere ogni valore industriale alle piante.

Esperienze del 1914.

Nel 1914 operammo col solo granturco « friulotto », semplificando le prove per la parte analitica, ma complicando le combinazioni dei trattamenti, più per determinare come avrebbero reagito le piante, che non per un concetto di eventuale applicazione pratica. Ai gruppi, di cui alle prove del 1913 (asportazione spiche, asportazione infiorescenza maschile, asportazione tanto delle spiche quanto delle infiorescenze maschili), ne aggiungemmo altri costituiti: da piante nelle quali le spiche vennero asportate senza il loro rivestimento bratteale; da piante denudate completamente; da piante private di foglie, di infiorescenze maschili e dell'asse carnoso senza brattee. L'involucro bratteale, purchè la spica vi sia tolta per una incisione laterale, continua a mantenersi verde più o meno a lungo (sino a oltre 15 giorni).

Il 5 settembre si procedeva ad una analisi per il saccarosio, la sostanza secca e la purezza, e si ottenevano le seguenti cifre:

	Saccarosio	Sostanza secca	Purezza
a) Controllo	6.49	8.6	75.4
b) Asportazione infiorescenze maschili	8.03	10.0	80.3
c) Asportazione infiorescenze maschili e spiche, compreso involucro bratteale	9.67	12.9	74.9
d) Asportazione infiorescenze maschili e dell'asse carnoso della spica, lasciando l'involucro bratteale	10.99	12.9	85.1
e) Denudamento completo	1.41	3.3	42.8
f) Asportazione infiorescenze maschili, foglie e spiche senza brattee (denudamento completo lasciando solo involucro bratteale)	2.83	5.4	52.4

L'accumulo di saccarosio nello stelo fu molto superiore in confronto al 1913. Apparirebbe inoltre manifesta l'azione esercitata dall'involucro bratteale delle spiche come organo di assimilazione.

Per ricontrollare l'osservazione a questo ultimo riguardo, ed anche perchè, come dicevamo, una delle argomentazioni dei fautori della utilizzazione del *mais* quale pianta saccarifera è che di questa cultura possano farsi due raccolti all'anno, credemmo opportuno di eseguire anche una prova sul granturco in secondo raccolto.

Varietà sperimentata: un cinquantino, seminato nella seconda metà di luglio in un podere del prof. A. Piva di Rovigo. Asportazione delle spiche con l'involucro bratteale; delle spiche senza brattee; denudamento completo dello stelo ecc., ai primi di ottobre. Nella seconda metà dello stesso mese sopravvenivano dei fortissimi freddi e qualche brinata che provocarono un parziale essiccamento delle foglie, per cui forzatamente lo scopo della esperienza poteva ritenersi quasi frustrato. Ma poichè bastava mettere assieme solo alcune cifre comparative, facemmo egualmente, al 24 ottobre, una determinazione per il saccarosio e per la sostanza secca.

Ecco le cifre ottenute:

	Saccarosio	Sostanza secca
a) Controllo	0.51	4.4
b) Asportazione infiorescenza maschile e spiche insieme con le brattee	3.35	9.9
c) Asportazione infiorescenza maschile e spiche lasciando involucro bratteale	3.73	10.5
d) Denudamento completo	0.28	5.3
e) Denudamento completo lasciando involucro bratteale	0.60	6.0

Come era da prevedersi, il titolo in saccarosio si palesò molto basso, ma si mantenne il parallelismo nella facoltà saccarigena dei singoli gruppi.

CONCLUSIONI.

Mentre ci proponiamo di continuare le nostre osservazioni negli anni venturi, possiamo sentirci autorizzati, dalle prove di un biennio, a formulare le seguenti conclusioni:

1°) Rimane ancora una volta confermato (se ve ne fosse stato bisogno) che con l'asportazione delle spiche immature (secondo il procedimento Pallas-Stewart) la pianta di granturco reagisce accumulando una quantità più o meno notevole di saccarosio nello stelo, e che l'aumento è maggiore quando si asporti contemporaneamente anche l'infiorescenza maschile. Una delle varietà considerata da Heckel come preferibile, il granturco gigante di Serbia, non ha mostrato di possedere una facoltà saccarigena superiore ad una delle varietà ad alto sviluppo (Friulotto) comunemente coltivate nella bassa valle Padana.

2°) Risulterebbe, come fatto nuovo, che, rimovendo la spica senza asportare l'involucro bratteale, si eleva, limitatamente, la facoltà della pianta di accumulare zucchero Per quanto però detta influenza favorevole possa trovare la sua facile spiegazione, è prudente di non considerarla ancora come definitivamente accertata.

3°) L'asportazione della infiorescenza maschile ad avvenuta fecondazione porta, anche in piante normali (cioè non private dello loro spiche), ad un aumento discreto di zucchero nello stelo: le nostre prove, compiute contemporaneamente a quelle di Heckel, avvalorano frattanto le resultanze di questi. La cimatura praticata per consuetudine in molte plaghe italiane e decisamente riprovata dagli agronomi, ma che Heckel troverebbe consigliabile per il mezzodì della Francia quale mezzo per aumentare il valore alimentare delle « canne » di granturco [1], verrebbe ad essere così riabilitata: anche questa conclusione va data però con tutto il dovuto riserbo.

4°) La facilità con la quale, in plaghe normalmente non irrigabili come la bassa valle Padana, il granturco va soggetto ai danni del secco, e la caduta ricorrente della grandine mettono il granturco, come pianta zuccherifera, in condizioni di sostanziale inferiorità di fronte alla barbabietola; nè le varietà così dette cinquantine, da seminarsi in secondo raccolto dopo il frumento, sembrano offrire requisiti apprezzabili, anche per le eventualità sinistre cui possono andare soggette. Tanto valga per il *mais* considerato dal punto di vista culturale.

5°) Quanto alla utilizzazione del granturco per l'estrazione industriale dello zucchero, la presenza di rilevanti impurità melassigene, difficilmente eliminabili, dà alla pianta, almeno per le varietà di cui oggi si dispone,

[1] C. R. Ac. sciences, Tome 159, p. 16.

un valore pressochè negativo: opinione, questa, che affacciarono negli ultimi tempi autorevoli studiosi americani, i quali hanno creduto doveroso di attenuare gli entusiasmi e le troppe rosee profezie dei sostenitori delle idee dello Stewart (*).

Patologia vegetale. — *Sulla bacteriosi del cetriolo in Italia.* Nota preliminare del dott. G. B. TRAVERSO [1], presentata dal Socio G. CUBONI.

Nel maggio dello scorso anno il prof. C. Galimberti, direttore della Cattedra ambulante di agricoltura in Chioggia, inviava al prof. P. A. Saccardo, l'illustre micologo dell'Università di Padova, alcune foglie e frutti di cetriolo ammalati perchè vedesse se erano invasi da qualche fungo parassita, e faceva notare che la malattia si presentava con carattere epidemico e minacciava danni gravissimi. All'esame microscopico non fu possibile di rilevare la presenza di funghi parassiti che si dovessero ritenere causa della malattia, la quale invece sembrava doversi piuttosto attribuire ad infezione bacterica od a disturbi gravi delle funzioni di assorbimento e nutrizione.

Dato l'interesse che il fenomeno presentava, tanto dal lato pratico quanto dal lato scientifico, perchè una tale malattia non si trovava descritta nei trattati di fitopatologia, ben volentieri aderii all'invito, fattomi dal

(*) La questione sollevata al Congresso di chimica applicata di Washington-New York del 1912 in occasione della discussione di una comunicazione di D. Gibbs, *Production of alcohol and sugar from sap of the nipa palm* (Atti Congresso, vol. III, pag. 13), portava ad esplicite dichiarazioni di H. C. Prinsen Geerligs, antico direttore del Laboratorio dei fabbricanti di zucchero di Giava e noto fra i più competenti e autorevoli. Non ostante le affermazioni di Stewart, secondo le quali i succhi derivanti dagli steli di granturco si possono, con un processo speciale, facilmente depurare (brevetto Stewart in Zeit. des Vereins der Deutsche Zuckerindustrie, sept. 1912, pag. 1166), il Prinsen Geerligs informava che « la grande quantità di gomme e altre impurità sembrano impedire la cristallizzazione dello zucchero, per cui si ottiene una *massa cotta* della consistenza di un pudding » (Atti, vol. XXVII, pag. 60). Il Prinsen Geerligs ribadiva più tardi gli stessi concetti in uno dei più accreditati periodici della Germania (Die deutsche Zuckerindustrie, XXXVIII Jahrg., 1913, n. 43, pag. 933).

Aggiungasi che le fabbriche, di cui si annunciava l'impianto, non sarebbero esistite mai, perchè la Società, costituitasi a Pittsburg per lo sfruttamento dei brevetti Stewart, si sciolse senza aver affrontato il problema della fabbricazione dello zucchero (Sucrerie indigène et coloniale, tome LXXXIII, 1914, I, nn. 10 e sgg.). Si parla oggi nuovamente di quattro o cinque fabbriche in corso di costruzione nella Florida (Sucrerie indigène, 1914, I, pag. 299), per le quali non è tuttavia possibile di emettere un giudizio. Veggasi anche il pensiero pessimistico di Parow, dell'Istituto di fermentazione di Berlino (*Stärkesirup und Stärkezucker aus Mais in Nordamerika.* Centr. für Zuckerindustrie, 1913-1914, n. 20, pag. 706).

[1] Lavoro eseguito nella R. Stazione di patologia vegetale di Roma, febbraio 1915.

prof. Galimberti, di recarmi sul posto per fare le opportune osservazioni e raccogliere materiale per lo studio della malattia.

Debbo premettere, per spiegare l'allarme che la comparsa di questa malattia aveva suscitato, che la cultura del cetriolo viene praticata su larga scala nei dintorni di Chioggia, e precisamente in quella lingua di sabbie e dune costiere che si estende tra la punta di Sottomarina e la foce del Brenta, attorno a Brondolo. Riservandomi di fornire, nel lavoro definitivo, maggiori particolari intorno a questa cultura orticola, mi limito qui a far notare che la superficie coltivata a cetriolo nei pressi di Chioggia, secondo i dati gentilmente fornitimi dal prof. Galimberti, si può valutare a circa 250 ettari, con un prodotto medio, per ettaro, di 320 quintali. In complesso si può calcolare un prodotto di 75-85 mila quintali, che vengono quasi tutti esportati in Austria ed in Germania, e che rappresentano un valore di oltre quattro milioni di lire.

Nessuna grave malattia aveva colpito per l'addietro le culture dei cetrioli, le quali pertanto riuscivano assai rimunerative. Solo nel 1913 si ebbe un forte attacco di *Gloeosporium lagenarium*, che deprezzò notevolmente buona parte del prodotto e portò di conseguenza perdite non indifferenti [1]. Nel maggio del 1914 comparve la nuova malattia e si diffuse rapidamente destando serio allarme, il quale crebbe maggiormente nei primi giorni di giugno allorquando, in seguito ad una grandinata, il malanno accelerò la sua marcia invadendo parecchi orti che fino ad allora erano rimasti pressochè immuni.

Fu appunto verso la metà di giugno che io eseguii il sopraluogo, constatando che l'allarme dei coltivatori era purtroppo giustificato, poichè si trattava di una infezione epidemica gravissima. In tutti gli orti i danni della malattia erano evidenti; ed in quelli più gravemente colpiti, le aiuole presentavano un aspetto desolante perchè, invece di essere ricoperte dalla lussureggiante verzura che caratterizza le *cucurbitacee* in generale, apparivano quasi nude, con pochi ciuffi di verde, come se sopra vi fosse passata una fiammata devastatrice.

Esaminando da vicino le piante malate, potei constatare che le radici ed i giovani germogli non presentavano nulla di anormale, mentre i segni del male apparivano ben evidenti sulle foglie adulte e sui frutti, però con caratteri diversi.

Sulle foglie il primo sintomo del male si può osservare, come aveva acutamente notato il prof. Galimberti, esaminando le piante di buon mattino. Si vedono allora, sulla pagina inferiore delle foglie, delle aree irregolarmente tondeggianti, od angolose se limitate dalle nervature, larghe 2-5 mm.

[1] Vedasi un articolo del prof. C. Galimberti, in « La Venezia agricola » del 28 dicembre 1913.

circa. dalle quali trasuda un liquido incoloro o quasi, al quale, a prima giunta, non si darebbe importanza. Ma in poche ore i segni della malattia diventano ben più appariscenti poichè, durante il giorno, questa sostanza liquida evapora e, come se dispiegasse una forte azione caustica, lascia al suo posto una macchia, dapprima giallognola, poi biancastra ed arida, in corrispondenza alla quale i tessuti muoiono e seccano completamente, diventando fragilissimi e producendo sulla foglia una caratteristica vaiolatura. In seguito a ciò, le foglie colpite perdono ben presto il loro turgore, si affiosciano e si raggrinzano; i tessuti morti si staccano e marciscono, e le foglie sono ridotte a brandelli informi; donde l'aspetto desolante che presenta un'aiuola fortemente colpita dal morbo.

Sui frutti invece, i quali possono venire colpiti dalla malattia in qualsiasi stadio del loro sviluppo, i fenomeni patologici, pur dimostrando identità di origine, sono notevolmente diversi, a motivo della diversa struttura anatomica dell'organo colpito. I frutti colpiti dall' infezione presentano dapprima piccole macchie livide, in corrispondenza alle quali, dopo qualche giorno, si osserva la fuoruscita di una sostanza vischiosa, densa, che a contatto dell'aria assume un colore ambrato e si indurisce formando delle masse gommose dure, di forma sferoidale od irregolare, specialmente se più punti d' infezione sono vicini per modo che le loro escrezioni confluiscano insieme, che raggiungono normalmente un diametro di 1-4 mm., ma che possono talvolta anche arrivare ad un centimetro. Se i frutti sono colpiti dal male nei primi stadii del loro sviluppo, essi rimangono atrofici, deformati e si devono considerare senz'altro come perduti. Se invece i frutti sono colpiti quando hanno già raggiunto uno sviluppo più o meno considerevole, la loro polpa diviene molle, acquosa, partendo dai punti d' infezione e propagandosi questa marcescenza all' intorno, in modo da rendere il frutto inservibile, non solo, ma a sua volta centro d' infezione quando venga posto tra frutti sani.

Dalla osservazione dei caratteri coi quali si presentava la malattia, assurgendo alla indagine intorno alle cause immediate di essa, era logico di concludere fin da principio che la malattia fosse di origine parassitaria.

Se infatti si fosse trattato di alterazioni e squilibrî nelle funzioni di nutrizione della pianta, la malattia avrebbe dovuto colpire prima o l'apparato radicale o le più giovani parti dei cauli in via di accrescimento. Invece questi, come abbiamo detto, erano sani, ed i segni del male erano localizzati sulle foglie adulte e sui frutti. D'altra parte, non essendosi riscontrati nel primo esame funghi parassiti, e non avendo osservato negli orti visitati alcun insetto od altro animale cui si potesse attribuire l'origine del male, io fui indotto a concludere, colle dovute riserve, che doveva molto probabilmente trattarsi di infezione bacterica o *bacteriosi* ([1]). Questa induzione tro-

([1]) Vedasi articolo del prof. C. Galimberti in « La Venezia agricola » del 19 luglio 1914.

vava anche appoggio nel fatto, rilevato dal prof. Galimberti e confermato dai coltivatori presenti, che la prima comparsa del male si era verificata pressochè contemporaneamente in due orti distanti non meno di cinque chilometri l'uno dall'altro, ma appartenenti allo stesso coltivatore: facendo pensare al trasporto di germi per mezzo degli strumenti da lavoro.

Esaminando al microscopio il materiale raccolto, mi fu facile di mettere in evidenza la presenza di numerosi bacterî nelle parti malate e nei prodotti gommosi di escrezione. Per venire però ad una conclusione sicura era necessario di procedere all'isolamento delle specie bacteriche ed alla riproduzione artificiale della malattia. Mi accinsi perciò a tali ricerche nell'Istituto d'igiene della R. Università di Padova, col valido aiuto dell'amico prof. D. Carbone, al quale mi è grato di esprimere qui la mia viva riconoscenza. Servendomi dei frutti malati, che meglio delle foglie si prestavano alle diverse manipolazioni, riuscii ad isolare diverse specie di bacterî, una delle quali molto più abbondante delle altre e quindi verosimilmente causa della malattia. Si trattava di un piccolo bacterio, mobile, fluorescente, non liquefacente la gelatina, del quale mi accingevo allo studio completo, morfologico e biologico, quando sopravvennero le vacanze estive prima, e poi il mio passaggio dall'Istituto botanico di Padova alla Stazione di patologia vegetale di Roma, che mi costrinsero a sospendere il lavoro.

Anche alcune prove di infezione artificiale, iniziate nell'Orto botanico di Padova, non arrivarono a risultati positivi, oltre che per possibili altre cause, per il fatto che, sopraggiunto in principio di luglio un periodo di clima asciutto, evidentemente contrario allo sviluppo del bacterio, anche l'infezione naturale si arrestò completamente, con grande sollievo dei coltivatori.

Noi mi sarei pertanto deciso a pubblicare queste notizie preliminari prima d'aver ripreso e completato lo studio, se a ciò non mi avessero indotto la convinzione di fare cosa utile per i fitopatologi, segnalando questa malattia, ed il fatto che proprio durante questi mesi la stessa malattia veniva studiata dal Burger [1] negli Stati Uniti d'America, e precisamente nello Stato di Florida, dove produce gravi danni da circa un quadriennio. Dalla lettura del lavoro del Burger e dall'esame delle figure che l'accompagnano, non sembra esservi dubbio che si tratti della stessa malattia, la quale sarebbe appunto dovuta ad un bacterio mobile riferibile al genere *Pseudomonas*. Ad ogni modo mi son fatto premura di chiedere materiale di confronto, che spero poter avere per completare, anche sotto questo rapporto, il mio studio.

Nel chiudere questa Nota preliminare, credo opportuno, data la importanza pratica dell'argomento, aggiungere qualche cosa circa i possibili mezzi di lotta contro la malattia. Il prof. Galimberti, che si era occupato di fare

[1] Burger O. F., *Cucumber Rot* (Florida Agricult. Exper. Station, Bull. 121). Gainesville, 1914.

alcune esperienze con trattamenti a base di poltiglia bordolese dal 0,5 all'1 %, con polvere di zolfo e con zolfo ramato all' 1 %, non ebbe a rilevare, secondo quanto mi scrive, alcuna azione vantaggiosa da tali trattamenti. Secondo il Burger però, la poltiglia bordolese avrebbe sensibile efficacia purchè i trattamenti si comincino quando le piante sono molto giovani, con tre o quattro foglie soltanto e vengano ripetuti ogni dieci giorni con grande diligenza. Anche in questo campo, che dal punto di vista pratico è senza dubbio il più importante, mi propongo di fare ulteriori ricerche, se la malattia, come è probabile, farà la sua ricomparsa nella prossima primavera; ed intorno ad esse riferirò nel lavoro definitivo.

Biologia. — *Contributo alla conoscenza dello sviluppo embrionale e post-embrionale degli Scopelini Müller (Saurus griseus* Lowe, *Chlorophthalmus Agassizii* Bp., *Aulopus filamentosus Cuv.* [1]. Nota preventiva di Luigi Sanzo, presentata dal Socio B. Grassi.

I. *Saurus griseus* Lowe.

Dietro tentativi seguìti per più di un biennio, sono riuscito ad operare, in questa specie, con esito positivo la fecondazione artificiale. Per quanto io sappia, è questo il primo esempio di fecondazione artificiale nel gruppo degli Scopelidi.

Le uova fecondate sono galleggianti, sferiche, alquanto opaco-bianchicce per la struttura della capsula ricoverta da un reticolo regolare a maglie esagonali, come nelle uova di *Uranoscopus* descritte dal prof. Raffaele.

Mancano di gocce oleose e di spazio perivitellino. Il loro diametro oscilla da mm. 1,10 a mm. 1,35.

Le medesime uova ho potuto identificare tra il materiale di uova galleggianti pescate nelle acque dello Stretto di Messina nei mesi da giugno a novembre.

Il periodo d' incubazione dura 4 giorni e mezzo.

La larva, appena sgusciata, misura dai 4 ai 4.5 mm. È caratteristica per la presenza di quattro paia di macchie nere disposte, quasi ad uguale distanza, tra le pettorali e l'ano. A metà della coda un quinto paio di macchie, egualmente in nero, ed un sesto all'estremo del tronco.

[1] Dall'Istituto centrale di Biologia marina in Messina del R. Comitato talassografico italiano.

La *pinna primordiale* s'inizia dorsalmente dal capo e gira attorno al corpo sino all'ano, restringendosi leggermente in avanti dell'estremo del tronco caudale.

Sono presenti piccole e membranose *pettorali*.

Si contano 58-60 segmenti: 39-40 addominali, e 19-20 caudali.

La *corda*, come nelle larve di Clupeidi, è ampia e formata da grossi segmenti posti l'uno dietro l'altro.

L'*occhio* è ovale. Ha il maggior diametro leggermente inclinato, con la sua porzione superiore in avanti, sull'asse longitudinale del corpo. Il tappeto corioideo è già formato, e l'occhio risplende di riflessi metallici.

Quasi attigue ed assai sviluppate sono le *vescicole auditive*, ciascuna con evidente rigonfiamento ampollare.

Lateralmente sul tronco si contano 7 *bocciuoli sensitivi*: 6 dal capo all'ano, e 1 sulla porzione caudale.

Il *sacco vitellino* è disteso dal capo sino a livello della 3ª coppia di macchie ventrali; è alquanto rigonfio in avanti.

La *bocca* non è ancora aperta, ma lo diviene nello stesso primo giorno dalla schiusa.

Sono formati lo *scheletro branchiale cartilagineo*, la *cartilagine di Meckel* e le *cartilagini basali del cranio*.

L'*intestino* corre diritto all'indietro, piegando ventralmente ad angolo ottuso poco prima della sua apertura anale. Al tratto di ripiegamento sta addossata la *vescica urinaria*.

Ho potuto allevare le larve fino al 5° giorno dalla schiusa; il materiale vitellino s'è esaurito nei primi tre giorni.

Oltre alle uova ed a le larve ottenute con la fecondazione artificiale, ho potuto, con la pesca nello Stretto rinvenire una serie di stadî ancora larvali fino a quelli di giovanissimi *Sauri*, la quale si connette alle larve ottenute dalle uova in cultura. Così come ho messo in rilievo per altri *Scopelidi*, anche nello sviluppo di questa specie si ha un periodo di accrescimento larvale, a cui segue un periodo contradistinto da riduzione, in grandezza, dell'animale.

Tutta la serie è caratteristica per la presenza di sei paia di macchie peritoneali; delle quali, quattro paia corrispondono a quelle della larva appena sgusciata, e due sono di nuova formazione. Con l'ulteriore sviluppo larvale tali macchie si rendono meno visibili, mentre si accenna del pigmento lungo la parte laterale del corpo. Nelle semilarve e giovani *Sauri*, mentre non appare più il pigmento ventrale, quello laterale ha pigliato il predominio, ed è entrato in iscena quello dorsale. Queste modificazioni coincidono, e molto probabilmente vi hanno rapporti, col cambiamento di *habitat* dell'animale. Le larve infatti sono pelagiche e vengono sotto luce della lampadara; le semilarve in riduzione avanzata capitano invece insieme coi giovani *Saurus* nella pesca con reti a strascico.

Con tale cambiamento di *habitat* è da pigliare in considerazione il mutamento di forma del corpo, di posizione degli occhi, di sviluppo correlativo delle pinne. Il capo ed il tronco, alquanto compressi lateralmente nelle larve pelagiche, divengono, nelle semilarve e stadî giovanili, schiacciato il primo, e subconico il secondo; gli occhi; da una posizione latero-ventrale, ruotano in modo da guardare latero-dorsalmente; e delle pinne le ventrali, sebbene apparse più tardivamente delle altre, assumono presto proporzioni più sviluppate e raggiungono, alla fine del periodo di riduzione in grandezza dell' animale, quella forma, grandezza e, pei numerosi segmenti articolati dei raggi, quella pieghevolezza confacenti alla vita di fondo alla quale l' animale è passato.

II. *Chlorophthalmus Agassizii* Bp.

Di questa specie ho potuto identificare tutta la serie di sviluppo larvale dai 4,5 mm. fino ai 47 mm. È caratteristica di tutta la serie una grande macchia in nero, sulla vôlta peritoneale corrispondentemente alle basi delle pettorali, ed una piccolissima macchia, anch'essa in nero, all'estremo caudale. Tutto il resto del corpo si mostra completamente privo di pigmento. Il capo, negli esemplari più piccoli, è assai tozzo in rispetto allo spessore del tronco che è assai compresso lateralmente. Tale rapporto con lo sviluppo, si va attenuando, di maniera che nell'esemplare, più sviluppato, di 47 mm., si passa insensibilmente dallo spessore del capo a quello del tronco che è divenuto subcilindrico.

L'occhio presenta analoghe modificazioni di posizione che in *Saurus griseus*.

In esemplari sugli 8 mm. la pinna primordiale è ancora ampia. Mancano gli abbozzi della dorsale e dell'anale. All'estremo posteriore della parte assiale del corpo *accenna* a piegare dorsalmente. (Il ripiegamento in alto è assai più tardivo in un *Paralepino*, come illustrerò in una prossima pubblicazione)

Su un ispessimento mesodermico ipocordale che in altezza occupa assai più della metà della pinna primordiale, si mostrano già abbozzati quattro ipurali. In esemplari sugli 11,5 mm. la caudale è definitivamente differenziata. Allo stesso stadio, si mostrano gli abbozzi per la pinna anale. Il numero definitivo dei raggi si coglie in esemplari oltre ai 20 mm. L'apparizione della dorsale è, come in *Saurus lacerta* e *Chauliodus Sloani*, tardiva e posteriore a quella dell'anale. I primi accenni si hanno in stadî sui 15 mm., mentre a questo stadio l' adiposa ha la sua forma. Il numero di raggi si completa in esemplari dai 21 ai 22 mm. Pettorali membranose e, finamente striate, ed arrotondite, si hanno ancora in stadii sui 13-14 mm. Su esemplari di 16 mm. si mostrano abbozzati 13-14 raggi. Conto ancora lo stesso numero

di raggi a mm. 21,65 e 15-16, numero definitivo, in stadî sui 30 mm. Nello sviluppo ulteriore le pinne si allungano di molto, sino a raggiungere l'estremo delle ventrali. Queste sono piccolissime in stadî sui 16 mm.; presentano il numero definitivo di raggi in esemplari sui 21 mm.

Tutta la serie dai 4,5 ai 47 mm. è da riferirsi allo sviluppo larvale. Ritengo che anche per questa specie intervenga un periodo di riduzione in grandezza. Vi è un forte sbalzo tra l'esemplare di mm. 47, quasi completamente sprovvisto di pigmento, e i più giovani *Clorophthalmus* che ho potuto raccogliere, con superficie del corpo ricca di pigmento — specie laterodorsalmente — che preaccenna a quella definitiva dell'adulto. Tale sbalzo, assai verosimilmente, è occupato dal periodo riduttivo i cui rappresentanti per le specie da me studiate, sono relativamente molto rari, quando non siano rarissimi.

III. *Aulopus filamentosus* Cuv.

Anche di questa specie, assai affine alla precedente, ho potuto stabilire degli stadî larvali, rarissimi nel materiale larvale di Scopelidi rinvenute in questo Stretto.

Posseggo, in tutto, tre esemplari, rispettivamente della lunghezza di mm. 11.50, 32.70, 40.50.

I caratteri offerti dalle larve non lasciano dubbio veruno che esse appartengano allo sviluppo dell'*Aulopus*, e che la *Pelopsia Scillae*, sotto la quale denominazione il Facciolà descrisse un esemplare sui 35 mm., debba essere ora considerata quale uno stadio larvale dell'*Aulopus filamentotus*.

La larva più piccola è caratteristica per l'ampiezza e la forma delle pettorali. Queste oltrepassano l'origine dell'anale, e contano 14 grossi raggi. La membrana interradiale presenta, alla parte distale fra un estremo e l'altro di due raggi consecutivi, un'insenatura il cui bordo è pervaso da numerosi e piccoli elementi in nero. Sono altresì caratteristiche 13 macchie sulla vôlta peritoneale, le quali si mostrano ridotte a 10 nella larva di mm. 32,70, ed a 6 in quella di mm. 40,50.

Nella larva più piccola persiste la pinna primordiale, ed è definitivamente abbozzata la caudale con 19 grandi raggi. Essa, così come negli altri due esemplari, è alquanto rialzata in alto sull'asse del corpo. Si contano 8 pezzi ipurali. Sul lembo dorsale e sul ventrale della pinna primordiale si mostrano rispettivamente abbozzate le pinne dorsale ed anale. Si contano 50 segmenti, che è il numero di vertebre da me riscontrato nell'adulto. La corda è ampia, con elementi stivati tra loro. Il mascellare inferiore sporge alqnanto in avanti dal superiore. L'intestino ha un ampio lume, e termina un certo tratto in avanti dall'anale.

Nell'esemplare di mm. 32.70 è scomparsa la pinna primordiale e sono già formate la dorsale con 15 raggi, l'anale con 11 e le ventrali cm. 9.

È comparsa una piccola adiposa. Le pettorali si mantengono ancora ampie. Gli stessi caratteri sono da ripetersi per l'esemplare di mm. 40.50. È da notare l'enorme sviluppo dei primi raggi della dorsale, carattere riscontrabile nel maschio dell'adulto.

I tre esemplari, per le stesse ragioni dette per la specie precedente, ritengo appartenenti al periodo larvale. Non sarà improbabile rinvenire un giorno o l'altro, qualche stadio in riduzione.

Parassitologia. — *Ricerche sulle tignuole della vite.* Nota del dott. Mario Topi, presentata dal Socio B. Grassi.

Benchè assorbito quasi interamente da altre occupazioni, ho potuto fare anche quest'anno alcune osservazioni biologiche sulle tignuole della vite, ed alcune esperienze sulla efficacia dei trattamenti insetticidi, di cui qui brevemente riferisco.

* * *

In primavera avevamo 32 fasce di stoffa, che, essendo state applicate, durante l'estate precedente, alle viti perchè servissero di rifugio alle larve (metodo Catoni), racchiudevano 56 bozzoletti con crisalidi di tignuole. Dalle crisalidi si ottennero 32 *Eudemis*, 2 sole *Conchylis* ed 8 imenotteri parassiti.

Queste cifre concordano in gran parte con quelle ottenute, nelle identiche condizioni, l'anno scorso: la stessa percentuale di *Conchylis* sul numero totale di farfalle schiuse (poco più del 5 %); quasi la stessa percentuale di crisalidi non schiuse, probabilmente parassitizzate da funghi o batterî (21 % nel 1913; 25 % nel 1914); minore è stata invece quest'anno la percentuale degli imenotteri parassiti (14 %, invece di 22 %). Non solo, ma si è anche osservato che gli imenotteri parassiti sono schiusi quando già erano uscite più della metà delle farfalle. Lo stesso è avvenuto in capsula, ove tenevamo una ventina di crisalidi: imenotteri parassiti sono usciti da due crisalidi di tignuola, quando già tutte le farfalle erano schiuse da diversi giorni dalle crisalidi sane. Questo fatto è in contradizione con quanto si ritiene ed avviene di regola: che cioè i parassiti compaiano assai più presto delle farfalle.

Dal lato pratico della lotta, da ciò consegue che, se sono state collocate in casse con aperture reticolate le corteccie di viti, le punte delle canne che hanno servito alla impalatura delle viti o gli stracci appositamente applicati alle viti, conviene conservare queste casse fin molto tardi e non distruggere il contenuto appena compaiano le prime farfalle, come spesso si consiglia; e che ritardare lo scortecciamento per lasciar schiudere i parassiti è una pratica talvolta non sufficiente allo scopo.

In primavera, in estate ed in autunno ho ripetute le prove di cattura delle farfalle nell'acqua melassata in fermentazione, per seguire la schiusa e per constatare o meno la presenza, nella località, di una terza generazione.

Furono posti quattro vasi pieni di liquido in fermentazione in una vigna molto attaccata dalle tignuole; tre erano ravvicinati tra loro ad una distanza di una diecina di metri l'uno dall'altro; l'ultimo (il II) era più distante ed in posizione più soleggiata.

Le catture in primavera sono state molto scarse (15 farfalle in tutto: 12 *Eudemis* e 3 *Conchylis*) e distribuite in un numero grande di giorni: dal 12 maggio al 1° giugno. Non vi è stato un periodo massimo di schiusa, essendosene catturate giornalmente da 0 a 3.

In estate le catture degli adulti della prima generazione dell'anno sono state discretamente numerose, come vedesi dalla tabella. Inoltre esse segnano due massimi, l'uno dal 15 al 18 luglio, l'altro dal 24 al 30; questi massimi ed in generale tutto l'andamento delle catture — e quindi, probabilmente, quello della schiusa — concordano in modo straordinario con quelli ottenuti, con lo stesso sistema, lo scorso anno. Per far notare questa concordanza, si riportano, nell'ultima colonna della tabella, le cifre totali dello scorso anno:

GIORNI	Vaso I	Vaso II	Vaso III	Vaso IV	*Conchylis*	*Eudemis*	Totale 1914	Totale 1913
6- 9 luglio	—	—	2	—	—	2	2	—
9-12 »	—	2	2	2	1	5	6	1
12-15 »	3	—	—	3	2	4	6	8
15-18 »	10	—	8	9	6	21	27	10
18-21 »	4	—	7	—	2	9	11	8
21-24 »	2	—	6	5	—	13	13	8
24-27 »	17	1	7	13	1	37	38	30
27-30 »	9	1	6	10	—	26	26	13
30 luglio - 2 agosto	3	1	—	4	—	8	8	3
2- 5 agosto	4	2	—	—	—	6	6	2
TOTALI . . .	52	7	38	46	12	131	143	83

In autunno si posero nuovamente, nella stessa località, i vasi col liquido in fermentazione, ma non si catturò nessuna farfalla.

Restano così determinati, per la località presa in esame (Alice Bel Colle) e con osservazioni, in gran parte, di un biennio, i seguenti punti:

1°) l'assoluta predominanza della *Eudemis* sulla *Conchylis*;

2°) la schiusura degli adulti si protrae, in primavera, per circa 20 giorni, ed in estate per circa 30;

3°) le schiusure primaverili procedono, dall' inizio alla fine, quasi con la stessa regolarità, mentre le estive diventano numerose nella seconda quindicina di luglio;

4°) vi sono solamente due generazioni annuali: gli adulti della seconda schiudono alla primavera successiva.

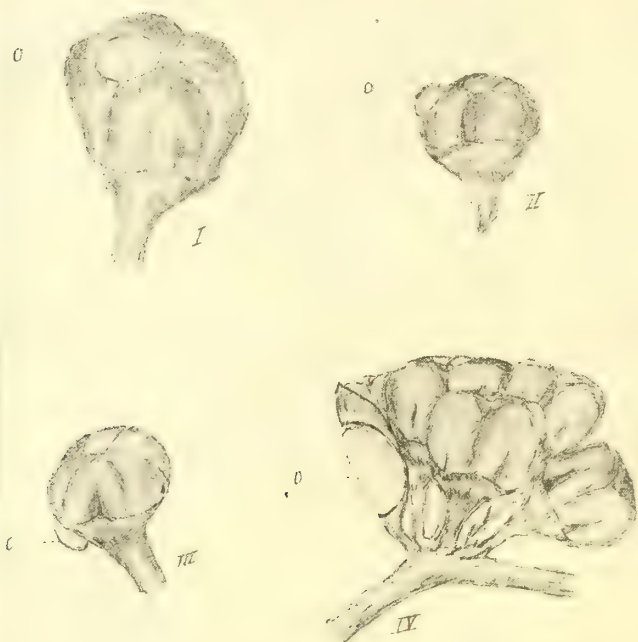



Fig. 1. — Uova di *Polychrosis* (*Eudemis*) *botrana* della prima generazione (var. ingranditi)

Durante lo sfarfallamento, si può assistere, verso il crepuscolo, alla deposizione delle uova. In maggio abbiamo potuto seguire quella della *Eudemis*. La femmina, che si appresta alla deposizione, ha volo fermo e sicuro presso i grappoli fiorali, su cui si posa senza incertezze. Dopo la deposizione di un uovo, si rialza a volo, dirigendosi verso un altro grappolo o tornando sullo stesso. L'uovo è deposto in un punto qualsiasi del boccio fiorale o sulle brattee; ne abbiamo appunto veduti verso la sommità (fig. 1, I) e sui lati dei petali (fig. 1, II), sulla loro base d'inserzione (fig. 1, III) e sulle brattee (fig. 1, IV). In cattività si ottengono su qualunque parte della pianta.

L'uovo ha l'aspetto di una piccolissima lente, appiccicata per una delle due faccie; il contorno è leggermente ellittico; ha un colore grigio chiaro trasparente, è finamente reticolato ed ha dei riflessi iridati che lo hanno fatto rassomigliare ad una piccola opale.

Il volo dei maschi è invece più rapido, meno fisso, ed essi si sottraggono in brevissimo tempo alla vista.

Nella località dove facevamo le osservazioni, la fioritura ha cominciato, nelle posizioni ben soleggiate, ai primi di giugno.

Le larve di *Conchylis* hanno raggiunto la maturità più presto di quelle di *Eudemis*, come si poteva verificare verso il 20 giugno; una conferma l'abbiamo avuta con le catture delle farfalle: infatti, dopo il 20 luglio non abbiamo preso che una sola *Conchylis*.

***

Come insetticidi contro le larve abbiamo usati l'arseniato di piombo Swift allo 0,8 % in primavera, e l'estratto di tabacco al 2,5 % in estate, mescolati alla poltiglia bordolese, irrorando con getto ad intermittenza, avendo cura di bagnare specialmente i grappoli.

In una vigna abbiamo trattato alternativamente un filare sì e l'altro no, facendo due trattametti primaverili con l'arseniato di piombo, il 28 maggio ed il 13 giugno; ed un trattamento estivo con l'estratto di tabacco, il 3 agosto. Forse, data la schiusura delle farfalle, sarebbe stato conveniente anticipare di qualche giorno tutti questi trattamenti. In questa vigna si coltivavano principalmente i vitigni *lambrusca* e *moscato*.

In un'altra vigna, in cui si coltivava principalmente il *barbèra*, si fece un solo trattamento il 5 agosto con l'estratto di tabacco, usando lo stesso sistema per il controllo.

Osservando in estate il raccolto e giudicando all'ingrosso, a colpo d'occhio non si sarebbe potuto riconoscere, pel migliore stato dell'uva, quali fossero i filari trattati e quali i non trattati. Tuttavia un minuto esame degli acini ci ha permesso di notare una indubbia efficacia conseguita coi trattamenti.

Nella prima vigna scegliemmo 4 viti di *moscato* (2 trattate e 2 non trattate) e 2 di *lambrusca* (l'una trattata e l'altra no), che avessero rispettivamente lo stesso numero di grappoli. L'esame degli acini ci ha fatto riconoscere, nell'uva delle *due* piante di *moscato* trattate, 343 acini guasti od erosi; in quella *non* trattata, 547; nell'uva della pianta di *lambrusca* trattata, 248; in quella non trattata, 290.

Nell'altra vigna di *barbèra* scegliemmo pure 2 viti (l'una trattata e l'altra no), aventi 36 grappoli ognuna. Nell'uva della pianta trattata vi erano 442 acini guasti od erosi, ed in quella non trattata 759.

Con questo sistema di controllo non abbiamo potuto tener conto quasi esclusivamente che dei beneficî del trattamento estivo; per le ragioni già dette, nè in primavera nè in autunno abbiamo potuto fare altri controlli.

Ci sembra tuttavia che, anche entro questi limiti, i risultati ottenuti, specialmente col *barbèra* ed il *moscato*, siano oltremodo incoraggianti per il trattamento delle vigne con insetticidi contro le tignuole.

Chimica. — *Sullo stato dell'acido carbonico nel sangue. II. Mobilità dell'ione* HCO_3' *alla temperatura* 18° C. Nota dei dottori E. D'Agostino e G. Quagliariello, presentata dal Corrisp. Filippo Bottazzi.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Sul metabolismo degli aminoacidi nell'organismo. III: Azione del rene sugli aminoacidi aggiunti al sangue od al liquido di Ringer circolante.* Nota di Camillo Artom, presentata dal Socio L. Luciani.

Le ricerche di Folin e Denis [1], e più specialmente quelle di van Slyke e Meyer [2], hanno dimostrato che gli aminoacidi introdotti in circolo scompaiono rapidamente, e nella loro quasi totalità, dal sangue. Si è quindi affacciato il problema di determinare l'azione dei singoli tessuti in questo complesso fenomeno; al quale scopo il prof. Lombroso ha iniziato una serie di ricerche sistematiche sul comportamento dei varî tessuti rispetto agli aminoacidi in essi circolanti. Io ho, per suo consiglio, proseguito, sperimentando col rene sottoposto a circolazione artificiale, le indagini già da lui compiute sul tessuto muscolare [3].

Van Slyke e Meyer [4], saggiando il contenuto di aminoacidi negli organi di cani a cui si era iniettata una soluzione di aminoacidi, osservano che il rene è, insieme col fegato, l'organo capace di assorbire in maggior quantità gli aminoacidi dal sangue. Così in una esperienza il rene aveva accumulato, per 100 gr. di tessuto, 60 mmgr. di N amminico, mentre il muscolo per lo stesso peso di sostanza non ne aveva assorbito che 27 mmgr. Aumentando la quantità di aminoacidi iniettati, si

(1) Journ. of biol. chem. XI, pag. 87, an. 1912.
(2) Journ. of biol. chem. XII. pag. 399, an. 1912.
(3) Rendiconti Accad. Lincei, vol. XXIV, serie 5ª, 1° sem., fasc. 1° e 2°.
(4) Journ. of. biol. chem. XVI, pag. 197, an. 1913.

può anche produrre un accumulo tre volte maggiore. L' N aminico accumulato scompare in seguito dal rene, meno presto però che dal fegato il quale, distruggendo rapidamente gli aminoacidi assorbiti, verrebbe a sottrarli continuamente dalla circolazione e quindi dai tessuti. Solo quando gli aminoacidi penetrino troppo rapidamente in circolo, o quando per condizioni patologiche il fegato sia insufficiente a compiere la sua funzione normale, il rene gli viene in aiuto eliminando inalterato per le urine l'eccesso di aminoacidi.

Lanzillotta [1] ha fatto circolare nel rene, per 6-8 ore con l'apparecchio di Aducco, soluzione di Ringer cui aveva aggiunto un aminoacido (glicocolla-alanina-tirosina-acido asparaginico) nella concentrazione 3-4 $^0/_{00}$. Otteneva in queste condizioni un prodotto di secrezione nel quale gli aminoacidi si trovavano press'a poco nella stessa concentrazione che nel liquido di circolazione: sommando il contenuto in aminoacidi di questi due liquidi e confrontandolo con la quantità di aminoacido fatta circolare attraverso il rene, si nota una diminuzione, pari a 0,8-7 $^0/_0$ per la glicocolla, 5,3-19,9 $^0/_0$ per l'alanina, 7.2 $^0/_0$ per la tirosina. Solo con l' acido asparaginico non si aveva alcuna diminuzione, anzi si notava a volte un aumento del contenuto di aminoacidi.

Questo reperto l'A. spiega con una idrolisi delle proteine del tessuto per opera dell'acido; infatti, ripetendo l'esperimento con acido asparaginico neutralizzato, ottenne una diminuzione pari a cira il 10 $^0/_0$ dell'aminoacido posto in circolazione.

Questa scomparsa di aminoacidi dal liquido di circolazione è attribuita dal Lanzillotta a un processo di disaminazione chimica per opera degli epitelii renali. Il fenomeno, osservato dal van Slyke, della singolare attitudine del rene ad accumulare aminoacidi, sottraendoli dal sangue, potrebbe veramente spiegare, senza dover ricorrere all'ipotesi della disaminazione, una parte dei risultati esposti dal Lanzillotta, ma non tutti. Egli avrebbe infatti in alcune esperienze ottenuto una scomparsa di aminoacidi notevolmente superiore a quella capacità di saturazione che possiamo arguire dalle ricerche di van Slyke. Si può però sempre obbiettare che nelle ricerche con circolazione artificiale di un organo isolato è possibile che l'accumulo sia ancora più rilevante, venendo a mancare quello scambio di aminoacidi dal rene al fegato, cui van Slyke attribuisce importanza fondamentale nel fenomeno della scomparsa, dagli organi, degli aminoacidi accumulati.

*
* *

Per contribuire alla risoluzione di tali quesiti, ho dosato gli aminoacidi del liquido e dell'organo prima e dopo la circolazione; e ho anche ri-

[1] Arch. di Fisiol. XII, 429, an 1914.

cercato se ad una eventuale diminuzione di aminoacidi del liquido corrispondesse una produzione, sia nell'organo e sia nel liquido, di ammoniaca che stesse ad indicare un processo di combustione a spese degli aminoacidi scomparsi. Allo stesso scopo ho in alcuni casi esteso la ricerca anche all'acetone. Come liquido di circolazione ho usato in una prima serie di esperienze il liquido di Ringer, in una seconda il sangue, al fine di poter chiarire se e in quale misura la sostituzione del sangue con soluzione fisiologica modifichi (come fu osservato pel tessuto muscolare) i processi metabolici del rene sopravvivente rispetto agli aminoacidi.

A cani appena uccisi per dissangnamento dalla carotide, asportavo il rene e lo ponevo nell'apparecchio di Lind ove facevo circolare o il liquido di Ringer o il sangue defibrinato dello stesso animale, dopo di avervi aggiunto una certa quantità di aminoacido (4 gr. per 500 cm.^{3} di liquido all'incirca). La durata di ciascun esperimento era varia a seconda della velocità di circolazione (che, quando si usava il sangue, era sempre molto piccola) ma non oltrepassava mai le ore 3-3 $^1/_2$. Il prodotto di secrezione, che, di regola, era in quantità notevole solo quando il liquido circolante era soluzione fisiologica, alla fine dell'esperimento veniva mescolato col liquido refluo dalla vena. Il rene aumentava di peso nel corso della circolazione, e l'aumento di peso, piccolo quando si circolava con sangue, relativamente rilevante quando si adoperava liquido di Ringer, veniva assunto come indice della quantità di liquido di circolazione che rimaneva nell'organo, e che perciò doveva sottrarsi dalla quantità iniziale di liquido nei calcoli sopra il liquido residuante dalla circolazione.

Il dosaggio degli aminoacidi era eseguito col metodo del Sörensen, dopo eliminazione dell'ammoniaca e, se si operava sul sangue, precipitazione delle sostanze proteiche con ferro colloidale. In qualche caso ho controllato i risultati della formoltitolazione col van Slyke. Il dosaggio dell' ammoniaca era fatto col metodo della corrente d'aria del Folin; quello dell'acetone (eseguito solo in alcuni casi) col metodo Messinger-Huppert.

Per l'organo, i dosaggi si eseguivano sugli estratti, ottenuti con alcool e acqua bollente secondo le istruzioni del van Slyke.

Tralascio per brevità i protocolli delle singole esperienze; e mi limito a riunire in due tabelle i dati principali delle due serie di circolazioni, con liquido di Ringer e con sangue rispettivamente.

Nelle tabelle tengo nota:

1°) della quantità di liquido posto nell'apparecchio in principio dell'esperimento;

2°) della quantità di aminoacidi aggiunti al liquido stesso, espressa in grammi;

3°) della pressione (in centimetri di Hg), della velocità (centimetri cubi effluenti dalla vena in 1') e della durata della circolazione.

4°) della quantità di aminoacido (rappresentata dai centimetri cubi di Na OH $^1/_{10}{}^n$ occorrenti per la formoltitolazione) presente complessivamente nel liquido prima e dopo la circolazione, e della diminuizione corrispondente in cifra assoluta e percentuale rispetto alla quantità di aminoacido del liquido prima della circolazione;

5°) della quantità di aminoacidi del rene normale e di quello circolato, e della differenza relativa;

6°) degli aminoacidi scomparsi (sia dal liquido, sia dall'organo) in cifra assoluta e percentuale;

7°) dell' NH_3 del liquido (espressa in cm.^{3} di H_2SO_4 $^1/_{50}$ normale) prima e dopo circolazione, e della differenza relativa;

8°) dell' NH_3 dell'organo normale e di quello circolato e della differenza relativa;

9°) dell' NH_3 eventualmente prodottasi nella circolazione, tenuto conto delle variazioni della stessa nel liquido e nell'organo;

10°) del peso del rene prima e dopo circolazione, e dell'aumento relativo.

Infine nelle osservazioni notai la quantità di liquido raccolto dall'uretere, e i risultati dei dosaggi (non sempre eseguiti) dell'acetone.

CIRCOLAZIONI CON SOLUZIONE FISIOLOGICA

Esperimento	Quantità di liquido cm.³	Aminoacido	Pressione Hg. cm.	Velocità cm.³ in 1'	Durata ore	Aminoacidi del liquido NaOH $^1/_{10}$ n prima	dopo	diminuzione assol	diminuzione °/₀	Aminoacidi del rene NaOH $^1/_{10}$ n normale	circolato	differ.	Aminoacidi scomparsi NaOH $^1/_{10}$ n assol.	°/₀	Ammoniaca del liquido H_2SO_4 $^1/_{50}$ n prima	dopo	differ.	Ammoniaca del rene H_2SO_4 $^1/_{50}$ n normale	circolato	differ.	Ammoniaca neoformata N_2SO_4 $^1/_{50}$ n	Peso del rene grammi normale	circolato	aumento	Osservazioni
I	530	Glicocolla gr. 4	12-16	22	2	487,6	436,3	51,3	10,6	19,5	71	+ 51,5	=	=	=	=	=	=	=	=	=	61	100	39	(¹)
II	520	Glicocolla gr. 4	varia	varia	3	461	409,2	51,8	11	10,4	46,08	35,68	16,12	3,5	=	12,4	12,4	33	14,4	— 18,6	= scomparsi 6,2 (?)	50	75	25	(²)
III	500	Glicocolla gr. 4	6-12	25	1 ¹/₂	483,3	409	74,3	15,4	9,8	53,2	43,4	30,9	6,4	=	37,8	37,8	60	40	— 20	17,8	56	84	28	(³)
IV	500	α-alanina gr. 4	12-14	24	1 ¹/₃	366,3	314,6	51,9	14,1	12	28	16	35,9	9,8	=	20,4	20,4	28	14	— 14	6,4	25	55	30	(⁴)
V	520	α-alanina gr. 4	6-10	28	2 ³/₄	398,7	333,3	65,4	16,4	14	42	28	37,4	9,4	=	62,5	62,5	16	20	+ 4	66,5	41	60	19	(⁵)
VI	500	asparagina neutralizzata alla fenolftaleina gr. 4	10-14	22	1 ¹/₂	240	164,2	75,8	31,6	10	17	7	68,8	28,6	=	101,8	101,8	36	24	— 12	89.8	40	55	15	(⁶)

(¹) Peso dell'animale Kg. 17. Secrezione *cm.³ 280*; aminoacidi di essa *NaOH* $^1/_{10}$ *n = 246,4*. Dosaggio NH_3 perduto. Acetone: I $^1/_{10}$ n = 5,6 cm.³.

(²) Non si raccoglie prodotto di secrezione. Peso dell'animale Kg. 17.

(³) Secrezione cm.³ 60. Peso dell'animale Kg. 20.

(⁴) Secrezione cm.³ 175: aminoacidi di essa NaOH $^1/_{10}$ n = 121,6. Peso dell'animale Kg. 17.

(⁵) Non si raccoglie prodotto di secrezione. Acetone: traccie. Peso dell'animale Kg. 15.

(⁶) Secrezione cm.³ 100. Acetone: I $^1/_{10}$ n = 110 cm.³ Peso dell'animale Kg. 21.

CIRCOLAZIONI CON SANGUE

Esperimento	Quantità di liquido	Aminoacido	Pressione	Velocità	Durata	Peso del rene grammi			Aminoacidi del liquido NaOH $^1/_{10}$ n cm.^{3}				Aminoacidi del rene NaOH $^1/_{10}$ n cm.^{3}			Aminoacidi scomparsi NaOH $^1/_{10}$ n cm.^{3}		Ammoniaca del liquido H_2SO_4 $^1/_{50}$ n cm.^{3}			Ammoniaca del rene H_2SO_4 $^1/_{50}$ n cm.^{3}			Ammoniaca neoformata	Osservazioni
			Hg. cm.	cm.^{3} in 1'	ore	normale	circolato	aumento	prima	dopo	diminuzione assol.	diminuzione %	norm.	circol.	differ.	assol.	%	prima	dopo	differ.	norm.	circol.	differ.	H_2SO_4 $^1/_{50}$ n cm.^{3}	
I	500	Glicocolla gr. 4	18-22	4	3	54	67	13	450	394,5	55,5	12,3	35,8	56,9	21,1	34,4	7,6	95	59,5	52	=	=	=	=	(1)
II	500	Glicocolla gr. 4,2	12-16	5	2 ½	39	44	5	520	472,9	47,1	9	11	24	13	34,1	6,5	traccie	27	27 circa	12	16	+ 4	3,1	(2)
III	520	Glicocolla gr. 4	8-12	13	1 ½	44,5	49,1	4,6	485,3	460	25,3	5,1	16,8	36,8	20	5,3	1,1	7,5	37,3	29,8	10	12,5	+ 2,5	32,3	(3)
IV	500	Glicocolla gr. 4	13-16	4	3	47,5	58	10,5	453,3	404,6	48,7	10,7	7,68	31,2	23,52	25,2	5,6	7,5	22	15,5	25	15	— 10	5,5	(4)
V	450	α-alanina gr. 3,5	18-22	1,5	3 ¾	34	39	5	267	222	45	16,9	5	16,3	11,3	33,7	12,6	5,4	41,8	36,4	12	12,8	+ 0,8	42,6	(5)
VI	520	α-alanina gr. 4	14-19	3	3	45	55	10	332,7	299,2	33,5	10	14,6	30,8	16,2	17,3	5,2	5,5	35	29,5	50	17	— 3,3	= scomparsi 3,5(?)	(6)
VII	500	asparagina neutralizzata al tornasole . . . . gr. 4	18-20	2,5	1 ½	35	40	5	230	217,8	12,2	5,3	7,9	13,5	5,6	6,6	2,9	=	=	=	18	21,4	+ 3,4	=	(7)

(1) Peso dell'animale Kg. 23,2. Urina cm.^{3} 10 [contiene aminoacidi = NaOH $^1/_{10}$ n cm^3 10; ammoniaca = H_2SO_4 $^1/_{50}$ n cm.^{3} 2,5]. Acetone: I $^1/_{10}$ n cm.^{3} 5,84.

(2) Peso dell'animale Kg. 12,7. Non si raccoglie liquido dall'uretere.

(3) Peso dell'animate Kg. 18. Sangue diluito con soluzione fisiologica. Urina cm.^{3} 3.

(4) Peso dell'animale Kg. 28. Urina: goccie.

(5) Peso dell'animale Kg. 12,3. Non si raccoglie urina.

(6) Peso dell'animale Kg. 19. Non si raccoglie urina.

(7) Sangue diluito di $^1/_5$ con soluzione fisiologica. Mancano i dosaggi dell'NH_3 nel sangue. Peso dell'animale Kg. 18.

Dalle ricerche riferite emerge:

che, facendo circolare nel rene isolato sangue contenente aminoacidi in forte concentrazione (8 ‰ circa), si avverte sempre, dopo la circolazione, una diminuzione del contenuto in aminoacidi del sangue circolato, che può raggiungere persino il 17 %;

degli aminoacidi che non si ritrovano, nel sangue circolato, una parte, che può raggiungere il 3-5 % dell'aminoacido posto in circolazione e il 25-50 % di quelli mancanti nel sangue (solo in un caso fu superata notevolmente questa cifra), si ritrova inalterata nell'organo. La quantità di aminoacido effettivamente scomparsa durante la circolazione è pertanto compresa, in media, fra il 5 e il 10 %.

Adoperando per la circolazione liquido di Ringer con gli stessi aminoacidi, si ha sempre una diminuzione dagli aminoacidi della soluzione circolata, che raggiunge il 16,4 % (solo in una circolazione con asparagina oltrepassa il 30 %) e che è quindi pressochè uguale alla corrispondente osservata nella circolazione con sangue.

Tuttavia nelle esperienze, eseguite facendo circolare soluzione fisiologica, la quantità di aminoacidi che si ritrova inalterata nel tessuto renale è notevolmente superiore a quella che si riscontra nelle circolazioni con sangue, e in qualche caso riesce perfino a giustificare di per sè sola la perdita di aminoacidi nel liquido.

La quantità di ammoniaca che si riscontra nel liquido è spesso rilevante così da corrispondere a buona parte degli aminoacidi effettivamente scomparsi durante la circolazione. Ma dubitiamo che il trattamento fatto subire agli organi per la ricerca degli aminoacidi abbia potuto in certa misura alterarne il contenuto in ammoniaca; cosicchè i dati relativi hanno un valore più comparativo che assoluto, essendo stati ottenuti dopo un eguale trattamento sia del rene normale e sia di quello circolato.

Ad ogni modo possiamo affermare che, contrariamente a quanto fu osservato per il tessuto muscolare nelle circolazioni con liquido di Ringer, il rene, anche se perfuso con soluzione fisiologica, si dimostra sempre capace di distruggere notevole quantità di aminoacidi. Ciononostante, anche sperimentando col rene si nota che, nelle circolazioni con sangue, la scomparsa assoluta di aminoacidi è sensibilmente superiore a quella che si osserva usando liquido di Ringer. E tale differenza appare più cospicua, quando si consideri che, se si usa soluzione fisiologica, la circolazione è incomparabilmente più rapida che non nelle esperienze con sangue; e che quindi con maggiore facilità e in più larga misura gli aminoacidi disciolti nel liquido di circolazione possono subire l'azione degli epitelii renali con cui vengono a contatto.

Concludendo, dalle presenti ricerche risulta che il fenomeno dell'accumulo di aminoacidi nel rene è molto cospicuo, sia che essi circolino disciolti nel sangue, sia che circolino nel liquido di Ringer; ma che nel secondo caso è

tanto più grande, da poter in qualche esperienza giustificare di per sè solo la diminuzione degli aminoacidi osservata nel liquido circolante. Epperò nella totalità delle ricerche eseguite col sangue, e sulla maggioranza di quelle eseguite con liquido di Ringer, risulta pure che una più o meno cospicua parte degli aminoacidi mancanti è stata effettivamente distrutta.

Fisiologia. — *Sul metabolismo degli aminoacidi nell'organismo*. Nota IV. *Azione dell'intestino sugli aminoacidi aggiunti al sangue o al liquido di Ringer circolante*, del dott. UGO LOMBROSO, presentata dal Socio L. LUCIANI.

Dell'influenza che l'intestino esercita di fronte agli aminoacidi che giungono ad esso pel circolo sanguigno non è stato trattato *ex-professo*. Però in numerose ricerche, eseguite in questi ultimi anni, è stato indirettamente portato un contributo anche a tale argomento, in quanto che si è cercato di determinare che cosa avvenga degli aminoacidi che attraversano la mucosa intestinale durante l'assorbimento alimentare.

La soluzione di questo quesito appariva di capitale interesse per poter determinare sotto quale forma le sostanze proteiche alimentari penetrino nel nostro organismo. A questo proposito si dibattono varie dottrine. Secondo alcuni l'assorbimento delle sostanze proteiche alimentari avviene senza una loro profonda idrolisi e soltanto una piccola parte di esse viene assorbita sotto forma di aminoacidi: secondo altri invece l'assorbimento intestinale avviene esclusivamente dopo la completa idrolisi delle sostanze proteiche. Fra gli autori che accettano quest'ultima concezione, esiste poi una discordanza, poichè gli uni ammettono una sintesi degli aminoacidi nella mucosa intestinale, gli altri ritengono invece che essi giungono inalterati nel circolo sanguigno.

Per quanto a prima vista possa sembrare facile la risoluzione di questo problema, esso è ancora insoluto. Gli autori stessi, che vi hanno contribuito, riconoscono che le loro esperienze non hanno portato alcun argomento risolutivo a favore dell'una o dell'altra ipotesi.

Accennerò brevemente ai varî lavori eseguiti in proposito.

Il Rona [1] introducendo anse intestinali di gatto contenenti aminoacidi nel liquido di Tyrode vide passare una parte di essi nel liquido esterno, senza che si modificasse in misura apprezzabile la quantità totale di aminoacidi. Dal risultato di tali esperienze non appare appoggiata l'ipotesi di una sintesi degli aminoacidi nella mucosa intestinale.

(1) Biochem. Zeitschr. XLVI, 307, 1912.

Si deve però considerare che la vitalità delle anse intestinali poste in tali condizioni era molto problematica. Perchè se nelle anse anche messe in tali condizioni si possono avvertire ben conservati movimenti peristaltici, non si può da essi arguire che si sia pure conservata la vitalità e funzionalità del tessuto epiteliale che costituisce la mucosa, e che è probabilmente più delicato e labile del tessuto muscolare.

Cohnheim [1] sperimentando con intestino di cefalopodi e pesci immerso nel sangue degli animali stessi, vide che aminoacidi introdotti nell'intestino si ritrovano all'esterno, alcuni disamidati profondamente, altri poco.

Anche da queste ricerche, per quanto più complete, non si può trarre una sufficiente nozione, perchè noi non sappiamo se l'ammoniaca ritrovata all'esterno sia dovuta alla decomposizione degli aminoacidi o sia ceduta dal tessuto intestinale.

Comunque secondo il Cohnheim l'intestino o si lascia attraversare dagli aminoacidi o li idrolizza: non risulterebbe una loro sintesi.

Abderalden [2], pur avendo ripetutamente dimostrato la formazione ed il passaggio di aminoacidi nel sangue durante la digestione e l'assorbimento delle sostanze proteiche, ritiene però di non poter azzardare alcuna ipotesi sulla eventuale loro penetrazione *in toto* nel sangue, mancandogli i dati numerici complessivi sulla quantità formatasi e quella penetrata nel sangue.

E questa nozione, non è evidentemente facile a trarre da ricerche eseguite sull'animale in vita, nel quale gli scambi sono troppo rapidi e complessi per garantirci dalla possibile sottrazione di aminoacidi da parte di uno o di un'altro tessuto, come bene hanno dimostrato le ricerche di V. Slycke e Meyer.

E perciò non mi trattengo a ricordare le indagini eseguite col confronto del contenuto di aminoacidi nel sangue arterioso o venoso prima o dopo la somministrazione di sostanze proteiche ecc., indagini che sono molto interessanti, ma che non chiariscono nulla per ciò che riguarda il problema da noi preso in esame. Tutte queste ricerche sono molto ben riassunte in una Nota recentissima di Gayda [3] alla quale rimando il lettore che si interessa del problema.

Il Gayda ha inoltre portato all'argomento un notevole contributo sperimentale. Egli introduceva nell'intestino di gatto carne di cavallo idrolizzata completamente con acido solforico, e poi faceva circolare liquido di Tyrode nei vasi sanguigni di tale intestino (dopo averli sbarazzati del contenuto sanguigno con abbondante lavaggio).

Esaminando di tratto in tratto il liquido circolante egli constatò la presenza di aminoacidi nel liquido della vena mesenterica e del dutto tora-

[1] Zeitschr. f. physiol. Chem. XXXV, 396, 1902; LIX, 239, 1909; LXI-189-1909.

[2] Zeitschr. f. physiol. Chem. LXXXI, 473, 1912; LXXXVIII, 478, 1913.

[3] Archivio di Fisiologia XIII, 83-1914.

cico: il rapporto dell'azoto aminico coll'azoto totale assorbito, è minore del rapporto dell'azoto aminico coll'azoto complessivo del liquido iniettato nell'intestino. Gayda è incerto se tale risultato si debba interpretare come l'esponente di una selezione nell'assorbimento delle varie sostanze proteiche, o come dovuto ad una formazione di complessi fra gli aminoacidi. Non gli fu possibile di scegliere fra queste due opposte interpretazioni, perchè gli mancava un dato necessario, e cioè il quantitativo di aminoacidi scomparsi dall'intestino. Le ricerche fatte a tale intento andarono fallite, perchè inquinate dal riversarsi nel lume intestinale di aminoacidi contenuti in gran quantità nel tessuto.

Ciò dimostra quanto favorevole sia, nello studio dell'argomento in esame, la disposizione adottata nelle nostre ricerche. Di determinare cioè il contenuto in aminoacidi non soltanto del liquido circolante prima e dopo l'esperimento, ma anche quello del tessuto esperimentato: e di determinare poi anche le sostanze che potevano indicarci l'ulteriore consumo di tali aminoacidi.

Nelle esperienze che riferisco operavo nel seguente modo,

L'animale veniva tenuto digiuno per un periodo di 24 ore (salvo in alcune esperienze che menzioneremo): poi veniva rapidamente dissanguato dalla carotide avendo cura di introdurre per la giugulare una certa quantità di soluzione di Ringer.

Questa pratica allontana l'inconveniente della formazione di trombi durante la circolazione. Estratto l'intestino si vuotava del suo contenuto con abbondante lavaggio di soluzione fisiologica: si provvedeva poi con ripetute pressioni digitali a liberare il lume intestinale dal liquido introdotto. Naturalmente però piccole quantità, sia di sostanze, come di liquido rimangono sempre aderenti alle pareti. Il campione intestinale di controllo veniva prelevato dal segmento immediatamente vicino all'esperimentato: in qualche caso due campioni vennero presi uno del tratto orale e l'altro dell'aborale, e ciò per ottenere una media corrispondente al più possibile a quella dell'intestino esperimentato. La circolazione nell'intestino si svolge in forma assai più rapida e copiosa che non negli altri organi di cui abbiamo riferito nelle precedenti Note (rene, tessuto muscolare) anche quando la pressione del liquido circolante è mantenuta più bassa.

Nelle varie ricerche eseguite si constatò sempre un aumento più o meno notevole del peso dell'organo esperimentato, dovuto in massima parte o nella totalità al formarsi del secreto (o filtrato) nel lume intestinale.

Nelle esperienze con sangue si ha una produzione assai più scarsa di secreto enterico, il quale appare denso, mucilaginoso, con tutti i caratteri e le proprietà enzimatiche del normale secreto. Nel caso invece di circolazioni con soluzione fisiologica il secreto, o per meglio dire, il filtrato, era così abbondante da dover interrompere le esperienze per deficienza di liquido circolante.

RICERCHE ESEGUITE CON SANGUE.

I.

Cane peso kg. 4,50. — Peso segmento intestino = gr. 108. Dopo ore 1 e mezza circolazione = gr. 155. Sangue cc. 500 (diluito con Ringer) + α alanina gr. 4. Pressione 80-120 mm. mercurio. Velocità circolatoria per minuto 14-18 cc.

Per 15 cc. sangue la formoltitolazione richiede . . . . 9.2 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*

» » dopo circolaz. la formoltitolaz. richiede 8,2 » »

Per 35 gr. intestino la formoltitolazione richiede . . . 24 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*

» » dopo circolaz. la formoltitolaz. richiede 30 » »

NH_3 per 100 cc. sangue dopo la circolaz. corrispondono a 5 cc. $H_2 SO_4$ $^1/_{50}$ *n*

» » 35 gr. tessuto » » 6.5 » »

» » » » dopo la circolaz. » 7.2 » »

Complessivamente mancano nel liquido circolato tante sostanze titolabili col formolo da richiedere 64,6 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. Se ne trovano in più nel tessuto da richiedere 36 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. *Deficit* assoluto = 28,6 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*.

II.

Cane peso kg 17. — Peso segmento intestino = gr. 185. Dopo ore 1 e mezza circolazione = 195 gr. + succo cc. 55. Sangue cc. 520 + gr. 4 α alanina. Pressione 120-160 mm. mercurio. Velocità circolatoria per minuto 10-15 cc.

Per 15 cc. sangue la formoltitolazione richiede . . . . 9,0 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*

» » dopo circolaz. la formoltitolaz. richiede 7,3 » »

Per 55 cc. succo la formoltitolazione richiede . . . . 26.9 » »

Per 50 gr. intestino » » 24 » »

» » dopo circolaz. la formoltitolaz. richiede 27 » »

NH_3 per 100 cc. sangue . . . . 3,5 cc. $H_2 SO_4$ $^1/_{50}$ *n*

» » » » dopo la circolaz. corrispond. a . 8,6 » »

» » 50 gr. tessuto . . . . 16,5 » »

» » » » dopo la circolaz. corrispond. a . 14 » »

Complessivamente mancano nel liquido circolato tante sostanze titolabili al formolo da richiedere 67 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. Se ne trovano in più nel tessuto da richiedere 16,5 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. *Deficit* assoluto 50,5 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*.

III.

Cane kg. 7,20. — Peso segmento intestino = gr. 175. Dopo ore 1 di circolazione = gr. 195 + succo 20 cc., sangue cc. 550 + glicocolla gr. 4. Pressione 100-140 mm. mercurio. Velocità circolatoria per minuto 6-10 cc.

Per 15 cc. sangue la formoltitolazione richiede . . . . 10 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*

» » dopo circolaz. la formoltitolaz. richiede 9,3 » »

Per 20 cc. succo » » 12 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*

Per 50 gr. intestino » » 13 » »

» dopo circolaz. » » 12,5 » »

NH_3 per 50 gr. intestino . . . . 9,8 cc. $H_2 SO_4$ $^1/_{50}$ *n*

» » dopo circolazione . . . . . . 11,5 » »

» sangue è andata perduta.

Complessivamente mancano nel sangue tante sostanze titolabili al formolo da richiedere 37,8 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. Se ne trovano in più nel tessuto da richiedere 3,6 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. *Deficit* assoluto 41,4 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*.

IV.

Cane peso kg. 12. — Peso segmento intestino gr. 170. Dopo ore 1 e mezzo circolazione gr. 200. Sangue cc. 500 + gr. 4 glicocolla. Pressione 80-130 mm. Velocità 10-14 cc. al minuto.

Per 15 cc. sangue la formoltitolazione richiede	14,5	cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*
» » dopo la circolaz. » »	13,7	» »
Per 50 gr. intestino la formoltitolazione richiede	23	» »
» » dopo la circolaz. » »	24,5	» »
NH_3 per 100 cc. sangue dopo la circolazione	14	cc. $H_2 SO_4$ $^1/_{50}$ *n*
» 50 gr. intestino	26	» »
» » » dopo la circolazione	20	» »

Complessivamente mancano nel sangue tante sostanze titolabili al formolo da richiedere 56 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. Se ne ritrovano in più nell'intestino da richiedere 18,8 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. *Deficit* assoluto 37,2 cc, Na OH $^1/_{10}$ *n*.

V.

Cane peso kg. 28. — Peso segmento intestino gr. 165. Dopo ore 1 e mezzo circolazione gr. 210. Sangue cc. 510 + 4 gr. glicocolla. Pressione 120-160 mm. mercurio. Velocità per minuto cc. 8-14.

Per 15 cc. sangue la formoltitolazione richiede	14	cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*
» » dopo la circolaz. » »	10,8	» »
Per 60 gr. intestino la formoltitolazione richiede	53,2	» »
» » dopo la circolaz. » »	33,6	» »
NH_3 per 100 cc. sangue dopo la circolazione, perduta.		
» 60 gr. tessuto	26,2	cc. $H_2 SO_4$ $^1/_{50}$ *n*
» » » dopo la circolazione	22,5	» »

Complessivamente mancano nel liquido circolante tante sostanze titolabili col formolo da richiedere 142,2 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. Se ne trovano nel tessuto in più da richiedere 91,8 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. *Deficit* assoluto 50,9 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*.

VI.

Cane peso kg. 19 (*). — Peso segmento intestino = gr. 220. Dopo ore 1 e mezza circolazione gr. 250. Sangue cc. 500 + 4 gr. α alanina. Pressione 140-160 mm. mercurio. Velocità per minuto 26-30 cc.

Per 15 cc. sangue la formoltitolazione richiede	11	cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*
» » dopo la circolaz. » »	9,6	» »
Per 50 gr. tessuto la formoltitolazione richiede	78	» »
» » dopo la circolaz. » »	53,8	» z
NH_3 per 100 cc. sangue	3,5	cc. $H_2 SO_4$ $^1/_{50}$ *n*
» » » dopo circolazione	10,2	» »
« 50 gr. tessuto	7.5	» »
» » » dopo circolazione	9,5	» ..

(*) L'animale viene sacrificato quattro ore dopo l'ultimo parto.

Complessivamente mancano nel liquido circolato tante sostanze titolabili al formolo da richiedere 69,9 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. Se ne trovano in meno nel tessuto da richiedere 74,2 cc, Na OH $^1/_{10}$ *n*. *Deficit* assoluto 141,1 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*.

ESPERIENZE ESEGUITE CON LIQUIDO DI RINGER.

VII.

Cane peso kg. 6,6. — Peso segmento intestino = gr. 140. Dopo ore 1 e mezza circola zione = gr. 155 + 19 cc. succo. Soluz. Ringer cc. 500 + 4 gr. glicocolla. Pressione 60-80 mm. mercurio. Velocità per minuto 18-26 cc.

Per 10 cc. liquido la formoltitolazione richiede	10,6 cc.	Na OH	$^1/_{10}$ *n*
» » dopo la circolaz. » »	9,2	»	»
» secreto la formoltitolazione richiede	9	»	»
Per 50 gr. tessuto » »	14,6	»	»
» » dopo la circolaz. » »	23,6	»	»
NH_3 per 100 cc. liquido dopo la circolazione	6 cc.	H_2SO_4	$^1/_{50}$ *n*
» » secreto	7,5	»	»

Complessivamente mancano nel liquido tante sostanze titolabili al formolo da richiedere 35 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. Se ne trovano in più nel tessuto da richiedere 33 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. *Deficit* assoluto 2 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*.

VIII.

Peso cane kg. 16. — Peso segmento intestino gr. 160. Dopo ore 1 e mezza circolazione = gr. 200 + 60 cc. succo. Soluzione Ringer cc. 500 + gr. 4 glicocolla. Pressione 60-100 mm. mercurio. Velocità per minuto 22-30 cc.

Per 15 cc. liquido la formoltitolazione richiede	15,3 cc.	Na OH	$^1/_{10}$ *n*
» » dopo la circolaz. » »	12,6	»	»
» secreto la formoltitolazione richiede	14,2	»	»
Per 50 gr. tessuto » »	20,4	»	»
» » dopo la circolaz. » »	38	»	»
NH_3 per 100 cc. liquido dopo la circolazione	14 cc.	H_2SO_4	$^1/_{50}$ *n*
» 50 gr. tessuto	26	»	»
» » » dopo la circolazione	30	»	»

Complessivamente mancano nel liquido circolato tante sostanze titolabili al formolo da richiedere 117 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. Se ne trovano in più nel tessuto da richiedere 87,6 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. *Deficit* assoluto 30,9 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*.

IX.

Cane peso kg. 20. — Peso segmento intestino = gr. 170. Dopo ore 1 e mezza circolazione gr. 175 + 125 cc. succo che viene addizionato al liquido circolato. Soluzione Ringer cc. 520 + 4 gr. asparagina, alcalinizzata al tornasole, acida alla fenoftaleina. Pressione mm. 60-100 mercurio. Velocità al minuto 10-18 cc.

Per 15 cc. liquido la formoltitolazione richiede	7,2 cc.	Na OH	$^1/_{10}$ *n*
» » e secreto	6,5	»	»
» 50 gr. di tessuto la formoltitolazione richiede . . .	18,8	»	»
» » dopo la circolaz. » »	20	»	»

NH_3 perduto.

Complessivamente mancano nel liquido circolato tante sostanze titolabili al formolo da richiedere 24,8 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. Se ne trovano in più nel tessuto da richiedere 9,5 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. *Deficit* assoluto 15,3 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*.

X.

Cane peso kg. 18. — Peso segmento intestino = gr. 145. Dopo ore 1 e mezza circolazione gr. 190 + 190 cc. secreto. Soluzione Ringer cc. 550 + 4 gr. asparagina (alcalinizzata al tornasole, acida alla fenoftaleina). Pressione 80-120 mm. mercurio. Velocità al minuto 16-20 cc.

Per 15 cc. liquido la formoltitolazione richiede . . . . 7 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*
» » dopo la circolaz. » » 6,2 » »
Per 100 cc. succo la formoltitolazione richiede . . . . 7,3 » »
Per 50 gr. tessuto » » 29 » »
» » dopo la circolaz. » » 22 » »
NH_3 perduto.

Complessivamente mancano nel liquido circolato tante sostanze titolabili al formolo da richiedere 20,5 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. Se ne trovano in meno nel tessuto da richiedere 3,2 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. *Deficit* assoluto 23,7 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*.

XI.

Peso cane kg. 6,50. — Segmento intestino peso gr. 140. Dopo ore 1 e mezza di circolazione gr. 148 + 105 cc. succo. Soluzione di Ringer 500 cc. + 4 gr. *α* alanina. Pressione mm. 60-100 mercurio. Velocità al minuto 4-10 cc.

Per 15 cc. liquido la formoltitolazione richiede . . . . 11,8 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*
» » dopo la circolaz. » » 11,4 » »
» secreto » » 11,2 » »
Per 50 gr. tessuto » » 5.5 » »
» » dopo la circolaz. » » 5,6 » »
NH_3 per 100 cc. secreto e liquido dopo circolaz. . . . 14 cc. $H_2 SO_4$ $^1/_{50}$ *n*
» sul tessuto perduto.

Complessivamente mancano nel liquido circolante tante sostanze titolabili al formolo da richiedere 15,5 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. Se ne trovano in più nel tessuto da richiedere 2,1 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. *Deficit* assoluto 13,4 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*.

XII.

Cane peso kg. 15. — Segmento intestino gr. 165. Dopo ore 1 e mezza di circolazione gr. 195 + 265 cc. di succo. Soluzione di Ringer 510 cc. + 4 gr. *α* alanina. Pressione mm. 60-120. Velocità al minuto 14-24 cc.

Per 15 cc. liquido la formoltitolazione richiede . . . . 11,9 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*
» » dopo la circolaz. » » 8,2 » »
» secreto » 8,1 » »
Per 65 gr. tessuto » » 6,4 » »
» » dopo la circolaz. » » 8,8 » »
NH_3 per 100 cc. secreto » » 33,5 cc. $H_2 SO_4$ $^1/_{50}$ *n*
» cc. liquido dopo circolaz. » 7,5 » »
» 65 gr. tessuto » » 10 » »
» » » » » 13 » »

Complessivamente mancano nel liquido circolante tante sostanze titolabili al formolo da richiedere 88,1 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. Se ne trovano in più nel tessuto da richiedere 74 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. *Deficit* assoluto 14,1 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*.

***

Dalle esperienze riferite emerge che:

Facendo circolare nell'intestino isolato sangue contenente aminoacidi in forte concentrazione (8 ‰ circa) si avverte sempre una loro diminuzione, che raggiunge persino il 20 %.

Parte degli aminoacidi scomparsi dal sangue può trovarsi accumulata nel tessuto esperimentato, ma tale deposito è sempre assai lieve ed in qualche caso non soltanto non si riscontra deposito, ma al contrario si avverte una scomparsa anche degli aminoacidi proprii del tessuto. In ciò l'intestino si comporta in modo assai diverso dagli altri tessuti già studiati. Specialmente interessante a tale proposito è l'esperienza VI nella quale, essendo molto elevato il contenuto in aminoacidi della mucosa, ne scomparve il 21 %, mentre nel sangue ne era scomparso il 18 %. Il risultato di questa esperienza suggerisce una nuova serie di ricerche sul comportamento degli aminoacidi che si trovano già assorbiti nell'intestino. Se il fenomeno osservato ora incidentalmente è dovuto alla loro scomparsa (e non ad una casuale loro differente distribuzione nell'intestino) tanto più evidentemente esso sarà messo in luce con esperienze eseguite con sangue normale invece che con sangue carico di aminoacidi. Poichè in quest'ultimo caso la tendenza dei tessuti a saturarsi di aminoacidi del liquido circolante viene a controbilanciare ed a mascherare la scomparsa di quelli preesistenti nel tessuto. Su tale argomento sono in corso esperienze.

Adoperando per la circolazione liquido di Ringer si osserva pure una diminuzione degli aminoacidi disciolti, inferiore però a quella osservata nelle esperienze con sangue.

Inoltre nelle esperienze eseguite con liquido di Ringer il deposito degli aminoacidi nel tessuto è assai superiore, tanto che in qualche caso corrisponde esattamente alla quantità degli aminoacidi scomparsi.

La produzione di NH_3 osservata nelle varie esperienze non giustifica che in minima parte il *deficit* assoluto di aminoacidi constatato: e solo in una o due esperienze (IV-XII) l' NH_3 riscontrato, rappresenta una rilevabile parte dell'N aminico scomparso.

Chimica. — *Sul metabolismo degli aminoacidi nell' organismo. V. Azione del tessuto muscolare funzionante sugli aminoacidi aggiunti al sangue circolante.* Nota dei dott. U. LOMBROSO e PATERNI, presentata dal Socio L. LUCIANI.

Chimica. — *Sul metabolismo degli aminoacidi nell' organismo. VI. Sul comportamento degli aminoacidi contenuti nella mucosa enterica o nel lume intestinale.* Nota dei dott. U. LOMBROSO e C. ARTOM, presentata dal Socio L. LUCIANI.

Fisiologia. — *Ricerche sulla secrezione spermatica.* IV. *Influenza del riposo sulla secrezione spermatica del cane.* Nota del dott. G. AMANTEA, presentata dal Socio L. LUCIANI.

Fisiologia. — *Ricerche sulla secrezione spermatica.* V. *Osservazioni sulla secrezione spermatica dell' uomo.* Nota dei dottori G. AMANTEA e T. RINALDINI, presentata dal Socio L. LUCIANI.

Le Note precedenti saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

Chimica fisiologica. — *Ricerche sull'arginasi: intorno all'azione dell'arginasi sulla creatina* [1]. Nota III del dott. ANTONINO CLEMENTI, presentata dal Socio L. LUCIANI.

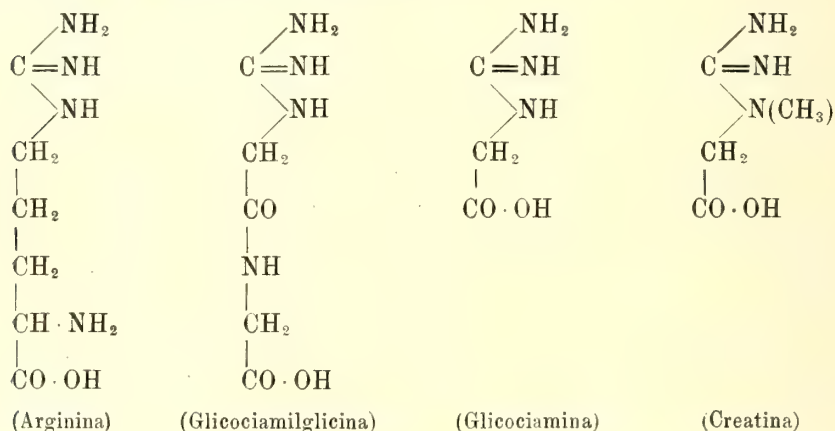
Le mie ricerche sistematiche intorno alla distribuzione dell'arginasi nelle diverse classi di vertebrati hanno portato la dimostrazione, di natura biologica, della partecipazione effettiva di questo fermento alla funzione uropoietica del fegato; l'arginasi assume quindi un posto di primo ordine tra i fermenti dell'organismo, e con essa acquistano un singolare interesse fisiologico tutte le svariate questioni che si collegano alla biologia e alla chimica biologica, ancora sconosciuta, di questo fermento; primo fra tutti ci si presenta il problema riguardante la *specificità di azione dell'arginasi*, il quale si collega da una parte col *problema della specificità dei fermenti in genere*, e dall'altra col *problema speciale della formazione di urea nell'organismo per via idrolitica.*

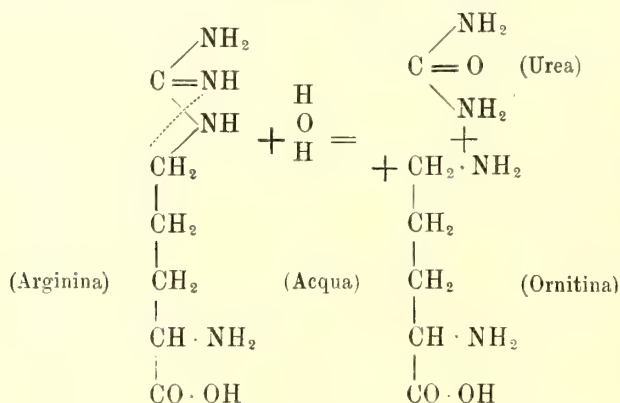
Per risolvere il problema della specificità di azione dell'arginasi, è necessario di ricercare se l'arginasi sia un fermento capace di *staccare il nucleo guanidinico* dalla molecola delle *diverse sostanze organiche* che lo

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica fisiologica della R. Università di Roma, diretto dal prof. D. Lo Monaco.

portano legato, o se invece essa sia in grado di aggredire solamente la *molecola dell'arginina* e di staccare il nucleo guanidinico, solo quando esso faccia parte della molecola di quest'ultima.

Se l'arginasi fosse un fermento generale *deguanidinizzante*, esso dovrebbe agire, oltre che sull'arginina, anche sulla creatina, sulla glicociamina e sulla glicociamilglicina ([1]), data l'analogia strutturale di questi corpi, come si può rilevare dalle seguenti formule di struttura:

$$
\begin{array}{llll}
\diagup NH_2 & \diagup NH_2 & \diagup NH_2 & \diagup NH_2 \\
C{=}NH & C{=}NH & C{=}NH & C{=}NH \\
\diagdown \!\!\!> NH & \diagdown \!\!\!> NH & \diagdown \!\!\!> NH & \diagdown \!\!\!> N(CH_3) \\
CH_2 & CH_2 & CH_2 & CH_2 \\
| & | & | & | \\
CH_2 & CO & CO\cdot OH & CO\cdot OH \\
| & | & & \\
CH_2 & NH & & \\
| & | & & \\
CH\cdot NH_2 & CH_2 & & \\
| & | & & \\
CO\cdot OH & CO\cdot OH & & \\
\text{(Arginina)} & \text{(Glicociamilglicina)} & \text{(Glicociamina)} & \text{(Creatina)}
\end{array}
$$

Come è noto, l'arginina, in seguito all'azione idrolizzante dell'arginasi, si scinde in urea e ornitina secondo questa equazione:

$$
\begin{array}{llcll}
 & \diagup NH_2 & & \diagup NH_2 & \\
 & C{=}NH & & C=O & \text{(Urea)} \\
 & \diagdown \!\!\!> NH & H & \diagdown NH_2 & \\
 & & +\ O\ = & + & \\
 & CH_2 & H & +\ CH_2\cdot NH_2 & \\
 & | & & | & \\
 & CH_2 & & CH_2 & \\
 & | & & | & \\
\text{(Arginina)} & CH_2 & \text{(Acqua)} & CH_2 & \text{(Ornitina)} \\
 & | & & | & \\
 & CH\cdot NH_2 & & CH\cdot NH_2 & \\
 & | & & | & \\
 & CO\cdot OH & & CO\cdot OH &
\end{array}
$$

Analogamente, per azione dell'arginasi, la glicociamina, la glicociamilglicina e la creatina si dovrebbero scindere la prima in urea e glicocolla,

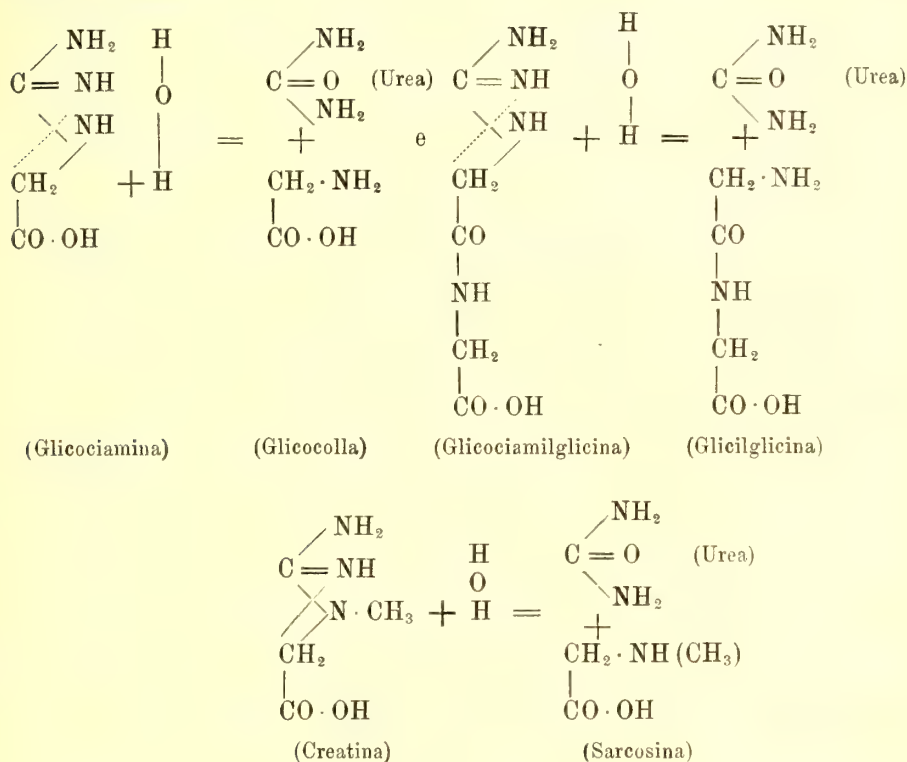
([1]) Clementi Antonino, *Introduzione del nucleo guanidinico nella molecola dei polipeptidi, e sua importanza fisiologica.* Rend. Acc. Lincei, vol. XXIV, serie 5ª, 1° sem., fasc. 1°; Id., *Introduzione del nucleo guanidinico nella molecola dei polipeptidi: sintesi della guanidoglicilglicina.* Gazzetta chimica italiana, anno XLV, parte I, fasc. 1°, 1914.

la seconda in urea e glicilglicina, la terza in urea e sarcosina secondo le seguenti equazioni:

$$\underset{\text{(Glicociamina)}}{C(NH_2)(=NH)\cdot NH\cdot CH_2\cdot CO\cdot OH} + H\cdot O\cdot H = \underset{\text{(Urea)}}{C(NH_2)(=O)\cdot NH_2} + \underset{\text{(Glicocolla)}}{CH_2\cdot NH_2\cdot CO\cdot OH}$$

e

$$\underset{\text{(Glicociamilglicina)}}{C(NH_2)(=NH)\cdot NH\cdot CH_2\cdot CO\cdot NH\cdot CH_2\cdot CO\cdot OH} + H\cdot O\cdot H = \underset{\text{(Urea)}}{C(NH_2)(=O)\cdot NH_2} + \underset{\text{(Glicilglicina)}}{CH_2\cdot NH_2\cdot CO\cdot NH\cdot CH_2\cdot CO\cdot OH}$$

$$\underset{\text{(Creatina)}}{C(NH_2)(=NH)\cdot N\cdot CH_3\cdot CH_2\cdot CO\cdot OH} + H\cdot O\cdot H = \underset{\text{(Urea)}}{C(NH_2)(=O)\cdot NH_2} + \underset{\text{(Sarcosina)}}{CH_2\cdot NH(CH_3)\cdot CO\cdot OH}$$

Colle presenti esperienze mi sono proposto di ricercare se l'arginasi sia capace di idrolizzare la molecola della creatina: questo problema ha un'evidente importanza fisiologica, poichè, dopo l'arginina, la creatina si potrebbe ritenere (anzi è stata da alcuni ritenuta) come la fonte più importante per l'origine dell'urea, per via idrolitica, nell'organismo. Infatti, come è noto, la creatina, scoperta per la prima volta da Chevreul nella poltiglia dei muscoli, è stata riscontrata costantemente in svariati organi e specialmente nel plasma sanguigno e nei muscoli: nell'urina si riscontra in piccola quantità, essendo il suo posto occupato dalla anidride della medesima, la creatinina. Dalle ricerche degli ultimi anni è stato assodato che la creatina rappresenta uno dei più caratteristici prodotti del ricambio delle sostanze azotate nell'organismo, insieme coll'urea e coll'acido urico. D'altra parte la creatina non si è riscontrata come tale nella molecola proteica: si ammette quindi, che essa derivi da altre pietre strutturali della molecola proteica stessa o del protoplasma cellulare, le quali si degradano durante il metabolismo; tutto fa pensare, data l'analogia strutturale tra creatina e arginina, e la presenza costante di quest'ultima tra le pietre strutturali delle più svariate proteine,

che nell'organismo la prima derivi dalla seconda, sebbene finora non sia riuscito possibile il dimostrare nettamente una tale derivazione. Sembra d'altra parte dimostrato, dalle ricerche di Pekelharing e van Hoogenhujze [1], che la creatina sia un prodotto tipico *finale del ricambio materiale delle cellule muscolari*, e che stia in rapporto non tanto coll'*attività contrattile*, quanto coll'*attività tonica della fibra muscolare*; in altri termini, la creatina rappresenterebbe, nell'organismo, specialmente l'*esponente chimico del tono muscolare*.

L'azione dell'arginasi sulla creatina è stata studiata finora da un solo autore, il Dakin [2], il quale non potè constatare un'azione dell'arginasi sulla creatina e creatinina. Abderhalden [3] ha proposto recentemente di chiamare l'arginasi «*deguanidasi*»: questa denominazione implicherebbe il concetto della non specificità dell'azione di questo fermento. Ho creduto quindi di sottoporre il problema a nuove ricerche sperimentali. Nelle mie esperienze, per ricercare se la creatina sotto l'azione dell'arginasi si scinde in urea e sarcosina, ho applicato il metodo di Sörensen, fondandomi sul fatto che, mentre la *sarcosina*, come ho dimostrato in ricerche precedenti [4], *si comporta, alla titolazione secondo il metodo di Sörensen, come un acido monobasico*, la *creatina si comporta come un corpo neutrale*: se la creatina subisse l'azione idrolitica dell'arginasi scindendosi in urea e sarcosina, mediante la titolazione alla formaldeide si potrebbe riconoscere l'avvenuta scissione dal cambiamento di comportamento della creatina nella titolazione al formolo secondo il metodo di Sörensen.

Ho condotto le mie esperienze nel modo seguente: fu preparato dell'estratto acquoso dal fegato di cane ucciso di recente, nel quale l'azione dell'arginasi è presente e assai intensa [5]; l'estratto acquoso di fegato veniva mescolato in un *erlenmeyer* con una soluzione $^1/_{20}$ *n* di creatina e posto in termostato a 37° per un tempo determinato, dopo aggiunta di toluolo; preparavo io stesso la creatina per via sintetica, secondo il metodo di Strecker, unendo direttamente la cianamide $C{\equiv}N{-}NH_2$ alla sarcosina $\begin{array}{l} CH_2\cdot N{<}^{H}_{CH_3} \\ | \\ CO\cdot OH \end{array}$; la

(1) Pekelharing und van Hoogenhujze, Zeitschr. f. physiol. Chem. *64*, 262, an. 1910; Pekelharing, Zeitschr. f. physiol. Chem. *75*, 207, an. 1911.

(2) Dakin, *The action of arginase upon kreatin*. Journ. of biol. chem., III, 435, an. 1907.

(3) Abderhalden, *Lehrbuch der physiologischen Chemie*. Berlin, 1914.

(4) Clementi Ant., *Sulla possibilità del titolare al formolo il gruppo aminico monosostituito degli amino-acidi*. Rend. Accad. dei Lincei.

(5) Clementi Antonino, *La distribuzione dell'arginasi nell'organismo e nella serie dei vertebrati*. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXIII, serie 5ª, 2° sem., fascic. 11°, an. 1914.

creatina veniva individualizzata al microscopio in base alla forma prismatica caratteristica dei suoi cristalli, alla prova con il nitroprussiato di sodio dopo cottura di un campione con acido cloridrico, e la purezza della sostanza veniva stabilita mediante la determinazione del punto di fusione dei cristalli medesimi.

1ª Esperienza. — gr. 0,0715 di creatina purissima (p. m. 143) furono sciolti in 10 cc. di acqua in un *erlenmeyer*: a questo si aggiunsero pochi cc. di estratto acquoso di fegato di cane, e l'*erlenmeyer* fu posto in termostato a 37°, dopo aggiunta di toluolo, per la durata di 12 giorni.

6 febbraio 1915 18 febbraio 1915	Quantità adoperata di Na OH $\frac{1}{5}n$
Creatina $\frac{1}{20}n$ . . . . . 10 ccm.	0,05
Creatina $\frac{1}{20}n$ . . . . . 10 ccm Estratto acquoso di fegato di cane . . . . 5 ccm.	0,30
Acqua distillata . . . . 10 ccm. Estratto acquoso di fegato di cane . . . . 5 ccm.	0,30

Come Sarcosina . . . { calcolato 2,50; trovato 0,00 }

In questa esperienza la creatina, mescolata all'estratto acquoso di fegato, lasciata in stufa a 37°, dopo 13 giorni si comportava, alla titolazione al formolo, come un corpo perfettamente neutrale; questo fatto dimostra che, per azione dell'arginasi, non si formò nessuna quantità (anche piccola) di sarcosina, la quale si sarebbe messa subito in evidenza mediante la titolazione al formolo.

2ª Esperienza. — gr. 0,0715 di creatina purissima, da me preparata, furono sciolti in 10 cc. di acqua in un *erlenmeyer* e mescolati con pochi cc. di estratto acquoso di fegato di cane, e l'*erlenmeyer* fu posto in termostato a 37°, dopo aggiunta di toluolo, per la durata di sette giorni.

7 febbraio 1915 15 febbraio 1915	Quantità adoperata di $NaOH \frac{1}{5} n$
Creatina $\frac{1}{20} n$ . . . . . 10 ccm.	0,00
Creatina $\frac{1}{20} n$ . . . . . 10 ccm. Estratto acquoso di fegato di cane . . . . 3 ccm.	0,10
Acqua distillata . . . . 10 ccm. Estratto acquoso di fegato di cane . . . . 3 ccm.	0,10

Come sarcosina . . . { calcolato 2,50; trovato 0,00 }

In questa esperienza la creatina, aggiunta all'estratto acquoso di fegato di cane, lasciata in termostato a 37°, si comportava al formolo, dopo 7 giorni, come un corpo perfettamente neutrale; ciò dimostra che l'arginasi non determinò (neanche in piccola quantità) formazione di sarcosina, che si sarebbe messa in evidenza colla titolazione al formolo.

3ª Esperienza. — gr. 0,0715 di creatina furono sciolti in 10 cc. di acqua e mescolati con pochi cc. di estratto acquoso di fegato di cane in un *erlenmeyer*, che fu lasciato in termostato a 37°, dopo aggiunta di toluolo, per 9 giorni.

25 febbraio 1915 6 marzo 1915	Quantità adoperata di $NaOH \frac{1}{5} n$
Creatina $\frac{1}{20} n$ . . . . . 10 ccm.	0,00
Creatina $\frac{1}{20} n$ . . . . . 10 ccm. Estratto acquoso di fegato di cane . . . . 5 ccm.	0,30
Acqua distillata . . . . 10 ccm. Estratto acquoso di fegato di cane . . . . 5 ccm.	0,30

Come sarcosina . . . { calcolato 2,50; trovato 0,00 }

In questa esperienza la creatina, mescolata all'estratto acquoso di fegato di cane, lasciata in termostato a 37° per 9 giorni, si comportava come un corpo perfettamente neutrale; questo fatto dimostra che l'arginasi non determinò formazione (neanche in piccola quantità) di sarcosina, che si sarebbe messa in evidenza colla titolazione al formolo.

Dai risultati di queste esperienze si possono trarre le seguenti conclusioni:

1°) *Per azione dell'arginasi non ha luogo, concordemente con quanto ebbe ad osservare anche Dakin, la scissione della creatina in urea e sarcosina*;

2°) *L'arginasi non è un fermento capace di staccare il nucleo guanidinico indistintamente da ogni sostanza che lo porta legato, come vorrebbe indicare la denominazione di « deguanidasi » da Abderhalden proposta recentemente al posto di quella di arginasi*;

3°) *L'incapacità dell'arginasi di idrolizzare la creatina sta a favore del concetto della specificità di azione di questo fermento.*

Chimica fisiologica. — *Contributo allo studio dell'azione dei fermenti proteolitici sui polipeptidi.* Nota del dott. Antonino Clementi, presentata dal Socio L. Luciani.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *I numeri reali definiti come operatori per le grandezze.* Nota di C. Burali-Forti, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

I numeri reali (*), Q_0, gli interi, N_0, e i razionali, R_0, contenuti nei Q_0, sono, indubbiamente, degli *enti semplici* ([6]) e precisamente degli

(*) Avrò occasione di citare i lavori seguenti:

([1]) G. Peano, Formulario, ed. I-V.

([2]) M. Pieri, *Sopra gli assiomi aritmetici* [Acc. Gioenia in Catania, fasc. 2°, ser. 2ª, 1908].

([3]) S. Catania, *Sul concetto di funzione monodroma e su quelli che da essa derivano* [Rendic. della R. Accad. dei Lincei, vol. XXII, ser. 5ª, 2° sem., 1913, pp. 546-551, 639-642].

([4]) C. Burali-Forti, *Propriétés formules* etc., [Revue de mathématique di G. Peano, tom. VI, 1900, pp. 141-177 (Estratti, G. B. Petroni, Torino)].

([5]) Idem, *Sulla teoria generale delle grandezze e dei numeri* [Atti della R. Accad. di Torino, vol. XXXIX, 1904].

([6]) Idem, *Gli enti astratti* ecc. (Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. XXI, ser. 5ª, 2° sem., 1912, pp. 667-682).

([7]) Idem, *Sur les lois générales* etc. (International Congress of mathematicians, Cambridge 1912).

operatori (3) (7) per le grandezze. Questo carattere dei Q_0, che è stato precisato con le moderne ricerche logico-matematiche, ha origine antichissima, come lo provano, fra altro, il *rapporto* di Euclide e il concetto, più moderno, di *misura*, al quale vien collegata la frase erronea *numero concreto* e la frase inutile *numero astratto*. Di più: nelle *applicazioni* della matematica, i numeri compariscono non perchè numeri, ma perchè *misure di grandezze* sulle quali effettivamente si *deve* operare. Ora: definiti gli N_0, R_0, Q_0, in modo anche logicamente perfetto, come *enti a sè*, non è fatto tutto; occorre *collegarli con le grandezze*. Ed ecco, secondo me, il capitale difetto *logico* e *pratico* dei metodi ordinarî; *dover collegare i* Q_0 *alle grandezze*, mentre i Q_0 hanno ragione di esistere solo perchè, *dati* dalle grandezze, *servono a rappresentare queste in modo univoco e reciproco*.

Ho tentato altre volte (4) (5) di ottenere i Q_0 dalle grandezze, senza però riuscire, sia ad evitare alcune complicazioni di forma, sia a far precedere la definizione dei Q_0 (classe *generale* dei numeri) a quella delle classi (parziali) N_0, R_0. Credo di esser riuscito ora ad evitare ogni complicazione di forma e dedurre direttamente, in modo elementare (*), la classe totale Q_0 dalle grandezze, mantenendo ai numeri la *forma* e la *sostanza loro proprie da secoli*.

1. In tutto ciò che segue mi riferisco al contenuto dei nn. 1 e 2 (*) della mia Nota (5).

Interessa far notare che, essendo f una operazione per gli u, la frase « u è una classe di grandezze omogenee rispetto all'operazione f per gli u » significa che « per u ed f valgono le proprietà I-VIII del n. 2 della nota (5) »; e niente altro che questo. Ne segue che le I-VIII *non* sono postulati per le grandezze [cfr. (5)] e che l'*omogeneità* è carattere cumulativo di u e di f e non di u o di f soltanto (**).

(*) Immediatamente applicabile all'insegnamento. Il prof. S. Catania, al quale ho comunicato i resultati ottenuti, sta appunto preparando una esposizione sistematica della teoria delle grandezze e dei numeri, che, credo, potrà sostituire le altre trattazioni più complesse.

(*) Nella 1·3 di (5) si ponga $a \varepsilon [u - \mathrm{Nul}(u, f)] f x$, altrimenti non si può fare a meno della proprietà commutativa di f. Inoltre, come mi ha fatto osservare il prof. Catania, alle **I-VIII** del n. 2 occorre aggiungere la **VII′** seguente

$$x, y \,\varepsilon\, u - Nul\,(u, f) \cdot y \,\varepsilon\, \theta\,(u, f)\, x \cdot \underline{\supset}_{x,y} \cdot x \,\varepsilon\, \theta\,(u, f)\,(x f y)$$

che è pure indipendente dalle altre **I-VIII** e che permette di affermare, senza far uso della proprietà commutativa di f, che per gli u vale il principio di Archimede.

(**) La prima osservazione basta per risparmiare qualsiasi vuota discussione sulla *esistenza* delle classi di grandezze; la seconda prova che le frasi comuni « x è una classe di grandezze omogenee », « a, b sono grandezze omogenee », sono, per il significato da noi dato a Grand f, del tutto prive di significato, poichè non contengono l'operazione rispetto alla quale esiste l'omogeneità.

In ciò che segue — e non ripeteremo tale ipotesi — supponiamo che u sia una classe di grandezze omogenea rispetto ad una operazione (somma) che, per seguire l'uso comune, indicheremo col segno $+$. Inoltre intenderemo introdotti, mediante il θ di (5), i segni $>$, $<$ e l^1 (limite superiore) (***) e sottintenderemo gli indici u, $+$ ai simboli θ, Nul, ecc., per semplificare la scrittura, salvo a porli esplicitamente quando la notazione abbreviata possa dar luogo ad equivoci. L'unico elemento di u, che è nullo rispetto all'operazione $+$ (5), lo indicheremo con 0 (zero).

2. Tra gli operatori per gli u giova considerare subito quello *nullo*, che indicheremo con 0 (*zero*, come l'elemento di u che è nullo rispetto a $+$) e l'*identità*, che indicheremo con 1 (*uno*);

$$[1] \qquad 0 = \imath\ [u \mathrm{f} u \cap \alpha \ni \{x \varepsilon u \cdot \supset_x \cdot \alpha x = 0\}]$$

$$[2] \qquad 1 = \imath\ [u \mathrm{f} u \cap \alpha \ni \{x \varepsilon u \cdot \supset_x \cdot \alpha x = x\}],$$

e per semplicità non porremo l'indice u e $+$ a 0 ed 1, come regolarmente dovrebbe farsi, perchè (n. 1) u e $+$, essendo *fissi*, possono essere *sottintesi*.

Esiste almeno un operatore α, per gli u, tale che $\alpha x = 0$, ovvero $\alpha x = x$, perchè è stabilito, con *legge finita*, quale è l'u che corrisponde ad un x di u fissato ad arbitrio. Tale operatore è anche *unico* (3), perchè, se per β sono verificate le medesime condizioni, si ha indubbiamente $\alpha x = \beta x$, cioè $\alpha = \beta$, essendo x arbitrario. Segue dunque che:

$$[3] \qquad 0\,, 1 \,\varepsilon\, u \mathrm{f} u \ (*)$$

3. Con le notazioni *complete*

$$Q_0(u, +)\ ,\ N_0(u, +)\ ,\ R_0(u, +)$$

indicheremo, rispettivamente, le classi dei *numeri reali, interi, razionali*, che definiremo come *classi di operatori per gli u rispetto all'operazione* $+$. Ma per semplificare (nn. 1, 2) la scrittura, nelle proposizioni [4]-[17] *sottintenderemo* gli indici u, $+$, scrivendo semplicemente Q_0, N_0, R_0. In seguito (n. 8) le notazioni Q_0, N_0, R_0, *prive realmente degli indici* u, $+$, indicheranno delle *classi assolute*.

Definiamo la classe Q_0, ponendo

$$[4] \qquad Q_0 = \imath\ [\mathrm{Cls}'(u \mathrm{f} u) \cap w \ni \{$$

$A.$ $a\,, b \varepsilon u \cdot a -= 0 \cdot \supset_{a,b} \cdot \imath\ \{w \cap \alpha \ni (\alpha a = b)\}\ \varepsilon w \therefore$

$B.$ $\alpha \varepsilon w \cdot a, b \varepsilon u \cdot \supset_{\alpha, a, b} \cdot \alpha(a + b) = \alpha a + a b \therefore$

$C.$ $\alpha \varepsilon w : \exists\, u - \iota 0 \cap x \ni (\alpha x = x) : a \varepsilon u - \iota 0 \cdot \supset_{\alpha, a} \cdot \alpha a = a \therefore$

$D.$ $\alpha, \beta, \gamma \varepsilon w : \exists\, u - \iota 0 \cap x \ni (\gamma x = \alpha x + \beta x) : a \varepsilon u - \iota 0 \cdot \supset_{\alpha, \beta, \gamma, a} \cdot$
$\gamma a = \alpha a + \beta a\}]$ (*).

(***) $x < y \cdot = \cdot x \varepsilon \theta y \,;\, v \varepsilon \mathrm{Cls}' u \cdot \supset \cdot l^1 v = \imath[u \cap x \varepsilon(\theta x = \theta v)]$.

(*) Si osservi che, mentre 0 dipende da u e da $+$, perchè dipende dall'elemento di u che è nullo rispetto a $+$, l'operatore 1 dipende soltanto da u.

(*) A causa della B, non è facile [cfr. (1), ed. V, pag. 118] dimostrare la *indipendenza assoluta* delle A-D. Una eventuale dipendenza delle A-D non influisce sul procedimento usato in questa Nota per dedurre i Q_0 dalle grandezze.

Vale a dire: Q_0 è quella classe di operatori per gli u che, rispetto alla operazione $+$, soddisfa alle condizioni *A-D*. La *A* esprime che esiste un Q_0, ed uno solo, che trasforma un elemento a non nullo di u in un elemento b di a; la *B* dice che ogni Q_0 è operatore distributivo rispetto alla somma; le *C*, *D* esprimono che le condizioni $\alpha x = x$, $\gamma x = \alpha x + \beta x$, verificate per un x di u non nullo, sono vere per qualsiasi altro u non nullo. E queste sono proprietà elementari e ben note dei Q_0.

Nelle proposizioni [5]-[16] intendiamo *ammesso* che Q_0 sia una classe univocamente determinata dalle condizioni *A-D* della [4]. In seguito, n. 7, dimostreremo che ciò avviene realmente.

Intanto si ha:

[5] $$0\,, 1 \,\varepsilon\, Q_0 \;(**).$$

4. La somma per i Q_0 sarà indicata, come d'uso, col segno $+$, senza che vi sia pericolo di equivoco. Porremo:

[6] $$\alpha\,, \beta \,\varepsilon\, Q_0 \cdot \supset \cdot\, \alpha + \beta = \iota\, [Q_0 \cap \gamma \,\varepsilon\, \{x \,\varepsilon\, u \cdot \supset_x \cdot\, \gamma x = \alpha x + \beta x\}];$$

e risulta subito:

[7] $$\alpha\,, \beta \,\varepsilon\, Q_0 \cdot \supset \cdot\, \alpha + \beta \,\varepsilon\, Q_0 :$$

cioè, $+$ *è una operazione per i* Q_0.

È facilissimo dimostrare che per i Q_0 definiti dalla [4], e l'operazione $+$ definita dalla [6], valgono le proprietà I-VIII del n. 1, e quindi che

[8] $$Q_0 \,\varepsilon\, \mathrm{Grand}\, +,$$

cioè *i* Q_0 *formano una classe di grandezze omogenea rispetto all'operazione* $+$ *definita dalla* [6] (*).

Dunque tutte le proprietà degli u che si possono dedurre dalla I-VIII valgono, *e non vi è bisogno di altra dimostrazione*, per i Q_0. Notevole economia di tempo.

5. L'intimo legame tra le classi u, Q_0 è posto in piena luce dalle due proposizioni seguenti, ben note e importantissime:

[9] $$a \,\varepsilon\, u - \iota 0 \cdot \supset \cdot\, u = Q_0\, a,$$

(**) Da *B* segue $\alpha 0 = 0$. Se per $x -= 0$ si ha $\alpha x = 0$, allora $\alpha x = \alpha x + \alpha x$ e, per la *D*, $\alpha a = \alpha a + \alpha a$, da cui $\alpha a = 0$. Ma da *B* risulta che esiste α tale che $\alpha x = 0$: dunque ecc.

(*) Per la dimostrazione della [8] giovano le proprietà seguenti:

(a). $\alpha \,\varepsilon\, Q_0 \cdot a \,\varepsilon\, u \cdot \supset .\therefore \alpha a = 0 : = : \alpha = 0 \cdot \cup \cdot a = 0;$

(b). $a\,, b \,\varepsilon\, u \cdot \alpha \,\varepsilon\, Q_0 - \iota 0 \cdot \supset : a \overset{=}{>} b \cdot = \cdot\, \alpha a \overset{=}{>} \alpha b;$

(c). $\alpha \,\varepsilon\, Q_0 \cdot \supset \cdot\, 0 + \alpha = \alpha;$

(d). $\alpha\,, \beta \,\varepsilon\, Q_0 \cdot a \,\varepsilon\, u - \iota 0 \cdot \supset : \alpha a > \beta a \cdot = \cdot\, \alpha \,\varepsilon\, (Q_0 - \iota 0) + \beta.$

La (c) prova che *l'operatore nullo*, 0, *è pure l'elemento di* Q_0 *che è nullo rispetto alla operazione* $+$ definita dalla [6].

(*u è, rispetto all'operazione* $+$, *sistema lineare ad una dimensione*);

$$[10] \quad \begin{cases} \alpha \varepsilon Q_0 - \iota 0 \cdot \supset \cdot \alpha u = u, \text{ oppure} \\ Q_0 - \iota 0 \supset (u f u) \text{ rcp} \end{cases}$$

(*ogni* Q_0 *non nullo è operatore univoco e reciproco per gli* u).

Per la dimostrazione della [10], e anche per le cose seguenti, giova ricordare che, essendo i Q_0 operatori per gli u, il prodotto funzionale [7] di un Q_0 per un altro è un Q_0 univocamente determinato, che tale prodotto (*) è *associativo*, e che $0\alpha = \alpha 0 = 0$, $1\alpha = \alpha 1 = \alpha$. Se α è un Q_0 non nullo, dalla condizione $\alpha\alpha = \alpha$ segue $\alpha = 1$, perchè da $\alpha(\alpha x) = \alpha x$ segue $\alpha = 1$. Da $\beta\alpha = 1$ segue $\alpha\beta\alpha = \alpha$, poi $\alpha\beta\alpha\beta = \alpha\beta$ e quindi anche $\alpha\beta = 1$. Ora, da A e dalla [8] risulta che esiste un solo elemento β di Q_0 tale che $\beta\alpha = 1$, o anche $\alpha\beta = 1$; inoltre l'equazione $\alpha x = a$ ha per soluzione, unica, $x = \beta a$, e quindi β è precisamente l'*operatore inverso* di α (e la [10] è così dimostrata) che indicheremo, come d'uso, con α^{-1} senza che, per ora, si dia ad 1 il significato stabilito dalla [2] (**).

6. Definiamo ora la classe N_0 seguendo Peano [1] o Pieri [2], non più mediante *postulati*, ma bensì con *definizione nominale* che dà *la legge di formazione degli* N_0 *mediante* 0 *ed* 1 *nella classe* Q_0.

$$[11] \quad N_0 = \imath [\text{Cls}' Q_0 \cap v \ni \{0 \varepsilon v : 1 + v \supset v : w \varepsilon \text{Cls}' v \cdot 0 \varepsilon w \cdot 1 + w \supset w \cdot \supset_w \cdot w = v\} 1] \qquad [\text{Peano } (^1)].$$

$$[11'] \quad N_0 = \imath [\text{Cls}' Q_0 \cap v \ni \{0 \varepsilon v : 1 + v \supset v : w \varepsilon \text{Cls}' v \cdot \supset_w \cdot \exists\, w - (1 + w)\}] \qquad [\text{Pieri } (^2)].$$

Nella [11] la condizione $0 \varepsilon N_0 : 1 + N_0 \supset N_0$ dice che i Q_0, formati con 0 ed 1 soltanto,

$$(a) \qquad 0 \ , \ 1 + 0 \ , \ 1 + 1 + 0 \ , \ 1 + 1 + 1 + 0 \ , \ \ldots \cdot \ldots,$$

appartengono tutti alla classe N_0; inoltre la condizione

$$w \varepsilon \text{Cls}' N_0 \cdot 0 \varepsilon w \cdot 1 + w \supset w \cdot \supset_w \cdot w = N_0$$

dice che *con la legge* (a) *si ottengono tutti e soli gli* N_0.

(*) Se α, β sono Q_0, operatori a sinistra per gli u, indico brevemente con $\beta\alpha$ il prodotto funzionale di α per β. Però tale notazione abbreviata non è regolare e può condurre ad assurdi [cfr. [7], n. 13]; mentre è regolarissima (ibid., n. 12) la notazione αa, ove a è un u. Per il segno esplicito di prodotto funzionale dei Q_0 si dovrà far uso del segno $\times$ poichè (n. 9) il prodotto funzionale dei Q_0 è niente altro che il loro prodotto aritmetico.

(**) Per il rapporto di Euclide si ha

$$a, b \varepsilon u \cdot a - = 0 \cdot \supset \cdot b/a = \imath \{Q_0 \cap \alpha \varepsilon [\alpha a = b]\}$$

e da A risulta che $b/a \varepsilon Q_0$. In virtù della [8], la proposizione precedente definisce anche il rapporto tra un Q_0 e un altro non nullo, e si ha $\beta/\alpha = \alpha^{-1}\beta$, $1/\alpha = \alpha^{-1}$.

Il procedimento seguìto in questa Nota per dedurre i Q_0 dalle grandezze è dunque, in sostanza, il metodo dei rapporti di Euclide, reso più agile dalla mancanza degli N_0 e dalla presenza degli operatori; inoltre è precisato logicamente.

Lo stesso dice la [11′] quando, come ha fatto Pieri, si deduca dalla [11′] il *principio d'induzione* che è esplicitamente contenuto nella [11] e dà, anzi, la legge *finita* (*) di formazione degli N_0.

Segue subito che:

[12] $$N_0 \varepsilon \mathrm{Cls}' Q_0 .$$

Definiamo la classe R_0, ponendo (n. 5)

[13] $$R_0 = (N_0 - \iota 0)^{-1} N_0 ;$$

e dalla [12] e dal n. 5 si ha subito

[14] $$R_0 \varepsilon \mathrm{Cls}' Q_0 \ (*).$$

Dimostrato il principio di Archimede [cfr. (4), 38·1], e dimostrato che ogni Q_0 è compreso tra due N_0 consecutivi (non escluso l'estremo minore), si ha:

[15] $$\alpha \varepsilon Q_0 \cdot \supset \cdot \alpha = 1^1 \{R_0 \cap (\theta \alpha \cup \iota \alpha)\} \ (**),$$

dalla quale risulta

[16] $$Q_0 = 1^1 \{\mathrm{Cls\ Lim}\ R_0\},$$

cioè che la classe Q_0 è costruibile mediante classi limitate ed esistenti di R_0 e il limite superiore (***).

7. Gli operatori 0, 1 per gli u sono univocamente determinati (n. 2), anche indipendentemente dalle condizioni *A-D*. Una volta *ammesso che le A-D individuino una, ed una sola, classe* Q_0, risulta, [11], che la classe N_0 è EFFETTIVAMENTE COSTRUIBILE *mediante* 0, 1, + *con legge finita*; con legge parimente finita è COSTRUIBILE, [13], la classe R_0, e, mediante questa, [15], è EFFETTIVAMENTE COSTRUIBILE la classe Q_0, sempre mediante 0, 1, +, la classe u e l'operazione + per gli u.

(*) Le leggi [11], [11′] sono *equivalenti* perchè l'una è deduttibile dall'altra (2); ma la [11′] è *finita*, e quindi è pure *finita* la [11]. Il *ragionamento per induzione* è dunque *ragionamento finito*, e il *principio d'induzione caratterizza le classi finite*, contrariamente all'opinione di Poincaré accettata da alcuni anche in Italia.

(*) L'operatore inverso dell'identità è pure l'identità: e quindi $N_0 \supset R_0$ senza bisogno di nuove *convenzioni*, antilogiche sempre perchè conducono ad *identificare enti essenzialmente distinti.*

(**) Come legame tra gli u e i Q_0 si ha

$$\alpha \varepsilon Q_0 \cdot \supset \cdot \exists \ \mathrm{Cls}' R_0 \cap v \ni \{x \varepsilon u \cdot \supset_x \cdot \alpha x = 1^1 (v x)\} .$$

(***) Allo stesso risultato si giunge, sebbene sotto forma più complessa e punto chiara, anche quando ci si ostini a voler far uso delle *pesanti* e *antiestetiche classi contigue,* in luogo del concetto semplice chiaro ed elegante di *limite superiore.*

Dunque: *mediante le condizioni A-D è possibile di* COSTRUIRE EFFETTIVAMENTE, *una, ed una sola, classe di operatori per gli u rispetto a* $+$, *che soddisfa,* [15], *alle condizioni A-D.* Ne segue che: *la* [4] *definisce una, ed una sola, classe* Q_0 *rispetto ad u* e $+$, cioè che

[17] $$Q_0 \varepsilon \text{Cls}'(u \text{ f } u) .$$

8. Torniamo a porre il segno generico f in luogo del segno speciale $+$ per gli u, riserbando questo, definito dalla [6], per i Q_0. Alla notazione *abbreviata* Q_0 (n. 3) sostituiamo quella completa $Q_0(u, f)$; e lo stesso facciamo per N_0 ed R_0. Inoltre indichiamo con u' una classe di grandezze omogenea rispetto all'operazione f', e con $0'$ l'elemento di u' che è nullo rispetto ad f'.

Se α è un $N_0(u, f)$ e x è un u, risulta dalle cose precedenti, che αx è formato, nella classe u, mediante $0, x, f$, come α è formato, nella classe $Q_0(u, f)$, mediante $0, 1, +$. Se x' è un u', la notazione $\alpha x'$ è attualmente priva di significato perchè α non è un $Q_0(u', f')$. Noi *converremo* di indicare con $\alpha x'$ quell'elemento di u' che è formato, nella classe u', mediante $0', x', f'$, come αx è formato, nella classe u, mediante $0, x, f$, cioè come α è formato, nella classe $Q_0(u, f)$, mediante $0, 1, +$ (*).

E tale convenzione è lecita, perchè l'indicata formazione di αx nella classe *u dipende esclusivamenta dalle proprietà* I-VIII *di u ed f, proprietà che* NON VARIANO *col variare di u ed f.*

In base a tale convenzione, e alla permanenza delle I-VIII, possiamo indicare, come d'uso, con i simboli $0, 1, 2, 3, \ldots$, *assoluti*, cioè *indipendenti da u e da f*, gli elementi della classe $N_0(u, f)$. Allora $0, 1, 2, 3, \ldots$ formano una *classe assoluta*, N_0, di operatori per u, f arbitrarî. Dalla [13] risulta che, mediante la classe assoluta N_0, si ottiene la classe, pure *assoluta* R_0. Inoltre, se osserviamo che nella [15] la classe $R_0 \cap (\theta\alpha \cup \iota\alpha)$ è *unica*, allora dalla [16] risulta che R_0 dà la *classe assoluta* Q_0 di operatori per u, f arbitrarî (*).

9. Se α, β sono N_0, si prova facilmente ([1]) che $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ e che $\beta\alpha = \alpha\beta$; da questo e da [13], [16] risulta che per la *somma* e per il

(*) Per un'altra forma mediante *corrispondenza ordinata,* cfr. la mia Nota ([5]) n. 4. La forma del testo è più semplice.

(*) Ottenuta così la classe assoluta Q_0, e se α è un suo elemento qualunque, allora, *purchè si operi in una classe* u, f, *omogenea,* αx è un u determinato. Ma se insieme con x *non son dati u ed f* (n. 1), allora αx è notazione priva di significato. Come pure se u è omogeneo rispetto a due operazioni *distinte* f, f', allora αx indica due elementi distinti, uno in u, f, l'altro in u, f'.

La questione « *se esiste un'operazione f per gli u soddisfacente alle* I-VIII, *può esisterne un'altra f' diversa da f* ? » può avere interesse in sè, ma non ne ha per la teoria generale delle grandezze e dei Q_0. A questo proposito ritengo dubbie le ultime due proposizioni della mia Nota ([5]).

prodotto funzionale dei Q_0 vale la proprietà *commutativa*. Se a, b sono elementi arbitrarî di u, allora, fissato c non nullo di u, si ha $a = \alpha c$, $b = \beta c$, da cui

$$a + b = \alpha c + \beta c = (\alpha + \beta) c = (\beta + \alpha) c = \beta c + \alpha c = b + c$$

e quindi risulta, come ha già dimostrato il sig. Huntington ([5]), che la proprietà commutativa della somma delle grandezze è conseguenza delle I-VIII.

Infine è ovvio che il *prodotto funzionale* dei Q_0 coincide con l'ordinario *prodotto aritmetico*, e che l'operatore α^{-1}, *inverso* di α, coincide con l'ordinario *reciproco* di α.

In tal modo, senza ricorrere all'iper-logica e a classi di classi, è possibile ottenere in modo semplice rapido e rigoroso i numeri reali nella *forma e sostanza abituale e loro propria da secoli*, ed inoltre ottenerli *già collegati con le grandezze* perchè dedotti da queste.

Matematica. — *Formole di derivazione funzionale.* Nota II di E. Daniele, presentata dal Socio V. Volterra.

4. Riferendoci per le notazioni ed i simboli alla Nota pubblicata nel fascicolo precedente di questi Rendiconti col medesimo titolo, possiamo supporre che la funzione φ del n. 3 contenga, oltre alla variabile x, un parametro α; sia cioè

$$(4) \qquad F = F \left| \left[\varphi(\overset{\infty}{\underset{a}{x}}|\alpha) \right] \right| \quad , \quad \varphi(x|\alpha) = \varphi \left| \left[\psi(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}) , x|\alpha \right] \right| (\psi(x)) \, ,$$

per cui F si potrà considerare come dipendente da tutti i valori di $\psi(\xi)$ fra 0 e 1, ed inoltre dal parametro α. Vogliamo calcolare la derivata (ordinaria) di F rispetto ad α. Si ha:

$$\varphi(x \mid \alpha + \varDelta\alpha) = \varphi(x \mid \alpha) + \varDelta\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right),$$

indicando con $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)$ il valore di $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$ per un valore conveniente di α. Inoltre, *se* $F|[\varphi]|$ *non ha punti eccezionali*, e se $\varDelta\alpha$ è supposto infinitesimo,

$$\delta F = \int_0^1 F' \left| \left[\varphi(x \mid \alpha) , y \right] \right| \delta\varphi(y \mid \alpha) \, dy \, .$$

Sostituendo a $\delta\varphi$ l'espressione dedotta dalla formola precedente, e dividendo ambo i membri per $\varDelta\alpha$, si ottiene:

$$(\text{IV}) \qquad \frac{\partial F \left| \left[\psi(\xi) , \alpha \right] \right|}{\partial \alpha} = \int_0^1 F' \left| \left[\varphi(x \mid \alpha) , y \right] \frac{\partial \varphi(y \mid \alpha)}{\partial \alpha} \, dy \, .$$

Come esempio prendiamo

$$(4') \qquad \varphi(x \mid \alpha) = \int_0^1 \lambda(x\,, \xi \mid \alpha)\, \psi(\xi)\, d\xi + \psi(x)\,;$$

l'applicazione della (IV) ci fornisce:

$$(IV') \qquad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = \int_0^1 F' \,|[\varphi(x \mid \alpha)\,, \xi]|\, d\xi \int_0^1 \frac{\partial \lambda(\xi\,, \eta \mid \alpha)}{\partial \alpha}\, \psi(\eta)\, d\eta\,,$$

e questa coincide con una formola trovata direttamente dal prof. Volterra nel n. 3 della Nota dianzi citata, dove la $F\,|[\varphi(x \mid \alpha)]|$, con F funzione arbitraria e $\varphi(x \mid \alpha)$ data dalla (4'), è la soluzione di una certa equazione alle derivate funzionali.

5. Il sistema

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} F(x) = F\,|[\varphi(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})\,, x]| \\ \varphi(\xi) = \varphi(f(\xi)\,, f'(\xi)\,, \ldots\,, f^{(n)}(\xi))\,, \end{array} \right.$$

mediante il quale si fa dipendere F da tutti i valori di $f(\xi)$ fra 0 e 1, è affine a quello formato dalle (1). Noi supponiamo $F\,|[\varphi]|$ priva di punti eccezionali. Volendo la derivata di F rispetto ad f, osserveremo intanto che si ha:

$$\delta\varphi = \sum_{r=0}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial f^{(r)}}\, \delta f^{(r)}\,,$$

e se noi assumiamo δf sempre nulla fra 0 e 1 eccetto che in un intervallo $(\mu\,\nu)$, la stessa cosa accadrà per $\delta\varphi$.

D'altra parte si ha:

$$\delta F = \int_\mu^\nu F'\,|[\varphi(\xi)\,, x\,, \eta]|\, \delta\varphi(\eta) d\eta\,;$$

sostituendo colla formola precedente ed eseguendo trasformazioni ben note, si ottiene:

$$\delta F = \int_\mu^\nu \delta f(\eta) \left\{ F'\,|[\varphi(\xi)\,, x\,, \eta]|\, \frac{\partial \varphi}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(F' \frac{\partial \varphi}{\partial f'}\right) + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \eta^n}\left(F' \frac{\partial \varphi}{\partial f^{(n)}}\right) \right\} d\eta + \left(\sum_{i=0}^{n-1} p_i \frac{\partial^i \delta f}{\partial \eta^i}\right)_\mu^\nu\,,$$

$$p_i = \sum_{r=0}^{n-i} (-1)^{n-r-i} \frac{\partial^{n-r-i}}{\partial \eta^{n-r-i}} \left(F'\,|[\varphi(\xi)\,, x\,, \eta]|\, \frac{\partial \varphi}{\partial f^{(n-r+1)}}\right).$$

Col tendere di tutti i punti di $(\mu\,\nu)$ a ξ_1, la differenza $\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1}\right)_\mu^\nu$ si annulla

per la continuità, che noi supponiamo, delle funzioni considerate, e si giunge così alla formola:

$$\text{(V)} \quad F'|[f(\xi), x, \xi_1]| = \Big[F'|[\varphi(\xi), x, \eta]| \frac{\partial \varphi(\eta)}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(F' \frac{\partial \varphi}{\partial f'}\right) + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \eta^n}\left(F' \frac{\partial \varphi}{\partial f^{(n)}}\right)\Big]_{\eta=\xi_1}.$$

La condizione che la $F|[\varphi]|$ sia priva di punti eccezionali non è essenziale per la validità della (V). Se per es. si considera

$$\text{(5')} \quad F(x) = F|[\overset{x}{\underset{0}{\varphi(\xi)}}, x]|(\varphi(x)),$$

per modo che si abbia

$$\delta F = \int_0^x F'|[\varphi(\xi), x, \eta]| \; \delta\varphi(\eta)\, d\eta + a\,\delta\varphi(x),$$

eseguendo la variazione di φ in un intervallo $(\mu\nu)$ *interno* al tratto $(0, x)$, l' $\int_0^x$ si ridurrà a $\int_\mu^\nu$, mentre il termine $a\,\delta\varphi(x)$ s'annulla.

Pertanto la (V) vale ancora per la F definita dalla (5'), alla sola condizione che il punto ξ_1, in cui si calcola la derivata di F, non coincida con x.

Meccanica. — *Nuove osservazioni teoriche sull'irraggiamento nero.* Nota del dott. CINO POLI, presentata dal Socio C. SOMIGLIANA.

Quando in una cavità chiusa, a pareti perfettamente riflettenti, sia contenuto un corpo a temperatura costante e uniforme T, la densità $u(\nu, T)$ dell'energia raggiante di frequenza ν è pure costante e indipendente dalla natura del corpo che si considera, e, secondo Planck [1], vale

$$\text{(1)} \quad u(\nu, T) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

essendo h una costante universale di significato fisico non ancora precisato, e $\frac{3}{2} kT$ l'energia cinetica molecolare media di un gas perfetto alla temperatura assoluta T.

Come è noto, questa relazione, che è in ottimo accordo coll'esperienza, è stata dal Planck dimostrata con ipotesi estranee, ed anzi incompatibili coi

[1] Max Planck, *Theorie der Wärmestrahlung*. Leipzig, 1906, pag. 157.

principî della dinamica classica [1], ed è opinione generalmente accettata [2] che essa non si possa ottenere col solo ausilio di questi ultimi.

Mi propongo invece di dimostrare che questa incompatibilità non esiste, poichè si può imaginare per la emissione un meccanismo conforme alle teorie classiche, per il quale si dimostra facilmente la formula di Planck. Chiuderò quindi la Nota con qualche osservazione sul significato e sul valore teorico di tali meccanismi.

2. Secondo le ipotesi fisiche generalmente accettate, l'irraggiamento di un corpo è prodotto dal moto di particelle elettrizzate contenute nel corpo stesso in numero enorme, e che nel sèguito indicherò brevemente col nome di ioni. Questi moti sono strettamente connessi alla natura fisica e chimica del corpo, cioè alla sua costituzione molecolare, atomica ed interatomica; possono dunque essere affatto diversi da corpo a corpo; ma se si suppone che questo sia circondato completamente da una superficie riflettente, essi divengono vincolati inoltre dalla condizione di non turbare l'equilibrio termico, nè quello elettromagnetico. Vale a dire che nel corpo nero il moto degli ioni, il quale influisce certamente sui moti molecolari (come è dimostrato dal fenomeno dell'assorbimento, per il quale energia elettromagnetica si trasforma, per l'intervento degli ioni stessi, in energia termica, cioè energia cinetica molecolare), deve esser tale da non alterare la distribuzione dell'energia molecolare che è richiesta dall'uniformità della temperatura; ed inoltre la quantità totale di energia elettromagnetica posseduta dagli ioni dovrà restare costante, poichè tale rimane quella presente nello spazio ambiente, come quella cinetica totale delle molecole.

Se dunque voglio costruire un meccanismo irraggiante, se cioè voglio imaginare che i moti degli ioni nel corpo nero siano di una data natura, dovrò curare di soddisfare alle condizioni suespresse.

Per quanto riguarda la costanza dell'energia totale degli ioni, supporrò addirittura che sia costante l'energia di ogni singolo ione. Questa ipotesi, assai più restrittiva del necessario, farà sì che il mio corpo fittizio non avrà riscontro nella realtà; ma ciò non importa per lo scopo che mi propongo, per il quale basta invece che le mie ipotesi non escano dal campo delle teorie classiche.

Per la condizione relativa all'equilibrio termico, ammetterò semplicemente che la legge dell'equipartizione dell'energia, quale si dimostra nella teoria cinetica dei gas, si applichi anche ai sistemi di molecole e di ioni, analogamente a quanto si fa nella teoria di Drude della conducibilità nei metalli. Sarà bene che faccia osservare subito, esplicitamente, che questo modo di estendere il teorema dell'equipartizione è radicalmente differente

[1] Intendendo, con questo nome, tanto la meccanica delle masse, quanto le teorie elettriche di Maxwell e Lorentz.

[2] Cfr. *La théorie du rayonnement et les quanta.* Paris, 1912, *passim.*

da quello usato da Rayleigh, Jeans e Lorentz, e che conduce alla formula

$$(2) \qquad u(\nu\,, \mathrm{V}) = \frac{8\pi k \nu^2 \mathrm{T}}{c^2}$$

in disaccordo coll'esperienza.

In questo ultimo metodo si equipartisce, se mi è lecito dire, anche l'energia raggiante, mentre questa non interviene affatto nell'ipotesi che io intendo applicare. È appunto questa modificazione sostanziale nel modo di intendere l'equipartizione, che permette di sfuggire alla formula di Rayleigh.

3. Con le due assunzioni fatte, sono senza altro in grado di ottenere la formula di Planck. Per semplificare i calcoli, supporrò ancora che ioni mobili abbiano solo cariche negative, e che possano solo oscillare rettilineamente intorno alla loro posizione di equilibrio.

Se allora chiamo q il momento di uno ione, cioè il prodotto della sua carica ϱ per lo spostamento, la sua energia è della forma

$$(3) \qquad \mathrm{E} = \mathrm{K}^2 q^2 + \mathrm{L}^2 \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 ;$$

e poichè essa è per ipotesi costante, e quindi $\frac{d\mathrm{E}}{dt} = 0$, ho

$$(4) \qquad \mathrm{L}^2 \frac{d^2 q}{dt^2} + \mathrm{K}^2 q = 0 ,$$

ossia

$$(5) \qquad q = \varrho\, a \cos(2\pi\nu t - \vartheta) ,$$

essendo a l'ampiezza delle oscillazioni e

$$(6) \qquad \nu = \frac{\mathrm{K}}{2\pi \mathrm{L}}$$

la frequenza.

Posso ammettere che il corpo sia perfettamente omogeneo, di modo che ogni ione si trovi nelle stesse condizioni, e quindi K ed L siano le stesse per tutti gli ioni.

Invece, per l'ampiezza delle oscillazioni, che è indipendente da K ed L, supporrò che sia maggiore per le cariche minori, e precisamente pongo

$$(7) \qquad a^2 \varrho = \mathrm{cost.}$$

Si osservi che con questa ipotesi non si ammette affatto, come sembra a prima giunta, la possibilità di oscillazioni infinitamente ampie, poichè secondo la teoria degli elettroni, ϱ non può essere inferiore alla carica elementare e dell'elettrone, e quindi a ammette un limite superiore finito.

Di più, non solo deve essere $\varrho \geq e$, ma addirittura

$$\varrho = m e \qquad (m \text{ intero positivo}); \tag{8}$$

per cui, invece di (7), si può scrivere

$$m a^2 = \text{cost}, \tag{9}$$

dove m è il numero degli elettroni che costituiscono lo ione oscillante con l'ampiezza a.

Allora tenendo conto delle (5), (6), la (3) dà, per l'energia di uno ione costituito di m elettroni e oscillante con la frequenza ν, il valore

$$E = m h \nu, \tag{10}$$

essendo

$$h = 2 \pi m a^2 e^2 \, L K$$

una costante che, in virtù di (9), è la stessa per tutti gli ioni.

La densità dell'energia raggiante di frequenza ν dovrà essere tale da non alterare l'energia degli ioni della stessa frequenza. Ora Planck ha dimostrato [1] che, affinchè l'energia media $\bar{E}$ di un risonatore (cioè di uno ione oscillante periodicamente) di frequenza ν rimanga costante, la densità u dell'energia raggiante deve essere

$$u = \frac{8\pi \, \nu^2}{c^3} \, \bar{E}; \tag{12}$$

e si può ammettere che questa relazione valga anche nel nostro caso, quando l'energia media sia calcolata sull'insieme degli ioni di frequenza ν, cioè dividendo per il loro numero la loro energia complessiva.

Infatti, siccome l'intensità dell'irraggiamento $\left(\text{che vale } \frac{c u}{8 \pi}\right)$ è uguale al rapporto fra il coefficiente di emissione e quello di assorbimento, ciò equivale ad ammettere che questi coefficienti in un punto del corpo, per una data frequenza, sono uguali alla media dei coefficienti analoghi dei singoli ioni; media che risulta uguale in tutti i punti, poichè la distribuzione delle varie specie di ioni in tutto il corpo si deve pensare non-ordinata (ungeordnete).

Rimane dunque da calcolare l'energia complessiva degli ioni di frequenza ν: il che potrò fare valendomi dell'ipotesi posta al n. 2, che cioè valga anche per gli ioni la equipartizione dell'energia.

Essendo il corpo alla temperatura assoluta T, ad ogni grado di libertà spetta l'energia cinetica $\frac{1}{3} \alpha T$, detta α la costante di Boltzmann. Ogni ione ha un solo grado di libertà: e poichè la sua energia, data dalla (3),

[1] loc. cit., pag. 124.

è precisamente il doppio della sua energia cinetica media, si è condotti ad assegnare ad ogni ione l'energia

$$E = \frac{2}{3} \alpha T = k T ,$$

dove k è la stessa costante che compare nella (1).

Allora E risulta uguale per tutti gli ioni; e dalla (12) risulterebbe, senz'altro,

$$u = \frac{8 \pi \nu^2}{c^3} kT ,$$

cioè la formula di Rayleigh.

Ma si deve osservare che questo modo di procedere non è esatto, poichè nella teoria cinet ca dei gas si dimostra che non tutte le molecole posseggono esattamente l'energia αT, ma che questo è solo il valore medio dell'energia molecolare, l'esatta ripartizione della quale è assegnata dalla nota legge di Maxwell. E così dovrò ammettere che vi sono ioni che posseggono energia differente da kT, e che precisamente il loro numero sarà dato dalla legge di Maxwell.

Il valore di $\overline{E}$, da introdurre nella (12), va calcolato per i soli ioni di frequenza ν: e sarà precisamente

$$\overline{E} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{n} m h \nu N_m , \tag{13}$$

detto N il loro numero totale, e N_m il numero di quelli che hanno l'energia $m h \nu$, cioè che sono costituiti da m elettroni. Se m variasse con continuità, la legge di Maxwell darebbe

$$N_m dm = - N d e^{-\frac{mh\nu}{kT}} ;$$

ma siccome m non può essere che intero, sostituirò gli incrementi finiti ai differenziali, cioè

$$N_m \Delta m = - N \Delta e^{-\frac{mh\nu}{kT}} ,$$

vale a dire

$$N_m = N \left(e^{-\frac{mh\nu}{kT}} - e^{-\frac{(m+1)h\nu}{kT}} \right) ; \tag{14}$$

e quindi la (13) diviene

$$\overline{E} = h\nu \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{mh\nu}{kT}} ,$$

ossia

$$\overline{E} = \frac{h \nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} ; \tag{15}$$

e quindi la densità dell'energia raggiante diventa

$$u(\nu\,,\mathrm{T}) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k\mathrm{T}}}-1}\,, \tag{16}$$

cioè si ottiene precisamente la formula di Planck.

4. Dunque, per l'irraggiamento di un corpo fittizio costituito nel modo spiegato al n. 2, è vera la formula di Planck; e poichè le ipotesi fatte non escono dal campo delle teorie classiche, e nella dimostrazione fatta nel n. 3 si ricorre solo ai principî della teoria elettromagnetica della luce di Maxwell, a quelli della teoria degli elettroni, e della teoria cinetica dei gas, rimane dimostrata la possibilità di ottenere la formula di Planck senza ipotesi dei *quanta*, o altre che contraddicano ai principî classici.

Siccome, insomma, l'intero sistema irraggiante imaginato ricade nel dominio del principio di Hamilton, mi pare che più non si possa asserire che esso conduca necessariamente alla formula di Rayleigh.

Questa asserzione — che, almeno nella forma così recisa che gli hanno dato alcuni scienziati [1], era realmente prematura, e ora, mi pare di aver dimostrato, è certo erronea — è stata giustificata solamente dalla dimostrazione di H. A. Lorentz [2], che è senza dubbio la più generale di tutte quelle finora date in base all'equipartizione. Ma essa non è completamente soddisfacente; in particolare, anch'essa porta ad equipartire l'*energia raggiante*. Ora io penso che ciò non sia conforme allo spirito della meccanica statistica; e questa mia modesta Nota avrà raggiunto il suo scopo se avrà almeno contribuito a far sorgere l'idea della possibilità di giungere a risultati conformi all'esperienza, applicando l'equipartizione in modo radicalmente diverso da quello seguìto finora, applicandolo cioè esclusivamente a quella parte dell'energia che si può considerare come *cinetica*. Spero, del resto, di poter presto sviluppare maggiormente questa osservazione.

Mi sia infine permesso di rispondere ad un'ultima quistione: se cioè il calcolo, fatto in questa Nota, possa avere il significato di dimostrazione della (1). Vale a dire se esso, oltre a dimostrare che la (1) è compatibile col principio di Hamilton, dimostri anche che essa rappresenta proprio la densità dell'irraggiamento nero.

È noto che il Planck stesso dimostra la sua formula considerando un meccanismo di emissione affatto particolare, che non ha riscontro nella realtà fisica, e giustifica il procedimento osservando che, per la legge di Kirchhoff, la u è indipendente dalla costituzione del corpo. Potrei senz'altro far mia questa giustificazione; ma essa non è esente da una critica grave.

[1] P. es. Planck, in *Théorie du rayonn. et les quanta*, pag. 93.

[2] *Rapport sur l'applic. au rayonnement du théorème de l'équipartition de l'éner gie*; ibid., pp. 12-39.

La dimostrazione della legge di Kirchhoff è basata sulla termodinamica; quindi vale per tutti e soli quei corpi reali o fittizî, pei quali è vera la termodinamica. Dunque solo pei corpi costituiti da un numero enorme di particelle in moto disordinato, chè altrimenti entropia e temperatura non hanno significato. Planck invece considera un solo risonatore; la legge di Kirchhoff non si applica più, e non permette di asserire che esso irraggia come un corpo nero. È vero che il Planck definisce l'entropia di un risonatore ma dalla sua definizione non risulta punto chiaro che essa sia proprio la stessa entropia della termodinamica, o, meglio, che l'estendere ad essa il secondo principio non sia una nuova ipotesi, ancor più essenziale, nel metodo di Planck, di quella dei *quanta*. Questa critica esporrò più ampiamente in un prossimo lavoro nel quale vorrei mostrare come non sia lecito parlare di entropia, probabilità, di concetti statistici in breve, per l'irraggiamento considerato a sè, indipendentemente dal corpo che lo determina.

Tornando alla quistione posta, mi pare che, invece, al corpo fittizio da me considerato si possa applicare la termodinamica, poichè esso è costituito appunto in armonia coi principî della meccanica statistica; e allora si può forse ritenere che i nn. 2 e 3 contengano una dimostrazione della formula di Planck per l'irraggiamento nero.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Millosevich presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei professori Lovisato e Meli, e il vol. IV dell'opera del prof. B. Hayata: *Icones Plantarum Formosanarum.*

Il Socio Grassi offre il volume XIV degli *Atti* dell'Istituto Botanico dell'Università di Pavia redatti dal Socio Briosi, e parla della importanza di questa pubblicazione, ricca di interessanti lavori, dando notizia di quelli che nel volume attuale sono contenuti.

Il Presidente Blaserna fa omaggio, a nome dell'autore prof. F. Caldarera, della seconda edizione del primo volume del *Corso di Meccanica* razionale; lo stesso Presidente fa rilevare che trattasi di una edizione migliorata apparsa in questi giorni, della quale indica i principali capitoli, e che torna ad onore della ancor verde operosità del prof. Caldarera.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

F. Nicita. — *Il metodo aritmetico nel caso irriducibile dell'equazione di 3° grado.* Pres. dal Socio Blaserna.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente BLASERNA dà il triste annuncio della morte del Socio nazionale GIOVANNI STRUEVER, mancato ai vivi il 21 febbraio 1915; apparteneva il defunto all'Accademia per la *Cristallografia e Mineralogia*, sino dal 16 giugno 1878.

Il Corrisp. GINO LORIA legge la seguente Commemorazione del compianto Socio prof. PLACIDO TARDY.

I.

Fra le lettere che si scambiarono Leibniz e Giovanni Bernoulli durante l'anno 1695, meritano la più alta ammirazione quelle nelle quali è segnalata e svolta l'analogia formale che esiste fra le due operazioni *differenziazione* ed *elevamento a potenza*. Tale analogia, avvertita più tardi, per conto suo, anche da Lagrange, quando era ai primordii della sua carriera scientifica, fu la prima radice dalla teoria generale delle operazioni, che con tanto fervore e tanto successo venne coltivata, specialmente in Inghilterra, in sul principio del secolo scorso. La sorprendente disinvoltura, con la quale quei due sommi ragionavano e calcolavano, col mezzo di potenze ad indici qualunque, dei simboli di differenziazione e di integrazione, produce oggi meraviglia non minore del vedere come, circa nella stessa epoca, fosse famigliare [1] un modo così generale di concepire le coordinate, da formare uno stridente contrasto con le nostre abitudini mentali, che ci tengono sempre strettamente avvinti al semplice concetto di coordinate cartesiane. Ma, lo ha osservato giustamente il Bailly, « il semble que les idées ayent comme nous, une enfance et un premier état de faiblesse ; elles ne produisent point à leur naissance, et elles ne tiennent que de l'âge et du temps leur vertu féconde » [2]. In conformità a tale legge che governa lo sviluppo del pensiero scientifico, la geniale idea di sottoporre i simboli di differenziazione ed integrazione all'operazione di elevamento a potenza con esponente qualunque, rimase per parecchi lustri inosservata, dimenticata o trascurata: spettava ad Eulero il riesumerla e fecondarla; spettava a Liouville, svolgerla ulteriormente in base a nuove vedute. Se non che, i risultati ottenuti dall'eminente geometra fran-

[1] La verità di tale asserzione è dimostrata, se non m'inganno, indiscutibilmente dall'*Analyse des infiniment petits, pour l'intélligence des lignes courbes*, pubblicata nel 1696 dal marchese de l'Hopital.

[2] *Histoire de l'astronomie moderne*, tom. II, Paris MDCCLXXIX, pag. 60.

cese parvero ad alcuni contenere qualche elemento arbitrario non accettabile, onde non riscossero la gènerale approvazione dei dotti. In conseguenza, quando nel settembre 1845 gli scienziati italiani si riunirono per la sesta volta a congresso in Milano, un giovane matematico siciliano scelse i differenziali ad indice fratto come soggetto di una comunicazione [3] (1) intesa ad indurre i geometri ad occuparsi di proposito di tale importante argomento. Avendo egli chiesto il giudizio dei colleghi sopra le proprie ricerche, Gabrio Piola e Giovanni Plana, che godevano allora di una autorità altissima, per incarico avutone, lessero una Relazione (2) in cui riconoscevano indiscutibile l'importanza del tema trattato e, facendo qualche riserva intorno ad alcune idee dell'autore, auguravano gli fosse riserbata la palma destinata a colui che riuscisse a fare piena luce sopra un argomento la cui metafisica era tuttora controversa.

Probabilmente a cagione dei dubbî manifestati in tale Rapporto, il lavoro in questione rimase pèr ben quattordici anni inedito; soltanto nel 1858, dopo di avere subìto radicali migliorìe, venne inserito nel volume inaugurale della nuova serie degli *Annali di matematica*. Nè, dopo tale pubblicazione l'autore abbandonò del tutto l'interessante soggetto; chè, dieci anni dopo, vi dedicò una nuova pubblicazione di indole specialmente storica [**15**], che, meglio ancora della precedente, ebbe la virtù di richiamare l'attenzione dei matematici (3) sopra un soggetto importante in sè stesso ed interessante, non foss'altro, per essere uno dei pochissimi in cui le opinioni dei competenti si manifestarono discordi.

Ma nel periodo che corre fra il 1844 ed il 1868, il giovane compatriota di Maurolico, che aspettava trepidante il giudizio di coloro che egli venerava come maestri, aveva fatto la propria strada nel mondo; non soltanto veniva trattato come loro pari da scienziati del valore di un Betti, di un Bellavitis, di un Genocchi, ma si trovava alla testa di un Istituto d'istruzione superiore: cioè dell'Ateneo di cui mi reco ad onore di esprimere l'ammirazione per l'altezza della mente dell'antico suo duce, la gratitudine per la sua munificenza esemplare (4), il cordoglio per la sua scomparsa, nel mentre mi accingo ad esporne brevemente la vita ed a farne risaltare le benemerenze scientifiche.

(1) I numeri in parentesi quadrata servono di richiamo ai lavori indicati nell'*Elenco* che chiude la presente *Commemorazione*.

(2) Atti della sesta Riunione degli scienziati italiani, pagg. 90-91.

(3) Ved. l'articolo di G. Borchardt, *Sur quelques passages des lettres de Leibniz rélatifs aux différentielles à indices quelconques* (Bullettino di Boncompagni, tom. II, an. 1869, pagg. 277-278; oppure C. W. Borchardt's Gesammelte Werke, Berlin, an. 1888, pagg. 486-487).

(4) Alla Facoltà matematica dell'Università di Genova Egli ha legato la sua ricchissima biblioteca matematica.

II.

Placido Tardy nacque a Messina il 23 ottobre 1816, da una famiglia originaria della Francia ([1]). Esauriti gli studî che potevano compiersi nella sua città natale, si recò a Lucca per frequentarvi quel Collegio: dell'interesse che egli allora provava per gli studî matematici fa fede un breve articolo [1] con cui egli volle richiamare l'attenzione dei conterranei sopra un lavoro di un giovane siciliano, oggi del tutto dimenticato. Nell'autunno del 1837 passò a Milano, con l'intenzione di perfezionarsi ulteriormente sotto la direzione del matematico Gabrio Piola e dell'astronomo Paolo Frisiani; del suo profitto fanno fede due bellissimi attestati, dai quali risulta che quei due valentuomini concepirono le più liete speranze sull'avvenire del loro alunno; nè va taciuto che l'influenza del primo di essi è visibile nella miglior parte delle pubblicazioni scientifiche del Tardy. Da Milano, nel 1838, passò a Parigi ed ivi ascoltò le lezioni di Liouville e Poisson; raccomandato dal Mossotti a Guglielmo Libri, che in quell'epoca era all'apogeo della gloria e della potenza, stabilì con lui relazioni di amicizia che continuarono anche dopo la fuga a Londra ed il ritorno in Toscana del famigerato storico delle scienze matematiche in Italia.

Restituitosi in patria, da Ferdinando II re di Napoli, con decreto del 22 novembre 1841, veniva « nominato professore di matematica sublime nella regia Università degli studî di Messina » ([2]); ivi diede alla luce il suo primo lavoro originale [2]; ivi accolse il Lejeune-Dirichlet durante lo storico viaggio compiuto dal sommo matematico tedesco in compagnia di Jacobi e di Steiner. Ma, dopo i tumulti verificatisi a Reggio-Calabria e Messina nel 1847, quasi a preludio delle rivoluzioni che divamparono in Europa nell'anno successivo, ritornata la Sicilia dolorante sotto l'aborrito giogo borbonico, il Tardy, che a quei moti non era rimasto estraneo, abbandonò una cattedra ed un soggiorno che non erano di sua soddisfazione ([3]) e riparò a Firenze. Devesi però ritenere che la sua partecipazione a quella rivolta sia stata modesta, dal momento che il sospettoso Governo napoletano non lo molestò in alcun modo durante le visite che egli fece regolarmente al proprio padre durante i mesi di autunno degli anni seguenti e giunse perfino a far pratiche (1854) perchè egli riprendesse il suo ufficio nel pubblico insegnamento.

([1]) Il padre, Antonio, fu distinto ingegnere; mi si assicura che una chiesa eretta sotto la sua direzione è uno dei rari edifizii che si salvarono dall'immane disastro che distrusse Messina nel 1908.

([2]) Un manoscritto, tuttora esistente, portante la data del 2 marzo 1846, mostra che la Meccanica analitica fu uno dei soggetti delle lezioni del giovane professore.

([3]) Ragione precipua del suo malcontento era lo stato miserrimo della pubblica biblioteca di Messina, del quale egli fa cenno in un passo di uno dei suoi primi lavori [2].

A Firenze il Tardy, mentre si dedicava a ricerche scientifiche, si adoperò per ottenere una cattedra; riusciti vani gli sforzi da lui fatti per ottenere un posto allora scoperto nell'Università di Bologna, e quelli del Plana per farlo eleggere professore nell'Accademia militare di Torino, il Tardy, in sul principio dell'anno scolastico 1850-51, si trasferì a Genova in qualità di professore di matematica in quel ginnasio. Un anno dopo, Camillo Cavour, allora ministro della marina agricoltura e commercio, lo nominò (lettera del 13 dicembre 1851) professore di geometria analitica e di calcolo infinitesimale in quella regia Scuola di marina; di tale Istituto egli fu anche direttore degti studî a partire dal 1854 e nel 1868 v'insegnò pure la meccanica razionale (1).

Il carteggio, tenuto in questo periodo di tempo dal Tardy con i più eminenti matematici italiani del tempo, sta a provare la grandissima stima che essi nutrivano per il suo ingegno, per il suo carattere, per la sua cultura; da esso, fra l'altro, risulta che la sua casa, sempre ospitale, venne scelta nella primavera del 1858 come sede di un piccolo convegno, al quale parteciparono Betti, Brioschi e Genocchi, col precipuo scopo d'imprimere nuova vita al periodico di matematica fondato otto anni prima e costantemente diretto dal Tortolini. In tale minuscolo congresso vennero gettate le basi degli *Annali di matematica pura ed applicata* che da mezzo secolo sotto l'oculata direzione prima del Tortolini, poi del Brioschi ed ora del Dini, esercitano la più salutare influenza sopra lo sviluppo delle scienze esatte nella nostra patria. La parte presa dal Tardy in questo memorabile avvenimento non è generalmente nota, ma venne riconosciuta nel modo più esplicito in un'occasione solenne: adunatosi, sullo scorcio di settembre del 1887, il primo Congresso universitario, i matematici che vi parteciparono, riunitisi a fraterno banchetto per onorare il Brioschi, prima di separarsi, spedirono per telegramma al Tardy un « saluto riconoscente ai fondatori degli Annali, primo segno del risorgimento degli studî matematici in Italia ».

Resasi vacante la cattedra di analisi infinitesimale nell'Università di Genova, il Tardy fu chiamato ad occuparla con regio decreto del 19 ottobre 1859, in seguito a parere favorevole pronunziato da una Commissione di cui facevano parte Genocchi, Menabrea, Richelmy e Sella; nè volle più

(1) Fra gli innummerevoli discepoli che ebbe il Tardy, mi piace ricordare un noto scrittore di cose marinare, A. V. Vecchi (Jack la Bolina), il quale, del maestro che ebbe nel 1858, parla in un articolo su *Le prigioni della regia scuola di marina in Genova* (Fanfulla della domenica, an. 1881), per ricordare, senza rancore, che, non avendo saputo rispondere ad una domanda relativa alla paraboloide di rivoluzione, fu dal Tardy condannato a tre giorni di « prigionetta », che gli tolsero di assistere, insieme coi suoi condiscepoli, allo sbarco a Genova di Napoleone III, che veniva allora in Italia quale nostro alleato contro l'Austria.

abbandonarla, non ostante gli inviti, ripetutamente rivoltigli da Betti quando scomparsi, prima il Mossotti e poi il Novi, divenne libera una cattedra di matematica a Pisa, rivoltigli dal Genocchi alla morte del Plana. Dell'Università di Genova fu anche rettore durante due triennii (1865-1868, 1878-1881), conquistandosi da parte dei suoi commilitoni una stima altissima, non inferiore a quella concordemente tributatagli dai discepoli, in tutte le scuole in cui ebbe ad insegnare, dai matematici del suo tempo, che lo elessero a far parte dei principali sodalizî scientifici italiani [1], e dal Governo, che gli affidò ripetutamente importanti e delicati incarichi [2].

Morta nel 1880 la diletta compagna della sua vita [3], al Tardy il soggiorno di Genova ed il gravame dell'insegnamento riuscirono insopportabili; onde, benchè sempre robusto di corpo ed alacre di mente, con generale rimpianto della scolaresca, dei colleghi e della cittadinanza, chiese il proprio collocamento a riposo; essendo stato tale desiderio esaudito con decreto del 4 dicembre 1881, egli si trasferì nuovamente a Firenze, ove visse altri trentatrè anni, circondato dall'affetto vivissimo dei congiunti e degli amici, senza dar segno di alcun deperimento intellettuale e fisico, a prescindere dall'indebolimento della vista. Una violenta polmonite lo abbattè il 1° novembre dello scorso anno, qual fulmine su vetusta quercia, mentre tutti coloro che lo conoscevano nutrivano fiducia di poterlo salutare centenario.

III.

La produzione matematica del Tardy non è molto voluminosa e comprende scritti ispirati dalle opere che egli, lettore instancabile, andava studiando; chè il loro scopo è o di risolvere questioni lasciate in sospeso (alcuni, anzi, non fanno che sciogliere quesiti proposti nei *Nouvelles annales de mathématques*) o di chiarire, criticare od applicare concetti e metodi escogitati dai più eminenti matematici del suo tempo. Tale carattere si riscontra nel suo primo lavoro originale [2] [4], il quale si riferisce ad un ordine di questioni poste all'ordine del giorno da Fourier ed a cui avevano dato importanti contributi due matematici con cui il Tardy aveva grande dimestichezza, cioè il Libri ed il Piola; parlo della costruzione di espres-

[1] Oltre che Socio nazionale della nostra Accademia, era uno dei XL della Società italiana delle scienze, corrispondente dell'Accademia delle scienze di Torino e dell'Istituto lombardo; apparteneva anche all'Accademia dei georgofili di Firenze; non escludo potesse appartenere ad altre congeneri compagnie.

[2] Basti ricordare che a lui venne affidata l'istruzione matematica del principe Oddone di Savoia.

[3] Laura Cini, scrittrice apprezzatissima ai suoi tempi, che pubblicò molti bozzetti letterarii nella *Rivista europea*, assumendo il nome di Sara.

[4] Questa rarissima Memoria mi è nota soltanto per un manoscritto rinvenuto fra le carte relitte dal Tardy; ignoro, quindi, se tale ms. sia identico al lavoro stampato.

sioni analitiche atte a rappresentare in intervalli diversi della variabile indipendente, funzioni differenti. Sono specialmente i concetti del Libri che il nostro ha applicato a svariate questioni, non soltanto di algebra, ma anche di aritmetica od offerte dal giuoco degli scacchi (studio del cammino del cavallo). In tal modo egli ha ottenuto formole che si distinguono per semplicità ed eleganza, ma che non conseguirono un posto stabile nella scienza, avendo doti esclusivamente formali, a somiglianza dell'espressione che assegna il numero dei numeri primi non superiori ad un certo limite che, come è noto, il Legendre dedusse (1) traducendo in simboli la celebre procedura conosciuta sotto il nome di « staccio d'Eratostene ».

Quest'ordine d'indagini, forse perchè ravvisate di non grande importanza, fu ben tosto abbandonato dal nostro matematico, il quale passò a studiare uno fra i più ardui soggetti della meccanica, cioè il moto dei liquidi. Una sua Memoria [4], « di squisita fattura » (sono parole di Valentino Cerruti), mostra che egli conosceva a fondo tutti gli scritti anteriori sull'argomento ed era in grado di misurarne l'importanza assoluta e relativa. Notevole specialmente il paragone da lui istituito fra i lavori di d'Alembert e Lagrange, sul moto a due coordinate, con quanto scrisse il Venturòli, che allora passava per un'autorità indiscutibile; tale acuta analisi portò il Tardy a concludere che questi nulla aggiunse di sostanziale ai risultati conseguiti dai suoi predecessori. Passando poi a trattare del moto a tre coordinate, ebbe occasione di fare varie eleganti applicazioni di alcune sue formole (allora ancora inedite) pertinenti alla teoria dei differenziali ad indice fratto, che meriterebbero di venir tolte dalla dimenticanza in cui sono cadute (2).

Aggiungiamo che in un punto dello stesso lavoro il matematico messinese segnalò alcuni errori commessi dal geometra inglese Challis e che lo avevano indotto a « conseguenze falsissime »; le stesse critiche essendo state fatte per conto suo da G. Bertrand, il Challis tentò un'auto-difesa nel fascicolo di giugno 1849 del « Philosophical Magazine »: ciò indusse il nostro ad esporre con maggiore diffusione i proprî modi di vedere, in un progevole lavoro [6] che quella Rivista si affrettò a diffondere di là dalla Manica (3).

Mentre il Tardy meditava sulle applicazioni della matematica alla spiegazione d'importanti fatti naturali, non trascurava le investigazioni di pura analisi.

(1) *Théorie des nombres*, II ed. (Paris, 1808), pag. 414.

(2) Interessanti considerazioni sopra questo lavoro del Tardy si leggono nella seconda parte della Memoria di A. Genocchi, *Di una Nota del barone Plana: casi particolari del moto dei liquidi* (Annali di matematica, tom. I, 1858, pp. 383-396).

(3) Ivi è anche incidentalmente criticata una formola di V. Amici; da ciò due lettere, d'intonazioni differenti, da questo scienziato pubblicate nel tom. II (pp. 302 e 368) degli *Annali* di Tortolini.

Infatti un bel teorema sulle equazioni differenziali lineari, enunciato dal Malmsten, venne da lui dedotto [6], nel modo più naturale, da una proposizione del Libri; questa e quello furono poi da lui estesi [7] alle analoghe equazioni alle differenze finite.

Circa nello stesso tempo [8] egli applicò alla divisione delle funzioni ellittiche i risultati stabiliti da Abel nella sua fondamentale Memoria *Sur une classe particulière d'équations resolubles algébriquement*. Poco dopo scriveva due brevi Note di carattere elementare [9 10] per rispondere a questioni proposte nelle *Nouvelles Annales de mathématiques*; notevoli entrambe per la perfetta eleganza di calcolo, lo sono inoltre la prima perchè addita una ricchissima sorgente di identità algebriche [1], l'altra (dimostrazione di un teorema di Prouhet) per un inatteso intervento della serie ipergeometrica in una questione di planimetria elementare.

Nella produzione matematica del Tardy si avverte a questo punto un'interruzione durata all'incirca un sessennio e dovuta indubbiamente alle cure dell'insegnamento, per lui allora gravosissime. Dal suo volontario silenzio egli uscì in occasione della fondazione degli *Annali di matematica*, nel primo volume dei quali egli fece finalmente conoscere [11] i frutti delle sue investigazioni intorno ai differenziali ad esponente fratto, alle quali egli diede l'ultima mano, dopo di avere preso notizia dei più recenti lavori sull'argomento. I suoi risultati non coincidono, nè nel punto di partenza, nè tampoco nelle conclusioni, con quelli del Liouville [2]; giacchè, mentre questi applicò l'espressione euleriana di un differenziale qualunque dell'espressione e^{mx} ad una funzione qualunque, previamente trasformata in una somma di esponenziali, il Nostro mostrò che tale incomoda previa metamorfosi si può evitare partendo dalla formola

$$\int^{(\mu)} \varphi(x)\, dx^{\mu} = \sum_{r=0}^{n=\infty} (-1)^r \frac{x^{\mu+r}}{\Gamma(\mu+r)} \varphi^{(r)}(x)\,,$$

[1] Il Tardy insegna una formola che serve a trasformare in una somma il prodotto d'un certo numero n di fattori. Per $n=2$ o 3, essa diviene:

$$4\, a_1 a_2 = (a_1 + a_2)^2 - (a_1 - a_2)^2$$
$$24\, a_1 a_2 a_3 = (a_1 + a_2 + a_3)^3 - (-a_1 + a_2 + a_3)^3 - (a_1 - a_2 + a_3)^3 - (a_1 + a_2 - a_3)^3,$$

identità già note; per $n=4$ essa dà invece quest'altra nuova:

$$\begin{aligned}192\, a_1 a_2 a_3 a_4 = {} & (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^4 - (-a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^4 \\ & - (a_1 - a_2 + a_3 + a_4)^4 - (a_1 + a_2 - a_3 + a_4)^4 - (a_1 + a_2 + a_3 - a_4)^4 \\ & + (a_1 + a_2 - a_3 - a_4)^4 + (a_1 - a_2 + a_3 - a_4)^4 - (a_1 - a_2 - a_3 + a_4)^4 .\end{aligned}$$

Auguriamo che tali relazioni prendano posto in ogni collezione d'identità.

[2] Sarebbe interessante di conoscere il parere del Liouville sopra questo nuovo indirizzo impresso alla teoria a cui egli si era dedicato con tanto impegno; ma sin dal 1858 egli aveva abbandonate tali ricerche, per dedicarsi totalmente alle ricerche aritmetiche che soltanto la morte potè interrompere.

la quale, se r è intero positivo, si ottiene con successive integrazioni per parti; nel caso generale essa può adoperarsi per definire il primo membro, dal momento che il secondo membro ha anche allora un significato ben determinato. Non è il caso che io mi arresti ad esporre i corollari che il Tardy ne trasse supponendo che la funzione $\varphi(x)$ si identifichi con le più semplici funzioni che s'incontrano nell'analisi (x^m, $\log x$, e^{mx}, ...). Va invece rilevato che egli applicò le esposte considerazioni ad ottenere sotto forma nuova e di notevole concisione le funzioni soddisfacenti alle prime equazioni integrali del tipo Volterra che siano state incontrate [1], quelle cioè che vennero notoriamente risolute da Abel e da Liouville; ora, il fatto che i differenziali ad esponente fratto siano stati vantaggiosamente usati nel trattare specialissime equazioni integrali, porta a congetturare che fra quella teoria ed il più moderno (ed anche più italiano!) ramo dell'analisi matematica esistano legami profondi, meritevoli di esser posti in completa luce [2].

Dieci anni dopo, il Tardy, per invito del principe Boncompagni, dava un complemento importante **[15]** a questo suo lavoro, mostrando come la nota formola di Leibniz

$$D^{\mu}(uv) = \sum_r \binom{\mu}{r}^{\mu-r} D^{\mu-r} u \,.\, D^r v\,,$$

che dà la derivata μ-esima del prodotto di due funzioni u, v d'una stessa variabile, sussista anche per valori non interi e positivi dell'esponente μ.

Nel frattempo, altri argomenti di calcolo infinitesimale avevano attratto la sua attenzione. Così, da una formola stabilita dall'Hoppe per calcolare la derivata d'ordine qualunque di una funzione del tipo $f[u(x)]$, egli fu indotto **[12]** a risolvere l'analoga questione per le funzioni della forma $f[u_1(x), u_2(x)]$, e così spianò la via a chi intendesse trattarla per tutte le funzioni della forma $f[u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)]$.

Altro tema a cui dedicò assidui studî è il calcolo approssimato degli integrali definiti, sul quale scrisse un dottissimo lavoro **[14]**, che quasi nessuno conosce, nel quale, con procedimento uniforme, sono stabilite, discusse e paragonate fra loro tutte le migliori formole note per la quadratura approssimata (quelle, cioè, che portano i nomi di Mac-Laurin, Poisson, Legendre, Menabrea, Poncelet, Simpson, Parmentier, Weddle, Gauss, Turazza), e per ciascuna espresse il resto sotto forma d'integrale definito: è questa forse la Memoria del Tardy in cui più chiaramente rifulgono le invidiabili sue doti

(1) V. Volterra, *Léçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles* (Paris, 1912, pp. 34 e segg.).

(2) A chi intendesse riprendere gli studi sui differenziali ad indice qualunque va raccomandato un frammento postumo di Riemann (*Werke*, Leipzig, 1876, pag. 331) che (non sappiamo per qual ragione) venne escluso dalla traduzione francese delle Opere di quel grande analista.

di vasta dottrina, di acume critico e di straordinaria abilità nel calcolo. Verso il termine di essa, egli incontrò due relazioni nuove ed importanti che passano fra una certa serie di coefficienti binominali, e credette poi opportuno stabilirle direttamente [14] con semplici considerazioni di stretta pertinenza dell'analisi combinatoria.

Nè del calcolo infinitesimale si disinteressò dopo essersi ritirato dall'insegnamento: infatti è datato dal 1884 un suo lavoro [17] relativo alle equazioni differenziali lineari, secondo l'indirizzo dato a tale teoria dal Fuchs: esso ha per iscopo di stabilire alcune formole enunciate dal Thomé, col mezzo di calcoli la cui raffinata eleganza maschera l'inevitabile complicazione.

Circa contemporaneo e di soggetto analogo è un articolo [18] avente per iscopo di insegnare un metodo più semplice di quello che era stato allora proposto per integrare il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{dy}{dx} + P_1 y + Q_1 z = v_1 \quad , \quad \frac{dz}{dx} + P_2 y + Q_2 z = v_2 ,$$

nel caso in cui tra le funzioni P_1, Q_1, P_2, Q_2 della variabile x sussista la relazione

$$\frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{Q_2}} = e^{\int (P_1 - Q_2)\, dx} ;$$

il Tardy riduce la questione ad integrare l'equazione differenziale di secondo ordine

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (X + X_1)\frac{dy}{dx} + (XX_1 + X_1')\, y = V ,$$

ed aggiunge l'osservazione che tutte le equazioni differenziali lineari di detto ordine, che sapevansi allora integrare, sono casi speciali di quella ora scritta.

Il carteggio del Tardy sta a provare che egli dedicò lunghe ore di assiduo studio alla *Theorie der Abel'schen Functionen* di Clebsch e Gordan, contro cui anzi fece qualche obbiezione, che, essendo stata comunicata dal Cremona al primo dei citati autori, venne riscontrata e dichiarata totalmente giusta.

Anche alla teoria de' numeri egli volse la propria attenzione, della qual cosa esistono pubbliche attestazioni nei due lavori di cui ci resta ancora da parlare.

Uno di essi [16] ha per iscopo di dimostrare cinque importanti teoremi sulle equazioni binomie enunciati nel 1844 dall'Eisenstein. Dopo di averlo consegnato alla direzione degli *Annali di matematica*, l'autore si accorse di essere stato preceduto dallo Stern sino dal 1861; ma quella Direzione, col

pubblicare egualmente quello scritto, manifestò apertamente l'opinione che le antiche dimostrazioni non toglievano valore alle nuove.

Di natura aritmetica è eziandio l'ultima delle pubblicazioni del Tardy; essendo apparsa quand'egli toccava gli ottantotto anni, è per avventura il lavoro più senile che annoveri la letteratura matematica. Però una sua lettera, diretta al principe Boncompagni addì 27 novembre 1887, sta a provare che le ricerche, d'onde ivi sono esposti i risultati, vennero iniziate assai prima, cioè nel 1875; ed in pari tempo rivela che il movente ad intraprenderlo fu un articolo di quel benemerito bibliografo [1], concernente un celebre teorema scoperto per la prima volta da Nicomaco Geraseno e ritrovato poi molte altre volte da matematici di valore aventi imperfetta cognizione della matematica greca: parliamo del teorema espresso dalla formola

$$n^3 = \sum_{k=1}^{k=n} \{ n(n-1) + (2k-1) \} .$$

Ora, il nostro matematico ha notato che una somigliante proposizione sussiste in tutte le progressioni aritmetiche aventi per primo termine l'unità e per differenza costante un numero pari $2d$; decomponendola, infatti, in gruppi che comprendano rispettivamente $1, 1+d, 1+2d, \ldots$ termini, si ottiene sempre come somma degli elementi di ciascun gruppo un cubo. Estendendo ulteriormente tale considerazione, egli ha notato che, se n è pari, nella stessa progressione si può trovare un gruppo di $1+nd$ termini la cui somma sia eguale a $(1+nd)^m$, ove m è un intero $\geqq 3$. Proprietà analoghe posseggono le progressioni aritmetiche del tipo $a, 3a, 5a, \ldots$ Queste proposizioni sono senza dubbio eleganti ed hanno *una certa* importanza, perchè collocano nella debita luce il surriferito teorema di Nicomaco: *una certa*, ma non una grande importanza; è quanto lo stesso Tardy bonariamente riconosceva quando le chiamava semplici giuochi a cui lo stato della sua vista lo costringeva a limitare le proprie occupazioni matematiche. Va notato che, benchè comunicate al mondo scientifico per il tramite di una delle più cospicue Accademie d'Europa, esse raggiunsero limitata notorietà: lo prova il fatto che la prima di esse venne, proprio ai dì nostri ed in Italia, riottenuta *ex-novo* [2] come estensione del teorema di Nicomaco, riscoperto una nuova volta nell'anno di grazia 1914 [3].

Giunti al termine di questa sommaria analisi degli scritti matematici del Tardy, osserviamo come da essa emerga che tali lavori si distinguono meno per novità di concetti e di metodi che per la profonda dottrina che atte-

[1] *Intorno ad una proprietà dei numeri dispari* (Bullettino del Boncompagni, tom. VIII, 1875, pp. 51-62).

[2] Vedi E. Nannei in *Il Pitagora*, tom. XXI, 1914-15, pp. 11-13.

[3] E. Barisien in *L'intermédiaire des mathématiciens*, tom. XXI, 1914, pag. 123.

stano nel loro autore, per la squisita accuratezza di stile e di calcolo e per la non comune abilità algoritmica che rivelano in chi li scrisse. Appunto tale preferenza da lui manifestata per il calcolo sul ragionamento, la quale è sintomo d'un'orientazione di pensiero in aperta antitesi con quella oggi dominante, spiega perchè le Memorie del dotto matematico messinese abbiano in questi ultimi tempi trovati poco numerosi lettori, ond'egli fu dimenticato dopo la scomparsa dei matematici della sua generazione ed è quasi totalmente ignoto alla schiera di giovani analisti, in cui l'Italia ripone le sue più fondate speranze. Ma la legge dei ricorsi storici, alla quale non sfugge l'evoluzione del pensiero scientifico, induce a credere che l'avvenire riserbi a lui tempi migliori; allora, forse, qualche nuova recluta dell'esercito matematico scoprirà, nelle formole che egli ha sapientemente architettate, qualche idea degna di venire riposta in circolazione o qualche algoritmo suscettibile di ulteriore applicazione: che tale fiducia non sia priva di fondamento, è dimostrato dall'intervento, nella teoria delle equazioni integrali, dei differenziali ad indice fratto, cioè della dottrina in cui egli si affermò con più spiccata originalità di pensiero. Il giorno in cui tale previsione sia per essere avverata, sarà dimostrato che Placido Tardy ha nobilmente disimpegnati entrambi gli ufficî affidati ad uno scienziato degno di tale nome: il mietere le mèssi ormai mature ed il gittare semi capaci di assicurare vitale nutrimento alle generazioni dell'avvenire.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI DI P. TARDY

[1]. *Sulla dimostrazione del teorema fondamentale della teoria delle funzioni annalitiche di Lagrange di Agatino San Martino.* Cenno di Placido Tardy (Il « Faro » giornale di scienze, lettere ed arti, tom. IV, Messina, 1836).

[2] *Sulle funzioni discontinue.* Ricerche di Placido Tardy. Messina, 1843.

[3]. *Preliminari di una Memoria sui differenziali a indice fratto* (Atti della sesta Riunione degli scienziati italiani tenuta in Milano nel settembre 1846).

[4]. *Sopra alcuni punti della teoria del moto dei liquidi.* Firenze, 1847.

[5]. *Sulle equazioni differenziali lineari* (Annali di Tortolini, tom. I; Giornale di Crelle, tom. XLII, 1851).

[6]. *Sopra una nuova equazione di idrodinamica. Alcune osservazioni* (Annali di Tortolini, tom. I, 1850; Philosophical Magazine tom. XXXVI, 1850).

[7]. *Sulle equazioni lineari alle differenze finite* (Annali di Tortolini, tom. I, 1850; Giornale di Crelle, tom. 42, 1851).

[8]. *Sulla risoluzione algebrica di talune equazioni* (Annali di Tortolini, tom. II, 1851).

[9]. *Trasformazione di un prodotto di n fattori* (Annali di Tortolini, tom. II, 1851; *Nouvelles Annales de mathématiques,* tom. X, 1851).

[10]. *Sopra un teorema di poligonometria* (Annali di Tortolini, tom. III, 1852; Giornale di Crelle, tom. XLVII, 1854).

[11]. *Sui differenziali a indice qualunque* (Annali di matematica, tom. I, 1858).

[12]. *Sulle derivate di ordine superiore delle funzioni composte* (Giornale di matematiche, tom. II, 1864).

[13]. *Sopra alcune formole relative ai coefficienti binomiali* (Giornale di matematiche, tom. III, 1865).

[14]. *Sulle quadrature* (Mem. della Società italiana delle scienze residente in Modena, ser. II, tom. II, 1866).

[15]. *Intorno ad una formula del Leibnitz* (Bullettino del Boncompagni, tom. I, 1868; Nouvelles annales de mathématiques, II ser., tom. VII, 1869).

[16]. *Sopra alcuni teoremi aritmetici* (Annali di matematica, tom. III, 1870).

[17]. *Relazioni tra le radici di alcune equazioni fondamentali determinanti* (Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, tom. XIX, 1884).

[18]. *Remarque sur une Note de M. Ibach* (Nouvelles Annales de mathématiques, ser. 3ª, tom. III, 1884).

[19]. *Sulle serie aritmetiche di numeri interi* (due Note) (Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, tom. XXXIX, 1904).

APPENDICE (*).

LETTERE AL TARDY DI GENOCCHI, BETTI E SCHÄLFLI

Il Tardy mantenne corrispondenza epistolare con tutti i principali matematici italiani del tempo suo [1] e con alcuni stranieri [2]; le lettere, da lui ricevute e religiosamente conservate, verranno, per voler suo, depositate nell'autografoteca esistente nella Bibliotecca della R. Università di Genova. Un rapido esame da me fattone m'indusse a notarne alcune dotate di tanto considerevole valore storico e scientifico che reputo opportuno di renderle di pubblica ragione, senza escludere che un più minuto esame di esse possa portare alla scoperta di altre di non minore importanza.

I.

Nella traduzione italiana dell'*Aritmetica generale* del Baltzer è indicata (2ª ed., Genova, an. 1875, pag. 49 [3]) una nuova coppia di « numeri amici », scoperta da un « signor Paganini di Genova »; ora, sopra tale ritrovato, dà qualche notizia il seguente brano di lettera del Genocchi:

Carissimo amico,

. . . .

Non so se conosciate un barone Nicolò Paganini, giovine genovese di 16 anni, nipote del celebre violinista, che si occupa di teoria di numeri. Egli ha mandato già molte lettere all'Accademia delle scienze di Torino, e in esse comunicava una nuova coppia di *numeri amicabili*, che sono **1184** e **1210**, ma senza far conoscere il suo metodo. Sapete che la questione può annoverarsi fra le *difficiles nugae*: tre coppie furono date da Schooten; altre *ventisette* da Eulero. Legendre, che non conobbe quelle di Eulero, trovò solamente le tre prime di Schooten e fece molti inutili tentativi per iscoprirne altre. La coppia del Paganini non è fra le trenta ora menzionate, e si compone di numeri molto più pic-

(*) La presente Appendice fu pubblicata in seguito al testo riguardante la Commemorazione del Socio Placido Tardy, per il legame naturale che quella ha con questa; e però si oltrepassarono le pagine prescritte dal Regolamento per le Note presentate da Soci e Corrispondenti.

(1) Bellavitis, Beltrami, Betti, Boncompagni, Brioschi, Casorati, Chiò, Cremona, Donati, Frisiani, Genocchi, Isè, Jung, Libri, Mainardi, Menabrea, Mossotti, d'Ovidio, Piola, Plana, Sella, Siacci Tortolini, Turazza.

(2) Airy, Cayley, Grunert, Hirst, Klein, Pelz, Peters, Quetelet, Schläfli, da Silva, Spottinswoode, Sylvester.

(3) Cfr. anche Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, tomo II, 1866-67, pag. 362.

coli di quelli d'Eulero. Ora egli scrive un'altra lunga lettera, da me non ancora letta, in cui pare spieghi il metodo da lui tenuto; . . . .

. . . .

Torino, 25 dicembre 1866.

II.

Nell'autunno 1863 Riemann si trovava, per ragioni di salute, in Italia; delle conversazioni da lui tenute col Betti, si ritrova una tarda eco in due lettere di questi, concernenti la « connessione », le quali mi sembrano importanti per due ragioni. cioè, perchè porgono un'illustrazione, per così dire, autorizzata delle idee del grande matematico tedesco, e perchè evidentemente preludono alle fondamentali ricerche, su quell'argomento, del Betti stesso. Donde i motivi alla presente pubblicazione:

Firenze, 6 ottobre 1863.

Mio caro Placido,

Ho nuovamente parlato con Riemann della connessione degli spazii, e me ne sono fatto una idea esatta.

Uno spazio si dice semplicemente connesso quando ogni superficie chiusa, contenuta in esso, ne limita da sè sola completamente una parte, e ogni linea chiusa contenuta contemporaneamente in esso limita completamente una superficie contenuta interamente nello stesso, ossia può riguardassi da sè sola come il contorno completo di una superficie contenuta interamente nello spazio stesso.

Lo spazio racchiuso da un ellissoide è uno spazio semplicemente connesso. Lo spazio racchiuso da due sfere concentriche non è semplicemente connesso, perchè una terza sfera concentrica compresa fra le due, sebbene chiusa e contenuta nello spazio, non limita da sè sola una parte dello spazio stesso. In questo spazio però una linea chiusa qualunque può riguardarsi come l'intero contorno di una superficie, tutta contenuta nello spazio stesso. Questo spazio può ridursi semplicemente connesso per mezzo di una sezione lineare, cioè di una linea che va dalla superficie esterna a un punto della sfera interna. Dovendo i punti di questa sezione riguardarsi allora come esterni allo spazio, le sfere concentriche comprese fra le due non sono più comprese interamente nello spazio, perchè attraversano la sezione, e quindi lo spazio, coll'aggiunta di una sezione lineare, è ridotto semplicemente connesso.

Lo spazio racchiuso in un anello pieno non è semplicemente connesso, perchè una linea come l'asse non può riguardarsi come il contorno completo di una superficie contenuta tutta intera nello spazio. Ogni superficie chiusa, però, contenuta interamente in questo spazio, ne limita da sè sola completamente una parte. Questo spazio si riduce semplicemente connesso mediante una sezione superficiale semplicemente connessa, che taglia l'anello normalmente all'asse interno dell'anello stesso.

Uno spazio racchiuso da un anello vuoto non è semplicemente connesso, perchè una superficie chiusa, che racchiude l'asse interno ed è dentro la parte piana dell'anello, non limita da sè sola una parte di spazio, e una linea parallela all'asse interno contenuta nella parte piana dello spazio non può formare il contorno completo di una superficie contenuta tutta quanta nello spazio stesso. Si riduce semplicemente connessa mediante una sezione lineare che va da un punto della superficie esterna ad uno della interna, e mediante una sezione superficiale che unisca tra loro la superficie esterna, l'interna e la sezione lineare, e che è semplicemente connessa.

I tre spazii che ho considerati hanno differenti ordini di connessione, perchè l'ordine di connessione dipende dal numero delle sezioni superficiali semplicemente connesse, e

dal numero delle sezioni lineari mediante le quali si riduce semplicemente connessa. Questo numero rimane lo stesso, comunque si facciano queste sezioni. L'ordine di connessione è quindi rappresentato da due numeri; denotiamolo con (m, n) quando sono m le sezioni superficiali ed n le lineari che lo rendono semplicemente connesso. Sarà (0,1) l'ordine di connessione dello spazio racchiuso da due sfere, una interna all'altra. Sarà (1,0) l'ordine di connessione di un anello pieno. Sarà (1,1) l'ordine di connessione d'un anello vuoto. La generalizzazione per più dimensioni è facile; e l'importanza, per gli integrali multipli, di tutta questa teorica, è evidente. La nozione delle sezioni è venuta in mente a Riemann per una definizione che gliene ha dato Gauss in un colloquio familiare, parlando di altro soggetto. Nei suoi scritti si trova che egli dice che l'analisi di sito, cioè questa considerazione delle quantità indipendentemente dalla loro misura, è « wichtig », e negli ultimi anni della sua vita si è occupato molto di un problema di analisi di situazione: cioè, dato un filo che si avvolge più volte e conoscendo, nei punti dove s'interseca, la parte che rimane sopra e la parte che rimane sotto, determinare se potrà svolgersi senza annodarlo; problema che non è riuscito a risolvere altro che in casi particolari.

. . . .

Firenze, 16 ottobre 1863.

Mio caro Placido,

Riemann dimostra, con molta facilità che si può ridurre uno spazio qualunque ad essere semplicemente connesso, mediante sezioni lineari e sezioni superficiali semplicemente connesse.

Uno spazio connesso non muta l'ordine della sua connessione se si restringono o distendono le superficie che lo limitano, facendone muovere i loro punti verso l'interno dello spazio stesso sino a far perdere allo spazio una e più dimensioni, purchè questo ristringimento e questa diffusione avvenga, con continuità e senza rotture. Affinchè uno spazio sia semplicemente connesso, è necessario che così si possa ridurre a un sol punto. Una superficie che così può ridursi a un punto, è semplicemente connessa senza potersi ridurre a un punto senza che si faccia in essa un punto di sezione; per esempio una superficie sferica, dove, se vuoi ridurla a un punto, devi fare un buco che estendi continuamente sinchè la superficie si riduca a un punto.

Per maggior chiarezza riprenderò gli esempii dell'altra volta.

Una sfera cava, se tu restringi la superficie esterna e distendi l'interna sino a renderle infinitamente vicine, perde una dimensione e si riduce ad una superficie sferica, la quale, mediante un punto di sezione, può ridursi ad un sol punto. Questo punto di sezione, che ha una dimensione di meno di quella che aveva nello spazio, corrisponde ad una sezione lineare. Dunque una sfera cava si riduce semplicemente connessa mediante una sezione lineare; il suo ordine di connessione è (1,0).

Un anello pieno, se tu ristringi continuamente la superficie esterna fino a che le sue pareti interne siano infinitamente vicine, perde due dimensioni e si riduce a una linea circolare, la quale con un sol punto di sezione si riduce a un sol punto. Questo punto di sezione, che ha due dimensioni di meno che, nello spazio primitivo non corrisponde ad una sezione superficiale che, potendo ridursi a un punto, è semplicemente connessa. Dunque l'ordine di connessione di un anello pieno è (0,1).

Un anello vuoto, se tu restringi la superficie esterna e distendi la interna fino a ridurle infinitamente vicine perde una dimensione e si riduce ad una superficie anulare, la quale, per essere ulteriormente ridotta, richiede un punto di sezione corrispondente ad una sezione lineare. Allargando questo buco indefinitamente sinchè i suoi bordi risultano dalle parti opposte infinitamente vicini, la superficie anulare perde un'altra dimensione e si riduce a due linee circolari, una delle quali ha il centro comune coll'anello, l'altra

ha il centro sull'asse interno all'anello, e i piani loro puoi immaginarli perpendicolari tra loro. Per ridurre uno di questi circoli al solo punto che hanno comune, occorre un punto di sezione: poi un altro punto di sezione per ridurre ad un punto il circolo rimasto. A questi due punti di sezione, che hanno due dimensioni di meno che non nello spazio, corrispondono, in quello, due sezioni superficiali semplicemente connesse. Dunque l'ordine di connessione dell'anello vuoto è (1,2), e non (1,1) come per inavvertenza ti aveva scritto l'altra volta.

Una sfera con un vuoto anulare nell'interno, se tu restringi la superficie sferica, perde una dimensione e si riduce ad una superficie piana che unisce i bordi interni della superficie anulare. Con un punto di sezione si riduce questa superficie a una linea circolare che ha il centro nell'asse interno dell'anello, e a una superficie circolare piana che ha il centro comune coll'anello. Con un altro punto di sezione la linea circolare si riduce a un punto del bordo della superficie circolare piana, che senza altre sezioni puoi ridurre a un punto. Dunque una sfera con un vuoto anulare si riduce semplicemente connessa con una sezione lineare e con una sezione superficiale semplicemente connessa. Il suo ordine di connessione è (1,1).

Generalizzando, si vede che una varietà a *n* dimensioni si può, sempre con ristringimenti continuati e senza rotture, ridurre a sole *n-1* dimensioni. Mediante punti di sezione si potrà ridurre a *n-2* dimensioni, mediante altri punti di sezione, a *n-3* dimensioni; e così di seguito, sino a ridurla a un punto. Ai primi punti di sezione corrispondono sezioni lineari; ai secondi sezioni superficiali semplicemente connesse; ai terzi sezioni di tre dimensioni semplicemente connesse...; agli ultimi sezioni di *n-1* dimensioni semplicemente connesse.

Il numero delle sezioni lineari è eguale al numero dei moduli di periodicità di un integrale (*n-1*)-plo; il numero delle sezioni superficiali semplicemente connesse al numero dei moduli di periodicità di un integrale (*n-2*)-plo,...; il numero delle sezioni di (*n-1*) dimensioni semplicemente connesse, al numero dei moduli di moltiplicità di un integrale semplice, presi tutti nello spazio considerato. Quindi, essendo determinato il numero dei moduli di periodicità, devono essere sempre gli stessi i numeri delle differenti sezioni a ridurre lo spazio semplicemente connesso, comunque si facciano . . . .

III.

Le due lettere seguenti, dirette al Tardy dall'illustre matematico svizzero Schläfli, vengono qui pubblicate, in parte pel valore del loro contenuto, in parte pei significanti giudizii ivi espressi sopra lavori del Nostro. La prima prende le mosse dalle « funzioni bernoulliane » che entrano nella formola data da Mac-Laurin per il calcolo approssimato d'un integrale definito, della quale il Tardy si è occupato in una sua Memoria [14]. Invece la materia della seconda rappresenta in massima parte la prima stesura delle ricerche che diedero argomento alle due ben note Memorie dello Schläfli, *Sulle relazioni tra diversi integrali definiti che giovano ad esprimere la soluzione generale della equazione di Riccati* e *Alcune osservazioni intorno alle funzioni di Laplace*, entrambe inserite nel tom. I della 2ª ser. degli *Annali di matematica*; onde le lettere stesse provano essere stati i lavori del Tardy che ispirarono tali importanti scritti.

Signore!

La ringrazio pel pregevole dono che à avuto la benevolenza d'inviarmi. Ch'Ella mi perdoni che tento di parlare Italiano, e mi permetta qualche nota intorno alle funzioni Bernulliane. Preferisco di restituirvi l'ultimo termine (costante), se il grado è pari,

e di dividerla sicchè il summo termine sia $\frac{x^n}{\Pi n}$. Adesso ella può esser definita per l'uguaglianza $\frac{te^{xt}}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \chi(n, x)\, t^n$, ove $\chi(n, x)$ denota la cangiata forma della funzione Bernulliana. Dalla uguaglianza definitrice si ricavano facilmente le formole

$$\frac{\partial}{\partial x}\chi(n, x) = \chi(n-1, x), \quad \chi(n, 1-x) = (-1)^n \chi(n, x),$$

$$\chi(n, 1+x) - \chi(n, x) = \frac{t^{n-1}}{\Pi(n-1)}, \text{ ecc.}$$

La funzione Bern. è secondo Raabe $\Pi(n-1).(\chi(n, x) - \chi(n, 0))$. Il Raabe à dato alla uguaglianza definitrice de' numeri Bern. un termine complementare che mi pare esser di grand importanza. Se $\chi(1, 0) = -\frac{1}{2}$, $\chi(2n, 0) = (-1)^{n-1}\frac{B_n}{\Pi(2n)}$, $\chi(2n+1, 0) = 0$, quella uguaglianza è

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \chi(\lambda, 0)\, x^\lambda + \frac{x^{n+1}}{e^x-1}\int_0^1 e^{xt}\chi(n, 1-t)\, dt.$$

Se si sostituisce $\omega\frac{\partial}{\partial x}$ invece di x, e se vi è un oggetto $\left(e^{n\omega\frac{\partial}{\partial x}} - 1\right)f(x)$, ne risulta la formola d'integrazione approssimativa col termine complementare. Moltiplicata con $e^x - 1$, se poi si pone $x = i.2r\pi$ $(r = 1, 2, \ldots, -1, -2, \ldots)$, essa somministra il valore di $\int_0^1 e^{2ir\pi t}\chi(n, t)\, dt$, vale a dire, l'evoluzione

$$\chi(n, x) = -\frac{2}{(2\pi)^n}\sum_{r=1}^{r=\infty} r^{-n}\cos\left(2r\pi x - \frac{n\pi}{2}\right) \qquad (0 < x < 1),$$

e quindi mediante $\int_0^{1/2}\operatorname{cotg}\pi t \,.\, \operatorname{sen} 2r\pi t \,.\, dt = \frac{1}{2}$

$$\int_{-x}^{1-x}(\chi(n+1, x+t) - \chi(n+1, x))\operatorname{cotg}\pi t \,.\, dt = -\frac{2}{(2\pi)^{n+1}}\sum_{r=1}^{r=\infty} r^{-n-1}\cos\left(2r\pi x - \frac{n\pi}{2}\right).$$

Sia $\frac{ye^{xy}}{e^y-1} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}\chi(\lambda, x)\, y^\lambda + R$, il termine complementare sarà

$$R = -y^{n+1}\frac{e^{xy}}{e^y-1}\left(\int_0^x e^{-yt}\chi(n, t)\, dt + \int_0^{1-x} e^{yt}\chi(n, 1-t)\, dt\right).$$

Comparando i coefficienti di y^{m+n} nella evoluzione secondo le potenze ascendenti di y, e poi facendo $x = 0$, si ottiene $\chi(m+n, 0) = (-1)^{m-1}\int_0^1 \chi(m, t)\chi(n, t)\, dt$, e quindi per $m = n$,

$$B_n = \Pi(2n).\int_0^1 \chi^2(n, t)\, dt,$$

espressione di B_n in funzione di $B_1, B_2, \ldots B_{\frac{n}{2}}$ ovvero $B_{\frac{n-1}{2}}$, mentre che le formole di

Raabe, provenendo dai coefficienti di x^n nella evoluzione ascendente delle uguaglianze

$$\frac{\chi(2n+1\,.\,x)}{(1-x)^{n+1}}+\frac{\chi(2n+1\,,1-x)}{(1-x)^{n+1}}=0\ ,\quad \frac{\chi(2n-1\,,x)}{(1-x)^{n+1}}+\frac{\chi(2n-1\,,1-x)}{(1-x)^{n+1}}=0$$

stabiliscono una relazione fra i numeri Bern. della seguente metà con esclusione di quei della precedente metà.

Se $(1+x)^n=\sum\limits_{\lambda=0}\binom{n}{\lambda}x^\lambda$, che $\alpha_1\,,\alpha_2\,,\ldots\,\alpha_n$ denotino numeri interi non negativi, la somma de' quali sia un dato m, partito così in tutti i modi possibili, permutazioni ammesse, e che sia $u=x_1+x_2\cdots+x_n$, la somma di n variabili; allora

$$\Sigma\chi(\alpha_1\,,x_1)\,\chi(\alpha_2\,,x_2)\cdots\chi(\alpha_n\,,x_n)=\frac{\partial^{n-m-1}\binom{u-1}{n-1}}{\partial u^{n-m-1}}\,,\quad \text{se } m<n\,,$$

ma

$$=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}\binom{-(m-n+1)}{\lambda}\frac{\partial^\lambda\binom{u-1}{n-1}}{\partial u^\lambda}\chi(m-n+1+\lambda\,,u)\,,\quad \text{se } m\geqq n\,.$$

Sia $e^x=\cos x+\sin x\ .\ e^{-x}=\cos x-\sin x\ ,\ \theta=\alpha+i\beta$, ove α deve essere positivo e β reale o zero, $(\sin\alpha)^2>(\sin\beta)^2$; a un numero qualsivoglia; allora la formola

$$e^{a\theta}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{2n-a}{n}(2\cos\theta)^{a-2n-1}\,.\,2\sin\theta$$

è convergente; essa è connessa col teorema di Sig. Prouhet, e mi ha somministrato lo sviluppo

$$\int_0^\infty e^{-2x\cos\theta+a\theta}\,d\theta=\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{2n-a}{n}\Gamma(a-2n)\,.\,x^{2n-a}-\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{\Pi(n)}A_n x^n\,,$$

ove $A_n=\sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=n}\binom{n}{\lambda}\frac{1}{a+n-2\lambda}$. Ora sia $F(a\,,t)=\sum\limits_{n=0}^{n=\infty}\frac{t^n}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(a+n+1)}$ la serie sempre convergente, per mezzo della quale si può esprimere l'integrale dell'equazione di Riccati; posso rappresentarla per un integrale definito convergente qualchesia a. Secondo che t è positivo o negativo, si à

$$F(a\,,x^2)=\frac{1}{\pi}x^{-a}\left\{\int_0^\pi e^{2x\cos\theta}\cos a\theta\,.\,d\theta-\sin a\pi\,.\int_0^\infty e^{-2x\cos\theta-a\theta}\,d\theta\right\}\,,$$

$$F(a,-x^2)=\frac{1}{\pi}x^{-a}\left\{2\int_0^{\pi/2}\cos\left(2x\cos\theta-\frac{a\pi}{2}\right)\cos a\theta\,.\,d\theta-\sin a\pi\,.\int_0^\infty e^{-2\sin\theta-a\theta}\,d\theta\right\}\,.$$

Colle stesse notazioni ch'Ella à adoprato in « Trasformazione di un prodotto di n fattori », sia $\mathfrak{S}_n^m=\sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=n}(-1)^\lambda\,\Sigma A_n^m(1\,,2\,,..\,\lambda)$. Allora $\left(\frac{1}{2}\right)^n\mathfrak{S}_n^{n+2r}$ è l'aggregato di tutti quei termini dello sviluppo di $(a_1+a_2+\cdots+a_n)^{n+2r}$, nei quali non si trova alcuno esponente pari; ma $\mathfrak{S}_n^{n+2r-1}=0$.

. . . .

L. Schlafli.

Bern den 17. Aug. 1865.

Caro Signore!

Bramando di comunicarle alcune riflessioni ch'à cagionate la lettura delle sue istruttive memorie sull'uso dell'indice fratto di derivazione e sul moto dei liquidi prima di aver ricevuta la sua pregiatissima lettera, comincio dal rispondere ad una domanda ivi contenuta. La biblioteca publica a Berna non abonda in giornali matematici, ed io non ò mai avuta un'altra occasione di vedere un giornale Napoletano; mà ò investigato l'eq. (58 e 59 pag. 41 Quadr.), la quale mi apparve affatto nuova. Moltiplicata per $(-1)^{n+1}\binom{2n+2}{n}$ e ponendo $m=n+1-q$, $\lambda=n+1-k$, essa prende la forma

$$\sum_{\lambda=m}^{\lambda=\infty}(-1)^{\lambda}\binom{n+1}{\lambda}\binom{n+1+\lambda}{\lambda+1}=(-1)^{m}\binom{n+1}{m}\binom{n+1+m}{m-1}$$

purchè $n+2$ sia un numero intero; mà tosto che $n+1=a$ è un numero qualsivoglia, la formola rimane convergente e si cangia in

$$\sum_{\lambda=m}^{\lambda=\infty}\binom{a-1}{\lambda}\binom{1-a}{\lambda+1}=\frac{\sin a\pi}{a\pi}+\binom{a-1}{m}\binom{-a-1}{m-1}$$

ossia lo che torna lo stesso

$$(a)\qquad \sum_{\lambda=m}^{\lambda=\infty}\binom{a+\lambda-1}{2\lambda}\binom{{}^{1}/_{2}}{\lambda+1}2^{2\lambda+1}=\frac{\sin a\pi}{a(1-a)\pi}\left(1-\frac{\Gamma(m+a)\,\Gamma(m+1-a)}{\Gamma m\,.\,\Gamma(m+1)}\right);$$

essa è adunque una formola *complementare* della serie relativa a $m=0$; e, siccom'ella accenna, si dimostra subito pel prendere la differenza del secondo membro. Ma la ò pur tentata in un'altra guisa. Voglia permettermi in seguito l'uso dell'abbreviatura $[t^m u^n|$ (*espr.*) per dire « coefficiente di $t^m u^n$ nello sviluppo della *espr.* per le potenze e pei prodotti di t, u ». Ora

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m}\binom{a-1}{\lambda}\binom{1-a}{\lambda+1}=(-1)^{m-1}.[t^m a|\frac{(1+u)^{a-1}}{1+t}\left(1+t\frac{1+u}{u}\right)^{a-1}=$$

$$=(1+u)^{a-1}(1+t)^{a-2}\left(1+\frac{t}{u(1+t)}\right)^{a-1}=(-1)^{m-1}\sum_{\lambda}\binom{a-1}{\lambda}\binom{a-2-\lambda}{m-\lambda}\binom{a-1}{\lambda+1}=$$

$$=(-1)^{m-1}\binom{a-1}{m+1}\sum\binom{a-1}{\lambda}\binom{m+1}{m-\lambda}=-\binom{a-1}{m+1}\binom{-a-1}{m}.$$

Supposto ciascun dei valori assoluti di u e di $\frac{2t}{u}$ minore di 1, gli sviluppi (alternanti) per le potenze ascendenti di u, di t, di $t\frac{1+u}{u}$, di $\frac{t}{u(1+t)}$ saran tutti inevitabili (di necessità), e perciò l'impiego del principio della identità è permesso.

Nella somma (60) ciascun termine è divisibile per $\binom{n-q+2}{n+1}$, ecc.

Prendendo il partito del Lagrange contro gli avvisi adesso predominanti io sono persuaso che spesso viene adoprato il calcolo differenziale laddove il figuramento (più algebraico) dello sviluppo ci menerebbe più facilmente allo scopo, oltreciocch'esso è la sola aita quando siamo abbandonati dal teorema di Taylor.

La forma (a) nella presente, contenendo il numero $\binom{a+\lambda-1}{2\lambda}$, mentre

$$\binom{^1/_2}{\lambda+1}=(-1)^\lambda\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/_2}\sin^{2\lambda}\theta\cos^2\theta\, d\theta\,,$$

rammenta la ug.

$$\frac{\cos(2a-1)\theta}{\cos\theta}=\sum_\lambda\binom{a+\lambda-1}{2\lambda}(2i\sin\theta)^{2\lambda}.$$

Concedo che se fosse proposto trovare lo sviluppo del primo membro il metodo dei coefficienti indeterminati, seguito dalla differenziazione doppia, sarebbe il più naturale; ma poich'esso non determina il primo coefficiente, bisogna assumere θ infinitamente piccolo per isolare il primo termine; quello che or è facile può in altri casi tornar difficile. Ecco un processo più artificiale, ma bensì pressochè puramente algebraico, se un cotal nome è permesso in sviluppi infiniti.

I. Sia $z=x+y$, $\frac{1}{z}=x-y$, dunque $z^2=1+2yz$, $\frac{1}{z^2}=1-2yz$. Si figuri y abbastanza piccolo acciò il valore assoluto di $2yt$ possa esser minore di 1, mentre quel di t supera sì z che $\frac{1}{z}$ e quello di t^2 supera quello di $1+2yt$. Allora

$$z^a+z^{-a}=z(1+2yz)^{\frac{a-1}{2}}+\frac{1}{z}(1-2yz)^{\frac{a-1}{2}}$$

$$=[t^0](1+2yt)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{zt}{t-z}+\frac{t}{zt+1}\right)=2x\,.\,[t^0]\frac{t^2(1+2yt)^{\frac{a-1}{2}}}{t^2-(1+2yt)};$$

inoltre

$$z^a-z^{-a}=[t^0](1+2yt)^{\frac{a}{2}}\left(\frac{t}{t-z}-\frac{t}{t+\frac{1}{z}}\right)=2w\,.\,[t^0]\frac{t(1+2yt)^{a/_2}}{t^2-(1+2yt)}.$$

Dunque

$$(b)\qquad \frac{z^a}{x}=\sum_\lambda\left(\frac{a-1+\lambda}{\lambda^2}\right)(2y)^\lambda\,,$$

fino a tanto che il valore assoluto di y è inferiore a 1.

II. Le inegualità seguenti spettano ai valori assoluti (raggî o moduli) delle quantità espresse. Sia

$$x=z-z^2<\frac{1}{4}\,,\ z>1-z\,,\ 1>t>\frac{1-z}{z};$$

sarà

$$\frac{z^a}{2z-1}=[t^0]\frac{(1+t)^{-a}}{2z-1}\left(\frac{t}{t-\frac{1-z}{z}}+\frac{t}{\frac{z}{1-z}-t}\right)=[t^0]\frac{t(1+t)^{-a}}{t-x(1+t)^2};$$

quindi

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}}\left(\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\right)^a=\sum_n\binom{2n-a}{n}x^n.$$

Ponendo $x=\left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^2$ e assumendo la componente reale di θ per positiva, se ne ricava

$$(c)\qquad e^{a\theta}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{2n-a}{n}(2\cos\theta)^{a-2n-1}\,.\,2\sin\theta\,.$$

Per $\theta = 0$ la serie è divergente; se $\theta = x + iy$, ove x deve e y può esser positivi, la condizione della convergenza è $\sin x > \sin y$, cosicchè l'impiego alle funzioni propriamente goniometriche è proibito. Formando dietro la (c) l'espressione di $e^{(a+1)\theta} - e^{(a-1)\theta}$ e dividendola per $2 \sin \theta$, ne segue

$$(d) \qquad e^{a\theta} = \sum_{a=0} \frac{-a}{2n-a} \binom{2n-a}{n} (2 \cos \theta)^{a-2n};$$

convergente per $\theta = 0$.

Se a è un intero positivo, $\binom{2n-a}{n}$ svanisce nell'intervallo $\frac{a}{2} \leqq n < a$ e per $n = a + m$ si cangia in $\binom{2n-a}{n}$; quindi il valore della serie (c) dopo la lacuna è $e^{-a\theta}$. Tolta questa serie infinita, il rimanente diviso per $2 \sin \theta$ diventa

$$\frac{\sin a\theta}{\sin \theta} = \sum_{n=0} (-1)^n \binom{a-n-1}{a-1-2n} (2 \cos \theta)^{a-2-2n},$$

la qual formola ammette il cangiamento nei seni e coseni circolari e indi può esser fatta coincidere colle formole note, contenute nella (b).

Se $\theta = \frac{i\pi}{a}$, il primo membro svanisce; e la serie 1, $\cos^2 \frac{\pi}{a}$, ... rappresentando un poligono regolare di a lati ed i poligoni inscritti, abbiamo la formola di Prouhet in un caso particolare. Ma poichè nel caso generale le aree dei poligoni sono funzioni lineari ed omogenee degli $A_1, A_2, \ldots$ e $A_r = 0$ ovvero $A_r + A_{r+1} = 0$ secondo che $2r$ ossia $2r + 1$ è il numero dei lati, si tratta di una eliminazione, cioè dell'esprimere A_r linearmente pei poligoni. Gli $A_1, A_2, \ldots$ assorbendo tutta la spezialità del caso (a parte il numero de' lati), i coefficienti trovati pel caso del poligono regolare continuano di sussistere nel caso generale.

Vengo a sporre l'asserita coerenza dello sviluppo (c) colla equazione di Riccati. Se questa è messa nella forma $du + t^{-a-1} u^2 dt = t^a dt$, e che $F(a, t)$ dinoti la serie sempre convergente $\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{t^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(a+n+1)}$, la soluzione generale di quella è

$$u = \frac{A t^{a+1} F(a+1, t) + B F(-a-1, t)}{A F(a, t) + B t^{-a} F(-a, t)},$$

ove $\frac{B}{A}$ è la costante d'integrazione. Quindi sorge il problema di esprimere $F(a, t)$ per mezzo d'integrali sempre convergenti. Poichè $F(a, t)$ e $t^{-a} F(-a, t)$ sono due soluzioni indipendenti tra loro dalla equazione

$$(1) \qquad t \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + (a+1) \frac{\partial y}{\partial t} - y = 0,$$

oppure

$$(2) \qquad x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (2a+1) \frac{\partial y}{\partial x} - 4xy = 0,$$

ove $t = x^2$, cerchiamo a soddisfare a queste equazioni con integrali definiti della forma $\int e^{-tu} f(u)\, du$, fissando convenevolmente i loro limiti, dietro un noto metodo onde com'io credo Euler il primo s'è servito. La forma (1) fornisce la soluzione

$$(A) \qquad y = x^{-a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x \cos \theta + a\theta}\, d\theta,$$

(2) fornisce le quattro soluzioni

(B) $$y=\int_0^{\pi} e^{2x\cos\theta}\sin^{2a}\theta\, d\theta\,,$$ (B') $$y=x^{-2a}\int_0^{\pi} e^{2x\cos\theta}\sin^{-2a}\theta\, d\theta\,,$$

(C) $$y=\int_0^{\infty} e^{-2x\cos\theta}\sin\theta\, d\theta\,,$$ (C') $$y=x^{-2a}\int_0^{\infty} e^{-2x\cos\theta}\sin^{-2a}\theta\, d\theta\,,$$

Nel caso $x>0$, $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$ valgono tutte le cinque soluzioni, mentre non più di due ne possono essere indipendenti. Egli si tratta adunque di ridurre ciascuna d'esse alla forma $\mathrm{A}F(a,t)+\mathrm{B}t^{-a}F(-a,t)$.

Se $V_a=\int_0^{\infty} e^{-2x\cos\theta+a\theta}\,d\theta$ (la componente reale di x supposta positiva), la soluzione (A) si è $y=x^{-a}(V+V_{-a})$. Svolgasi $e^{a\theta}$ dietro la (c) e pongasi $2x\cos\theta=u$, otterremo

$$V_a=\sum_{n=0}\binom{2n-a}{n}x^{2n-a}\int_0^{\infty} e^{-u}\,u^{a-2n-1}\,du\,;$$

ma l'integrale à per valore $\Gamma(a-2n)-\sum_m \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)}\,\frac{(2x)^{m+a-2n}}{m+a-2n}$. Quindi ponendo

per brevità $A_m=\sum_{n=0}^{n=\infty} A_m\binom{2n-a}{n}\frac{2^{a+m-2n}}{a+m-3n}$ (convergente come $\Sigma n^{-\frac{3}{2}}$), si ricava

$$V_a=\frac{\pi}{\sin a\pi}\,x^{-a}F(-a\,,x^2)-\sum_{m=0}^{m=\infty} A_m\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)}\,x^m. \tag{3}$$

(Il seguito ci mostrerà che la somma nel secondo termine converge). La (c) offre il mezzo a trasformare A_m in una somma finita. Sia

$$f(a\,,m)=\sum_n\binom{2n-a}{n}\frac{(2\cos\theta)^{a+m-2n}}{a+m-2n}\,,\quad \text{sarà}\quad \frac{\partial}{\partial\theta}f(a\,,m)=e^{a\theta}(2\cos\theta)^m\,,$$

la quale avrei da integrare sviluppando $(e^{\theta}+e^{-\theta})^m$. Ma l'incertezza della costante d'integrazione mi costrinse a fare un lungo giro. Mediante due relazioni più semplici pervenni alla relazione

$$(m^2-a^2)f(a\,,m)=4m(m-1)f(a\,,m-2)-e^{a\theta}(2\cos\theta)^m(a-m\,\mathrm{tang}\,\theta)\,,$$

che dà immediatamente $f(a\,,0)$, $f(a\,,1)$, e poi mediante queste successivamente $f(a\,,2)$, $f(a\,,3)$, ... L'integrale $\sum_\lambda\binom{m}{\lambda}\frac{1}{a+m-2\lambda}\,e^{(a+m-2\lambda)\theta}$ coincidendo per $m=0\,,1$ con $f(a\,,m)$ e soddisfacendo alla medesima relazione finita, non si è da dubitare che ambedue non siano uguali. Indi per $\theta=0$

$$A_m=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m}\binom{m}{\lambda}\frac{1}{a+m-2\lambda}=\frac{(-2)^m}{\sin a\pi}\int_0^{\pi}\cos^m\theta\cos a\theta\,.\,d\theta\,.$$

Da qui si vede che la somma in quistione converge, purchè a non sia intero.

Conclusioni:

$$(4)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x\cos\theta+a\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{\sin a\pi}\left(x^{-a}\,\mathrm{F}(-a\,,x^2) - x^a\,\mathrm{F}(a\,,x^2)\right),$$

$$(5)\qquad \mathrm{F}(a\,,x^2) = \frac{x^{-a}}{\pi}\left(\int_0^{\pi} e^{2x\cos\theta}\,d\theta - \sin a\pi\,.\int_0^{\infty} e^{-2x\cos\theta-a\theta}\,d\theta\right),$$

convergente per qualunque valore finito di a, purchè la componente reale di x sia positiva.

Intanto si può rimediare alla divergenza del secondo integrale la quale avrebbe luogo se la fase di x sortisse dall'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}\cdots\frac{\pi}{2}\right)$. La porzione dell'integrale situata nell'infinità à per approssimato valore $\int e^{-xe^\theta}d\theta$ ed è di altissima piccolezza lungo tutta la parte dell'orizzonte ove la fase di xe^θ cade dentro i limiti $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ (mi figuro la parte orientale) e massimamente laddov'essa è zero. Dunque egli è nella nostra possanza, ponendo $x = re^{i\varphi}$, quando per esempio la fase φ di x decresce da 0 fino a $-\frac{\pi}{2}$, menare il limite superiore di θ collo stesso passo da ∞ a $\infty + i\frac{\pi}{2}$. Fissato qui il limite superiore, sarà lecito il formare una linea rotta (in angolo retto) dal cammino, le di cui parti saranno $\left(0\ldots i\frac{\pi}{2}\right), \left(\theta = i\frac{\pi}{2}+\theta', \text{ ove } \theta \text{ trascorre tutti i valori positivi}\right)$. Scrivendo $-ix$ in vece di $x = -ir$, avremo dopo aver confuso la prima parte testè mentovata $\int_0^{i\frac{\pi}{2}}$ col primo integrale della (5)

$$(6)\qquad \mathrm{F}(a\,,-x^2) = \frac{x^{-a}}{\pi}\left(2\int_0^{\pi/2}\cos\left(2x\cos\theta - \frac{a\pi}{2}\right)\cos a\theta\,.\,dt - \sin a\pi\int_0^{\infty} e^{-2x\sin\theta-a\theta}\,d\theta\right).$$

La soluzione (B) mi era nota da un trattato del calcolo integrale ed è

$$(7)\qquad \int_0^{\pi} e^{2\cos\theta}\sin^{2a}\theta\,d\theta = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)\mathrm{F}(a\,,x^2),\quad \text{per } a > -\frac{1}{2}.$$

Quella (C) diventa dapprima $(2x)^{-2a}\int_{2x}^{\infty} e^{-u}(u^2-4x^2)^{n-1/2}\,du$, e dopo lo sviluppo per le potenze di $\frac{4x^2}{u^2}$, mediante la valutazione

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\binom{a-\frac{1}{2}}{n}\frac{1}{2a-2n+m} = -\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-a-\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-m}{2}\right)}$$

$$\left(\text{valente per } a > -\frac{1}{2}\right),$$

$$(8)\qquad \int_0^{\infty} e^{-2x\cos\theta}\sin^{2a}\theta\,d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}{2\sin a\pi}\left(x^{-2a}\,\mathrm{F}(-x\,,x^2) - \mathrm{F}(a\,,x^2)\right).$$

La (7) apparisce come conseguenza della (8), tornando la fase di x indietro da 0 a $-\pi$, mentre il superior limite di θ passa da ∞ a $\infty + i\pi$. Ma invece io non poteva concludere

la (8) dalla (7), nemmeno connettere la (5) colla (8), benchè fui sorpreso dalla loro similarità.

So per altro bene che la funzione $F(a, t)$ non è altro che un caso particolare della serie ipergeometrica di Gauss, il quale riede in più occasioni ed era più facile da trattarsi che quello generale. Un grande inconveniente delle soluzioni di equazioni differenziali per integrali definiti è la loro stretta limitatezza e cagiona il natural desiderio di dilatare il loro dominio. Perciò mi rincresce di non aver riuscito a tradurre tutte le tre forme di soluzioni l'una nell'altra senza lasciar la forma di integrale definito.

Altre volte l'indice fratto di differenziazione mi sembrava sospetto; ma adesso la lettura della sua memoria, soprattutto la dilucidazione pag. 6 dopo l'eq. (3), me ne à dato una esatta idea. Mi figuro che si tratta di riunire nella medesima formola la uguaglianza fornita dal complemento della serie di Taylor $D^{-n}f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{\Gamma(n)} f(t)\,dt$ (per un'intero negativo $-n$) e $D^n f(x)$ riguardato come

$$\Gamma(n+1) \times [h^n | f\, x+h) = \frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi} \int f(x+h) \frac{dh}{h^{n+1}},$$

ove h trascorre dei valori imaginarî attorno zero con fase crescente e riede al punto da cui è uscito. Questo integrale si può scrivere $\frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi} \int_x (t-x)^{-n-1} f(t)\,dt$, purchè il giro che fa t attorno x non inchiuda un punto di discontinuità di $f(t)$. Il luogo nel piano (rappresentante i numeri imaginarî), dove ambedue limiti dell'integrale si riuniscono, punto di partenza e di giunta, è irrilevante finchè n sia intero positivo; ma tostochè n diventa fratto, il valore dell'integrale dipenderà essenzialmente dalla scelta di quel punto di partenza. In questo dubbio la decisione vien recata dalla prima formola relativa ad un indice intero negativo: « zero deve essere il punto di partenza », poichè ambedue formole convergono nella sola

$$D^m f(x) = \frac{\Gamma(1+m)}{2i\pi} \int (t-x)^{-m-1} f(t)\,dt,$$

ove per ora mi figuro x esser positivo e $(t-x)^{-m-1}$ ricevere un valore positivo nel momento ove $t-x$ passa sul valore positivo, di modo che $-\pi$ sarà la fase di partenz a per $t-x$ e π quella di giunta. La formola di definizione così rappresentata offre il vantaggio di ammettere la differenziazione ordinaria sotto il segno d'integrazione, giacchè il cammino della variabile ausiliaria t non tocca x; (e non formerei il cammino come un cerchio avente x per centro e passante per 0, perch'esso potesse inchiudere un punto di discontinuità di $f(t)$; mà se nell'intervallo reale $0 < t < x$ la funzione non si espone ad alcuno sturbo, meno t su per la via reale fino a piccola distanza di x, indi in un piccolissimo giro attorno x, e poi lo riduco per la stessa via come dianzi a zero); mentre la rappresentazione equivalente $\frac{\Gamma(1+m)}{2i\pi} \int t^{-m-1} f(x+t)\,dt$ (la quale per lo sviluppo Taylorico di $f(x+t)$ diventa formola (1) pag. 6) nei suoi limiti pregiudica la differenziazione, e lo sviluppo Taylorico torna divergente quante volte un ostacolo alla funzione $f(t)$ si trova più vicino di x che di zero.

Fin qui ò tacitamente supposto $x=0$ come limite inferiore alla espressione $\mathrm{D}^m f(x)$. Se al disotto si dinota la variabile che deve svanire al limite inferiore, si à

$$\underset{x}{\mathrm{D}^m} f(x) - \underset{x-a}{\mathrm{D}^m} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-m)} \int_0^a (x-t)^{-m-1} f(t)\, dt = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{(x-a)^{-m-\lambda}}{\Gamma(-m-\lambda+1)} \underset{a}{\mathrm{D}^{-\lambda}} f(a).$$

Così penso potersi definire la funzione complementare.

Se nella vicinanza di $x=0$, $f(x)$ è Tayloricamente sviluppabile, si à

$$\mathrm{D}^m f(x) = \sum_{\lambda=0} \frac{x^{\lambda-m}}{\Gamma(\lambda-m+1)} f^{(\lambda)}(0),$$

la quale espressione diviene infinita quando $m>0$; e perciò $\int_0 (\mathrm{D}^m f(x))\, dx$ non è da integrarsi quando $m>1$; ecco la ragione perchè, se $m-1, n$ sono positivi, si à $\mathrm{D}^m(\mathrm{D}^{-n} f(x)) = \mathrm{D}^{m-n} f(x)$, ma non $= \mathrm{D}^{-n}(\mathrm{D}^m f(x))$. La uguaglianza

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \binom{m+r}{\lambda} \frac{1}{n+q+\lambda} = \frac{\Gamma(n+q)\,\Gamma(m+r+1)}{\Gamma(m+n+r+q+1)}$$

(verso il fondo della pag. 15) manifesta lo stesso, perchè la convergenza del primo membro richiede $m+r>-1$, perchè r parte da zero,

Per $n>0$ ò riuscito a dimostrare che se $g(u) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^u (u-t)^{n-1} f(t)\, dt$, sarà

$$\frac{\Gamma(1+m)}{2i\pi} \int (u-x)^{-m-1} g(u)\, du = \frac{\Gamma(1+m-n)}{2i\pi} \int (t-x)^{n-m-1} f(t)\, dt;$$

ma per poter inverter l'ordine delle due integrazioni io era costretto a considerare $(1-e^{2i(n-m)\pi}) \times$ il presente integrale doppio.

Il moto dell'acqua nei vasi di rivoluzione mi à invece fornito un'esempio ove la formola quistionevole $\mathrm{D}^2(\mathrm{D}^{-1/2}) = \mathrm{D}^{-1/2}(\mathrm{D}^2)$ è in fallo. Sia

$$\psi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \underset{x}{\mathrm{D}^{-\frac{1}{2}}} \frac{\varphi(a+i\sqrt{x}) + \varphi(a-i\sqrt{x})}{\sqrt{x}},$$

$$f = \frac{1}{2i\sqrt{\pi}} \underset{x}{\mathrm{D}^{-\frac{1}{2}}} (\varphi(a+i\sqrt{x}) - \varphi(a-i\sqrt{x})),$$

sarà $\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} + 4x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ (Moto p. 26, eq. (44)). Volendo verificar questa eq. se ammettiamo nel secondo termine $\mathrm{D}^{-1/2}(\mathrm{D}^2)$, avremo

$$\frac{1}{2i\pi} \mathrm{D}^{-1/2}\left(\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^2 + 4x\mathrm{D}^2\right)(\varphi(a+i\sqrt{n}) - \varphi(a-i\sqrt{n})) = -\frac{\partial \psi}{\partial a};$$

mà impiegando $\mathrm{D}^2(\mathrm{D}^{-1/2}) = \mathrm{D}^{3/2}$ otteniamo

$$\frac{1}{2i\sqrt{\pi}} \mathrm{D}^{-\frac{1}{2}} (\varphi''(a+i\sqrt{x}) - \varphi''(a-i\sqrt{x})) + \frac{2x}{i\sqrt{x}} \mathrm{D}^{\frac{3}{2}} (\varphi(a+i\sqrt{x}) - \varphi(a-i\sqrt{x}))$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0x} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{i\sqrt{t}}{\sqrt{t-x}} (\varphi'(a+i\sqrt{t}) + \varphi'(a-i\sqrt{t})) + \right.$$

$$\left. + \frac{x}{(t-x)^{3/2}} (\varphi(a+i\sqrt{t}) - \varphi(a-i\sqrt{t})) \right\} dt = 0.$$

Gli esempî recati da Liouville rivengono a quello più generale proposto dall'Abel, che è attissimo a far veder l'utilità dell'indice fratto, ma anche può sciorsi al modo seguente. La eq. $\int_0^x (x-\theta)^{-n}\varphi'(\theta)\,d\theta = f(x)$, ove $0 < n < 1$, essendo lineare ed omogenea rispetto a φ', f, se $f(x)$ e suscettibile dalla forma $\Sigma A x^\alpha$, il problema sarà ridotto a $\int_0^x (x-\theta)^{-n}\varphi'(\theta)\,d\theta = x^\alpha$, e $\varphi(\theta)$ prenderà necessariamente (almeno se zero deve essere accessibile per x) la forma $B\theta^{\alpha+n}$; indi

$$B = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1-n)\,\Gamma(\alpha+n+1)}\ ,\quad \varphi(x) = \frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^x (x-\theta)^{n-1}\theta^\alpha\,d\theta\ ;$$

poi la sommazione.

La interessante sua memoria sul moto dei liquidi, la quale svolge tutto un secolo di lavoro agli occhi, mi à dato la convinzione che il problema del moto a due coordinate, tale quale è ivi proposto, è completamente sciolto. L'equazioni a differenze finite ne sono necessarie conseguenze, e tutte le loro soluzioni sono tali del problema, e *viceversa*; qui la discontinuità sebbene esistente è analiticamente superata. Quanto al moto permanente nei vasi di rivoluzione si potrebbe ventilar la quistione, se la parete e l'asse non debbansi considerare come un sistema, come una curva composta. Almeno vi sono due maniere di concepire il problema. In quella ora mentovata la parte è un caso-limite, un caso singolarissimo della traiettoria; si potrà dare arbitrariamente una traiettoria *proxime* seguente (adjacente), la quale va allato della parete, scansa la intersezione d'essa coll'asse per ritornare lungo l'asse (ma può, così mi pare, aver l'asse per asintota); e credo che cotal gran particolarezza del sistema parete-asse contribuirà alla generalità della soluzione e aumenterà la libertà della traiettosia. Nell'altra maniera di vedere egli ne sarebbe della parete come di una traiettoria qualunque; il problema riverrebbe a trovare soltanto lungo l'asse una traiettoria infinitamente consecutiva e tale che la famiglia di traiettorie determinate per essa contenesse la parete; se per esempio, $\frac{1}{2}r^2\varphi'(z) =$ costante infinitesimale, rappresentasse quella traiettoria consecutiva all'asse, la famiglia di curve espressa per $f = \frac{r}{i\pi}\int_0^\pi \cos\theta\,.\,\varphi(z + ir\cos\theta)\,d\theta =$ costante finita, dovrebbe contener la parete. (Poichè nella prima $\varphi'(z) = \infty$ caratterizza una intersezione coll'asse, io sono propenso a credere che tutte le traiettorie avranno comune la detta intersezione). Insomma partasi dall'asse per attinger la parete, o partasi da questa per arrivare a quello, il salto a distanza *finita* cagiona a questo secondo concetto del problema delle difficoltà inestrigabili.

In quanto alla pretesa costante (nell'analitica rappresentazione della parete) la quale avesse nello stesso tempo una significazione funzionale, sono pienamente d'accordo con lei, che non esiste del tutto; mà ecco perchè non posso appagarmi neppur della eq. (33) pag. 18 appoggiata alla idea di variazione della parete, come mi pare che faccia vedere il paragone della (36), ove α diventa una costante funzionale appunto per l'eliminazione.

Durante la lettura della sua memoria (moto de' liq.) mi venne in mente un mezzo speditissimo a sporre le funzioni di Laplace partendo dalla espressione pag. 22 lin. 1; e non so se questa osservazione è già pronunziata. Perchè nella (21) x, y, z non compariscono in forma finita, alcun punto dello spazio dove la funzione φ ammette lo sviluppo Tayloriano può stare da origine ($x=0, y=0, z=0$), in modo che lo sviluppo sarà

$$\varphi = \Sigma\,\frac{(\alpha,\beta,\gamma)}{\pi\alpha\,.\,\pi\beta\,.\,\pi\gamma}\,x^\alpha y^\beta z^\gamma\,.$$

In forza della (21) i coefficienti saran legati dalle relazioni $(\alpha+2,\beta,\gamma)+(\alpha,\beta+2,\gamma)+$ $+(\alpha,\beta,\gamma+2)=0$, ove la somma dei tre indici è la stessa in ciascun termine e dicasi n, cosicchè $\alpha+\beta+\gamma=n-2$. Il grado n abbraccia $\binom{n+2}{2}$ termini, mà tra i loro coefficienti avvi $\binom{n}{2}$ relazioni; ve ne sono adunque $2n+1$ indipendenti. Ciò importa che la funzione φ si slega non solo in funzioni omogenee dei diversi gradi, mà anche la funzione omogenea del grado n si slega in $2n+1$ funzioni indipendenti tra loro. Ora la più semplice soluzione della (21) si è $\varphi=(ax+by+cz)^n$, ove $a^2+b^2+c^2=0$, lo che si verifica con $a=2t$, $b=t^2-1$, $c=i(t^2+1)$, come è notissimo dai tempi di Pitagora. Questa espressione sviluppata per le potenze della indeterminata t conterrà $2n+1$ termini, ciascuno dei quali deve da per se soddisfare alla (21). Pongasi $y+iz=p$, $y-iz=q_1$ avremo $\varphi=p^{-n}((x+pt)-(x^2+pq))^n$, e poscia, assumendo $x^2+y^2+z^2=1$,

$$[t^m|\varphi=\frac{p^{m-n}}{\Pi_m}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m(x^2-1)^n=\frac{(-1)^{n-m}}{\Pi(2n-m)}q^{n-m}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{2n-m}(x^2-1)^n$$

$\left(\text{a causa della simmetria di } \left(\frac{2x}{\sqrt{pq}}+t\sqrt{\frac{p}{q}}-\frac{1}{t}\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^n \text{ rispetto a } t\sqrt{\frac{p}{q}} \text{ e al valor recipr.}\right)$.
A volere che φ sia funzione di x e di y^2+z^2 soddisfa solo $m=n$. Sia $x^2+y^2+z^2$ $=\alpha^2<1$, $\varrho^2=(1-x)^2+y^2+z^2$, $\varphi=\frac{1}{\varrho}$ verificherà la (21), e perciò, ove si cangi x in αx, prenderà la forma $\Sigma\frac{A_n}{\Pi n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n(x^2-1)^n.\alpha^n$. Ma per $x=1$ si à

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{1-\alpha}\,,\quad \frac{1}{\Pi n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n(x^2-1)^n=[h^n|h^n(2+h)^n=2^n\,;$$

dunque $A_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$;

$$X_n(x)=\frac{1}{\Pi n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n,\quad \text{se}\quad \frac{1}{\varrho}=\sum_{n=0}\alpha^n X_n(x)\,.$$

Sia poi $\varrho^2=1-2\alpha u+\alpha^2$, $u=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\psi$, si domanda l'espressione di $X_n(u)$ in funzioni di Laplace. Ponendo $\cos\theta=x$, $\cos\theta'=x'$, $\frac{\sin\theta}{\sin\theta'}e^{-i\psi}=\varepsilon$, avremo

$$u=\frac{1}{2\varepsilon}(1+\varepsilon^2-(x-\varepsilon x')^2)\,;$$

però se riguardiamo ε come costante, $X_n(u)$ sarà funzione intera $^{2n}/$ della sola variabile $x-\varepsilon x'$ e svanirà adunque sotto la operazione $\frac{\partial}{\partial x'}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}$ (per brevità $\partial'+\varepsilon\partial$). Mà $X_n(u)$ ammette lo sviluppo finito $\sum_{\lambda=-n}^{\lambda=n}V_\lambda\,\varepsilon^\lambda$ con le condizioni $\partial'V_\lambda+\partial V_{\lambda-1}=0$. Qui V_{-n} si determina per $\varepsilon=0$, cioè

$$u=\frac{1-x^2}{2\varepsilon}\,,\quad V_{-n}=\left(\frac{1-x^2}{2}\right)^n\frac{\Pi(2n)}{\Pi n\,.\,\Pi n\,.\,2^n}=$$

$$=(-1)^n\partial'^{2n}\left(\frac{1}{\Pi n\,.\,\Pi n}\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n\left(\frac{x'^2-1}{2}\right)^n\right).$$

Indi si ànno da integrare dette $2n$ condizioni (rispetto a x'), ove le costanti d'integra-

zione (possibilmente funzioni di x) vengono determinati dalla supposizione $x=1$, la quale dà $X_n\left(x' - \frac{x'^2-1}{2}\varepsilon\right)$; e finalmente risulta

$$X_n(u) = \frac{(-1)^n}{\varepsilon^n} \frac{\partial'^{2n+1} + (\varepsilon\partial)^{2n+1}}{\partial' + \varepsilon\partial} \left(\frac{1}{\Pi n} \cdot \frac{1}{\Pi n} \left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n \left(\frac{x'^2-1}{2}\right)^n\right).$$

L'espressione pag. 22 lin. 5, ove scrivasi $\varphi(u)$ invece di $\varphi(u\sqrt{2})$, diventa

$$\varphi(z + ir\cos\theta) + \varphi(z - ir\cos\theta) + \varphi(z + ir\sin\theta) + \varphi(z - ir\sin\theta)$$

colla condizione di essere indipendente da θ. Se r sia abbastanza piccola per ammettere lo sviluppo, egli si tratterà della indipendenza di $\cos^{2n}\theta + \sin^{2n}\theta$, la quale non à luogo se non per $n=0$ e $n=1$; cioè φ è alpiù una funzione intera $^3/$.

Parmi convenga ch'io mi scusi per avere omesso la maggior parte delle dimostrazioni nella mia memoria « réduction d'une intégrale multiple ». N'era cagione il temere che Liouville non l'accettasse punto se fosse troppo lunga. Poscia per mancanza di risposta dopo assai di tempo disperando affatto in Liouville, e avendo già prima avuto due rifiuti l'uno da Vienna, l'altro da Berlino, mi risolvei di ritoccar detta memoria per inserirla nel Quarterly Journal allora novellamente fondato, di cui io aveva ricevuto un prospetto invigorante. Là ò dato le dimostrazioni, e spezialmente, ò premesso al teorema fondamentale un lemma, che, particolarizzato per lo spazio, dice che se ciascun'elemento areale di un triangolo sferico venga moltiplicato pel coseno della sua distanza alla sommità, la somma di tutti questi prodotti sarà mezza la base moltiplicata pel seno della altezza. Così particolarizzata la proposizione giova a trovar le derivate di un tetraedro sferico nell'ordine quarto (sopraspazio a quattro dimensioni), Il Quart. J. non dà alcune copie all'autore; altrimenti le avrei dato la miglior redazione.

. . . .

L. Schläfli.

Bern, 4 Oct. 1865.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 7 marzo 1915.

Atti dell'Istituto botanico dell'Università di Pavia. II. Ser., vol. 14°. Milano, 1914. 8°.

Bullettino dell'Orto botanico della R. Università di Napoli. T. I. Napoli, 1903. 8°.

Caldarera Fr. — Corso di meccanica nazionale; vol. I. Preliminari. Cinematica. Studio delle forze. Palermo, 1915. 8°.

Hayata B. — Icones plantarum Formosanarum nec non et contributiones ad floram Formosanam, vol. IV. Taihoku, 1914. 8°.

Knoche W. — Von der Osterinsel. (Sonderabd. aus. « Die Umschau, » XVIII Jahrg). Frankfurt a. M., 1914, fogl.

Lovisato B. — Fibularidi e Clipeastridi miocenici della Sardegna. (Estr. dal « Bollettino della Soc. geolog. italiana », vol. XXXIII). Roma, 1914. 8°.

Meli R. — Cenno sulla qualità della roccia incontrata nel tunnel di Montorso. (Ferr. Roma-Napoli) ed elenco di pubblicazioni geo-paleontologiche sui monti Pontini. Roma, 1915. 8°.

Meli R. — Sulle acque minerali « Santa » e « Giani » dei dintorni di Chianciano, prov. di Siena. s. l. nec d. 8°.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

PERSONALE ACCADEMICO

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 marzo 1915.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Segue in terza pagina.

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 marzo 1915.

F. D' Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica matematica. — *Sulle correnti elettriche in una lamina metallica sotto l'azione di un campo magnetico.* Nota IV del Socio Vito Volterra.

42. Noi passeremo ora à studiare il caso in cui la lamina sia curva e sia soggetta ad un campo magnetico non uniforme. Il procedimento che seguiremo per giungere a questo caso generale, partendo dalle considerazioni già svolte per il caso della lamina piana soggetta ad un campo uniforme, consisterà nel decomporre la lamina in tanti elementi infinitesimi, ciascuno dei quali potremo riguardare come piano e soggetto ad un campo uniforme; ad ognuno di essi applicheremo, quindi, le formule fondamentali che svolgeremo opportunamente con l'impiego delle coordinate curvilinee. Ci sarà allora possibile passare da elemento ad elemento contiguo e considerare delle relazioni valide sull'intera superficie da cui ritrarremo come conseguenza le equazioni differenziali generali e le condizioni al contorno.

43. Consideriamo un elemento piano infinitesimo della lamina, adiacente ad un punto A, e riprendiamo le equazioni (1)

$$j_x = -\mathrm{K}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} - \lambda \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right)$$

$$j_y = -\mathrm{K}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right).$$

Sia ds un elemento lineare passante per A, e dn l'elemento normale, orientati fra loro come è stato detto nel § 1: cioè sia

$$\frac{dx}{ds}=\frac{dy}{dn}\quad,\quad\frac{dy}{ds}=-\frac{dx}{dn}\,.$$

Avremo

$$j_n=j_x\frac{dx}{dn}+j_y\frac{dy}{dn}=-\mathrm{K}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}+\lambda\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial s}\right),$$

ove j_n denota la densità della corrente normale a ds.

Facendo uso di un sistema di coordinate curvilinee u e v, avremo

$$(20)\qquad j_n=-\mathrm{K}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial n}+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial n}+\lambda\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}\right)\right).$$

Ora, se il quadrato dell'elemento lineare è

$$ds^2=\mathrm{E}\,du^2+2\,\mathrm{F}\,du\,dv+\mathrm{G}\,dv^2\,,$$

abbiamo (*)

$$(\alpha)\qquad\left\{\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial n}&=-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\left(\mathrm{F}\frac{\partial u}{\partial s}+\mathrm{G}\frac{\partial v}{\partial s}\right)\\\frac{\partial v}{\partial n}&=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\left(\mathrm{E}\frac{\partial u}{\partial s}+\mathrm{F}\frac{\partial v}{\partial s}\right),\end{aligned}\right.$$

$$(\alpha')\qquad\left\{\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial s}&=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\left(\mathrm{F}\frac{\partial u}{\partial n}+\mathrm{G}\frac{\partial v}{\partial n}\right),\\\frac{\partial v}{\partial s}&=-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\left(\mathrm{E}\frac{\partial u}{\partial n}+\mathrm{F}\frac{\partial v}{\partial n}\right);\end{aligned}\right.$$

e l'equazione (20) si scriverà

$$(20')\qquad j_n=-\mathrm{K}\left[\frac{\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}-\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}+\lambda\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}\right]\frac{\partial u}{\partial s}+$$
$$+\mathrm{K}\left[\frac{\mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}-\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}-\lambda\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}\right]\frac{\partial v}{\partial s}\,.$$

(*) Si intenderà che la rotazione della linea $v=\mathrm{cost}$ (presa nel senso in cui cresce la u) verso la linea $u=\mathrm{cost}$ (presa nel senso in cui cresce la v), attraverso l'angolo minore di π, avvenga nello stesso verso in cui avviene, attraverso l'angolo retto, la rotazione della direzione positiva della linea s verso la direzione positiva della linea n. Supporremo inoltre di prendere qui, e nel seguito, il radicale $\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}$ positivo.

Supponiamo che la linea s coincida colla linea $u =$ cost: allora l'equazione precedente diverrà

$$(21)\qquad j_{n_u} = \mathrm{K}\left[\frac{\mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u} - \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}} - \lambda\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}\right]\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}},$$

ove j_{n_u} è la densità della corrente normale all'elemento della linea $u =$ cost. Analogamente,

$$(21_1)\qquad j_{n_v} = -\mathrm{K}\left[\frac{\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v} - \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}} + \lambda\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}\right]\frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\ (*).$$

44. Tutte le formule precedenti valgono per un elemento piano infinitesimo. Ora, se la *lamina è curva* e si trova in un *campo magnetico costante o variabile*, per ogni elemento infinitesimo della superficie varranno le formule precedenti: solo dovremo supporre che K e $\lambda = \mathrm{tg}\,\beta$ cambino da elemento a elemento; in altri termini, le formule precedenti varranno nel caso più generale di una lamina metallica di forma qualsiasi situata in un campo magnetico qualunque, purchè si considerino K e λ funzioni note di u e v. Per calcolarle, dovremo tener conto delle formole (2) e (3) in cui dovremo sostituire punto per punto ad H la componente della intensità del campo magnetico nel senso normale alla superficie, la quale sarà variabile, sia per la diversa inclinazione della normale rispetto alla direzione del campo magnetico, sia per la variabilità di esso [1].

45. Riprendiamo ora la formula (20′) valida su tutta la superficie, e formiamo

$$(22)\qquad \int_s j_n\,ds = \int_s \left\{ -\mathrm{K}\left[\frac{\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v} - \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}} + \lambda\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}\right]\frac{\partial u}{\partial s} + \right.$$
$$\left. + \mathrm{K}\left[\frac{\mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u} - \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}} - \lambda\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}\right]\frac{\partial v}{\partial s}\right\} ds\,.$$

(*) $\sqrt{\mathrm{G}}$ e $\sqrt{\mathrm{E}}$ debbono essere presi col segno positivo.

[1] Se il campo magnetico non è normale alla superficie, si producono delle azioni secondarie che fanno perdere alla lamina, per rapporto alla sua conducibilità, il carattere della isotropia (cfr. Winkelmann, Handb. der Physik, 2ª ediz., vol. V, pag. 458). Tali azioni costituiscono delle *perturbazioni* al fenomeno, come viene qui studiato. Ci si mette al riparo da queste perturbazioni disponendo la lamina secondo una *superficie di livello* nel campo magnetico, il quale in tal modo resulta normale alla lamina in ogni suo punto.

estesa ad una linea s qualunque chiusa, che non includa alcun elettrodo. Il primo membro sarà nullo e, per conseguenza,

$$(23)\quad -\mathrm{K}\left[\frac{\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}-\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}+\lambda\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}\right]du+\mathrm{K}\left[\frac{\mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}-\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}-\lambda\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}\right]dv$$

dovrà essere un differenziale esatto. Chiamandolo $d\mathrm{W}$ avremo quindi

$$(24)\quad \begin{cases} -\sqrt{\mathrm{G}}\, j_{n_u} = -\mathrm{K}\left[\dfrac{\mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}-\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}-\lambda\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}\right] = -\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial v} \\[2ex] \sqrt{\mathrm{E}}\, j_{n_v} = -\mathrm{K}\left[\dfrac{\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}-\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}+\lambda\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}\right] = \dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial u}\,. \end{cases}$$

da cui segue che V soddisfa all'equazione differenziale

$$(\mathrm{F})\quad \frac{\partial}{\partial u}\left\{\mathrm{K}\left[\frac{\mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}-\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}-\lambda\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}\right]\right\}+ \\ +\frac{\partial}{\partial v}\left\{\mathrm{K}\left[\frac{\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}-\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}+\lambda\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}\right]\right\}=0\,.$$

Risolvendo le equazioni (24) rispetto a $\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}$ si ottiene

$$-\frac{1}{\mathrm{K}(1+\lambda^2)}\left[\frac{\mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial u}-\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}+\lambda\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial v}\right]=\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}$$

$$-\frac{1}{\mathrm{K}(1+\lambda^2)}\left[\frac{\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial v}-\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial u}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}-\lambda\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial u}\right]=-\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}\,,$$

e, per conseguenza, W soddisfa, all'equazione differenziale

$$(\mathrm{G})\quad \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{\mathrm{K}(1+\lambda^2)}\left[\frac{\mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial u}-\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}+\lambda\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial v}\right]\right\}+ \\ +\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{\mathrm{K}(1+\lambda^2)}\left[\frac{\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial v}-\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial u}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}-\lambda\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial u}\right]\right\}=0\,.$$

46. Ritorniamo alla formula (22), e supponiamo che l'integrazione sia estesa ad una linea aperta s. In virtù della (24), avremo

$$\int_s j_n\, ds = \int_s dW = W_2 - W_1 ,$$

denotando con W_1 il valore di W all'origine dell'arco s, e con W_2 il valore all'altro estremo dell'arco stesso.

Ne segue che, *lungo le linee di corrente*, W *sarà costante*; e quindi, *lungo tutte le porzioni libere ed isolate del contorno*, W *sarà costante*, mentre *lungo tutti gli elettrodi di resistenza trascurabile*, V *sarà costante*.

Se supponiamo che non esistano forze elettromotrici interne nella lamina, V *sarà una funzione monodroma*, mentre W *resulterà polidroma percorrendo un ciclo chiuso qualsiasi che racchiude* (¹) *degli elettrodi da cui entra nella lamina una quantità totale di elettricità diversa da zero*.

Se la lamina è semplicemente connessa e tutti gli elettrodi sono al contorno, W sarà evidentemente monodroma.

Alla funzione W daremo il nome di *funzione delle correnti*.

47. L'espressione di j_n [formula (20′)] può trasformarsi in più modi. Valendosi infatti delle (24), potremo scrivere

$$(20'') \qquad j_n = \frac{\partial W}{\partial s} ,$$

e, applicando invece le (α'), avremo

$$(20''') \qquad j_n = -K \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial u} - \frac{\lambda \left(E \frac{\partial V}{\partial v} - F \frac{\partial V}{\partial u} \right)}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \frac{\partial u}{\partial n} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\lambda \left(G \frac{\partial V}{\partial u} - F \frac{\partial V}{\partial v} \right)}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \frac{\partial v}{\partial n} \right\} .$$

Finalmente, sviluppando la (20″), cioè

$$j_n = \frac{\partial W}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial W}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s} ,$$

e tenendo conto delle (α'), si trova

$$(20^{\text{IV}}) \quad j_n = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \left(F \frac{\partial W}{\partial u} - E \frac{\partial W}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial n} + \left(G \frac{\partial W}{\partial u} - F \frac{\partial W}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial n} \right\} .$$

(¹) Alla parola *racchiude degli elettrodi* bisogna dare un senso generale intendendo tutti gli elettrodi che giacciono da una stessa parte della linea chiusa.

Le formule (21) e (21_1) possono ancora scriversi, tenendo presente le (24),

$$(21') \qquad j_{n_u} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial W}{\partial v} \quad , \quad j_{n_v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial W}{\partial u} .$$

Chiamiamo j_u e j_v le proiezioni ortogonali della corrente nelle direzioni delle linee $u = \text{cost}$ e $v = \text{cost}$; se ne otterranno subito i valori facendo nella (20‴) coincidere successivamente n con le direzioni delle linee $u = \text{cost}$ e $v = \text{cost}$, ed avremo

$$(25) \qquad \begin{cases} j_u = -\dfrac{K}{\sqrt{G}}\left(\dfrac{\partial V}{\partial v} + \lambda \dfrac{G \dfrac{\partial V}{\partial u} - F \dfrac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) \\[2ex] j_v = -\dfrac{K}{\sqrt{E}}\left(\dfrac{\partial V}{\partial u} - \lambda \dfrac{E \dfrac{\partial V}{\partial v} - F \dfrac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}\right), \end{cases}$$

e, mediante W, le stesse quantità si esprimeranno colle formule:

$$(25') \qquad j_u = \frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{G \dfrac{\partial W}{\partial u} - F \dfrac{\partial W}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right), \quad j_v = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(\frac{F \dfrac{\partial W}{\partial u} - E \dfrac{\partial W}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right).$$

Decomponiamo finalmente la corrente secondo le direzioni delle linee $u = \text{cost}$ e $v = \text{cost}$: troveremo, come componenti,

$$(26) \qquad \begin{cases} i_u = -\dfrac{K\sqrt{G}}{EG - F^2}\left(E \dfrac{\partial V}{\partial v} - F \dfrac{\partial V}{\partial u} + \lambda \sqrt{EG - F^2} \dfrac{\partial V}{\partial u}\right) \\[2ex] i_v = -\dfrac{K\sqrt{E}}{EG - F^2}\left(G \dfrac{\partial V}{\partial u} - F \dfrac{\partial V}{\partial v} - \lambda \sqrt{EG - F^2} \dfrac{\partial V}{\partial v}\right) \end{cases}$$

che, espressi mediante W, divengono

$$(26') \qquad i_u = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial W}{\partial u} \quad , \quad i_v = -\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial W}{\partial v} .$$

Da qualunque gruppo di queste formule si ricava il quadrato della intensità della corrente che viene espresso da

$$(27) \qquad \begin{cases} j^2 = K^2(1 + \lambda^2)\left(\dfrac{E\left(\dfrac{\partial V}{\partial v}\right)^2 - 2F \dfrac{\partial V}{\partial u}\dfrac{\partial V}{\partial v} + G\left(\dfrac{\partial V}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2}\right) \\[2ex] j^2 = \dfrac{E\left(\dfrac{\partial W}{\partial v}\right)^2 - 2F \dfrac{\partial W}{\partial u}\dfrac{\partial W}{\partial v} + G\left(\dfrac{\partial W}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2} . \end{cases}$$

Queste formole si possono scrivere nel modo seguente, impiegando il simbolo del parametro differenziale del primo ordine,

$$(27') \qquad \begin{cases} j^2 = K^2(1+\lambda^2)\,\Delta_1 V \\ j^2 = \Delta_1 W\,. \end{cases}$$

48. Le espressioni ottenute per j_n ci forniscono sotto altre forme la condizione $j_n = 0$, lungo le porzioni libere ed isolate del contorno. Così, per esempio, servendoci della formula (20‴), potremo scrivere la condizione stessa mediante la equazione

$$\left(\frac{\partial V}{\partial u} - \lambda \frac{E\frac{\partial V}{\partial v} - F\frac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\frac{\partial u}{\partial n} + \left(\frac{\partial V}{\partial v} + \lambda \frac{G\frac{\partial V}{\partial u} - F\frac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\frac{\partial v}{\partial n} = 0\,.$$

49. Supponiamo, adesso, che la lamina sia omogenea, e manchi il campo magnetico; avremo $K = \text{cost}$ e $\lambda = 0$: quindi le equazioni (F) e (G) diverranno

$$(\beta) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\left\{\dfrac{G\frac{\partial V}{\partial u} - F\frac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right\} + \dfrac{\partial}{\partial v}\left\{\dfrac{E\frac{\partial V}{\partial v} - F\frac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right\} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial u}\left\{\dfrac{G\frac{\partial W}{\partial u} - F\frac{\partial W}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right\} + \dfrac{\partial}{\partial v}\left\{\dfrac{E\frac{\partial W}{\partial v} - F\frac{\partial W}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right\} = 0 \end{cases}$$

e potranno anche scriversi, facendo uso del simbolo del parametro differenziale del 2° ordine

$$(\beta') \qquad \Delta_2 V = 0 \qquad \Delta_2 W = 0\,.$$

V e W saranno quindi, come doveva prevedersi, due funzioni armoniche sulla superficie. Inoltre le (24) diverranno

$$(\gamma) \qquad \frac{G\frac{\partial V}{\partial u} - F\frac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{\partial \frac{W}{K}}{\partial v}\,, \qquad \frac{E\frac{\partial V}{\partial v} - F\frac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}} = -\frac{\partial \frac{W}{K}}{\partial u}\,.$$

Le condizioni (β') sono le condizioni necessarie e sufficienti affinchè V e W siano funzioni armoniche sulla superficie; le (γ), affinchè

$$V + i\frac{W}{K}$$

sia una variabile complessa sulla superficie [1].

[1] Cfr. Beltrami, *Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque.* Opere, vol. I, pag. 318.

Ora, allorchè $K\lambda$ non è costante, le equazioni (F) e (G) differiscono essenzialmente dalle (β), e perciò V e W non sono funzioni armoniche sulla superficie.

Invece, nel caso delle lamine piane omogenee in un campo magnetico costante, il potenziale V si conserva armonico, anche quando agisce il campo magnetico (cfr. § 1); soltanto cambia la condizione a cui deve soddisfare al contorno nelle regioni di esso libere ed isolate. Dunque si manifesta una differenza sostanziale, nel caso che adesso trattiamo, rispetto ai precedenti: cioè, l'azione del campo magnetico, non solo muta le condizioni al contorno a cui deve verificare il potenziale, ove il contorno stesso è libero ed isolato, ma altera intimamente la natura del potenziale in tutta l'area occupata dalla lamina.

È facile stabilire, nel caso in cui K e λ sono costanti, la relazione che passa tra la funzione delle correnti e la funzione fondamentale U (§ 14).

Avremo infatti

$$W = KU',$$

ove U' è la funzione armonica coniugata della funzione U.

50. Riassumendo i resultati ottenuti, possiamo dire che, allorquando si passa dalla lamina piana alla lamina curva omogenea o non omogenea in un campo magnetico costante o variabile, si passa (dal punto di vista analitico) dalla equazione differenziale di Laplace a nuove equazioni differenziali di carattere diverso [le equazioni (F) e (G)]. Delle quattro funzioni (*potenziale*, *funzione fondamentale* e loro *coniugate*), due sole si conservano e cioè il *potenziale* e quella che abbiamo chiamato la *funzione delle correnti*. L'una e l'altra di queste perdono però il carattere di funzioni armoniche sulla superficie occupata dalla lamina: ed anzi è questa la ragione per la quale le altre due funzioni cessano di sussistere, in quanto che il potenziale e la funzione delle correnti non essendo armoniche, cioè non avendo il secondo parametro differenziale nullo, ma soddisfacendo invece alle equazioni (F) e (G), non possono avere funzioni coniugate nel senso della teoria delle funzioni di variabili complesse sopra una superficie.

Da tutto ciò discende che il principio degli elettrodi puntiformi al contorno (§ 23) non sussiste più nel caso attuale; come pure non vale più il principio che il potenziale rimane inalterato nel caso di lamine più volte connesse, allorchè le linee che formano il contorno sono elettrodi di resistenza trascurabile, su cui il valore del potenziale si mantiene inalterabile (§ 30).

51. Riconosciute così le essenziali diversità analitiche che si presentano secondochè si tratta del caso precedentemente svolto della lamina piana uniforme nel campo magnetico costante, o del caso generale che adesso si esamina (sebbene quest'ultimo si sia derivato dal precedente), passiamo a

mostrare l'esistenza d'un principio fondamentale di carattere invariantivo: *il principio generale di reciprocità* (vedi §§ 11, 12, 13, 28).

Dalle (20'), denotando con V_1 una funzione qualsiasi, e rappresentando con S il contorno (formato da una o più linee) di una parte σ della lamina, ove V e V_1 sono regolari, segue

$$(28)\qquad \int_S V_1 j_n\, dS = \int_S \Big\{ -K V_1 \left[\frac{E\frac{\partial V}{\partial v} - F\frac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}} + \lambda \frac{\partial V}{\partial u} \right] \frac{\partial u}{\partial s} +$$

$$+ K V_1 \left[\frac{G\frac{\partial V}{\partial u} - F\frac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}} - \lambda \frac{\partial V}{\partial v} \right] \frac{\partial v}{\partial s} \Big\} dS$$

$$= \int_\sigma \frac{K}{\sqrt{EG-F^2}} \Big\{ \frac{G\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial V_1}{\partial u} - F\left(\frac{\partial V_1}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial V_1}{\partial v}\right) + E\frac{\partial V}{\partial v}\frac{\partial V_1}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}} +$$

$$+ \lambda\left(\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial V_1}{\partial v} - \frac{\partial V_1}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial v}\right)\Big\} d\sigma ;$$

ove si è supposto di prendere n diretto verso l'interno di σ, e quindi si è fissata implicitamente la direzione s.

Denotiamo con $\varDelta_1 V V_1$ il *parametro differenziale misto* o *intermedio* delle funzioni V e V_1, cioè

$$\varDelta_1 V V_1 = \frac{G\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial V_1}{\partial u} - F\left(\frac{\partial V_1}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial V_1}{\partial v}\right) + E\frac{\partial V}{\partial v}\frac{\partial V_1}{\partial v}}{EG-F^2},$$

e scriviamo il determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial u}, & \frac{\partial V}{\partial v} \\ \frac{\partial V_1}{\partial u}, & \frac{\partial V_1}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{d(V, V_1)}{d(u, v)}.$$

Si riconosce immediatamente che $\varDelta_1 V V_1$ è simmetrico rispetto a V e V_1, mentre il determinante $\frac{d(V,V_1)}{d(u,v)}$ cambia segno scambiando V con V_1.

La equazione (28) potrà scriversi

$$(H)\qquad \int_S V_1 j_n\, dS = \int_\sigma K\left(\varDelta_1 V V_1 + \frac{\lambda}{\sqrt{EG-F^2}} \frac{d(V, V_1)}{d(u, v)}\right) d\sigma .$$

52. Supponiamo, ora, che V_1 corrisponda ad un potenziale elettrico di correnti distribuite nella lamina quando il *campo magnetico è invertito*. In tale ipotesi dovremo mantenere inalterato K in ogni punto, e cambiare segno a λ.

Se in questo caso denotiamo con j_{1n} la densità della corrente normale ad S, e vogliamo stabilire la formula corrispondente alla precedente, dovremo scambiare nel secondo membro V con V_1, il che non altera il parametro simmetrico $\Delta_1 V V_1$, ma cambia segno al determinante $\frac{d(V,V_1)}{d(u,v)}$; però il termine corrispondente è moltiplicato per λ, il quale muta anch'esso segno per la inversione del campo, quindi i due cambiamenti di segno manterranno inalterato anche il secondo termine, onde avremo

$$(H') \qquad \int_S V j_{1n}\, dS = \int_\sigma K \left(\Delta_1 V V_1 + \frac{\lambda}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{d(V,V_1)}{d(u,v)} \right) d\sigma,$$

e quindi

$$(L) \qquad \int_S (V j_{1n} - V_1 j_n)\, dS = 0 .$$

Se confrontiamo la formula (D) con la formula (L), riconosciamo che da questa possono ricavarsi le stesse conseguenze che abbiamo dedotto da quella, ed in particolare i *teoremi di reciprocità*.

53. Per esempio, supponiamo che, con il campo magnetico diretto, la corrente di intensità J entri da un elettrodo puntiforme A ed esca da un elettrodo B; e con il campo magnetico invertito la corrente J_1 entri da A_1 ed esca da B_1. Prendiamo S formato dal contorno s della lamina e da quattro circonferenze geodetiche s_a, s_b, s_{a_1}, s_{b_1} aventi i centri in A, B, A_1 e B_1. Noi porremo la condizione che, almeno quando esse sono abbastanza piccole, prendendo n dall'interno all'esterno delle circonferenze stesse, j_n sia positivo su s_a, negativo su s_b e j_{1n} sia positivo su s_{a_1} e negativo su s_{b_1}; mentre V e V_1 siano finiti o divengano infiniti di ordine minore ad un numero più piccolo di 1.

Poichè sopra s, j_n e j_{1n} sono nulli, avremo

$$\int_{s_a} j_{1n} V ds_a + \int_{s_b} j_{1n} V ds_b + \int_{s_{a_1}} j_{1n} V ds_{a_1} + \int_{s_{b_1}} j_{1n} V ds_{b_1}$$
$$- \int_{s_a} j_n V_1 ds_a - \int_{s_b} j_n V_1 ds_b - \int_{s_{a_1}} j_n V_1 ds_a - \int_{s_{b_1}} j_n V_1 ds_{b_1} = 0 ,$$

da cui si ricava, passando al limite col far impiccolire indefinitamente i quattro circoli geodetici,

$$J_1(V_{A_1} - V_{B_1}) = J(V_{1A} - V_{1B}),$$

e quindi, se $J_1 = J$,

$$V_{A_1} - V_{B_1} = V_{1A} - V_{1B}.$$

Nello stesso modo, *tutti i teoremi di reciprocità* (relativi ad elettrodi di aree finite interni e di resistenze trascurabili o situati al contorno e pure di resistenze trascurabili) *si estendono, dal caso della lamina piana situata in un campo uniforme, al caso di una lamina curva in un campo uniforme o non uniforme.*

54. L'equazione (L) può scriversi ancora,

$$\int_S \left(V \frac{dW_1}{ds} - V_1 \frac{dW}{ds} \right) dS = 0 :$$

ossia $VdW_1 - V_1 dW$ *sarà un differenziale esatto*, e questo sarà un altro modo di esprimere il teorema di reciprocità.

55. Poniamo, nella (H), $V_1 = V$, avremo allora

$$\text{(M)} \qquad \int_S V j_n \, dS = \int_\sigma K \Delta_1 V d\sigma ,$$

giacchè il determinante si annulla, ed il parametro misto diviene quello del primo ordine.

La stessa formula può scriversi

$$\text{(M')} \qquad \int_S V \frac{dW}{ds} dS = \int_\sigma K \Delta_1 V d\sigma ,$$

o anche

$$\text{(M'')} \qquad \int_S V j_n \, dS = \int_\sigma \frac{1}{K(1+\lambda^2)} j^2 \, d\sigma ,$$

oppure

$$\text{(M''')} \qquad \int_S V j_n \, dS = \int_\sigma \frac{1}{K(1+\lambda^2)} \Delta_1 W d\sigma .$$

I primi membri delle precedenti equazioni misurano la quantità di energia che penetra nell'area σ attraverso il contorno, nell'unità di tempo. Se quindi prendiamo σ infinitamente piccolo, sarà

$$\frac{1}{K(1+\lambda^2)} j^2 \, d\sigma$$

la quantità di calore Joule che si sviluppa in ogni elemento superficiale della lamina.

Dalla (M') poi segue che, se V è nullo in una certa porzione del contorno S, e nelle rimanenti parti W è costante. V è nulla entro tutta l'area σ. Di qui resulta che, se certe porzioni del contorno sono degli elettrodi di resistenza trascurabile ove è noto il valore del potenziale o la intensità della corrente che penetra nella lamina, e le rimanenti sono libere ed isolate, la distribuzione delle correnti sarà determinata (cfr. §§ 3 e 4).

Matematica. — *Sulla risoluzione di certe equazioni integrali di Volterra.* Nota del Corrisp. O. TEDONE.

I.

Il problema della integrazione indefinita dell'equazione

$$(1) \qquad \sum_1^p {}_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_i^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + k\varphi = 0$$

col metodo delle caratteristiche di Riemann-Volterra, conduce, nel modo più naturale, a porre la quistione di determinare la funzione $\varphi(\tau)$ dall'equazione integrale

$$(2) \qquad \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,(t-\tau)^n\, \mathrm{I}_{n+\lambda}\left[\sqrt{k}\,(t-\tau)\right] d\tau = \Phi(t)$$

in cui $\Phi(t)$ è una funzione nota tale che l'equazione integrale stessa sia possibile, $n = \frac{p-3}{2}$ e, per ogni valore di ν che non sia intero negativo,

$$\mathrm{I}_\nu(z) = \sum_0^\infty {}_s \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2s}}{s!\,\Pi(\nu+s)}$$

con $\Pi(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha dx$, per $\alpha > -1$, e $\Pi(\alpha+1) = (\alpha+1)\Pi(\alpha)$.

Nell'equazione (2), inoltre, λ non risulta, *a priori*, assoggettato ad alcuna limitazione, e potrebbe, a rigore, essere un numero qualunque; ma, per i bisogni della integrazione della (1), vien naturale ed è più che sufficiente il supporlo intero. Infine, lasciando da parte il caso speciale di $p=1$, il numero n, appena è $p>2$, è sempre positivo ed eguale ad un numero intero, ovvero alla metà di un intero dispari, mentre, per $p=2$, è $n = -\frac{1}{2}$.

In alcune Note, precedentemente pubblicate in questi stessi Rendiconti, abbiamo avuto occasione di risolvere l'equazione (2) in numerosi casi, avendo di mira, principalmente, la integrazione della (1). E nelle ricerche contenute nelle citate Note, il caso di $p=2$, ($n=-\frac{1}{2}$) si presentava con caratteri d'eccezione e di maggiori difficoltà, mentre, d'altra parte, dà luogo ad equazioni integrali notevolissime come la seguente:

$$(2') \qquad \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) \frac{\mathrm{Sen}\left[\sqrt{k}\,(t-\tau)\right]}{t-\tau}\, d\tau = \Phi(t),$$

dove Sen è, al solito, il simbolo di seno iperbolico, e che si ottiene dalla (2) per $n = -\frac{1}{2}$ e $\lambda = 0$. Ci siamo perciò indotti a riprendere e ad approfondire lo studio dell'equazione (2), imponendoci, *a priori*, le sole limitazioni che λ sia un numero intero e che n sia un numero intero, ovvero la metà di un intero dispari, positivo, o negativo; e con l'altre limitazioni, naturali, che, per n intero, sia $n + \lambda \geq 0$ e che, in ogni caso,

$$(t-\tau)^n \, I_{n+\lambda}\left[\sqrt{k}\,(t-\tau)\right]$$

sia finito per $t = \tau$. Nella presente Nota riportiamo quelli dei risultati ottenuti che ci sono parsi non privi di interesse. Ma dobbiamo subito avvertire che i ripetuti sforzi fatti per ottenere, con un procedimento finito, la soluzione della (2′) e di quelle altre equazioni che alla (2′) si possono ricondurre, sono riusciti sempre vani. D'altra parte la teoria generale delle equazioni integrali non sembra sufficientemente avanzata, così da poterci dare risposta alla domanda se un tale procedimento finito, nel caso della (2′), sia, o no, possibile.

Per maggiore semplicità supporremo, nel sèguito, sempre $k = 1$.

II.

Formole fondamentali.

1. Sono notissime e, del resto, si dimostrano con tutta facilità, le formole fondamentali seguenti della teoria delle funzioni di Bessel:

$$\text{(A)} \qquad \frac{d}{dz}\left[z^{\nu} I_{\nu}(z)\right] = z^{\nu} I_{\nu-1}(z) \quad , \quad \frac{d}{dz}\left[z^{-\nu} I_{\nu}(z)\right] = z^{-\nu} I_{\nu+1}(z)$$

le quali valgono per ogni valore di ν, diverso da zero, anche negativo, purchè non sia intero negativo. Per $\nu = 0$, le (A) sono sostituite dall'unica relazione

$$\text{(A′)} \qquad \frac{d\,I_0(z)}{dz} = I_1(z) \,.$$

Le (A) dànno luogo immediatamente alle altre:

$$\text{(A}_1\text{)} \qquad I'_{\nu}(z) + \frac{\nu}{z} I_{\nu}(z) = I_{\nu-1}(z) \quad , \quad I'_{\nu}(z) - \frac{\nu}{z} I_{\nu}(z) = I_{\nu+1}(z) \,,$$

nelle quali gli accenti indicano delle derivate, e queste ultime, a loro volta, per somma e per differenza, dànno luogo alle:

$$\text{(A}_2\text{)} \qquad 2 I'_{\nu}(z) = I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) \quad , \quad \frac{2\nu}{z} I_{\nu}(z) = I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) \,.$$

Dalle (A) discendono pure le altre formole notevolissime:

$$(A_3)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{d^2}{dz^2}-1\right)[z^{\nu}\,I_{\nu}(z)] = (2\nu-1)\,z^{\nu-1}\,I_{\nu-1}(z)\,, \\ \left(\dfrac{d^2}{dz^2}-1\right)[z^{-\nu}\,I_{\nu}(z)] = -(2\nu+1)\,z^{-(\nu+1)}\,I_{\nu+1}(z)\,; \end{cases}$$

e, da queste, quando ν è un intero positivo, si ottiene:

$$(A_4)\qquad \begin{cases} I_0(z) = \dfrac{1}{1.3.5\ldots(2\nu-1)}\left(\dfrac{d^2}{dz^2}-1\right)^{\nu}[z^{\nu}\,I_{\nu}(z)]\,, \\ z^{-\nu}\,I_{\nu}(z) = \dfrac{(-1)^{\nu}}{1.3.5\ldots(2\nu-1)}\left(\dfrac{d^2}{dz^2}-1\right)^{\nu} I_0(z)\,. \end{cases}$$

2. Alle precedenti formole faremo ora seguire un'altra serie di formole che, in certo modo, possono considerarsi come una generalizzazione delle prime. Poniamo

$$(3)\qquad \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,(t-\tau)^n\,I_m(t-\tau)\,d\tau = \Phi_{n,m}(t)\,,$$

e supponiamo che, se m è intero, sia anche $m \geq 0$. Derivando l'equazione precedente, rispetto a t, nell'ipotesi, dapprima, che $m+n>0$, in due modi diversi, considerando $(t-\tau)^n\,I_m(t-\tau)$, una volta come prodotto di $(t-\tau)^{n-m}$ e di $(t-\tau)^m\,I_m(t-\tau)$, un'altra volta come prodotto di $(t-\tau)^{n+m}$ e di $(t-\tau)^{-m}\,I_m(t-\tau)$, e tenendo conto della (A), si trova:

$$(B)\qquad \begin{cases} \Phi'_{n,m} = (n-m)\,\Phi_{n-1,m} + \Phi_{n,m-1}\,, \\ \Phi'_{n,m} = (n+m)\,\Phi_{n-1,m} + \Phi_{n,m+1}\,; \end{cases}$$

e queste formole sono equivalenti alle altre:

$$(B_1)\qquad \begin{cases} (n+m)\,\Phi_{n,m-1} - 2m\,\Phi'_{n,m} - (n-m)\,\Phi_{n,m+1} = 0\,, \\ 2m\,\Phi_{n-1,m} = \Phi_{n,m-1} - \Phi_{n,m+1}\,. \end{cases}$$

Le (B) restano valide anche nell'ipotesi di $n=m$; nella quale ipotesi la prima delle (B), o delle (B_1), si riduce semplicemente a

$$(B')\qquad \Phi'_{n,n} = \Phi_{n,n-1}\,.$$

Se poi è $n+m=0$, abbiamo

$$(B'')\qquad \Phi'_{-n,n} = \Phi_{-n,n+1} + \frac{1}{2^n\,\Pi(n)}\,\varphi(t)\,.$$

Citiamo ancora le formole seguenti, che sono analoghe alle (A_3):

$$(B_2)\quad \begin{cases} \left(\frac{d^2}{dt^2}-1\right)\Phi_{n,n}(t)=(2n-1)\,\Phi_{n-1,n-1}(t)\,, & n>0\,. \\ \left(\frac{d^2}{dt^2}-1\right)\Phi_{-n,n}(t)=-(2n+1)\,\Phi_{-(n+1),n+1}(t)+\frac{1}{2^n\,\Pi(n)}\,\varphi'(t)\,. \end{cases}$$

3. Nel caso in cui gli indici delle funzioni di Bessel sono interi positivi, o nulli, accanto alle relazioni (A), (A_1), (A_2), (A_3) fra queste funzioni e le loro derivate, ed alle quali si può dare il nome di formole differenziali, altre ne sussistono alle quali si potrebbe dare, ci pare, molto opportunamente, il nome di formole integrali e che si possono ottenere combinando le citate formole differenziali con l'identità fondamentale

$$(C)\qquad I_1(x_1-x_0)=\frac{\partial}{\partial x_1}I_0(x_1-x_0)=\int_{x_0}^{x_1}I_0(x_1-x)\,\frac{I_1(x-x_0)}{x-x_0}\,dx$$

da noi dimostrata (¹). Di tutte le formole che così potrebbero ricavarsi, noi terremo conto soltanto delle più importanti e che si mostreranno utili a raggiungere lo scopo propostoci. Derivando successivamente la (C), rispetto ad x_1, e tenendo conto della (A_2), si trova

$$(C_1)\qquad I_n(x_1-x_0)=2I'_{n-1}(x_1-x_0)-I_{n-1}(x_1-x_0)= \\ =\int_{x_0}^{x_1}I_{n-1}(x_1-x)\,\frac{I_1(x-x_0)}{x-x_0}\,dx\,;$$

e da questa, ancora con l'aiuto delle stesse relazioni (A_2), discende

$$(C_2)\qquad n\,\frac{I_n(x_1-x_0)}{x_1-x_0}=2(n-1)\,\frac{\partial}{\partial x_1}\,\frac{I_{n-1}(x_1-x_0)}{x_1-x_0}-(n-2)\,\frac{I_{n-2}(x_1-x_0)}{x_1-x}= \\ =(n-1)\int_{x_0}^{x_1}\frac{I_{n-1}(x_1-x)}{x_1-x}\,\frac{I_1(x-x_0)}{x-x_0}\,dx\,.$$

Notiamo pure la formola

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-1\right)\int_{x_0}^{x_1}\frac{I_n(x_1-x)}{(x_1-x)^n}\,\frac{I_1(x-x_0)}{x-x_0}\,dx= \\ =\frac{1}{2^n\,n!}\,\frac{\partial}{\partial x_1}\,\frac{I_1(x_1-x_0)}{x_1-x_0}-(2n+1)\int_{x_0}^{x_1}\frac{I_{n+1}(x_1-x)}{(x_1-x)^{n+1}}\,\frac{I_1(x-x_0)}{x-x_0}\,dx\,.$$

(¹) *Sulla integr. dell'equaz. delle onde smorzate* ecc. Questi Rendiconti, vol. XXII, serie 5ª, 1° sem.

Da essa, col metodo dell'induzione completa, ricaviamo la formola generale seguente:

$$(C_3)\qquad \int_{x_0}^{x_1} \frac{I_n(x_1-x)}{(x_1-x)^n}\,\frac{I_1(x-x_0)}{x-x_0}\,dx =$$
$$= \sum_{0}^{n-1}{}'_i \frac{(-1)^i}{2^{n-i-1}(n-i-1)!\,(2n-1)\,(2n-3)\dots(2n-2i-1)}\times$$
$$\times\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-1\right)^i \frac{\partial}{\partial x_1}\,\frac{I_1(x_1-x_0)}{x_1-x_0}\,,$$

nella quale l'accento sulla sommatoria sta ad indicare che l'ultimo termine, in essa, dev'essere ancora moltiplicato per due. Dalla (C_3), con l'aiuto della seconda delle (A_3), si deduce anche l'altra formola

$$(C_4)\qquad \int_{x_0}^{x_1} \frac{I_n(x_1-x)}{(x_1-x)^n}\,\frac{I_1(x-x_0)}{x-x_0}\,dx =$$
$$= \sum_{1}^{n}{}'_i \frac{1\,.\,3\,.\,5\dots(2i-1)}{2^{n-i}(n-i)!\,(2n-1)\,(2n-3)\dots(2n-2i+1)}\,\frac{\partial}{\partial x_1}\,\frac{I_i(x_1-x_0)}{(x_1-x_0)^i}\,.$$

4. Si possono costruire formole integrali anche tra le $\Phi_{n,m}$. Qui ricorderemo soltanto la formola seguente, da noi dimostrata in un'altra Nota [1],

$$(D)\qquad \Phi_{0,n-1}(t) = 2\Phi'_{0,n}(t) - \int_{t_0}^{t} \Phi_{0,n}(\tau)\,\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau\,,$$

e la sua inversa

$$(D_1)\qquad \Phi_{0,n}(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi_{0,n-1}(\tau)\,\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau\,.$$

III.

Studio, per $n \geq m$, dell'equazione

$$(4)\qquad \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,(t-\tau)^n\,I_m(t-\tau)\,d\tau = \Phi_{n,m}(t)\,.$$

1. Nella ipotesi che sia $n \geq m$, la equazione (4) si risolve, tanto nel caso in cui n ed m sieno interi, quanto in quello in cui n ed m sieno entrambi metà di numeri dispari.

Supponiamo dapprima n ed m interi e che quindi sia anche $m \geq 0$. Se $m = n$, l'equazione (4) è stata già da noi risoluta nella Nota ultimamente citata. Da $\Phi_{n,n}$ si ricava $\Phi_{0,0}$ con la formola

$$(5)\quad \Phi_{0,0} = \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,I_0(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{1\,.\,3\,.\,5\dots(2n-1)}\left(\frac{d^2}{dt^2}-1\right)^n \Phi_{n,n}$$

[1] *Su l'inversione di alcuni integrali* ecc. Questi Rend.., vol. XXIII, serie 5ª, 1° sem.

e, trovata $\Phi_{0,0}$, si ha poi subito

$$(5') \qquad \varphi(t) = \Phi'_{0,0}(t) - \int_{t_0}^{t} \Phi_{0,0}(\tau) \frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau} d\tau .$$

Ciò posto, è chiaro, per quello che ora abbiamo ricordato, che l'equazione (4) sarà risoluta se avremo il modo di calcolare $\Phi_{n,n}$ per mezzo di $\Phi_{n,m}$. A questo scopo notiamo che, supposto noto $\Phi_{n,n}$, dalla (B′) abbiamo $\Phi_{n,n-1} = \Phi'_{n,n}$, mentre la prima delle (B_1), ponendo, per m, in questa ultima formola, successivamente, $n-1, n-2, \ldots, m+1$, ci dà, nello stesso ordine, $\Phi_{n,n-2}, \Phi_{n,n-3}, \ldots, \Phi_{n,m}$. $\Phi_{n,m}$ si può quindi esprimere per mezzo di $\Phi_{n,n}$ con l'aiuto di un'espressione differenziale, lineare, a coefficienti costanti. Ne viene che, inversamente, dato $\Phi_{n,m}$, si otterrà $\Phi_{n,n}$ risolvendo un'equazione differenziale, lineare, a coefficienti costanti, con termine noto. Il problema è determinato, potendosi ricavare dalla definizione stessa di $\Phi_{n,n}$ i valori che questa funzione e le sue derivate assumono per $t = t_0$. La quistione che ci siamo proposta, si può dunque considerare risoluta.

Si tratti, per es., di risolvere l'equazione

$$\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,(t-\tau)^2\, I_0(t-\tau)\, d\tau = \Phi_{2,0}(t) .$$

Abbiamo allora

$$\Phi_{2,1} = \Phi'_{2,2} \quad , \quad 3\Phi_{2,0} = 2\Phi'_{2,1} + \Phi_{22} = 2\Phi''_{2,2} + \Phi_{22} ,$$

e perciò $\Phi_{2,2}$ è la soluzione dell'equazione

$$\Phi''_{2,2} + \frac{1}{2}\Phi_{2,2} = \frac{3}{2}\Phi_{2,0}$$

che si annulla, insieme con la sua derivata, per $t = t_0$: ossia è

$$\Phi_{2,2} = \frac{3}{\sqrt{2}} \int_{t_0}^{t} \Phi_{2,0}(\tau) \operatorname{sen} \frac{t-\tau}{\sqrt{2}} d\tau .$$

Da $\Phi_{2,2}$ si ricava poi la funzione $\varphi(t)$, con l'aiuto delle (5) e (5′).

2. Lo stesso metodo precedente vale a risolvere l'equazione (3) anche nel caso in cui m ed n sono entrambi metà di numeri dispari, nella ipotesi, sempre, di $n \geq m$.

Se infatti è $m = n$, come abbiamo dimostrato nella stessa Nota ultimamente citata, è

$$(6) \qquad \varphi(t) = \frac{1}{2 \cdot 4 \ldots (2n-1)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{d^2}{dt^2} - 1\right)^{n+\frac{1}{2}} \Phi_{n,n}(t) .$$

Se poi, invece, $n > m$, come precedentemente, si determinerà, dapprima, $\Phi_{n,n}$ per mezzo di $\Phi_{n,m}$, e quindi la funzione $\varphi(t)$ con l'aiuto della (6). Nel caso, anzi, che ora consideriamo può darsi ad m anche un valore negativo purchè, naturalmente, sia $n + m \geq 0$, chè il procedimento non soffre eccezioni.

Si tratti, per un es., di risolvere l'equazione

$$\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,(t-\tau)^{\frac{5}{2}}\,\mathrm{I}_{\frac{1}{2}}(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,(t-\tau)^2\,\mathrm{Sen}\,(t-\tau)\,d\tau = \Phi_{\frac{5}{2},\frac{1}{2}}\,.$$

In questo caso $\Phi_{\frac{5}{2},\frac{5}{2}}$ è la soluzione dell'equazione

$$\Phi''_{\frac{5}{2},\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}\Phi_{\frac{5}{2},\frac{5}{2}} = \frac{4}{3}\Phi_{\frac{5}{2},\frac{1}{2}}$$

che si annulla, insieme con la derivata, per $t = t_0$: ed è perciò

$$\Phi_{\frac{5}{2},\frac{5}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \int_{t_0}^{t} \Phi_{\frac{5}{2},\frac{1}{2}}(\tau)\,\mathrm{sen}\,\frac{t-\tau}{\sqrt{3}}\,d\tau\,,$$

Dall'espressione precedente di $\Phi_{\frac{5}{2},\frac{5}{2}}$ ricaviamo poi la funzione $\varphi(t)$ con l'aiuto della (6).

IV.

Risoluzione dell'equazione (4) per n ed m interi e $0 \leq n < m$.

1. Quando $n = 0$, ed m è un intero positivo, l'equazione (4) è stata da noi risoluta nell'ultima Nota più volte citata, con l'aiuto della (D). Possiamo dunque lasciare da parte questo caso, e supporre senz'altro che sia $n > 0$. Vogliamo però, prima, notare che, se oltre di $\Phi_{n,m}$, fosse nota $\Phi_{n,m-1}$, ovvero $\Phi_{n,m+1}$, la prima delle (B_1) ci darebbe il modo di calcolare tutte le Φ col primo indice eguale ad n. Ed allora, com'è stato osservato in altro posto [1], con l'aiuto della seconda delle (B_1), si potrebbero dedurre anche tutte le Φ col primo indice minore di n. In particolare si potrebbero calcolare $\Phi_{0,0}$ e $\Phi_{0,1}$, dalle quali si dedurrebbe, immediatamente,

$$\varphi(t) = \Phi'_{0,0}(t) - \Phi_{0,1}(t)\,.$$

[1] *Sull'integrazione delle equazioni* ecc. Questi Rendiconti, vol. XXIII, ser. 5ª, 2° sem., pag. 154.

Si può concludere allo stesso modo anche nel caso in cui, oltre di $\Phi_{n,m}$, forse nota un'altra qualunque Φ con indici interi. Però, in questa ipotesi più larga, per determinare $\varphi(t)$ bisogna anche risolvere un'equazione differenziale, lineare, a coefficienti costanti con termine noto, come ci si convince facilmente.

Supponiamo, ora, che sia data soltanto $\Phi_{n,m}$ con $0 < n < m$ ed n ed m interi. Per quello che è stato precedentemente detto, il problema della determinazione di $\varphi(t)$, in questo caso, si può ricondurre alla determinazione di $\Phi_{n,m-1}$, ovvero di $\Phi_{n,m+1}$. Proponiamoci di calcolare $\Phi_{n,m-1}$. Assunta questa quantità, momentaneamente, come nota, possiamo calcolare, come sopra è stato indicato, $\Phi_{0,0}$ e $\Phi_{0,1}$. Ricordiamo, quindi, che fra queste due ultime espressioni sussistono le due relazioni seguenti, inverse una dell'altra:

$$(7) \qquad \begin{cases} \Phi_{0,0} = 2\Phi'_{0,1} - \int_{t_0}^{t} \Phi_{0,1}(\tau) \dfrac{I_1(t-\tau)}{t-\tau} d\tau , \\ \Phi_{0,1} = \int_{t_0}^{t} \Phi_{0,0}(\tau) \dfrac{I_1(t-\tau)}{t-\tau} d\tau , \end{cases}$$

e notiamo che $\Phi_{0,0}$ e $\Phi_{0,1}$ sono, ciascuna, somma di un'espressione differenziale lineare a coefficienti costanti di $\Phi_{n,m-1}$, e di un'altra tale espressione di $\Phi_{n,m}$. Con integrazioni per parti si possono ridurre quelle parti degli integrali

$$\int_{t_0}^{t} \Phi_{0,1}(\tau) \frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau} d\tau \quad \text{e} \quad \int_{t_0}^{t} \Phi_{0,0}(\tau) \frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau} d\tau .$$

che contengono $\Phi_{n,m-1}$, alla somma di una espressione differenziale, lineare, a coefficienti costanti, di $\Phi_{n,m-1}$ stessa, e di un termine proporzionale a

$$\int_{t_0}^{t} \Phi_{n,m-1}(\tau) \frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau} d\tau .$$

Eliminando questo integrale fra le due equazioni (7), così trasformate, si ottiene un'equazione differenziale, lineare, a coefficienti costanti, con termine noto, in $\Phi_{n,m-1}$ e dalla quale quest'ultima funzione si potrà determinare.

Illustreremo il metodo ora esposto applicandolo al caso particolare della risoluzione dell'equazione

$$\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,(t-\tau)\, I_2(t-\tau)\, d\tau = \Phi_{1,2}(\tau) .$$

Seguendo la strada indicata, troviamo dapprima

$$\Phi_{0,0} = \left(\frac{d^2}{dt^2} - 1\right) \Phi_{1,1} \quad , \quad \Phi_{0,1} = \frac{1}{2} (\Phi'_{1,1} - \Phi_{1,2}) ,$$

e le equazioni (7), con integrazioni per parti, com'è stato detto, si riducono facilmente a

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \Phi_{1,1}(\tau)\,\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau - 2\Phi_{1,1}(t) =$$
$$= \int_{t_0}^{t} \Phi_{1,2}(\tau)\,\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau - 2\Phi'_{1,2}(t)\,.$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}-1\right)\int_{t_0}^{t} \Phi_{1,1}(\tau)\,\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau - \frac{1}{2}\Phi'_{1,1}(t) = -\frac{1}{2}\Phi_{1,2}(t)\,,$$

dalle quali si ottiene subito l'equazione

$$\frac{d^2\Phi_{11}}{dt^2} - \frac{4}{3}\Phi_{11} =$$
$$= -\frac{2}{3}\left(\frac{d^2}{dt^2}-1\right)\left\{\int_{t_0}^{t} \Phi_{1,2}(\tau)\,\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau - 2\Phi'_{1,2}(t)\right\} - \frac{1}{3}\Phi'_{1,2}(t)$$

che serve a determinare $\Phi_{1,1}$.

V.

Risoluzione dell'equazione (4) per m intero positivo ed n intero negativo.

Si abbia da risolvere la nostra equazione, dapprima, nel caso particolare

$$\int_{t_0}^{t} \Phi(\tau)\,\frac{I_n(t-\tau)}{(t-\tau)^n}\,d\tau = \Phi_{-n,n}(t)\,, \tag{8}$$

con n intero, maggiore di zero. Si può raggiungere lo scopo, in questo caso, moltiplicando, intanto, i due membri di (8) per $\frac{I_1(t_1-t)}{t_1-t}\,dt$ ed integrando fra t_0 e t_1. Invertendo, quindi, al primo membro, le due integrazioni, applicando la (C_4) e tenendo conto della (8) stessa, si può scrivere

$$\sum_{1}^{n-1}{}_i \frac{1\,.\,3\,.\,5\,...\,(2i-1)}{2^{n-i}(n-i)!\,(2n-1)\,(2n-3)\,...\,(2n-2i+1)}\times$$
$$\times\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{I_i(t-\tau)}{(t-\tau)^i}\,d\tau - \frac{1}{2^{n-1}\,n!}\,\varphi(t) =$$
$$= \int_{t_0}^{t} \Phi_{-n,n}(\tau)\,\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau - 2\Phi'_{-n,n}(t)\,. \tag{9}$$

Basta allora applicare, ad ambo i membri di questa equazione, $n-1$

volte l'operazione $\frac{d^2}{dt^2} - 1$, tener conto delle seconde equazioni (A_3) e (B_2) e della (8) stessa per trasformare, con tutta facilità, la (9) in un'equazione differenziale, lineare, a coefficienti costanti, con termine noto, nella funzione $\varphi(t)$, dalla quale equazione quest'ultima funzione si potrà determinare.

Termineremo i calcoli nel caso in cui, in (8), si supponga $n = 2$. In questo caso la sommatoria, al primo membro della (9), contiene un termine solo, e questa equazione si pone subito sotto la forma

$$(9') \quad \frac{1}{2 \cdot 3}\left[\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau - \frac{1}{2}\varphi(t)\right] - \frac{1}{2^2}\varphi(t) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \Phi_{-2,2}(\tau)\,\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau - 2\Phi'_{-2,2}(t).$$

Applicando, quindi, ad ambo i membri di essa, l'operazione $\frac{d^2}{dt^2} - 1$, con l'aiuto delle osservazioni stesse che sono state fatte in generale, si trova l'equazione

$$(10) \quad \varphi''(t) - \frac{4}{3}\varphi(t) =$$

$$= 2^2\left(\frac{d^2}{dt^2} - 1\right)\left\{2\Phi'_{-2,2}(t) - \int_{t_0}^{t} \Phi_{-2,2}(\tau)\,\frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau\right\} - 2\Phi'_{-2,2}(t).$$

Potendosi, infine, ricavare dalla (9') i valori di φ e di φ', per $t = t_0$, l'equazione (10) determina facilmente e completamente la funzione $\varphi(t)$.

2. Consideriamo ora il caso, più generale, dell'equazione

$$(11) \quad \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,\frac{I_m(t-\tau)}{(t-\tau)^n}\,d\tau = \Phi_{-n,m}(t)$$

con $m > n$. Assumiamo come incognita ausiliaria $\Phi_{-n,m-1}$ e notiamo che la solita equazione prima delle (B_1), la quale, mutando n in $-n$, si scrive

$$(m-n)\,\Phi_{-n,m-1} - 2m\,\Phi'_{-n,m} + (m+n)\,\Phi_{-n,m+1} = 0\,,$$

ci permette, ponendo, per m, in essa, successivamente, $m-1, m-2, \dots, n+1$ di calcolare, nello stesso ordine, per mezzo di $\Phi_{-n,m}$ e di $\Phi_{-n,m-1}$, le altre quantità $\Phi_{-n,m-2}, \Phi_{-n,m-3}, \dots, \Phi_{-n,n}$. Teniamo quindi conto dell'equazione

$$(12) \quad \Phi'_{-n,n} = \Phi_{-n,m+1} + \frac{1}{2^n\,n!}\,\varphi(t),$$

della relazione

$$(13) \quad \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,\frac{I_n(t-\tau)}{(t-\tau)^n}\,d\tau = \Phi_{-n,n}(t),$$

e della (9) che è una conseguenza integrale di quest'ultima. Se in (12) si sostituiscono a $\Phi_{-n,n}$, $\Phi_{-n,n+1}$ le espressioni calcolate innanzi per mezzo di $\Phi_{-n,m}$, $\Phi_{-n,m-1}$, ed il valore di $\varphi(t)$ che si può ricavare da questa equazione sia sostituito nella (13) e nella (9), basterà operare su queste due ultime equazioni come in IV, 1 per ricavare un'equazione differenziale, lineare, a coefficienti costanti in $\Phi_{-n,m-1}$, dalla quale quest'ultima funzione si potrà determinare

Si tratti, p. es., di determinare $\varphi(t)$ dall'equazione

$$\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) \frac{I_2(t-\tau)}{t-\tau} d\tau = \Phi_{-1,2}(t).$$

Possiamo scrivere intanto le tre equazioni

$$\Phi'_{-1,1} = \Phi_{-1,2} + \frac{1}{2}\varphi(t) \quad , \quad \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) \frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau} d\tau = \Phi_{-1,1} ,$$

$$\varphi(\tau) = 2\Phi'_{-1,1}(t) - \int_{t_0}^{t} \Phi_{-1,1}(\tau) \frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau} d\tau ,$$

e, con procedimento anche più spedito che non nel caso generale, eliminando $\varphi(t)$ fra la prima e la terza di queste equazioni, si ottiene l'equazione seguente

$$\int_{t_0}^{t} \Phi_{-1,1}(\tau) \frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau} d\tau = 2\Phi_{-1,2}(t),$$

che serve a determinare $\Phi_{-1,1}$ per mezzo di $\Phi_{-1,2}$. Abbiamo infatti subito

$$\Phi_{-1,1} = 4\Phi'_{-1,2} - 2\int_{t_0}^{t} \Phi_{-1,2}(\tau) \frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau} d\tau ,$$

e quindi

$$\frac{1}{2}\varphi(t) = 4\Phi''_{-1,2} - \Phi_{-1,2} - 2\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \Phi_{-1,2}(\tau) \frac{I_1(t-\tau)}{t-\tau} d\tau .$$

3. Osserviamo, qui, che l'equazione (4), con l'aiuto delle solite formole fondamentali contenute in II, si risolve anche in tutti casi in cui m ed n sono metà di interi dispari, se si riesce a risolverla nel caso di $n = -\frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{2}$ che è quello sul quale abbiamo richiamato l'attenzione fin dal principio.

Aggiungiamo, infine, che i metodi precedenti, convenientemente estesi, permettono di determinare la funzione φ anche nel caso in cui, invece di una sola $\Phi_{n,m}$, si dia una combinazione lineare qualunque, a coefficienti costanti di φ e di varie $\Phi_{n,m}$. S'intende che in questa combinazione lineare le n ed m debbano essere, però, o tutti interi o tutti metà di interi dispari. ed, in quest'ultima ipotesi, anche $n \geq m$.

Mineralogia. — *Sulla presenza della monazite nelle sabbie e nelle arenarie della Somalia meridionale.* Nota del Corrispondente Ettore Artini.

Ho avuto occasione, in questi ultimi tempi, di esaminare dal punto di vista mineralogico numerosi campioni di sabbie e di arenarie della Somalia italiana; questo materiale mi fu gentilmente favorito per lo studio dal dott. G. Stefanini, il quale ebbe a raccoglierlo nel 1913, durante il viaggio della missione scientifica inviata dal R. Governo in tale regione. I risultati particolareggiati delle mie ricerche saranno altrove pubblicati; mi sia concesso qui di accennare soltanto, in via sommaria e preliminare, al ritrovamento di un minerale d'un certo interesse, la *monazite*, sia nelle alluvioni del Giuba, sia nelle arenarie antiche della regione interna (Lugh).

Fin dallo scorso anno ebbi modo di rilevare l'esistenza di rarissimi granuli d'un minerale i cui caratteri mi sembravano quelli della monazite, nelle sabbie del Deserto Arabico, e nella formazione arenacea nota sotto il nome di *Nubian Sandstone* [1]. Ma la eccessiva rarità del minerale avendo impedito una ricerca approfondita, la determinazione era rimasta alquanto dubbia e malsicura.

Lo stesso minerale, con caratteri perfettamente simili, ho potuto ora ritrovare nelle sabbie del Giuba. Si tratta di granuletti del diametro ordinariamente non superiore a 0,10 mm., rotondeggianti, ciottoliformi, i quali anche per tale aspetto della superficie si differenziano abbastanza bene dai cristallini di zircone delle stesse dimensioni i quali, nelle medesime sabbie, si presentano con facce nitide e con spigoli vivi. Il colore è gialliccio, talora giallo citrino chiarissimo, più spesso giallo puro assai pallido, passando anche a giallo miele; frequenti vi sono piccole chiazze ocracee, dovute ad incrostazione, sia negli incavi della superficie, sia nelle screpolature. I caratteri morfologici esterni, in buona parte secondarî, insieme al colore, impartiscono al nostro minerale una fisonomia propria, ben riconoscibile, e affatto simile, per non dire identica, a quella della monazite delle sabbie brasiliane.

Il pleocroismo è debolissimo, quasi insensibile; il potere rifrangente molto elevato, tanto che nel joduro di metilene si constata essere $\alpha \gg n$. La birifrazione è fortissima, e all'incirca si può stimare $\gamma - \alpha = 0,05$; l'angolo degli A. O. è piccolissimo, più ancora che nelle monaziti d'altre provenienze, così che la figura di interferenza a luce convergente, se non è esattamente

[1] E. Artini, *Sulla composizione mineralogica di alcune sabbie del Deserto Arabico.* Atti Soc. ital. sc. nat., an. 1914, LIII, pag. 372.

centrata, può talora apparire quasi uniassica; il carattere ottico è positivo; a dispersione degli A. O. poco sensibile.

Questi caratteri, escludendo da una parte lo zircone e dall'altra l'epidoto, rendono certo assai verosimile la natura monazitica dei rari granuletti, ma non sono sufficienti ad assicurarne la diagnosi; per questa occorreva un esame chimico, il quale nelle alluvioni normali del Giuba, come nelle sabbie del Deserto Arabico, è ostacolato dalla impossibilità pratica di isolarne una quantità sufficiente. Ma ciò che nelle sabbie comuni non si poteva fare, mi riuscì perfettamente col trattamento di una speciale sabbia nera magnetica, raccolta dal dott. Stefanini presso Giumbo, alla foce del Giuba.

È questa una delle solite sabbie nere, ottenute per naturale concentrazione degli elementi pesanti, concentrazione spinta fino ad eliminare quasi tutto il quarzo e la maggior parte dei silicati; nel caso nostro il processo è arrivato a tal punto che il p. sp. della sabbia, presa così come fu raccolta, determinato sopra un campione di 100 grammi mediante il volumenometro di Schumann, raggiunse il valore di 4,90. Nera in massa, e ricchissima sopra tutto di magnetite e di ilmenite, che ne formano la parte principale. questa sabbia, sottoposta ad analisi chimica complessiva, coi soliti metodi, diede i seguenti risultati:

$$56{,}09\ \%\ \text{di Fe, pari a } 80{,}13\ \%\ \text{di } Fe_2O_3,$$
$$\text{e } 16{,}87\ \%\ TiO_2.$$

Queste percentuali ricordano molto da presso quelle di Fe_2O_3 e di TiO_2 delle spinelliti titanomagnetitiche della Norvegia.

Per quanto ha riguardo alla composizione mineralogica, questa sabbia oltre agli ossidi di ferro, prevalenti, contiene: — *quarzo*, *augite*, *granato almandino*, *zircone*, *epidoto* — scarsi; — *spinello verde*, *ortoclasio e microclino*, *pirosseno rombico*, *orneblenda verde*, *cianite*, *tormalina*, *staurolite*, *titanite*, *apatite*, e la presunta *monazite* — tutti scarsissimi o rari.

Ad una separazione della monazite con mezzi meccanici, o soluzioni pesanti, non era il caso di pensare, avendo essa un p. sp. troppo alto, e troppo poco diverso da quello degli ossidi di ferro; evidente si presentava invece la opportunità di una separazione magnetica. A tale scopo mi servii di una elettrocalamita sul tipo di quella consigliata da Rosenbusch, ma di maggior potenza, utilizzando come sorgente di energia non già una batteria di pile Grenet, ma la corrente alternata stradale, abbassandone la tensione a 50 volts con un piccolo trasformatore, e raddrizzandola con una batteria di celle elettrolitiche. L'apparecchio, costruito dietro le mie indicazioni dalla nota Ditta Campostano, della nostra città, si mostrò subito, sia per la considerevole potenza, sia per la facile regolabilità, egregiamente adatto allo scopo. Facilissimo mi fu infatti estrarre interamente gli ossidi di ferro, data la loro enorme suscettività magnetica (I^a porzione); e nel residuo pure agevolmente riuscii

a separare i minerali con debole suscettività positiva (II^a porzione) da quelli non magnetici, come quarzo, rutilo, zircone, titanite e apatite (III^a porzione). Più delicato fu il trattamento da far subire alla II porzione, la sola che a me interessasse, perchè costituita da granato, pirosseni, anfiboli, epidoto, tormalina e monazite. Con opportuna regolazione, sia mediante reostato, sia variando la distanza fra le due espansioni polari, mi fu possibile, con successive separazioni frazionate, profittare della minore suscettività magnetica della monazite in confronto con gli altri minerali citati, per concentrarla in modo da ottenere, col trattamento di circa 500 gr. di sabbia nera, quasi 0,3 gr. di una sabbiettina gialla, certo non composta di monazite pura, ma formata in grandissima prevalenza da questo minerale.

Potei così constatare che il suo p. sp. è superiore a quello del joduro di metilene, nel quale va a fondo rapidamente, e sopra tutto potei procurarmi per via chimica la riprova della determinazione specifica. Per ciò, la porzioncina contenente la monazite, salvo una piccola parte conservata per confronto, fu trattata per molte ore con HCl concentrato a dolce calore. Nel residuo, lavato con acqua e seccato, già ad occhio nudo si constata che il minerale giallo ritenuto monazite ha perduto la vivacità della tinta e la lucentezza, mostrandosi sbiancato ed opaco. Al microscopio, in essenza di garofani, si riconosce all'evidenza la corrosione profonda subita dal nostro minerale, il cui contegno fa così chiaro contrasto con quello dei pochi epidoti che vi sono frammisti, i quali sono invece rimasti intatti, con forme nitide e spigoli vivi. L'attacco è però alquanto ineguale; alcuni granuli sono più ed altri meno profondamente corrosi, e spesso uno stesso individuo in una parte si mostra profondamente cariato, mentre in altra è appena corroso superficialmente: fenomeni tutti identici a quelli che potei osservare nella monazite del Brasile, similmente trattata a scopo di confronto.

Della soluzione, filtrata, qualche goccia lasciata cadere nel reattivo molibdico dà subito assai chiaramente la reazione di P_2O_5. Il resto della soluzione cloridrica fu tirato a secco a bagno maria, ripreso con acqua distillata, riacidificando con qualche goccia di HCl, e nuovamente filtrato. Una goccia di questo liquido, diluita con alcune gocce d'acqua, dà con acido ossalico evidente la reazione microchimica caratteristica del Ce: un precipitato pulverulento finissimo, che rapidamente si trasforma in cristallini aghiformi, riuniti in croci od in stellette a sei raggi con estremità biforcute, le quali, procedendo la evaporazione, crescono ramificandosi in eleganti arborescenze raggiato-divergenti; la estinzione dei singoli individui è parallela all'allungamento, e questo è otticamente positivo.

Era così dimostrato trattarsi realmente di monazite; ma avendo a mia disposizione ancora la più gran parte della soluzione, potei sottoporla ad un'analisi meno incompleta. A tale scopo la soluzione, fortemente acidificata con HCl, fu versata, goccia a goccia, in un eccesso di soluzione diluita di

acido ossalico, e fatta bollire per qualche momento; dopo raffreddamento, sul fondo del bicchierino si osservava un precipitato bianco, formato da quei leggeri e soffici fiocchetti di aghi finissimi, che sono così caratteristici per gli ossalati dei metalli delle terre rare, e in ispecie del Ce. Raccolto il precipitato sul filtro, e ben lavato, esso fu calcinato in crogiolino di porcellana, e poi facilmente ridisciolto in acido nitrico diluito, previa aggiunta di qualche goccia d'alcool. Evaporato a dolcissimo calore l'eccesso d'acido, e ripreso con acqua il residuo bianco, cristallino, tale soluzione fu analizzata secondo Duparc e Monnier [1], e lasciò riconoscere la presenza di tracce di torio e notevole quantità di cerio. Data la scarsità del materiale, e le perdite inevitabili nel lungo e delicato procedimento, stimai non fosse necessario proseguire tentando il riconoscimento singolo di La, Pr e Nd, che si può supporre accompagnino il Ce. Ricondussi invece il perossido bruno ottenuto con H_2O_2 allo stato di nitrato, previa riduzione, e tentai la reazione di Sonnenschein, con soda caustica e solfato di stricnina: il risultato fu positivo, nitido e sicuro.

Non resta ora che ricercare la provenienza della monazite delle sabbie del Giuba. Io non posso certamente escludere in modo assoluto che il raro minerale derivi da quelle granititi che qua e là, come isole, emergono nell'interno della regione somala, dalla vasta coperta delle rocce detritiche, eoliche od alluvionali; ma devo confessare che questa origine diretta mi sembra poco probabile. Già nella succitata mia Nota intorno alle sabbie del Deserto Arabico credetti poter indicare come fonte presumibile della monazite nelle sabbie desertiche quella formazione arenacea ch'è designata ordinariamente come *Nubian Sandstone*. Anche nella regione somala, in varie località dell'interno (Curetka, Scidle, Passo di Marilè) affiora un complesso di rocce arenacee, conosciute sotto il nome di *arenarie di Lugh*, le quali, benchè cronologicamente siano dai geologi riferite a tutt'altro periodo, presentano con l'arenaria nubiana non solo una grandissima analogia d'aspetto, ma anche una rassomiglianza così grande, che potrebbe dirsi identità, nei riguardi della composizione mineralogica.

Fra i caratteri comuni alle due serie di rocce noteremo qui solo: la grande copia del quarzo, e la eccezionale scarsezza dei minerali pesanti; la costante ed assoluta mancanza di pirosseni ed antiboli; la prevalenza tra gli elementi colorati della tormalina, ch'è invece affatto scarsa e subordinata nelle sabbie d'alluvione o desertiche delle due regioni; e, posso aggiungere anche, la presenza in entrambe di quantità estremamente esigue di monazite, in granuletti delle stesse dimensioni e dell'identico aspetto che presentano quelli sopra descritti, delle sabbie del Giuba. Sarei pertanto disposto a ritenere probabile che nelle arenarie della formazione di Lugh debba ricercarsi l'origine della monazite del Giuba, così come ritengo che nell'arenaria nubiana stia la fonte della monazite osservata nelle sabbie del Deserto Arabico.

[1] L. Duparc et A. Monnier., *Traité de technique minéralogique et pétrographique*. II^e^ partie. Tome 1. *Les méthodes chimiques qualitatives*. Leipzig, 1913, pag. 201.

Fisiologia. — *Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci di animali omeotermi.* Nota VI: *Il fenomeno dell'addizione di due contrazioni successive indagato nel preparato diaframmatico*, del Corrispondente F. Bottazzi.

L'addizione di due contrazioni provocate mediante due stimoli unici eguali, succedentisi a breve intervallo. è considerata come il processo fondamentale del tetano. Il fenomeno fu prima studiato da Helmholtz ([1]), il quale ne formulò anche la legge, che però fu in seguito modificata, quasi simultaneamente, da Kronecker e Stanley Hall ([2]) e da Sewall ([3]). Sullo stesso argomento, ricerche molto accurate fecero poi von Kries ([4]), von Frey ([5]), Wolff ([6]), Scheck ([7]) e Ishihara ([8]).

Del fenomeno in questione sono da considerarsi particolarmente i seguenti tre caratteri: 1°) il valore dell'addizione, cioè l'altezza a cui si eleva l'apice della curva addizionata (o della « coppia », come potrebbe brevemente dirsi l'insieme delle due curve); 2°) la velocità con cui questa si svolge rispetto alla prima, cioè la ripidezza con cui monta il tratto ascendente della rispettiva curva; 3°) il grado di fusione delle due curve, che aumenta col diminuire dell'intervallo fra i due stimoli. Mentre il primo carattere determina l'altezza del tetano, dal terzo dipende se il tetano è incompleto o completo. Al decorso ascendente della curva tetanica, che ha la forma di una iperbole equilatera (Bohr, [16a]), contribuisce poi la contrattura.

Molti fattori influiscono sul fenomeno dell'addizione.

Elevando la *temperatura*, ordinariamente cresce tanto l'altezza delle contrazioni cloniche, quanto quella delle coppie, sia l'intervallo fra i due stimoli grande (per es. di 0,175″, come nell'esper. VIII, fig. 1), o piccolo (0.055″, nello stesso esperimento). Le temperature relativamente basse promuovono la contrazione tonica (ved. Nota V); ma siccome esse deprimono la contrazione clonica, non agevolano il fenomeno dell'addizione, per quanto questo ne dipende (ved. Ishihara, [8]).

Rispetto all'*intensità degli stimoli*, spesso si osserva che la contrazione addizionata è più alta della precedente, più quando gli stimoli sono submassimali che non quando sono massimali o, peggio, ultramassimali; probabilmente perchè questi ultimi provocano già contrazioni uniche molto più alte (massimali) di quelle che provocano gli stimoli submassimali. Ma gli stimoli forti sviluppano la contrazione tonica (ved. Nota V). Si comprende, quindi, che, quando ciò avviene, il fenomeno di addizione in periodo di decremento è notevolmente agevolato dagli stimoli forti, come ho potuto constatare in

varii casi. L'influenza della intensità degli stimoli è quindi connessa con la frequenza di essi e con la disposizione del muscolo a eseguire contrazioni toniche più o meno gagliarde.

L'influenza del *peso* o della *tensione* è grandissima. Se il muscolo è scarico o minimamente caricato, l'addizione o manca o è di minimo valore. Poichè il peso o la tensione sviluppano la contrazione tonica (ved. Nota V), la loro efficacia si fa sentire principalmente sull'addizione in periodo di decremento. La mancanza di addizione nel muscolo scarico dipende, almeno in parte, dal fatto che questo fa di solito contrazioni cloniche più alte di quelle

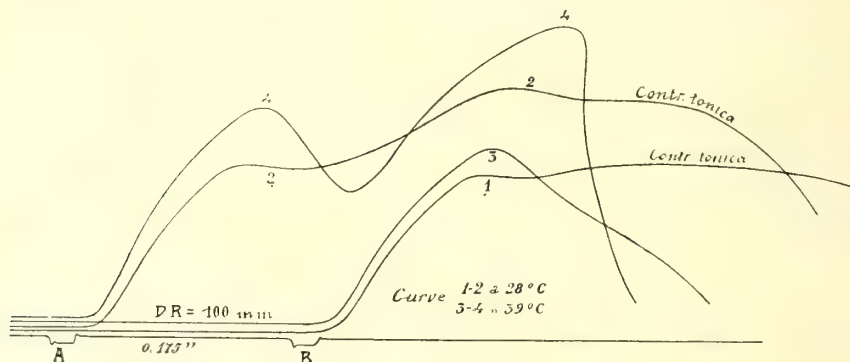



FIG. 1

Questa e le seguenti figure sono riduzioni fotografiche a $^1/_2$ dalle curve originali. A e B indicano i due stimoli: quando l'intervallo fra essi diminuisce progressivamente, B si avvicina mano mano ad A. DR significa: distanza fra i rocchetti dell'induttorio, in mm.

del muscolo caricato (ved. fig. 2). Le contrazioni del muscolo scarico presentano un periodo di decremento più o meno prolungato, che a torto von Frey ([5a]) considerò come dovuto a contrazione tonica (« Kontraktur »), là dove è invece da spiegarsi con la mancanza di un peso atto a sollecitare l'allungamento del muscolo. Nell'esper. X (fig. 2), aumentando il peso da 3 a 10 e poi a 20 gr., si accentua (col peso di 20 gr.) la contrazione tonica e aumenta il valore dell'addizione fino al punto che, raggiunto un intervallo *optimum*, l'altezza della contrazione addizionata diventa doppia di quella della contrazione unica. Ma se col peso di 20 gr. si raggiunge il massimo dell'addizione, l'altezza assoluta e della contrazione unica e della coppia è assai minore che non col peso di 10 gr.

L'*intervallo fra i due stimoli*, cioè la frequenza di questi (stimoli d'intensità notevole, ma non massimali; temperatura conveniente), è un fattore fondamentale dell'addizione. Distinguiamo l'addizione in periodo d'incremento o di decremento, secondo che lo stimolo addizionale colpisce il muscolo avanti o dopo l'apice della prima contrazione. Nell'esper. VI, finchè

il muscolo fu eccitato con stimoli submassimali (DR = 200 mm) e non presentò contrazione tonica, l'altezza della coppia aumentò col diminuire dell'intervallo fra i due stimoli, fino a raggiungere circa il doppio dell'altezza della prima contrazione (fig. 3); ma poi, fatta aumentare l'intensità degli stimoli (DR = 100 mm), la prima contrazione raggiunse un'altezza superiore a quella delle più alte coppie precedenti, e quindi il valore dell'addizione fu assai minore, qualunque fosse l'intervallo fra i due stimoli (fig. 4). Ciò risulta evidentemente dalla seguente tabella, oltre che dalle figg. 3 e 4:

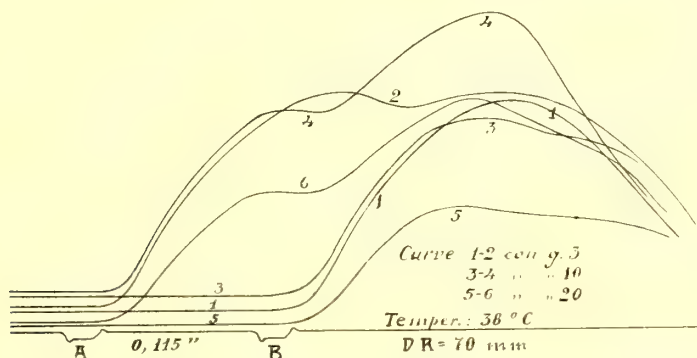



FIG 2

ESPERIENZA VI (6 giugno 1914):

Preparato diaframmatico di cane.

A. DR = 200 mm. Altezza della prima contrazione, in media = 36 mm.			**B.** DR = 100 mm. Altezza della prima contrazione, in media = 105 mm.		
N.	Intervallo fra i due stimoli	Altezza della coppia	N.	Intervallo fra i due stimoli	Altezza della coppia
1	0,190″	mm. 39	11	0,200″	mm. 124
2	0,170	» 40	12	0,170	» 127
3	0,140	» 51	13	0,140	» 124
4	0,120	» 51,5	14	0,120	» 114
5	0,080	» 60	15	0,085	» 120 } ?
6	0,055	» 62	16	0,055	» 126 } ?
7	0,040	» 71	17	0,025	» 125 } ?
8	0,025	» 75			

N. B. In questa e nelle seguenti tabelle, il punto interrogativo significa che l'altezza delle curve nei tracciati originali non potette esser misurata con assoluta precisione.

Nella serie di contrazioni addizionate provocate da stimoli forti, si manifestò il fenomeno, già osservato da von Frey ([5c]), che cioè, entro certi

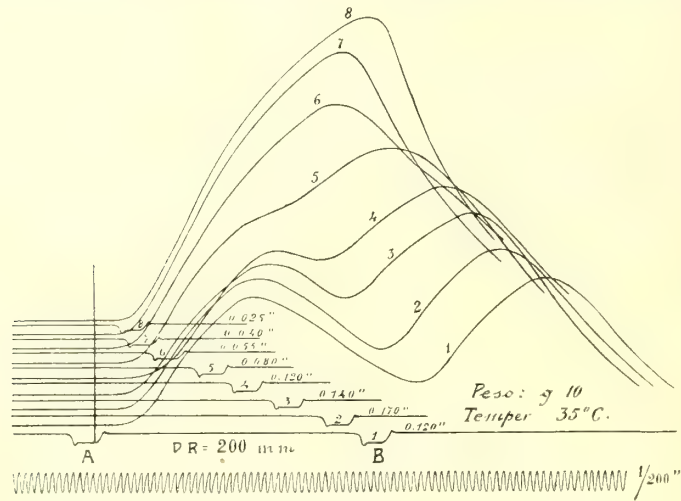



Fig. 3

limiti dell' intervallo fra i due stimoli (0,120″ - 0,085″), la seconda contra-

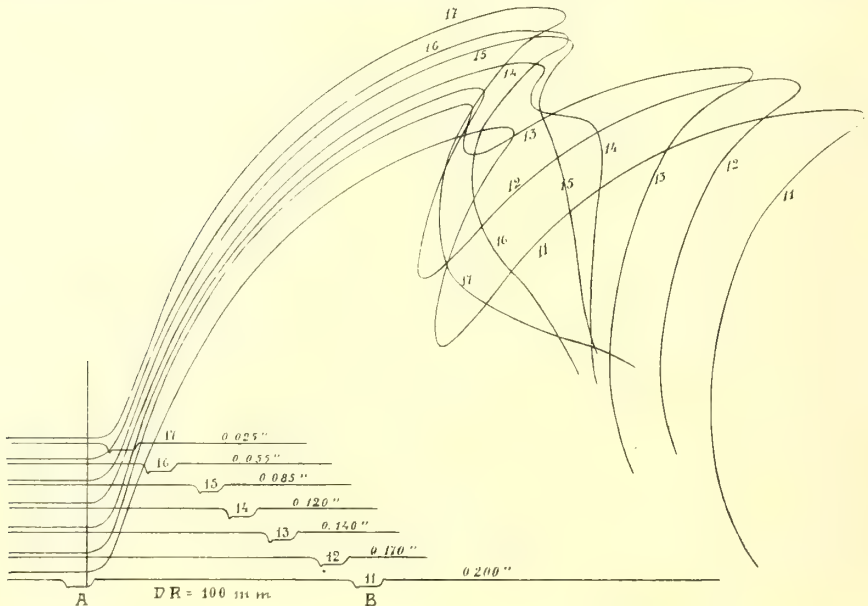



Fig. 4

zione fu meno alta della prima, mentre incominciò ad apparire una mediocre contrazione tonica. Si direbbe che la contrazione addizionale fosse inibita.

Ma tale fenomeno si manifestò più evidente nell'esper. V, come risulta dalla seguente tabella e dalla fig. 5. Finchè l'intervallo fra gli stimoli fu rela-

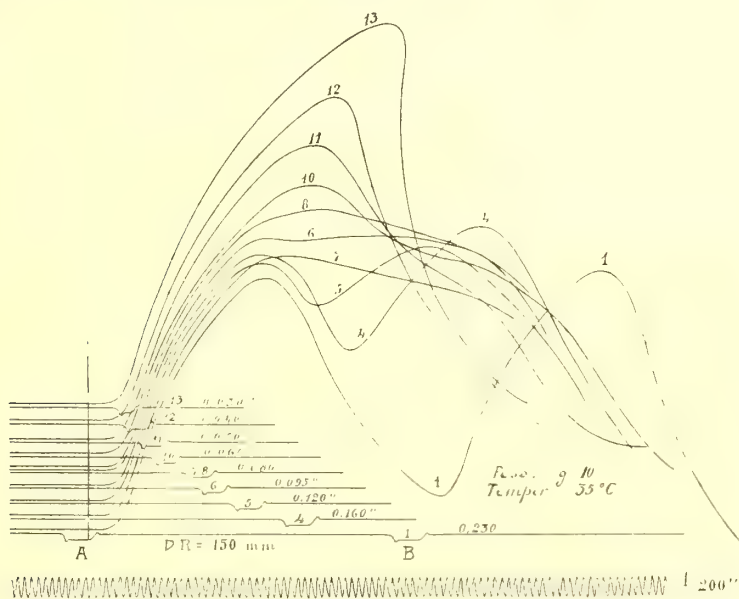



FIG. 5

tivamente grande (0,230 - 0,120''), l'addizione in decremento aumentò col

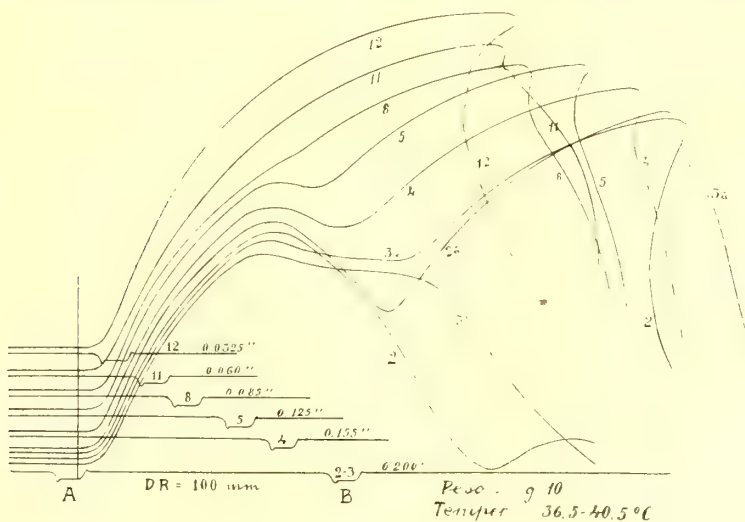



FIG. 6

diminuire di esso (curve 1, 4 e 5); ma come il secondo stimolo incominciò a colpire il muscolo in prossimità dell'apice della prima contrazione, l'addi-

zione scemò (curve 6 e 7), mentre incominciò a manifestarsi, in luogo della contrazione clonica addizionale, una sempre più cospicua contrazione tonica. All'intervallo 0,080″ (curva 8), tornò ad aumentare la contrazione addizionale, che poi crebbe fino a raggiungere il massimo di altezza all'intervallo 0,030″ (vale a dire, in periodo d'incremento); la contrazione tonica, invece, incominciò allora a diminuire, fin quasi a scomparire dalla coppia più alta registrata.

Esperienza V (3 giugno 1914):
Preparato frenico-diaframmatico di cane.

N.	Intervallo fra i due stimoli	Altezza della prima contrazione (1)	Altezza della coppia (2)	Differenza fra (1) e (2)	*Osservazioni*
1 (II)	0,230″	mm. 49	—	—	Niuna contrazione tonica.
2 (X)	0,230	57	mm. 66	mm. 9	Lievissima contr. tonica.
3 (XI)	0,230	55	66	11	» » »
4 (XIV)	0,160	59	72	13	Non contr. tonica.
5 (XIII)	0,120	56	67	11	Contr. tonica sulla coppia.
6 (VII)	0,095	58	61	3	Lieve addizione.
7 (I)	0,080	54	54	0	Nessuna addizione.
8 (XII)	0,080	59	63	4	» »
9 (VI)	0,080	—	62,5	—	Cospicua contr. tonica.
10 (V)	0,060	—	63	—	Fusione completa.
11 (IV)	0,050	—	72	—	» »
12 (III)	0,040	—	76	—	» »
13 (VIII)	0,030	—	89	—	» »
14 (IX)	0,030	—	88	—	» »

N. B. I numeri romani indicano l'ordine con cui i gruppi di curve furono registrati, in questa come anche nella seguente tabella.

Sembra, dunque, che: 1) in un muscolo non molto disposto a eseguire contrazione tonica, questa apparisce quando agiscono due (*a fortiori*, più) stimoli successivi, a breve intervallo; 2) la contrazione tonica apparisce e si accentua entro certi limiti dell'intervallo fra i due stimoli; 3) in simili casi, finchè esiste una contrazione tonica cospicua, la contrazione clonica addizionale è come inibita. Il fenomeno è di difficile interpretazione.

L'addizione di due contrazioni (cloniche) successive in periodo d'incremento può essere determinata da più cause. Dobbiamo rammentare, a questo proposito, l' « autosostenimento » o « sostenimento interno », vale a dire quella condizione per cui il muscolo, al momento in cui inizia la contra-

zione addizionale, trova il peso già sostenuto alla corrispondente altezza dalla contrazione precedente. Già von Kries ([4]) e von Frey ([5]) dimostrarono che, quando il peso è artificialmente sostenuto, le contrazioni aumentano successivamente di altezza a misura che il muscolo si carica più tardi dopo l'inizio di ciascuna di esse, fino a raggiungere, o quasi ([9]), l'altezza del tetano.

Ma l'addizione in periodo d'incremento non può essere effetto esclusivo del sostenimento interno. Un altro fattore fondamentale è il seguente. Supponendo che il muscolo si allunghi quando ne scomparisce l'acido lattico, che è causa dell'accorciamento, se il muscolo è colpito dal secondo stimolo

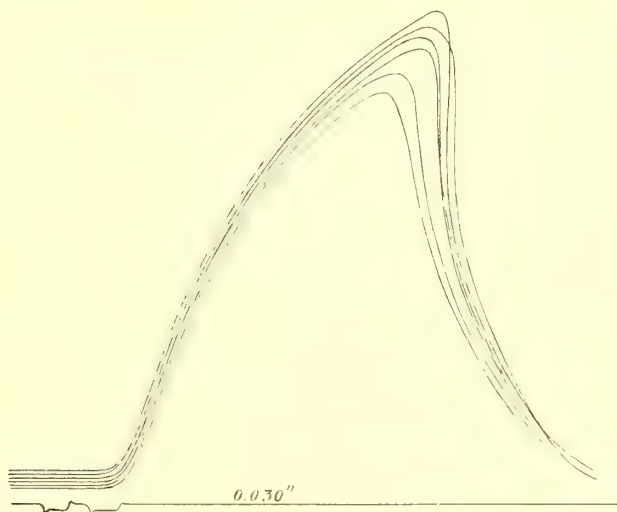



FIG. 7

prima che l'acido, formatosi per effetto dello stimolo precedente, ne sia del tutto scomparso, esso eseguirà una contrazione addizionale. E si può anche ammettere che l'eccitamento addizionale subisca una intensificazione (accelerazione) sotto l'influenza di qualcuno dei prodotti della reazione provocata nel muscolo dal primo stimolo, per es. dello stesso acido lattico [Ranke ([10]), Sewall ([3]), Brailsford Robertson ([11]), Mines ([9])], che catalizzerebbe la seconda reazione. Da ciò dipende il « fenomeno della scala », che può osservarsi anche in una serie di « coppie », come dimostra la fig. 7. Nell'addizione di due o più contrazioni successive, questo fattore deve agire tanto più efficacemente, in quanto che la seconda reazione succede alla prima dopo un intervallo molto minore che non nell'ordinario fenomeno della « scala », quando cioè la concentrazione del catalizzatore è maggiore. Col tempo, il catalizzatore sparisce, e quindi il fenomeno della « scala » si attenua, fino a dileguarsi del tutto quando la frequenza degli stimoli diminuisce oltre un certo limite.

Per quanto riguarda poi l'addizione in periodo di decremento, non può dubitarsi che essa, più che dal fattore ora detto, dipende dalla presenza di una cospicua *contrazione tonica*, che fa da sostegno interno alla contrazione clonica addizionale. Di fatto, in simili casi, l'altezza massima della « coppia » si può già ottenere quando ancòra l'intervallo fra i due stimoli è assai grande, vale a dire quando il secondo stimolo colpisce il muscolo assai dopo l'apice della prima contrazione; e può non aumentare col diminuire di esso, come risulta dalla seguente tabella e dalle curve della fig. 6, registrate nell'esperimento IX:

ESPERIENZA IX: 14 luglio 1914.
Preparato diaframmatico di cane giovanissimo.

N.	Intervallo fra i due stimoli	Altezza della prima contrazione (1)	Altezza della seconda contrazione (2)	Altezza della coppia (3)	Differenza fra (3) e (1) o (2)	*Temperature e osservazioni*
1 (X)	0,200″	mm. 54	mm. 59	mm. 88	mm. 34	40,5° C.
2 (IX)	0,200	62	60	91(?)	32	40,5° C.
3 (VIII)	0,200	59	56	89	33	36,5° C; c. ton.
4 (XII)	0,155	61	62,5	91	30	36,5° C; c. ton.
5 (VI)	0,125	62	59,5	91,5	32	37,5° C; c. ton.
6 (V)	0,125	*72,5*	*69*	*87*	*14,5*	37,5° C.
7 (I)	0,085	60	58	86	27	37° C.
8 (II)	0,085	61	58,5	86,5	28	38° C.
9 (III)	0,0825	*71*	*70,5*	*85*	*14,5*	37,5° C; fusione.
10 (IV)	0,060	—	*69*	*85*	*16*	37,5° C; fusione.
11 (XI)	0,060	76(?)	62,5	86,5	24	40° C; fusione.
12 (XII)	0,0325	—	—	88	—	40° C; fusione.

N. B. I numeri stampati in corsivo corrispondono alle contrazioni del muscolo caricato con 4 g., gli altri a quelle del muscolo caricato con 10 g. Solo queste ultime sono state riprodotte nella fig. 6.

Anche nell'esper. III (18 maggio 1914), l'altezza della « coppia » raggiunse il massimo valore (mm. 108) in due momenti differentissimi: nel muscolo fresco stimolato con intervallo di 0,055″, mentre le contrazioni non presentavano traccia di contrazione tonica; e più tardi, dopo la comparsa di una forte contrazione tonica, l'intervallo fra i due stimoli essendo di 0,120″.

Interpretando le « oscillazioni del tono », descritte da Fano ([12]), come contrazioni (lente) della muscolatura liscia dell'atrio cardiaco di *Emys*

europaea, io ho spiegato ([13]) la maggiore altezza che le sistoli atriali raggiungono verso l'apice di ciascuna oscillazione, ammettendo che la contrazione tonica della muscolatura liscia fa da « sostegno interno » alle contrazioni rapide (sistoli) della muscolatura striata. Certo è che le « oscillazioni del tono », in alcuni casi, presentano una singolare rassomiglianza con le serie di « contrazioni sostenute » del von Frey. Ora, mentre in queste il sostenimento è esterno, nelle « oscillazioni del tono » è interno, ma dovuto all'azione di un tessuto muscolare distinto da quello le cui contrazioni se ne giovano per aumentare di altezza; e nelle contrazioni addizionate, specie in periodo di decremento, dei muscoli striati, il sostenimento è pure interno, ma dovuto, non già a una specie diversa di tessuto, bensì a una sostanza contrattile diversa delle stesse fibre muscolari, al sarcoplasma, la cui contrazione tonica fa da sostegno alla contrazione successiva. Se durante il periodo d'incremento l' « autosostenimento » può esser fatto, in parte diversa secondo i casi, tanto dalla contrazione clonica quanto dalla tonica, è specialmente nell'addizione in periodo di decremento che risulta evidente l'azione di sostenimento della contrazione tonica.

Questa azione, del resto, si manifesta, comunque la contrazione tonica o la contrattura sia provocata. Infatti, le contrazioni rapide provocate con stimoli unici in un muscolo contratturato dalla veratrina o da acidi, da alcali, dall'ammoniaca ecc., sono sempre molto più alte di quelle provocate dagli stessi stimoli prima della contrattura.

Dalle ricerche di von Kries ([4 c]) e di von Frey ([5 c]) risulta che tanto le contrazioni « sostenute », quanto quelle addizionate, si svolgono più velocemente delle contrazioni uniche ordinarie (come si può scorgere anche in alcune delle curve qui riprodotte), onde si verifica il fenomeno che quegli autori chiamarono « anticipazione dell'apice » (Verfrühung des Gipfels). Anche questo fenomeno dipende probabilmente, in parte, dall'influenza acceleratrice che la prima reazione esercita sullo svolgimento della successiva. Ma nelle contrazioni solamente « sostenute » artificialmente, tale influenza non si verifica, onde essa non può essere invocata a spiegare la « anticipazione dell'apice ». In che modo il sostenimento esterno operi tale anticipazione, nè quegli autori dissero, nè io sono in grado di spiegare.

Da tutti i miei esperimenti risulta, in accordo con le osservazioni di Sewall ([3]) e di altri, che la perfetta fusione delle due contrazioni nella « coppia » esige una frequenza dei rispettivi stimoli sempre e notevolmente maggiore di quella che è sufficiente a produrre la massima addizione, specialmente quando a determinare l'addizione contribuisce la contrazione tonica, cioè nelle addizioni in periodo di decremento.

Risultati analoghi a quelli sopra descritti ho ottenuto stimolando il nervo, in vece del muscolo, del preparato frenico-diaframmatico. Ma la relativamente rapida alterazione delle giunzioni neuro-muscolari mi ha ob-

bligato a sperimentare principalmente su preparati muscolari già divenuti ineccitabili per mezzo del nervo, e a tener conto, in questo lavoro, solamente dei risultati così ottenuti.

In conclusione, molti e svariati sono i fattori che determinano l'altezza e il grado di fusione delle « coppie » (e, quindi, anche dei tetani). Alcuni agiscono agevolando il fenomeno di addizione: la frequenza e l'intensità degli stimoli; la temperatura (entro certi limiti); il peso o la tensione; l'autosostenimento; l'influenza acceleratrice (aumentatrice) che esercita qualcuno dei prodotti della reazione intramuscolare sulle reazioni (contrazioni) successive; la contrazione tonica, specie nell'addizione in periodo di decremento ecc. Altri tendono a inibirlo: la fatica (che si può evitare, più nei muscoli di animali pecilotermi, facendo esperimenti di breve durata e provocando il minor numero possibile di contrazioni in muscoli freschissimi conservati nelle migliori condizioni di sopravvivenza); il fenomeno descritto da Buckmaster ([14]) col nome di « einleitende Zuckungen », per cui in una serie di contrazioni iniziali la seconda contrazione è meno alta della prima, la terza della seconda ecc., e che von Frey ([5 c]) considerò come una progressiva « Anpassung oder Einstellung der Muskelarbeit auf ein bestimmtes Reizintervall »; e finalmente quella inesplicata inibizione della contrazione clonica addizionale, di cui sopra ho parlato.

Poichè tanti e di natura sì svariata e sì intimamente fra loro connessi sono i fattori che entrano in azione nel fenomeno in esame, si comprende come l'*optimum* dell'addizione (e del tetano), per quanto riguarda l'altezza e la fusione delle contrazioni componenti, si raggiunga solamente quando i detti fattori cooperano tutti armonicamente a produrlo, e come, di conseguenza, sia difficilissimo il formulare una legge che descriva in modo soddisfacente, cioè senza lacune, il fenomeno dell'addizione e del tetano.

Una cosa è certa, però: e cioè, che la contrazione tonica, operando l'autosostenimento, contribuisce moltissimo a produrre l'addizione, specie durante il periodo di decremento, vale a dire con stimoli di frequenza relativamente piccola. Così solamente si può spiegare, per es., come i muscoli, nei quali è maggiormente sviluppata la disposizione alla contrazione tonica (muscoli rossi), sono capaci di eseguire tetani altissimi e completi, anche con stimoli di frequenza relativamente piccola ([15]).

BIBLIOGRAFIA.

([1]) H. Helmholtz, Monatsber. d. Berliner Akad. d. Wiss., 1854, pag. 328.

([2]) H. Kronecker und G. Stanley Hall, *Die willkürliche Muskelaction*. Arch. f. (Anat. u.) Physiol., 1879, pag. 13.

([3]) H. Sewall, *On the effect of two succeeding stimuli upon muscular contraction*. Journ. of physiol. 2, pag. 164 (1879-80).

([4]) *a*, J. von Kries, *Untersuchungen zur Mechanik des quergestreiften Muskels*. Arch. f. (Anat. u.) Physiol., 1880, pag. 348; *b*, idem., Berichte d. naturforsch. Ges. zu

Freiburg i. Br. 2 (1886); *c*, idem., *Untersuchungen* etc. *Dritte Mittheilung: Ueber den zeitlichen Verlauf summirter Zuckungen.* Arch. f. (Anat. u.) Physiol. 1888, pag. 537.

(5) *a*, M. von Frey, *Reizungsversuche am unbelasteten Muskel.* Arch. f. (Anat. u.) Physiol. 1887, pag. 195; *b*, idem, *Versuche zur Auflösung der tetanischen Muskelcurve.* Beiträge zur Physiologie C. Ludwig gewidmet (Leipzig, 1887); *c*, idem., *Ueber zusammengesetzte Muskelzuckungen.* Archiv. f. (Anat. u.) Physiol., 1888, pag. 213.

(6) L. Wolff, *Versuche über Doppelreizung bei isometrischer Muskelthätigkeit.* Diss., Würzburg 1889.

(7) F. Schenck, *Beiträge zur Lehre von der Summation der Zuckungen.* I. Pflüger's Arch. 96, pag. 399 (1903).

(8) M. Ishihara, *Ueber Zuckungssummation bei Krötenmuskeln und bei abgekühlten und erwärmten Froschmuskeln.* Pflüger's Arch. 111, pag. 567 (1906).

(9) G. R. Mines, *On the summation of contractions.* Journ. of physiol. 46, pag. 1 (1913). [L'A. crede che i tetani, coi quali von Frey paragonava le sue contrazioni « sostenute », non fossero massimali].

(10) J. Ranke, *Tetanus: eine physiologische Studie.* Leipzig, 1865.

(11) F. Brailsford Robertson, *On the biochemical relationship between the « staircase » phenomenon and fatigue.* Bioch. Zeit. 2, pag. 287 (1908).

(12) G. Fano, *Ueber die Tonusschwankungen der Atrien des Herzens von « Emys europaea ».* Beitr. zur Physiologie C. Ludwig gewidmet, pag. 287. Leipzig, 1887.

(13) Fil. Bottazzi, *Ricerche sulla musculatura cardiale dell' « Emys europaea ».* Zeit. f. allg. Physiol. 6, pag. 140 (1906).

(14) G. A. Buckmaster, *Ueber eine neue Beziehung zwischen Zuckung und Tetanus.* Arch. f. (Anat. u.) Physiol., 1886, pag. 459.

(15) Fil. Bottazzi, *Ricerche sulla genesi del tetano musculare.* Atti della Soc. lig. di scienze nat. e geogr. 15 (1904). [Arch. ital. de biol. 42, pag. 169 (1904)].

(16) Ved. anche: *a*, Chr. Bohr, *Ueber den Einfluss der tetanisirenden Irritamente auf Form und Grösse der Tetanuscurve.* Arch. f. (Anat. und) Physiol. 1882, pag. 233; *b*, F. B. Hoffmann, *Studien über den Tetanus.* [Pflüger's Arch. 93, pag. 186 (1902); 95, pag. 484 (1903); 103, pag. 291 (1904)].

Meccanica celeste. — *Ricerche sopra le perturbazioni del satellite di Nettuno.* Nota preliminare di G. Armellini, presentata dal Corrispondente E. Almansi.

1. Il satellite di Nettuno, come è noto, fu scoperto a Starfield, presso Liverpool, nell'agosto 1847, dall'astronomo Lassell, il quale si servì di un riflettore newtoniano di m. 0,61 di apertura e di m. 6,15 di distanza focale. L'ingrandimento adoperato era da 205 a 370 volte (1).

Il satellite fu successivamente osservato, nel settembre dello stesso anno, da Otto Struve a Poulkowo, e quindi da Bond a Cambridge negli Stati Uniti (2).

(1) F. Arago, « *Astronomie* », tom. IV, pag. 526.

(2) Sopra le osservazioni del Bond si vedano i « *Procedings of the american Academy*, II, 1847-1848.

Più tardi, nel 1852, lo stesso Lassell fece a Malta una seconda serie di osservazioni, le quali servirono a completare le prime e ad assegnare in modo approssimato gli elementi dell'orbita ([1]).

Anche Otto Struve tornò a completare le sue prime osservazioni del 1847-48, istituendone una seconda serie nel 1871-72, e più tardi una terza nel 1873-76. Abbiamo poi quattro serie di osservazioni dell'astronomo A. Marth, eseguite le prime a Malta nel 1852 e nel 1864; le altre a Washington nel 1873 e nel 1883.

Gran parte di questo enorme materiale scientifico (escluse naturalmente le osservazioni posteriori al '73) fu accuratamente discusso da Simon Newcomb, in una elaborata Memoria ([2]) nella quale egli riporta anche alcune osservazioni fatte da lui stesso, a Washington, nella opposizione del 1873.

Più tardi l'astronomo Hall fece altre tre serie di osservazioni nel 1875-76, nel 1881-82 e nel 1883-84 e le discusse egli stesso mettendole anche a a confronto con le antiche del Lassell e del Marth ([3]).

2. Giungiamo così alla classica Memoria di Hermann Struve ([4]), publicata nel 1893 negli Atti dell'Accademia imperiale di Pietroburgo, la quale segna un progresso notabilissimo nello studio della questione che ci occupa.

Hermann Struve riprende in esame tutte le osservazioni già fatte dall'epoca della scoperta del satellite, e le discute insieme con altre quattro serie di osservazioni eseguite da lui stesso, con straordinaria diligenza, negli anni 1887-89-90-92. Lo Struve si servì, a tale scopo, del grande equatoriale di Poulkowo, operando sia col reticolo illuminato su campo oscuro, sia col reticolo oscuro su campo illuminato, ora a luce gialla, ora a luce rossa chiara, ed ora a luce rossa oscura.

3. Riferendoci all'equatore, e chiamando con N ed I il nodo ascendente e l'inclinazione dell'orbita del satellite, abbiamo la seguente

([1]) La prima serie delle osservazioni del Lassell è pubblicata nella Rivista « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society », VIII e XII; la seconda, ivi, XIII.

([2]) Simon Newcomb, « *The Uranian and Neptunian systems* », Washington, Observations for 1873. Appendix I.

([3]) Hasaph Hall, « *Orbite of the satellite of Neptune* », Washigton, Observations, II Appendix.

([4]) « *Beobachtungen des Neptunstrabanten am 30-zölligen Poulkowaer Refraktor, von Hermann Struve* ». Mémoires de l'Académie impériale des sciences de S. Petersbourg.

TABELLA I.

Osservatori	Epoca media	N	Errore probabile	C — Oss. ΔN	I	Errore probabile	C — Oss. ΔI
Bond	1848,3	178°,37	± 0°,86	+ 0°,61	145°,05	± 0°,45	+ 1°,18
Otto Struve.	1848,6	182,39	1,00	— 3,37	126,24	0,48	— 0,06
Lassell (a Starfield)	1849,8	176,70	0,50	+ 2,50	126,55	0,21	— 0,57
Lassell (a Malta) .	1852,9	179,02	0,59	+ 0,64	126,21	0,39	— 0,74
Otto Struve	1863,6	181,33	0,77	— 0,09	124,22	0,32	— 0,51
Marth	1864,5	181,65	0,42	— 0,27	124,19	0,28	— 0,63
S. Newcomb	1874,5	183,04	0,14	— 0,17	121,70	0,10	— 0,21
Hall	1876,3	183,47	0,33	— 0,35	121,64	0,19	— 0,03
Holden	1876,5	182,79	0,30	+ 0,36	121,04	0,18	+ 0,54
Hall	1882,1	184,05	0,15	— 0,07	120,03	0,11	+ 0,62
Hall	1883,8	184,67	0,21	— 0,44	120,13	0,23	+ 0,24
Hermann Struve . .	1887,6	184,48	0,15	+ 0,32	119,38	0,13	+ 0,36
Hermann Struve . .	1889,0	185,05	0,11	— 0,05	119,53	0,09	— 0,01
Hermann Struve . .	1890,6	185,51	0,12	— 0,27	119,26	0,10	— 0,01
Hermann Struve . .	1892,6	185,56	0,18	— 0,03	119,06	0,15	— 0,14
Hall	1892,0	185,73	0,45	— 0,28	118,55	0,45	+ 0,47

4. Per ciò che riguarda l'eccentricità *e*, e la posizione del periastro Q, i dati sono assai incerti, come almeno risultano dalla seguente

TABELLA II.

Osservatori	Epoca media	*e*	Errore probabile	Q	Errore probabile
Newcomb	1874,5	0,0088	± 0,0020	182°	± 7°
Hall	1876,3	0,0090	0,0031	202	14
Holden	1876,5	0,0051	0,0020	88	36
Hall	1882,1	0,0034	0,0014	124	24
Hall	1883,8	0,0100	0,0021	150	11
Hermann Struve . .	1887,6	0,0050	0,0013	267	13
Hermann Struve . .	1889,0	0,0075	0,0011	248	8
Hermann Struve . .	1890,6	0,0072	0,0009	271	6
Hall	1892,0	0,0090	0,0029	201	16
Hermann Struve . .	1892,6	0,0083	0,0014	248	8

La difficoltà e l'incertezza del calcolo della posizione del periastro Q dipende sopra tutto dal valore estremamente piccolo dell'eccentricità *e* dell'orbita.

Tenendo presenti infatti i metodi della teoria dei minimi quadrati, si vede immediatamente che, in tal caso, un leggiero errore d'osservazione nella posizione del satellite, porta con sè un errore molto più grave nel calcolo di Q.

5. Mentre, come ho detto, i risultati della tabella II sono incertissimi, dalla tabella I appare evidente un *moto secolare nella linea dei nodi*, e una *diminuzione dell'inclinazione*, presso che proporzionali al tempo.

Hermann Struve trova che, prendendo come origine dei tempi l'anno 1890, i due movimenti risultanti dalla tabella I, sono dati, con sufficiente approssimazione, dalle formole:

$$(1) \qquad \begin{cases} N = 185^\circ,15 + 0^\circ,148\,(t - 1890) \\ I = 119^\circ,35 - 0^\circ,165\,(t - 1890)\,. \end{cases}$$

6. Dopo lo Struve, il Dyson eseguì molte osservazioni servendosi del grande equatoriale fotografico di 26 pollici dell'osservatorio di Greenwich, e occultando il pianeta per mezzo di uno schermo (Month. Not. 1903-04). Egli le discusse più tardi in un importante lavoro [1], e adoperando i simboli dello Struve, giunse ai risultati seguenti per l'epoca 1903, 1:

$$2) \qquad N = 187^\circ,58 \qquad I = 117^\circ,40 \qquad e = 0,0008 \qquad Q = 17^\circ.$$

Il Dyson spiega la differenza dei suoi valori di e e di Q con quelli dello Struve, ammettendo un leggiero errore personale nelle osservazioni di quest'ultimo; errore da cui sono immuni le osservazioni fotografiche. Egli assegna infine ai movimenti secolari $\frac{dN}{dt}$ e $\frac{dI}{dt}$ per l'epoca 1896, 7 i valori:

$$3) \qquad \frac{dN}{dt} = 0^\circ,182 \qquad \frac{dI}{dt} = -\,0^\circ,138\,.$$

Il Dyson, esaminando poi il problema del moto *dal lato puramente cinematico*, chiama con α e δ l'ascensione retta e la declinazione del polo P dell'orbita del satellite: e proietta stereograficamente dal polo sud della sfera celeste la curva descritta da P sul piano tangente al polo nord. Prendendo come asse delle x la linea che ha un'ascensione retta di 270°, egli giunge alla seguente

[1] *Discussion of the observations of the satellite of Neptune, made at the Royal Observatory of Greenwich, in the years 1902-1903-1904, by F. W. Dyson.* Monthly Notices, 1905, pp. 570 e 850.

TABELLA III.

EPOCHE	α	$D = 90 - \delta$	y	x
1849,9	269°,12	54°,00	− 0,008	+ 0,510
1864,0	271,49	55.80	+ 0,014	+ 0,529
1875,8	273,10	58,83	+ 0,030	+ 0,574
1883,0	274,36	59,92	+ 0,044	+ 0,574
1890,4	275,27	60,83	+ 0,054	+ 0,585
2903,1	277.58	62,60	+ 0,081	+ 0,603

dove si ha:

$$4) \qquad x = \text{tang}\,\frac{D}{2}\cos(\alpha - 270 \quad ; \quad y = \text{tang}\,\frac{D}{2}\,\text{sen}\,(\alpha - 270)\,.$$

7. L'equazione approssimata della curva luogo dei punti $x\,y$ è un cerchio di equazione:

$$(1) \qquad (x - 0{,}453)^2 + (y - 0{,}152)^2 = (0{,}165)^2.$$

Ne segue che il polo P dell'orbita del satellite descrive sulla sfera celeste, con grande approssimazione, un cerchio avente per centro il punto S di coordinate $\alpha = 288°$ e $\delta = 40°$; e per raggio $r = 16°$ circa.

Se si ammette che S sia il polo dell'equatore di Nettuno, l'inclinazione del piano dell'orbita del satellite sul piano equatoiiale di Nettuno sarebbe di 16° circa.

Questi risultati, come vedremo, sono assai differenti da quelli ottenuti dal Tisserand [1]. Per non protrarre eccessivamente questa Nota preliminare, mi limiterò soltanto a citare le recentissime osservazioni del Barnard [2], del Rice e Hammon [3], del Wirtz [4], molte delle quali non sono ancora discusse.

8. Messo ormai fuori di dubbio il movimento del polo dell'orbita del satellite, resta da indagarne le cause. Il Tisserand [5] *ha creduto scorgerle nel rigonfiamento equatoriale di Nettuno*, troppo piccolo per essere esatta-

[1] Comptes rendus de l'Académie des sciences, CVII e CXVIII.
[2] Astronomical Journal, n. 581.
[3] Astronomical Journal, n. 574.
[4] Astronomische Nachrichten, 4035.
[5] Op. cit. e *Mécanique céleste*, IV, pag. 141 e segg.

mente misurabile con i nostri strumenti [1], ma forse sufficiente a produrre notevoli perturbazioni.

Dai suoi calcoli risulterebbe che l'orbita del satellite è inclinata sul piano equatoriale di Nettuno di un angolo i compreso tra 32° e 88°, mentre, secondo la discussione del Dyson, i risulterebbe di circa 16°.

I calcoli del Tisserand debbono quindi, in ogni caso, essere ripresi su basi più sicure.

Ma vi è di più. *Sembra che Hermann Struve dubitasse, almeno in parte, della spiegazione del Tisserand*, giacchè egli, pure ammettendo la possibilità dell'ipotesi ora accennata, assegna senza specificare, come causa di questo movimento, l'esistenza di una massa perturbatrice.

« ... *Deren Ursache* — egli dice — *in einer störenden Masse zu suchen ist, welche in einer gegen die Trabantenbahn geneigten Ebene liegt* » [2].

8. Partendo da questo concetto, io mi sono proposto la seguente questione: « *È possibile di spiegare le perturbazioni secolari (le sole fin qui conosciute)* « *del satellite di Nettuno, ammettendo l'esistenza di un secondo satellite,* « *la cui massa sia tanto piccola da sfuggire alle nostre osservazioni?* ».

Questo problema, la cui importanza è manifesta, non è stato fin qui esaminato da alcuno.

Se la risposta sarà negativa, allora l'ipotesi del Tisserand acquisterà un alto grado di probabilità; se invece essa fosse affermativa, allora dovremo discutere con la massima cura le osservazioni dell'ultimo ventennio, per dedurne, in quanto è possibile, anche le perturbazioni periodiche onde risalire agli elementi del secondo satellite perturbatore.

È quel che faremo in altre Note, che spero di far apparire tra breve.

(1) Le osservazioni fatte da Hermann Struve (Mem. cit.) col grande equatoriale di Poulkowo sui diametri di Nettuno, ci dànno, per due angoli di posizione differenti di 90°, i valori $\delta_1 = 2'',183$ e $\delta_2 = 2'',238$. Il logaritmo della distanza ϱ è 1,4742. Inutile di aggiungere che queste osservazioni sono molto incerte, tanto più che sembra che anche la colorazione del campo vi abbia grande influenza. Hermann Struve trova infatti, col campo *giallo*, 2''.120; col campo *rosso chiaro* 2''.197; col campo *rosso oscuro*, 2''.273.

E. E. Barnard nelle sue osservazioni sulla forma di Nettuno, fatte all'osservatorio Lick nel 1894-95 col grande rifrattore di 36 pollici, non notò alcuno schiacciamento apprezzabile. Ad un simile risultato, giunse anche il Wirtz, dell'osservatorio di Strasburgo, il quale, malgrado molte ricerche, non potè stabilire una differenza sensibile tra i varî diametri del pianeta.

Dobbiamo infine notare le recentissime osservazioni del prof. G. Abetti, fatte in Roma, all'osservatorio del Collegio Romano, con l'equatoriale Steinheil-Cavignato di 38 cm. Esse sono state pubblicate in un importante lavoro (Memorie della Soc. degli Spettr. Ital. 1912, I), dove il prof. Abetti discute tutte le osservazioni già pubblicate sull'argomento. L'autore esamina anche l'influenza dell'apertura e dell'amplificazione dello strumento sul diametro osservato, e costruendo opportuni diagrammi, giunge infine al valore 2'',29 riferendosi sempre alla distanza media del pianeta.

(2) Memoria citata.

Meccanica. — *Sulle distorsioni dei sistemi elastici piani più volte connessi.* Nota di G. Colonnetti, presentata dal Socio V. Volterra.

È noto che pei sistemi elastici piani *due volte connessi* il prof. Volterra ha dimostrata l'esistenza di una coppia di assi ortogonali tali che, relativamente ad essi, ciascuna distorsione elementare, la quale conservi il sistema nel suo piano, produce il solo sforzo coniugato [1].

Questo teorema sussiste inalterato *qualunque sia il grado iniziale* n *di connessione del sistema*, con la sola avvertenza che, siccome a tagli non equivalenti corrispondono in generale coppie diverse di assi, così, quando n è maggiore di uno, si vengono a definire nel piano tante di queste coppie quante sono le distorsioni indipendenti a cui il sistema può essere assoggettato.

Immaginiamo infatti di prendere in considerazione uno qualunque degli $n-1$ tagli che rendono il sistema dato semplicemente connesso. Poichè per ipotesi, dopo la distorsione il sistema deve restar piano, il moto relativo delle due faccie del taglio che lo caratterizza si può considerare come una rotazione (piccolissima) attorno ad un punto O del piano. Per altra parte il sistema di tensioni che per effetto della distorsione stessa si generano in corrispondenza del taglio, ammetterà sempre una risultante la cui linea di azione r (propria od impropria) giacerà alla sua volta nello stesso piano.

Ed è chiaro che, ammesse le solite ipotesi fondamentali della teoria dell'elasticità, mentre la grandezza di questa risultante deve dipendere (linearmente) dall'ampiezza di quella rotazione, la posizione della sua linea di azione r non può dipendere che dalla posizione del punto O.

Di qui una corrispondenza *biunivoca* tra i punti O e le rette r del piano dato; punti e rette che, per brevità, noi denomineremo rispettivamente coi nomi *di centri* e di *assi di distorsione.*

È facile constatare che *il centro e l'asse di una stessa distorsione non possono mai appartenersi.* Ed invero se l'asse di una distorsione potesse passar pel suo centro l'energia elastica del sistema deformato dovrebbe esser nulla, ciò che non può verificarsi se non è nulla in ogni punto la deformazione.

[1] Cfr. Volterra, *Sur l'équilibres des corps élastiques multiplement connexes.* Ann. éc. norm., (3), vol. XXIV, pag. 513.

Si può poi dimostrare che *se il centro di una distorsione giace sull'asse di un'altra, il centro relativo a questa appartiene all'asse della prima.* Infatti se l'asse della seconda distorsione passa pel centro della prima, il lavoro che gli sforzi relativi a questa distorsione farebbero qualora nel sistema si verificasse la seconda, riesce identicamente nullo. Per il teorema di Volterra sulla reciprocità fra due distorsioni di uno stesso sistema elastico ([1]), deve allora esser nullo anche il lavoro che gli sforzi relativi alla seconda distorsione farebbero qualora venisse realizzata la prima: il che ovviamente richiede che l'asse di questa passi pel centro dell'altra.

La corrispondenza fra i centri O e gli assi r è dunque una reciprocità priva di elementi uniti.

Il centro, certamente proprio, di questa reciprocità è anche il centro attorno a cui avviene la rotazione relativa delle due faccie del taglio nella distorsione che ha per asse la retta all'infinito del piano, cioè per sforzo caratteristico una coppia.

Per tale centro passano tutti gli assi delle distorsioni che hanno il loro centro all'infinito, nelle quali cioè il moto relativo delle due faccie del taglio si riduce ad una semplice traslazione. E nel fascio da essi formato, detti assi corrispondono alle direzioni delle rispettive traslazioni in una proiettività (prodotto dell'involuzione in esso determinata dalla data reciprocità per l'involuzione ortogonale) la quale ammette sempre due (ed in generale due sole) coppie di elementi uniti disposte fra loro ad angolo retto.

Si hanno così due assi fra loro perpendicolari ciascuno dei quali caratterizza una distorsione in cui il moto relativo delle due faccie del taglio si riduce ad una traslazione nelle direzione dell'asse stesso. Rispetto ad essi sussiste adunque la proprietà che ci eravamo proposti di dimostrare.

Ma le considerazioni qui svolte ci permettono di asserire qualche cosa di più: che cioè esistono infiniti sistemi di riferimento (tra i quali quello di cui ci siamo ora occupati non è che un caso particolare) che godono della proprietà che, rispetto ad essi, ciascuna distorsione elementare non dà origine che al solo sforzo coniugato.

Ciò avviene infatti ogniqualvolta si assuma per sistema di riferimento uno degli ∞^3 triangoli autoconiugati nella reciprocità definita fra assi e centri delle distorsioni piane considerate, riguardando il moto relativo delle due faccie del solito taglio in una distorsione qualunque come risultante di tre rotazioni (perfettamente definite) attorno ai tre vertici del triangolo.

([1]) Cfr. V. Volterra, loc. cit., pag. 433.

Fisica matematica. — *Resistenza effettiva e resistenza ohmica.* Nota di A. Signorini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Tutte le volte che un filo conduttore è sede di una propagazione di onde elettro-magnetiche, si trova in ogni sua sezione normale una resistenza effettiva (rapporto tra il valore medio, rispetto al tempo, del calore di Joule, e il quadrato dell'intensità efficace) superiore alla resistenza ohmica (inversa del prodotto dell'area della sezione pel coefficente di conducibilità elettrica).

Questo fatto si può considerare come una naturale conseguenza dello *skin-effect*, cioè della tendenza che ha un campo elettro-magnetico di forte frequenza a concentrarsi negli strati superficiali del conduttore; ma non è stato finora matematicamente confermato altro che per particolari forme del filo e per particolari tipi di onde.

Scopo della presente Nota è di sopperire a questa lacuna, provando che, dato un filo conduttore sede di una propagazione di onde elettro-magnetiche, smorzate o no (compreso il caso limite che si tratti di un campo stazionario), in ogni sezione normale la resistenza effettiva non è mai inferiore alla resistenza ohmica, e risulta ad essa sempre eguale allora, e allora soltanto, che il filo sia cilindrico, il campo stazionario, e la forza elettrica costante in grandezza e sempre parallela all'asse del filo [almeno se si esclude l'esistenza, dentro il conduttore, di correnti di spostamento (1)].

§ 1. Precisando la denominazione di « filo » data al volume occupato dal nostro conduttore, ammetteremo che esso possa considerarsi come derivato da un cilindro (di sezione qualunque) per semplice deformazione del suo asse in una generica curva C: cioè, che si possa considerare come costituito dall'insieme delle posizioni assunte in una tale deformazione dalle infinite sezioni normali del cilindro (supposte invariabili di forma e invariabilmente unite alla linea che inizialmente fa da asse).

Siano: C un punto qualunque di C; z l'arco di C contato a partire da un'origine arbitraria; S la sezione normale del filo condotta per C; P un punto qualunque di S; $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ i tre vettori unitarî condotti in C rispettivamente secondo la tangente a C (nel verso delle z crescenti), secondo la normale principale (nel senso della concavità) e secondo la binormale (in modo da costituire un triedro destrorso); f e f' la flessione e la torsione di C in C.

(1) Altrimenti, subordinatamente alla condizione posta, in un conduttore cilindrico risulta possibile anche un tipo di campo elettro-magnetico non stazionario, tendente con gran rapidità a confondersi col tipo di campo stazionario specificato nel testo.

Riferito il piano di S ad un sistema di coordinate polari di origine C, assumendo la normale principale come asse polare e contando le anomalie in verso destrorso rispetto a **T**, diciamo r e ϑ i valori di tali coordinate in P. Per giungere al nostro scopo, conviene riferire le equazioni dell'elettrodinamica al sistema di coordinate curvilinee (z, r, ϑ), ciò che richiede in primo luogo la determinazione della forma ad esso relativa del quadrato dell'elemento lineare.

Essendo, colle notazioni adottate,

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{P} = \mathrm{C} + \mathbf{N}\, r \cos\vartheta + \mathbf{B}\, r \operatorname{sen}\vartheta\,,$$

per le formole di Frenet avremo, come espressione dello spostamento di P corrispondente agli incrementi infinitesimi dz, dr, $d\vartheta$ di z, r, ϑ:

$$d\mathrm{P} = \mathbf{T}(1 - fr\cos\vartheta)\,dz + \mathbf{N}(rf' \operatorname{sen}\vartheta\, dz + \cos\vartheta\, dr - r \operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta) + \\ + \mathbf{B}(-rf'\cos\vartheta\, dz + \operatorname{sen}\vartheta\, dr + r\cos\vartheta\, d\vartheta)\,.$$

In conseguenza il quadrato dell'elemento lineare nel sistema di coordinate (z, r, ϑ) sarà espresso da

$$\text{(2)} \qquad ds^2 = \{(1 - fr\cos\vartheta)^2 + r^2 f'^2\}\, dz^2 + dr^2 + r^2 d\vartheta^2 - 2r^2 f'\, dz\, d\vartheta\,.$$

Se ne deduce, in particolare, che le linee coordinate (r) sono costantemente normali, sia alle (z), sia alle (ϑ).

§ 2. Rappresentando, in generale, con

$$ds^2 = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

la forma differenziale che dà il quadrato dell'elemento lineare nel sistema di coordinate curvilinee (x_1, x_2, x_3), con a il suo discriminante, con $a^{(ik)}$ $(i, k = 1, 2, 3)$ i coefficienti della sua forma reciproca, le proiezioni ortogonali del rot di un vettore **A** secondo le normali alle superficie coordinate sono date [1] da

$$\overline{(\mathrm{rot}\, \mathrm{A})}_{n_i} = \frac{1}{\sqrt{a^{(ii)}.\, a}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} (\bar{\mathrm{A}}_{li+2} \sqrt{a_{i+2,\, i+2}}) - \frac{\partial}{\partial x_{i+2}} (\bar{\mathrm{A}}_{li+1} \sqrt{a_{i+1,\, i+1}}) \right\} \\ (i = 1, 2, 3)\,,$$

ove è rappresentata con $\bar{\mathrm{A}}_{li}$ la proiezione ortogonale di **A** sulla tangente alla linea coordinata x_i (e si sottintende di riguardare come identici valori dell'indice che differiscono per un multiplo di 3).

Pel ds^2 definito dalla (2), è

$$a = r^2(1 - fr\cos\vartheta)^2\,,$$

[1] Ved. G. Ricci e T. Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, chap. I, § 4; chap. VI, § 2. Math. Ann., LIV Band., 1 Heft.

e

$$a^{(11)} = \frac{1}{(1 - fr\cos\vartheta)^2} \qquad a^{(22)} = 1 \qquad a^{(33)} = \frac{(1 - fr\cos\vartheta)^2 + r^2 f'^2}{r^2(1 - fr\cos\vartheta)^2}$$

$$a^{(12)} = a^{(23)} = 0 \qquad a^{(13)} = \frac{f'}{(1 - fr\cos\vartheta)^2} \,.$$

Quindi le equazioni elettrodinamiche di Heaviside-Hertz

$$\begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \dfrac{4\pi\sigma}{c}\mathbf{E} = \mathrm{rot}\,\mathbf{H} \\ -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\mathbf{E} \end{cases}$$

nel sistema di coordinate curvilinee (z, r, ϑ) assumono, con evidente significato dei simboli, la forma

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial \bar{\mathrm{E}}_{n_z}}{\partial t} + \dfrac{4\pi\sigma}{c}\bar{\mathrm{E}}_{n_z} = \dfrac{1}{r}\left\{\dfrac{\partial (r\bar{\mathrm{H}}_{l_\vartheta})}{\partial r} - \dfrac{\partial \bar{\mathrm{H}}_{l_r}}{\partial \vartheta}\right\} \\ \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial \bar{\mathrm{E}}_{n_r}}{\partial t} + \dfrac{4\pi\sigma}{c}\bar{\mathrm{E}}_{n_r} = \\ = \dfrac{1}{r(1 - fr\cos\vartheta)}\left\{\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sqrt{(1 - fr\cos\vartheta)^2 + r^2 f'^2}\,\bar{\mathrm{H}}_{l_z}\right) - \dfrac{\partial}{\partial z}(r\bar{\mathrm{H}}_{l_\vartheta})\right\} \\ \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial \bar{\mathrm{E}}_{n_\vartheta}}{\partial t} + \dfrac{4\pi\sigma}{c}\bar{\mathrm{E}}_{n_\vartheta} = \\ = \dfrac{1}{\sqrt{(1 - fr\cos\vartheta)^2 + r^2 f'^2}}\left\{\dfrac{\partial \bar{\mathrm{H}}_{l_r}}{\partial z} - \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{(1 - fr\cos\vartheta)^2 + r^2 f'^2}\,\bar{\mathrm{H}}_{l_z}\right)\right\} \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial \bar{\mathrm{H}}_{n_z}}{\partial t} = \dfrac{1}{r}\left\{\dfrac{\partial (r\bar{\mathrm{E}}_{l_\vartheta})}{\partial r} - \dfrac{\partial \bar{\mathrm{E}}_{l_r}}{\partial \vartheta}\right\} \\ -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial \bar{\mathrm{H}}_{n_r}}{\partial t} = \\ = \dfrac{1}{r(1 - fr\cos\vartheta)}\left\{\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sqrt{(1 - fr\cos\vartheta)^2 + r^2 f'^2}\,\bar{\mathrm{E}}_{l_z}\right) - \dfrac{\partial}{\partial z}(r\bar{\mathrm{E}}_{l_\vartheta})\right\} \\ -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial \bar{\mathrm{H}}_{n_\vartheta}}{\partial t} = \\ = \dfrac{1}{\sqrt{(1 - fr\cos\vartheta)^2 + r^2 f'^2}}\left\{\dfrac{\partial \bar{\mathrm{E}}_{l_r}}{\partial z} - \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{(1 - fr\cos\vartheta)^2 + r^2 f'^2}\,\bar{\mathrm{E}}_{l_z}\right)\right\} \text{(1)} \end{cases}$$

(1) Si ammette implicitamente che in ogni S sia sempre $1 - fr\cos\vartheta > 0$.

Queste equazioni si possono semplificare, rilevando che, per l'osservazione finale del § 1, valgono le relazioni:

$$\overline{E}_{n_r} = \overline{E}_{l_r}$$

$$\overline{E}_{l_z} = \overline{E}_{l_\zeta} \cos(l_z\, l_\zeta) + \overline{E}_{n_z} \operatorname{sen}(l_z\, l_\zeta) = \overline{E}_{l_\zeta} \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11} \cdot a_{33}}} + \overline{E}_{n_z} \frac{\sqrt{a_{11} \cdot a_{33} - a_{13}^2}}{\sqrt{a_{11} \cdot a_{33}}} =$$

$$= \frac{-f'r\,\overline{E}_{l_\zeta} + (1 - fr\cos\vartheta)\,\overline{E}_{n_z}}{\sqrt{(1 - fr\cos\vartheta)^2 + f'^2 r^2}}$$

$$\overline{E}_{n_\zeta} = \overline{E}_{l_\zeta} \operatorname{sen}(n_\zeta\, n_z) + \overline{E}_{n_z} \cos(n_\zeta\, n_z) =$$

$$= \overline{E}_{l_\zeta} \frac{\sqrt{a^{(11)} a^{(33)} - (a^{(13)})^2}}{\sqrt{a^{(11)} a^{(33)}}} + \overline{E}_{n_z} \frac{a^{(13)}}{\sqrt{a^{(11)} a^{(33)}}} = \frac{(1 - fr\cos\vartheta)\,\overline{E}_{l_\zeta} + f'r\,\overline{E}_{n_z}}{\sqrt{(1 - fr\cos\vartheta)^2 + f'^2 r^2}}.$$

(ove al posto di **E** si può pensare sostituito **H**). Tenendo conto di esse, le (3) e (4) — ove si sottragga la $(3)_1$ [la $(4)_1$] moltiplicata per $f'r$ dalla $(3)_3$ [dalla $(4)_3$] e, per semplicità, si scriva E_n, E_r, E_ζ rispettivamente al posto di $\overline{E}_{n_z}$, $\overline{E}_{l_r}$, $\overline{E}_{l_\zeta}$ — si riducono alle seguenti:

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial E_n}{\partial t} + \dfrac{4\pi\sigma}{c} E_n = \dfrac{1}{r}\left\{\dfrac{\partial (rH_\zeta)}{\partial r} - \dfrac{\partial H_r}{\partial \vartheta}\right\} \\[2ex] \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial E_r}{\partial t} + \dfrac{4\pi\sigma}{c} E_r = \\[1ex] \qquad = \dfrac{f \operatorname{sen}\vartheta\, H_n}{1 - fr\cos\vartheta} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial H_n}{\partial \vartheta} - \dfrac{1}{1 - fr\cos\vartheta}\left\{\dfrac{\partial H_\zeta}{\partial z} + f'\dfrac{\partial H_\zeta}{\partial \vartheta}\right\} \\[2ex] \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial E_\zeta}{\partial t} + \dfrac{4\pi\sigma}{c} E_\zeta = \\[1ex] \qquad = \dfrac{1}{1 - fr\cos\vartheta}\left\{\dfrac{\partial H_r}{\partial z} + f'\dfrac{\partial H_r}{\partial \vartheta}\right\} + \dfrac{f\cos\vartheta\, H_n}{1 - fr\cos\vartheta} - \dfrac{\partial H_n}{\partial r} \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial H_n}{\partial t} = \dfrac{1}{r}\left\{\dfrac{\partial (rE_\zeta)}{\partial r} - \dfrac{\partial E_r}{\partial \vartheta}\right\} \\[2ex] -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial H_r}{\partial t} = \dfrac{f \operatorname{sen}\vartheta\, E_n}{1 - fr\cos\vartheta} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_n}{\partial \vartheta} - \dfrac{1}{1 - fr\cos\vartheta}\left\{\dfrac{\partial E_\zeta}{\partial z} + f'\dfrac{\partial E_\zeta}{\partial \vartheta}\right\} \\[2ex] -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial H_\zeta}{\partial t} = \dfrac{1}{1 - fr\cos\vartheta}\left\{\dfrac{\partial E_r}{\partial z} + f'\dfrac{\partial E_r}{\partial \vartheta}\right\} + \dfrac{f\cos\vartheta\, E_n}{1 - fr\cos\vartheta} - \dfrac{\partial E_n}{\partial r}. \end{cases}$$

§ 3. Nell'intervallo di tempo $(t, t + \tau)$, il valor medio del calore di Joule, sviluppantesi nel tratto di filo limitato dalla sezione normale S e

da una sezione ad essa parallela condotta alla distanza (infinitesima) dn, è dato da

$$dQ = \frac{\varDelta n\sigma}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_S E^2 dS$$

in modo che, posto

$$Q_s = \frac{dQ}{dn}$$

si ha:

$$Q_s = \frac{\sigma}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_S \{ E_n^2 + E_r^2 + E_\vartheta^2 \} dS . \tag{7}$$

Come espressione del quadrato dell'intensità efficace della corrente si ha poi

$$J_{eff}^2 = \frac{\sigma^2}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \left(\int_S E_z \, dS \right)^2 . \tag{8}$$

Dovendo, per una ben nota formola di Schwarz, essere

$$\left(\int_S E_z \, dS \right)^2 \leq S \int_S E_z^2 dS ,$$

dal confronto delle (7) e (8) risulta immediatamente

$$\frac{Q_s}{J_{eff}^2} \geq \frac{1}{\sigma S} , \tag{9}$$

ciò che prova che in qualunque sezione normale del filo (ed anche, evidentemente, in qualunque altra sezione) la resistenza efficace $\left(= \frac{Q_s}{J_{eff}^2} \right)$ non sarà mai inferiore alla resistenza ohmica $\left(= \frac{1}{\sigma S} \right)$. Le due resistenze coincideranno, cioè nella (9) varrà il segno $=$, allora e allora soltanto che, ad ogni istante, in ogni punto di S sia

$$E_r = E_\vartheta = 0 \tag{10}$$

e al tempo stesso valga l'eguaglianza

$$\left(\int_S E_n \, dS \right)^2 = S \int_S E_n^2 \, dS , \tag{11}$$

la quale richiede, per esser soddisfatta [1], che E_n abbia lo stesso valore in tutti i punti di S (cioè sia indipendente da r e ϑ).

[1] Infatti, se la (11) è verificata, certamente è possibile di soddisfare l'equazione di 2° grado in x:

$$Sx^2 + 2 \int_S E_n \, dS \, x + \int_S E_n^2 \, dS = 0$$

§ 4. Vediamo di determinare tutti i casi in cui le (10) e (11) sono contemporaneamente soddisfatte in ogni sezione normale di un tratto (non infinitesimo) T del nostro conduttore. Se in T è ad ogni istante:

$$E_z = E_r = \frac{\partial E_n}{\partial r} = \frac{\partial E_n}{\partial \vartheta} = 0,$$

le equazioni (5), (6) si riducono alle seguenti:

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial E_n}{\partial t} + \dfrac{4\pi\sigma}{c} E_n = \dfrac{1}{r}\left\{\dfrac{\partial (rH_z)}{\partial r} - \dfrac{\partial H_r}{\partial \vartheta}\right\} \\[2ex] 0 = \dfrac{f \operatorname{sen}\vartheta\, H_n}{1 - fr\cos\vartheta} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial H_n}{\partial \vartheta} - \dfrac{\dfrac{\partial H_z}{\partial z} + f'\dfrac{\partial H_z}{\partial \vartheta}}{1 - fr\cos\vartheta} \\[2ex] 0 = \dfrac{f\cos\vartheta\, H_n}{1 - fr\cos\vartheta} - \dfrac{\partial H_n}{\partial r} + \dfrac{\dfrac{\partial H_r}{\partial z} + f'\dfrac{\partial H_r}{\partial \vartheta}}{1 - fr\cos\vartheta} \end{cases}$$

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial H_n}{\partial t} = 0. \\[2ex] -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial H_r}{\partial t} = \dfrac{f\operatorname{sen}\vartheta\, E_n}{1 - fr\cos\vartheta} \\[2ex] -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial H_z}{\partial t} = \dfrac{f\cos\vartheta\, E_n}{1 - fr\cos\vartheta} \end{cases}$$

Derivando la $(12)_1$ rispetto a t, e tenendo conto delle $(13)_2$ $(13)_3$ si trova

$$\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial E_n}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} E_n\right\} = -\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{fr\cos\vartheta\, E_n}{1 - fr\cos\vartheta}\right) - \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{f\operatorname{sen}\vartheta\, E_n}{1 - fr\cos\vartheta}\right)\right\},$$

cioè, posto

$$\theta = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma} = \text{tempo di rilassamento},$$

$$\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial E_n}{\partial t} + \frac{E_n}{\theta}\right\} = \frac{-f^2 E_n}{(1 - fr\cos\vartheta)^2}.$$

---

con un (ed uno solo) valore reale di x o, ciò che è lo stesso, è possibile di determinare una quantità x reale e indipendente da r e ϑ, in modo che si annulli l'integrale

$$\int_S (E_n + x)^2\, dS.$$

Poichè E_n non dipende nè da r, nè da ϑ, quest'eguaglianza non potrà essere verificata altro che quando, in T,

1°) la flessione della direttrice sia sempre nulla (cioè il filo sia cilindrico);

2°) si abbia costantemente:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E_n}{\partial t}+\frac{E_n}{\theta}\right)=0.$$

Ma se è $f=0$, posto, come allora è lecito, $f'=0$ [1], dalle (12) segue anche

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_n}{\partial t}+\frac{E_n}{\theta}\right)=0,$$

e dalle (13)

$$\frac{\partial H}{\partial t}=0.$$

Se ne conclude che, supposto pure che il filo sia cilindrico, la resistenza efficace coinciderà colla resistenza ohmica (allora e allora soltanto) che sia:

1°)
$$\mathbf{E}=\left\{ e_n+e_n^{(z)}\, e^{-\frac{t}{\theta}} \right\}\mathbf{T},$$

ove e_n, $e_n^{(z)}$ sono quantità indipendenti da t, la prima delle quali non dipende neppure da z;

2°)
$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi\sigma}{c}\,e_n\,\mathbf{T},$$

cioè

$$\mathbf{H}=\operatorname{grad}\psi+\frac{2\pi\sigma}{c}\,e_n\,\mathbf{T}\wedge(P-C),$$

ove lo scalare ψ non dipende dal tempo e soddisfa alla condizione

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi=\operatorname{div}\mathbf{H}=0.$$

§ 5. Limitandosi fin da principio alla considerazione di campi elettromagnetici stazionarî, si può arrivare, in modo più semplice, a determinare le condizioni sotto cui accade che la resistenza efficace coincida colla resistenza ohmica. Se il campo è stazionario, detto φ il suo potenziale scalare, sarà

$$E_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\qquad E_\vartheta=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta},$$

[1] Con ciò le linee (z) si riducono a rette parallele all'asse del conduttore.

onde, se sono verificate le (10), φ non potrà dipendere altro che da z. In conseguenza avremo

$$E_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}} \cos(l_z n_z)} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}} \operatorname{sen}(l_z l_{\tilde{z}})} \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

cioè

$$E_n = \frac{1}{1 - fr \cos \vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Evidentemente questa eguaglianza non è compatibile colla (11) altro che quando sia $f = 0$. Ciò porta immediatamente a conclusioni che coincidono con quelle del § precedente, riferite al caso limite $\theta = 0$.

§ 6. Prima di terminare sarà forse opportuno richiamare l'attenzione del lettore sul fatto che la resistenza effettiva di un tratto di filo conduttore limitato da due sezioni normali può, se il filo non è rettilineo, risultare inferiore alla sua resistenza ohmica [1]: questo, perchè nella presente ricerca non appaia come una restrizione inutile o ingiustificata l'aver riferito resistenza effettiva e resistenza ohmica ad una sezione normale del filo (cioè, sostanzialmente, a un tratto di filo limitato da una sezione normale e da una sezione ad essa parallela e infinitamente prossima).

Matematica. — *Sulle soluzioni fondamentali delle equazioni integro-differenziali.* Nota I di N. Zeilon, presentata dal Socio V. Volterra.

1. Nella sua Memoria sulle equazioni integro-differenziali il prof. Volterra [2] ne inizia lo studio sistematico coll'applicare il metodo di Green all'equazione tipica di genere ellittico:

$$\text{(I)} \qquad Au = \frac{\partial^2 u(t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(t)}{\partial z^2} + \\ + \int \left[\frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f(t,\tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} \varphi(t,\tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2} \psi(t,\tau) \right] d\tau = 0.$$

Il primo problema che si incontra consiste nel formare la *soluzione fondamentale* della (I), la quale viene calcolata, nella detta Memoria, me-

[1] V. A. Signorini, *Sulla propagazione di onde elettromagnetiche in un conduttore toroidale* (Questi Rend., vol. XXIV, ser. 5ª, 1° sem.).

[2] *Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications.* Acta math., tom 35.

diante uno sviluppo in serie. In questa breve Nota mi permetto di trattare lo stesso problema con un metodo che si applica in casi assai generali d'equazioni alle derivate parziali [1]. Ottengo, nel caso dell'equazione (I), un'espressione di forma differente da quella del Volterra, ma l'identità dei resultati si prova senza difficoltà.

2. Procedendo come se si trattasse di un'equazione differenziale a coefficienti costanti, sostituiamo alla (I) la stessa equazione

$$\text{(II)} \qquad \mathrm{A}u = \varrho(x, y, z; t)$$

con un secondo membro, funzione arbitraria di x, y, z, t, e cerchiamone una soluzione qualunque, scritta nella forma

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{T} \varrho(\lambda, \mu, \nu; \tau)\, \mathrm{F}(x-\lambda, y-\mu, z-\nu | t, \tau)\, d\lambda\, d\mu\, d\nu\, d\tau .$$

Chiamiamo, per analogia, F l'*integrale fondamentale* dell'equazione (I).

Nel metodo ricordato si sostituisce alla funzione ϱ la sua rappresentazione mediante l'integrale multiplo del Fourier. Seguendo questa idea, poniamo:

$$(1) \qquad \varrho = \frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(\lambda, \mu, \nu; t)\times$$
$$\times\, e^{i(\alpha(x-\lambda)+\beta(y-\mu)+\gamma(z-\nu))}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu ,$$

e si vede che la risoluzione della (II) viene ridotta a quella dell'equazione

$$\mathrm{A}u = \varrho(\lambda, \mu, \nu; t)\, e^{i(\alpha(x-\lambda)+\beta(y-\mu)+\gamma(z-\nu))} ,$$

di cui la soluzione sia

$$u = x(\alpha, \beta, \gamma; \lambda, \mu, \nu; t) = x(t) .$$

Troviamo:

$$(2) \qquad x(t) + \frac{1}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\int (\alpha^2 f + \beta^2\varphi + \gamma^2\psi)\, x(\tau)\, d\tau =$$
$$= -\frac{1}{8\pi^3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}\cdot \varrho(\lambda, \mu, \nu; t) ,$$

equazione integrale in cui possiamo supporre il limite superiore o variabile (tipo del Volterra) o costante (tipo del Fredholm).

[1] Vedi Zeilon, *Das Fundamentalintegral der allgemeinen linearen partiellen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten*, Arkiv f. Mathematick, Astronomie u. Fysik, Stocolma 1911; *Sur les intégrales fondamentales des équations à caractéristique réelle de la physique mathématique*, Arkiv f. Matematik ecc., Stocolma 1913.

3. Sia $D'(\alpha, \beta, \gamma | t, \tau)$ il nucleo risolvente dell'equazione (2); avremo:

$$(3) \qquad x(t) = \frac{-1}{8\pi^3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} \times$$
$$\times \left(\varrho(\lambda, \mu, \nu; t) + \int D'(\alpha, \beta, \gamma | t, \tau)\, \varrho(\lambda, \mu, \nu; \tau)\, d\tau \right),$$

relazione che più comodamente si scrive

$$(3') \qquad x(t) = \frac{-1}{8\pi^3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} \int D(\alpha, \beta, \gamma | t, \tau)\, \varrho(\lambda, \mu, \nu; \tau)\, d\tau$$
$$D = \varepsilon(t, \tau) + D',$$

denotando con $\varepsilon(t, \tau)$ una funzione (definita mediante un'espressione di limite conveniente) soggetta alla condizione che

$$\int \varepsilon(t, \tau)\, \varrho(\lambda, \mu, \nu; \tau)\, d\tau = \varrho(\lambda, \mu, \nu; t).$$

La soluzione della (II) si scrive adesso:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha, \beta, \gamma; \lambda, \mu, \nu; t) \times$$
$$\times e^{i[\alpha(x-\lambda) + \beta(y-\mu) + \gamma(z-\nu)]}\, d\alpha\, d\beta \ldots d\nu,$$

e si forma evidentemente nel modo desiderato per mezzo d'un integrale fondamentale F, la cui espressione, scrivendo x invece di $x - \lambda$ ecc., sarà la parte reale di

$$(\text{III}) \qquad F(x, y, z | t, \tau) =$$
$$= -\frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{D(\alpha, \beta, \gamma | t, \tau)}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

4. La convergenza dell'integrale (III) può discutersi come nei casi analoghi delle equazioni differenziali di tipo ellittico. Si osserva che c'è una singolarità nel punto $\alpha = \beta = \gamma = 0$; quindi bisogna definire un valore principale evitando questa singolarità, il che può farsi in modi diversi. Supponiamo, per es., che la integrazione rispetto a γ si eseguisca fra $-\infty$ e $-\delta$, e fra $+\delta$ e $+\infty$, δ essendo una piccola quantità positiva: invece di (III), prendiamo il limite per $\delta = 0$ dell'espressione risultante.

Nel caso d'un'equazione del tipo del Volterra, la convergenza è accertata, D essendo allora una funzione sempre finita, almeno per i valori finiti delle α, β, γ. Ora l'equazione (2) fa vedere che D è funzione omogenea,

d'ordine zero, di α, β, γ; quindi la funzione sotto il segno $\int$ si comporta, per i valori grandi di α, β, γ, come la funzione

$$\frac{1}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2},$$

e la convergenza dell'integrale (III) risulta dalla convergenza dell'integrale conosciuto:

$$-\frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma=\frac{-1}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Al contrario, nel caso d'un'equazione (2) del tipo del Fredholm, la D' potrà possedere dei poli reali, di modo che la definizione del valore principale dovrebbe forse modificarsi.

5. L'espressione (III) si semplifica con un calcolo in cui interviene la omogeneità della funzione D. Osservando che essa è una funzione reale, la quale contiene γ alla seconda potenza, abbiamo facilmente:

$$F=-\frac{1}{4\pi^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{D(\alpha,\beta,\gamma\,|\,t,\tau)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\cos(\alpha x+\beta y+\gamma z)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,;$$

e scrivendo $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$ invece di α, β, troviamo:

$$F=-\frac{1}{4\pi^3 x}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{D(\alpha,\beta,1\,|\,t,\tau)}{\alpha^2+\beta^2+1}\cos\gamma(\alpha x+\beta y+z)\,d(\alpha x)\,d\beta\,d\gamma\,.$$

Ma adesso la integrazione rispetto ad αx e γ si riguardi come costituente un integrale doppio del Fourier, di modo che

$$\text{(IV)}\qquad F=-\frac{1}{4\pi^2 x}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{D\left(-\frac{\beta y+z}{x},\beta,1\,|\,t,\tau\right)}{\left(\frac{\beta y+z}{x}\right)^2+\beta^2+1}\,d\beta\,,$$

integrale semplice che richiede la conoscenza del nucleo risolvente dell'equazione integrale

$$\text{(4)}\qquad x(t)+\frac{1}{\left(\frac{\beta y+z}{x}\right)^2+\beta^2+1}\times$$
$$\times\int\left[\left(\frac{\beta y+z}{x}\right)^2 f+\beta^2\varphi+\psi\right]x(\tau)\,d\tau=\mu(t)\,.$$

Matematica. — *Il teorema del valor medio.* Nota di Guido Fubini, presentata dal Socio C. Segre.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Un generatore invertibile per correnti continue, senza collettore nè contatti striscianti* (1). Nota di O. M. Corbino e G. C. Trabacchi, presentata dal Socio P. Blaserna.

In una Nota presentata nella precedente Seduta abbiamo dimostrato che con un indotto di speciale costruzione debbono verificarsi i seguenti fatti:

1°) L'indotto deve ruotare in un campo magnetico, sviluppando una coppia costante, qualora sia attraversato da una corrente continua inviata tra gli estremi puntiformi dell'albero; e la sua rotazione non si inverte invertendo il campo.

2°) Tenendo in rotazione l'indotto in un campo uniforme di qualsiasi senso si svilupperà una forza elettromotrice costante che può raccogliersi tra gli estremi dell'albero, e cioè senza nè collettore, nè contatti striscianti.

3°) Questa f. e. m. può ugualmente ottenersi tenendo fisso l'indotto in un campo ruotante, il che rende possibile ottenere da correnti polifasiche una corrente continua, per induzione elettromagnetica, senza organi in movimento.

***

1°) Per ottenere la verifica sperimentale della prima proprietà si è proceduto nel modo seguente:

Tra due punte di centro P e Q (fig. 1) può ruotare un asse costituito da due cilindretti di ottone *m* ed *n* riuniti meccanicamente (ma isolati elettricamente) da un manicotto di ebanite, le cui estremità sono filettate in modo da permettere di avvitarvi i due dadi, pure di ebanite, *d* e *d'*.

Mediante questi dadi si possono fissare all'asse, ortogonalmente fra loro, due telai costituiti ciascuno nel modo seguente. Con una lamina di rame dello spessore di cm. 0,2 si è costruito un telaio rettangolare di cm. 3,6 × 7,4 sostituendo però, nel centro di uno dei due lati maggiori e per un tratto lungo cm. 3, una laminetta di bismuto al rame.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Roma.

I lati minori sono stati foggiati in modo (fig. 2), che i detti telai potessero essere montati sull'asse descritto, stringendoli tra i dadi di ebanite d e d'; delle lamine di mica li isolavano fra loro. Due nastri di rame A e B (fig. 1), che partono dagli estremi r ed s delle due parti isolate dall'asse fanno capo ai centri N ed M′ (fig. 3) dei due lati liberi più lontani delle due laminette di bismuto, mentre un altro nastro di rame riunisce i

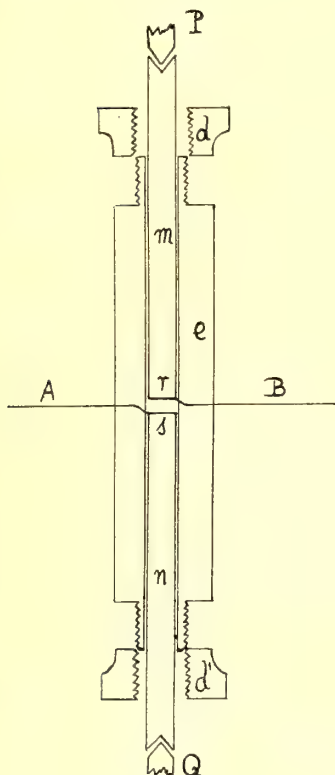
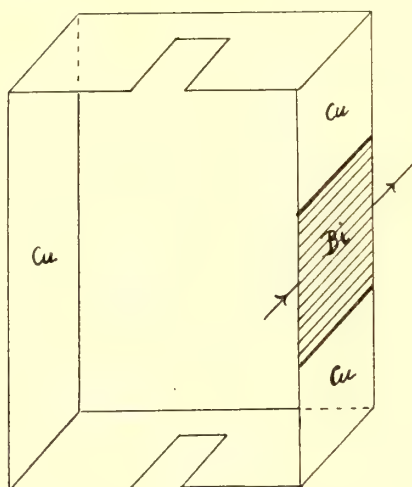



Fig. 1. Fig. 2.

centri dei due lati più vicini in modo che *una corrente proveniente dalla parte superiore dell'asse attraversa le due lamine tra i centri dei loro lati liberi, e torna alla parte inferiore dell'asse*; *il nastro si svolge in un piano normale all'asse di rotazione del sistema*. In virtù di quanto fu dimostrato nella precedente Nota tale sistema, che è rappresentato nella figura 4, è soggetto, in un campo perpendicolare al suo asse di rotazione, ad una coppia costante il cui senso è indipendente dalla direzione del campo. E infatti l'esperienza prova che si ottiene una rotazione continua e uniforme che non muta di senso invertendo il campo.

Il movimento dell'apparecchio viene fortemente frenato dalle correnti indotte che si sviluppano nei telai e che dànno luogo, come è facile rico-

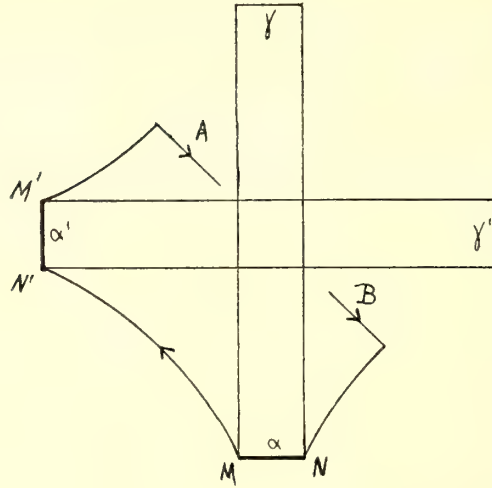



Fig. 3.

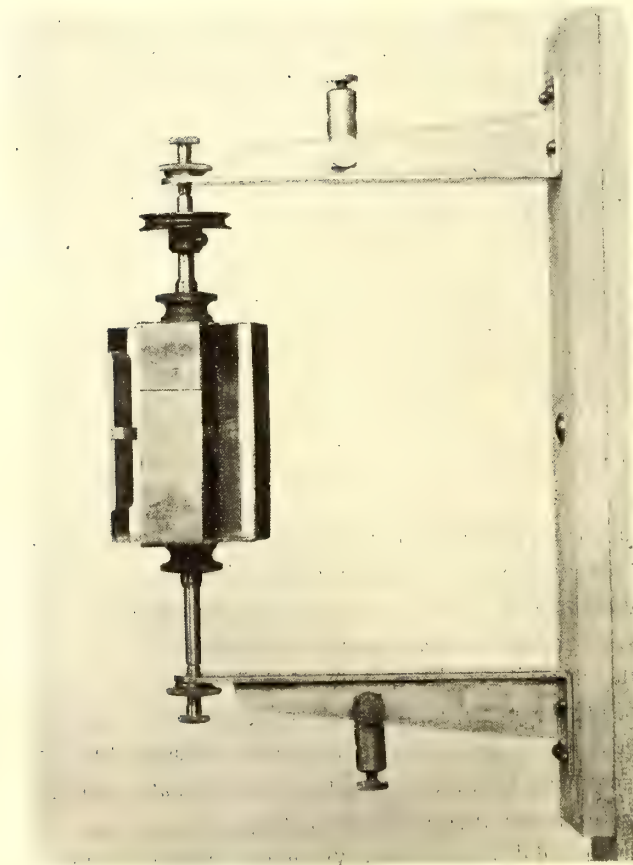



Fig. 4.

noscere, a una coppia resistente, il cui valore aumenta con la velocità di rotazione.

Infatti, supposto che il sistema dei telai ruoti con velocità angolare ω, ognuno di essi sarà sede di una corrente indotta proporzionale alla derivata del flusso N che lo attraversa. La f. e. m. che genera questa corrente sarà:

$$e = -\frac{dN}{dt},$$

mentre si ha d'altra parte, indicando con ϑ l'angolo formato (fig. 5) dalla normale al telaio col campo, e con S la superficie del telaio

$$N = SH \cos \vartheta = SH \cos \omega t .$$

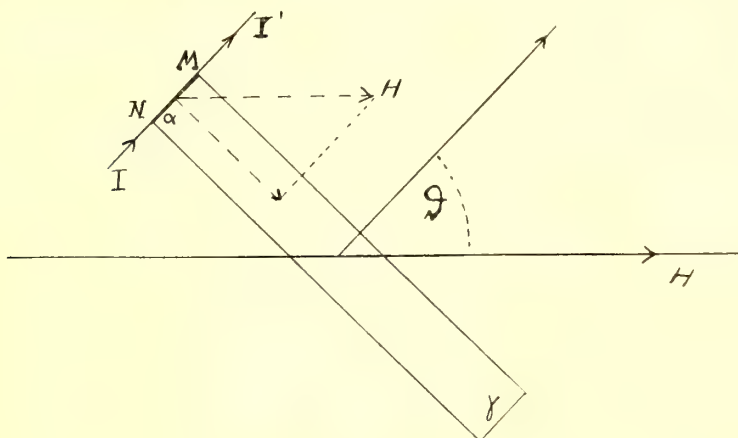



Fig. 5.

Se chiamiamo r la resistenza della lastrina e si trascura la resistenza della parte in rame di ciascun telaio di fronte a quella della lastrina di bismuto, avremo che l'intensità i della corrente indotta dal movimento sarà:

$$i = \frac{1}{r} SH\omega \operatorname{sen} \omega t = \frac{1}{r} SH\omega \operatorname{sen} \vartheta .$$

Il lavoro dW necessario per una rotazione $d\vartheta$ sarà perciò

$$dW = i \frac{dN}{dt} d\vartheta = -\frac{1}{r} SH\omega \operatorname{sen} \vartheta \,.\, SH \operatorname{sen} \vartheta \,.\, d\vartheta$$

$$= -\frac{1}{r} S^2H^2 \omega \operatorname{sen}^2 \vartheta \, d\vartheta .$$

La coppia resistente sarà dunque, in valore assoluto,

$$C_1 = \left| \frac{dW}{d\vartheta} \right| = \frac{1}{r} S^2H^2\omega \operatorname{sen}^2 \vartheta .$$

Una coppia C_2 sarà richiesta dall'altro telaio, e il suo valore sarà evidentemente

$$C_2 = \frac{1}{r} S^2 H^2 \omega \cos^2 \vartheta .$$

La coppia resistente totale sarà adunque

$$C = \frac{1}{r} S^2 H^2 \omega$$

e, come si vede, anche questa coppia è indipendente dalla posizione dei due telai rispetto al campo.

Nelle condizioni da noi realizzate era molto intensa la coppia motrice, e altrettanto elevata quella resistente, in modo da poter ritenere trascurabile l'ostacolo al moto derivante dagli attriti.

La velocità raggiunta si può calcolare eguagliando perciò la coppia motrice da noi calcolata nella precedente Nota, e la resistente, non tenendo conto, in prima approssimazione, dell'ostacolo prodotto dalle correnti di Foucault nella massa del rame costituente i telai. Si ha così:

$$KSH^2 I = \frac{1}{r} S^2 H^2 \omega ,$$

e perciò

$$\omega = \frac{KIr}{S}$$

La costante K dipende, come si disse nel lavoro citato, dal momento ionico differenziale E del metallo e dalle dimensioni della laminetta.

Si ha all'incirca:

$$K = E \frac{a}{l}$$

dove a è la larghezza, ed l la lunghezza della laminetta. Si può così prevedere che con una lamina di un metallo avente una resistenza specifica più elevata del bismuto, e una costante E non troppo minore, la velocità raggiunta possa essere maggiore. La coppia è però massima col bismuto: nel nostro caso colla corrente di una unità elettromagnetica, e un campo di 6000 Gauss, la coppia aveva il valore rilevante di 20000 dine-centimetro, o di circa 20 grammi-centimetro. Nell'apparecchio poteva mandarsi senza inconvenienti una corrente di 3 unità e. m.; ne risultava una coppia di circa 59 grammi-centimetro.

*
* *

Come prevede la teoria, se con un motore si mette in rotazione l'indotto (che a tale scopo porta sull'asse una puleggia) in un campo magne-

tico *sia continuo, che alternativo*, si ottiene una forza e. m., costante nel primo caso, pulsante nel secondo, il cui senso dipende unicamente dal senso di rotazione.

Il valore della f. e. m. fu misurato in corrispondenza della velocità di tre giri al secondo impressa all'apparecchino e in un campo costante di 6000 Gauss; e fu trovata pari a millivolt 4,3. La velocità potè essere accresciuta fino a raggiungere una forza e. m. di 18 millivolt; chiudendo allora l'apparecchio in corto circuito su un amperometro si ottenne una corrente continua superiore a un decimo di ampere.

***

Per verificare la terza proprietà dell'indotto, ci siamo serviti di un campo Ferraris, ottenuto con un avvolgimento a stella, alimentato da cor-

Fig. 6.

renti trifasi, ed eseguito, come di solito, intorno ad un anello di lamina di ferro. Nelle cavità di detto anello poteva introdursi un indotto simile a quello descritto, ma costituito da tre anzichè da due telai, disposti a 60° l'uno dall'altro, e riempiti nella parte corrispondente al bismuto di lamine di ferro, allo scopo di intensificare il campo là dove ciò era utile (fig. 6).

I telai erano isolati con mica tra loro e dalla carcassa di ferro. Un cordone di rame saldato agli estremi del nastro che riunisre i centri dei lati liberi delle lamine di bismuto, si poneva in comunicazione con un voltometro Weston, dove si leggeva direttamente la f. e. m. costante sviluppata.

La velocità di rotazione del campo era nota, essendo nota la frequenza della corrente che lo alimentava.

Con una velocità del campo pari a circa 54 giri per secondo, la f. e. m. continua e costante ottenuta era di circa 5 millivolt. Questa esperienza

può rendersi molto suggestiva tenendo l'indotto a notevole distanza dall'anello che produce il campo rotante, e constatando la f. e. m. continua prodotta con un galvanometro sensibile, di bassa resistenza. Riesce così molto facile il verificare che tutto intorno all'anello, e a notevole distanza, è possibile ricavare una corrente continua per induzione, e che la sua direzione si inverte quando si inverte la rotazione del campo o rovesciando la corrente in una delle fasi, ovvero avvicinandosi all'anello dall'esterno anzichè dall'interno di esso.

***

Abbiamo già enunciato nel lavoro precedente che fenomeni analoghi, per quanto in scala più ridotta, debbono potersi ottenere ricorrendo a telai omogeni di qualunque metallo per il quale la costante E non sia troppo bassa.

Effettivamente noi abbiamo potuto riprodurre la terza esperienza (per cui la costruzione dell'indotto è più agevole), ricorrendo a un sistema di telai costruiti interamente in rame. Mentre questo metallo presenta una costante Hall che è appena $\frac{1}{10000}$ di quella del bismuto, la costante per gli effetti elettromagnetici è solo $\frac{1}{150}$ della corrispondente nel bismuto. Ed infatti l'apparecchino ha dato i risultati che si potevano prevedere riducendo circa a $\frac{1}{150}$ ciò che si era ottenuto col bismuto.

Fisica. — *Motore termico fondato sulla rotazione che subisce un disco di bismuto riscaldato al centro o alla periferia, nel campo magnetico.* Nota di L. Tieri, presentata dal Socio V. Volterra.

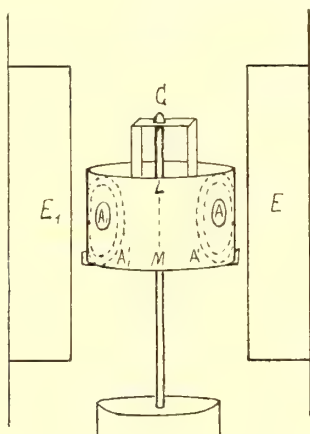
Nel 1911, in una riunione della Società italiana di fisica (sezione di Roma), il prof. Corbino espose e illustrò con l'esperienza la proprietà di un disco di bismuto di orientarsi nel campo magnetico quando è riscaldato al centro o alla periferia [1]. Il prof. Volterra faceva notare, come disponendo opportunamente delle sorgenti calde e fredde intorno a un sistema di dischi, *si dovesse realizzare un movimento continuo di rotazione in modo da costituire una vera e propria macchina termica avente una sorgente calda e un refrigerante.* L'esperienza fu fatta dal prof. Corbino con due dischi di bismuto aventi lo stesso centro e disposti a 90° fra loro; ma il risultato fu negativo, sia perchè nei dischi si formavano delle intense correnti di

(1) Rend. Acc. Lincei, 5ª serie, XX, 1° sem. 1911, pag. 569.

Foucault che si opponevano al moto, dato il grande spessore dei dischi stessi, sia perchè si incontrarono delle difficoltà pel riscaldamento e raffreddamento dei dischi, sia perchè ad ogni rotazione di 90 gradi si passava per un punto morto, che il sistema rotante non riusciva a superare con l'acquistata velocità.

Sono riuscito a costruire un motorino termico fondato sul precedente concetto, nel seguente modo:

Un cilindro cavo di bismuto, del diametro di cm. 4,8, alto cm. 3,1 e dello spessore di cm. 0,05, è sorretto da un leggero sostegno di lamina di alluminio a forma di Ω che porta in C un cappelletto di agata che poggia su una punta. Il cilindro cavo di bismuto vien posto fra le espansioni po-

lari piatte E E_1 di una grande elettrocalamita Weiss, in modo che, eccitando l'elettrocalamita, il cilindro di bismuto viene a trovarsi in un campo pressochè uniforme di circa 5000 unità. Se in queste condizioni si concentra nell'area A del cilindro un fascio di raggi provenienti da una lampada ad arco, il cilindro di bismuto si pone in rotazione nel senso degli indici di un orologio se si guarda dall'alto. La velocità di rotazione del cilindro aumenta sensibilmente se l'area illuminata si estende fino alla punteggiata A'. Invertendo il campo, non si inverte il senso di rotazione. Se invece si riscalda la zona punteggiata A' con un fascio anulare, intercettando con opportuno schermo la luce nella parte centrale di tale zona, si riesce talvolta ad ottenere la rotazione del cilindro in senso contrario agli indici di un orologio se si guarda dall'alto. Moti rispettivamente contrarî ai precedenti si hanno se del cilindro di bismuto si illumina l'area A_1 o la zona punteggiata A'_1.

Perchè il riscaldamento nella regione illuminata avvenga più rapidamente, e perchè sia più rapido il raffreddamento delle altre parti del cilindro, questo è ricoperto, internamente ed esternamente, di uno strato di nerofumo.

Se si tien presente l'esperienza del Corbino col disco di bismuto, è facile rendersi conto del funzionamento dell'apparecchio. Nell'esperienza del Corbino un disco di bismuto è sospeso fra le espansioni polari di una elettrocalamita a 45° dalle linee di forza del campo, per mezzo di un filo metallico, che compensa con la sua torsione la coppia orientatrice dovuta al diamagnetismo, la quale tenderebbe a portare il disco in direzione normale alle linee di forza del campo. Inviando nel centro del disco un fascio di luce, il disco ruota disponendosi nella direzione delle linee di forza del campo: la rotazione si inverte, se del disco si scalda la periferia. La coppia è massima a 45° dalle linee di forza. Ebbene, se nel cilindro di bismuto si scalda l'area A a 45° rispetto alle linee di forza del campo, quest'area viene sollecitata a disporsi nella direzione delle linee di forza del campo, e perciò il cilindro incomincerà a ruotare nel senso degli indici di un orologio se guardato dall'alto. In A intanto si presenta una nuova zona del cilindro, la quale, riscaldata dal fascio di luce che conserva sempre la stessa direzione, sarà anch'essa sollecitata a muoversi nello stesso senso; e così via.

La velocità di rotazione del cilindro non potrà evidentemente essere grande, a causa delle correnti di Foucault che si generano nella massa di bismuto; però gli effetti di queste si riducono abbastanza piccoli se è piccolo lo spessore del bismuto. La sottigliezza del bismuto influisce probabilmente sulla velocità del cilindro, per un'altra ragione. Come ben si comprende, tale velocità dipenderà dalla differenza di temperatura fra A e A_1; e precisamente, se maggiore è questa differenza di temperatura, maggiore sarà la velocità con cui si muove il cilindro. Se le temperature in A e A_1 fossero uguali, il cilindro rimarrebbe fermo; e se la temperatura in A_1 fosse maggiore che non in A, il disco ruoterebbe in senso contrario. Ora, siccome le parti riscaldate si muovono da A verso A_1, quanto più rapido sarà il riscaldamento delle regioni del cilindro che arrivano in A, e quanto più rapido sarà il raffreddamento di quelle che se ne allontanano, tanto più rapida sarà la rotazione del cilindro. La velocità di rotazione aumenta ancora, se in un modo qualunque si favorisce il raffreddamento del cilindro a partire dalla generatrice LM (p. es., facendo sgocciolare dell'etere lungo tale generatrice); e l'effetto sarà ancora maggiore se si riscaldano l'area A e la sua opposta, e si raffreddano la zona LM e la sua opposta.

Fisica matematica. — *La verifica del principio di reciprocità di Volterra, nel caso generale.* Nota di G. Tasca Bordonaro, presentata dal Socio V. Volterra.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica terrestre. — *Sul terremoto del 13 gennaio 1915.* Nota di Giulio Grablovitz, presentata dal socio P. Blaserna.

Il disastroso terremoto della Conca del Fucino venne percepito generalmente anche nell'isola d'Ischia col grado V della scala Mercalli e fu seguito sino alla fine di gennaio dalla registrazione di ben 73 repliche, tosto comunicate telegraficamente al R. Ufficio centrale di meteorologia e Geodinamica e distinte nel quadro in fine alla presente Nota.

Ne ebbi argomento ad indagini che, se pure sono ben lungi dall'essere condotte a termine, bastano a fornire già ora qualche particolare degno di speciale menzione come guida agli obbiettivi da tenersi di mira nello studio di tali fenomeni che con deplorevole frequenza funestano l'Italia.

Gli strumenti che permisero una sicura determinazione del primo impulso nell'isola d'Ischia, come da relazione inviata al prefato Ufficio, furono cinque, cioè i *pendoli orizzontali* con masse di 12 chilogrammi e la *vasca sismica*, in entrambe le stazioni della *Grande Sentinella* e del *Porto d'Ischia*; ed in quest'ultima il *tromografo*. Questo strumento, che, costruito nel 1906, si dimostrò adatto alla registrazione dei terremoti vicini o locali, è di facilissimo trasporto, e per la semplicità del suo maneggio potè essere rimesso quasi immediatamente in funzione, mentre gli altri ebbero la sorte di quasi tutti gli apparecchi non frenati della penisola.

Il primo impulso si potè fissare a $7^h 53^m 12^s$ per un punto intermedio fra le due stazioni avente per coordinate: $\varphi = 40° 44'' 36''$ N. e $\lambda = 13° 55' 24''$ est Greenwich; nè v'è da temere errore apprezzabile nel tempo campione, basandosi questo su una linea meridiana, in cui è apprezzabile anche la frazione di secondo. Inoltre è già nota la pur minima correzione lungo tutta la sua escursione; ed i controlli, fatti mediante teodolite presso al solstizio invernale con altezze di *Vega* e *Capra* in primo verticale, diedero correzioni di frazione di secondo una volta in più ed un'altra in meno, con vicendevole quasi completa eliminazione. Pur volendo supporre che l'edificio avesse subìto un cedimento per effetto del recente terremoto, esso viene escluso dalle meridiane dei giorni precedenti e seguenti, perchè esse si raccordano soddisfacentemente.

Dall'ampiezza delle prime oscillazioni la provenienza media degli urti risultò da N 18° W a conferma della diretta osservazione eseguita alle *livelle geodinamiche*; quella orientata da NNE a SSW presentava oscillazioni massime di 90 mm = 45'', mentre l'altra, facente con essa angolo retto, aveva un'ampiezza di poco inferiore, e le oscillazioni verso NNE dell'una concomi-

tavano con quelle verso WNW dell'altra in guisa da dare la suddetta risultante.

La determinazione della distanza, se non fu ricavabile dalla prima grande perturbazione negli apparecchi ch'erano usciti di funzione, si potè fare sulle repliche immediatamente successive e risultò, in prima approssimazione. = 160 chilometri, che con la detta direzione corrispondono ad un punto vicino a Scurcola Marsicana, cioè nella zona disastrosa. Senza volermi pronunciare definitivamente sulla posizione dell'epicentro, nè voler qui discutere la questione d'un secondo possibile epicentro simultaneo, mi limito a considerare nel suo complesso la zona del massimo disastro, donde irradiò la propagazione sismica. In tale giudizio credo che la cifra delle vittime, se anche insufficiente a dare un criterio esatto, ha tuttavia un significato maggiore delle stesse rovine edilizie, le quali nella loro estensione sono certamente più gravi nei luoghi in cui la popolazione non trovò nè tempo nè luogo da porsi in salvo. Forse il criterio delle vittime non calza fra un terremoto avvenuto di giorno ed un altro che avvenga di notte quando tutta la popolazione è nel sonno; ma per uno stesso terremoto in paesi aventi analoghe consuetudini, le enormi differenze accertate fra le percentuali delle vittime umane non si spiegano, nella loro generalità, se non con la diversità di violenza del fenomeno. Così osservo che di fronte ad Avezzano, al NW del Fucino, col 90 % di vittime si trovano all'est i comuni di Pescina con S. Benedetto, Gioja dei Marsi, Collarmele ed Ortucchio, con percentuali fra 50 e 75 %, mentre Celano, Ajello e Cerchia, interposti al nord dànno da 10 a 15 %, e molto di meno Trasacco, Luco ed altri situati al SW. Perciò, per le ulteriori deduzioni assumo un punto centrale del Fucino, cioè: $\varphi = 42°$ N; $\lambda = 13° 35'$ E.

Ad analoga conclusione pervenne il prof. Martinelli, capo della sezione geodinamica del predetto R. Ufficio centrale, in un suo pregevolissimo lavoro intitolato « *Prime osservazioni sul terremoto italiano del 13 gennaio 1915* », ove, basandosi sulle numerose informazioni pervenute da ogni parte della penisola fino al 27 gennaio, costruì un grafico dell'intensità graduale del fenomeno secondo la scala Mercalli. Tali informazioni si addensano naturalmente di più nella zona maggiormente danneggiata; e se si considera l'eterogeneità degli apprezzamenti a seconda delle varie fonti da cui emanano, riesce vieppiù spiccato l'accordo in cui l'elisse allungata, rappresentante il X grado, si trova rispetto alle località sopra enumerate.

L'autore presenta il suo lavoro in forma preliminare, il che non lo dispensa dall'illustrarlo, come fa egregiamente, con confronti sulla anteriore sismicità della regione e con opinioni di varii studiosi.

Il prof. Agamennone a sua volta s'è già occupato della velocità di propagazione della prima scossa, utilizzando a tale scopo i dati giunti a sua cognizione fino alla presentazione, alla Reale Accademia dei Lincei, della sua Nota intitolata « *Il recente terremoto della Marsica e gli strumenti*

sismici ». Su 20 stazioni ne pone in disparte sette, per le quali, *per una ragione o per l'altra, si nutre qualche sospetto*, e dalle altre 13, ponendo a base le tre più vicine, trae come risultato M 7690 quale media velocità uniforme del primo impulso, e $7^h 53^m 44^s$ quale istante all'epicentro. Non discuto i criterii coi quali fece lo scarto di 7 stazioni, mentre forse, procurandosi i rispettivi sismogrammi, sarebbe venuto a capo delle correzioni da applicarsi; ma i criteri coi quali esclude Ischia e Valle di Pompei, non hanno, a mio parere, certo fondamento: egli dice che, *considerata la distanza relativamente piccola dall'epicentro, può essere che la stessa incerta posizione di quest'ultimo basti a spiegare l'anomalia, tanto più che queste due località si trovano dalla stessa parte.* Anzitutto, un miriametro, quant'è la distanza fra Avezzano e l'epicentro da me considerato, non modificherebbe a sufficenza le velocità ricavate di 4210 e 5290; inoltre, anche Monte Cassino trovasi dalla stessa parte, cioè a SSE dell'epicentro, per cui, se la velocità fosse realmente uniforme, lo spostamento non potrebbe influire sensibilmente; invece, basando il calcolo, pei detti due punti, sulla sola stazione di Monte Cassino, si ottiene rispettivamente M 3909 e M 4800, cioè valori ancor più bassi. L'incoerenza sta invece nell'elemento di confronto: ed è sempre questa la sorte delle stazioni più vicine a quelle che si scelgono a fungere da epicentro, perchè il piccolo intervallo decorso, posto come divisore, per minime alterazioni crea enormi differenze nel quoziente. A questo modo le stesse tre località assunte per base (cioè: Montecassino, Rocca di Papa e Roma, si trovano in non lieve disaccordo, perchè le loro distanze di 64, 68 e 78, divise pei rispettivi intervalli di 6, 10 e 11 secondi sull'ora assegnata all'epicentro, dànno velocità di ch. 10·7, 6·8 e 7·1; anzi, Montecassino con Rocca di Papa darebbe, con ch. 4 in 48^s, la troppo esigua velocità di un solo chilometro al secondo.

In cambio, se con gli stessi valori calcolati dall'A., si ricalcolano gl'istanti per le rispettive località, compresevi le rigettate Ischia e Valle di Pompei, si ottiene:

	h m s	s		h m s	s		h m s	s
Montecassino .	7 52 52	— 2	Pola	7 53 26	+ 1	Moncalieri .	7 53 57	+ 9
Rocca di Papa	52 53	+ 4	Padova . .	53 35	+ 4	Graz	53 59	+ 0
Roma	52 54	+ 1	Trieste . .	53 36	+ 3	Vienna . . .	54 18	— 2
Ischia	53 4	+ 8	Treviso . .	53 37	— 6	Amburgo . .	55 33	0
Valle di Pompei	53 5	+ 5	Mileto . . .	53 37	+ 3	Granata. . .	56 4	— 20

ove le dette due stazioni non farebbero cattiva figura, nemmeno se l'anomalia si volesse intieramente ascrivere ad errori strumentali, perchè le minori divergenze tra quelle escluse si aggirano intorno al mezzo minuto. Ma anche per queste non sarebbe difficile il chiarire qualche possibile equivoco; p. es., per Siena (Osservanza), il dato direttamente comunicatomi è $7^h 53^m 52^s$, anzichè $7^h 53^m 0^s$; per Catania basta la differenza di parallelo con Avezzano a dare

42°2′ — 37° 30′ = 4° 32′ = km. 503 eccedenti di 3 km. i 500 che l'A. prende per base, mentre la distanza vera, tenuto conto della differenza di longitudine, è di km. 523.

Inoltre, il porre per base fondamentale di tutto il conteggio la media di tre dati con le incertezze ammesse dall'A., equivale a scaricare sulle stazioni contigue gli errori delle prime, per cui più corretto mi sembra assumere come incognite l'ora epicentrale (x) e la velocità (y) e, pur ammettendo la velocità uniforme, dare ugual peso a tutti i dati attendibili, trattandoli col metodo dei minimi quadrati. Posta l'equazione di condizione $x + dy = t$, e riservandomi di assumere ulteriori informazioni sui dati contestati dall'A., ho utilizzato intanto pel calcolo quelli da lui riconosciuti attendibili, aggiungendone altri avuti dalla cortesia dei dirigenti delle singole stazioni, ai quali porgo i miei ringraziamenti.

Così procedendo, ho ricavato:

A) $$x = 7^h 52^m 49^s 822 ; \quad y = 0.1193351 ;$$

e su questa base ho ricostruito i valori che si trovano nella colonna A dell'annesso quadro, coi rispettivi residui. Escludendo la stazione più lontana, Granata, per le ragioni che dirò più oltre, si ottiene:

B) $$x = 7^h 52^m 47^s 284 ; \quad y = 0.1269923 ;$$

ed i valori che se ne ricavano sono nella colonna B.

Dai valori di y si ricavano le velocità di km. 8·379 per A e 7·875 per B; tuttavia gl'istanti ricalcolati non differiscono di più d'un secondo fra la distanza di 139 km. (Napoli) e quella di 534 (Mineo); se per le più prossime la differenza è nulla o lieve, per le più lontane va rapidamente crescendo ed accenna all'incremento della velocità. Questa, per comodità di conteggio si potrà considerare uniforme per brevi distanze, ed io tale l'ho ritenuta in tutte le considerazioni che precedono; ma tale concetto va usato con parsimonia e sotto determinati punti di vista, non mai come legge precisa, che valga ad escludere dalla discussione dati che, appunto per le loro anomalie (quando non siano eccessive), possono guidare alla risoluzione di qualche problema.

In oggi è bene accertato che il primo impulso, dopo 13 minuti incirca, varca il cerchio massimo terrestre avente per polo l'epicentro, e, dopo altri 9 minuti, emerge agli antipodi; ciò dà rispettivamente velocità medie superficiali di 14 km., e 18 km. mentre la velocità iniziale non è che di 8 km. nei primi mille. La detta velocità è dunque rappresentabile con una curva che sul principio può identificarsi con la retta, analogamente al rapporto dell'arco con la corda, ma, a stretto rigore matematico, non è tale; e nel caso attuale ne troviamo già nel dato di Granata un chiaro indizio, che stazioni più lontane accentueranno viemmaggiormente.

GRAFICO
DELLE
ISOCRONOSISTE
DEL
PRIMO
IMPULSO
NEL
TERREMOTO
DEL
XIII
GENNAIO
MCMXV
VIENNA
-1
GRAZ
-1
DOMODOSSOLA
+26
SALO
-26
TREVISO
-9
TRIESTE
PADOVA
+2
VENEZIA
+121
MONCALIERI
+8
FERRARA
-2
POLA
-1
CHIAVARI
+6
BOLOGNA
+6
SIENA +34 Osservanza +23 Università
ROMA
-5
ROCCA DI PAPA
-5
CONCA DEL FUCINO
MONTECASSINO
-7
NAPOLI
+1
VALLE di POMPEI
+1
ISCHIA
+5
TARANTO
-20 W
+1 V
CARLOFORTE
+43
MILETO
-1
CATANIA
+27
MINEO
-24
7h54m10s
7h54m0s
7h53m50s
7h53m40s
7h53m30s
7h53m20s
7h53m10s
7h53m0s
7h52m50s

Ma se l'accrescimento della velocità è già tanto palese per grandi distanze, su cui i piccoli errori hanno un'influenza trascurabile, il problema pare più complesso nella zona epicentrale ove, sfuggendo il vero istante per mancanza di strumenti o per distruzione dei medesimi, bastano incertezze di qualche secondo a fornirci velocità eccessivamente alte od estremamente ridotte, mentre e queste e quelle possono avere la loro ragione naturale, in guisa che l'istante calcolato con l'ipotesi della velocità uniforme ha un significato più rappresentativo che reale.

Infine, fatta astrazione dall'accrescimento in questione, è tuttavia discutibile se la velocità sia la medesima in ogni direzione, non dovendosi dimenticare che la propagazione del moto sismico avviene attraverso solidi di varia natura, compattezza, elasticità ecc.

L'urto che giunge per primo in una determinata località ha certamente seguìto la via di più rapida propagazione, che può essere anche molto tortuosa; e da ciò può venir non poco deformata la figura di quel cerchio di geometrica precisione che viene presupposto da una velocità che sia la stessa in ogni direzione.

Man mano che la propagazione guadagna distanza, gli urti che giungono per primi hanno trovato la somma delle vie più sollecite, e tale somma su grandi distanze potrà anche pareggiarsi, o quasi, in qualunque direzione; ma su piccole distanze conviene tenere il debito conto della varia costituzione geologica, non già per discutere *a priori* il problema della velocità in base alle condizioni note della superficie, ma semplicemente per assumere un principio più consono allo scopo, quello del tracciamento grafico, quale è in uso per tutti i fenomeni meteorologici e magnetici e nella stessa geodinamica per le zone isosismiche. A titolo di semplice saggio, annetto un grafico in cui, oltre alle linee che chiamerò *isocronosiste*, ho indicato in cifre i secondi d'anticipazione (—) o di ritardo (+) rispetto agl'istanti calcolati sulla base della propagazione a velocità uniforme; tali residui, necessariamente, armonizzano, in generale, con la forma grossolanamente elittica delle *isocronosiste*.

Ciò che ho detto per la velocità può valere per la direzione apparente della provenienza degli impulsi. La direzione ricavata di N 18° W è un pò più occidendale di Fucino: ed anzi, volendo sottilizzare, presenta fra le due stazioni di quest'isola un divario di 5° che va a convergere verso un punto situato nel mare presso alle foci del Volturno. Talchè credo che anche col continuo perfezionarsi dei mezzi di registrazione non si perverrà ad ottenere direttamente da questi la precisione che si presuppone ma, per avvicinarvisi, converrà studiare a fondo le anomalie.

Il grafico da me abbozzato rivela estese lacune, mentre, per raggiungere meglio gl'intenti prefissi, occorrerebbe anzitutto rendere confrontabili i dati delle varie stazioni, coi seguenti provvedimenti:

1) con una maggiore uniformità o paragonabilità dei mezzi e metodi d'osservazione;

2) con la sicurezza del funzionamento degli apparecchi;

3) con unità di criterio nell'analisi dei sismogrammi;

4) con la perfetta cognizione del tempo-campione.

Quest'ultimo punto, ch'è di capitale importanza, sarebbe completamente risoluto mediante la telegrafia afila, come già si praticava a Taranto, Montecassino e Firenze; tale mezzo, che non richiede le cognizioni astronomiche necessarie per trattare uno strumento dei passaggi o, quanto meno, per tracciare un'economica meridiana, sarebbe accessibile a tutti ed avrebbe il grandissimo, infallibile vantaggio della perfetta simultaneità in tutte le stazioni, mentre confronti meno diretti di quelli ora accennati traggono seco non poche incertezze.

Rispetto agli apparecchi è deplorevole che al vantaggio di registrare ogni minimo tremito del suolo vada inesorabilmente congiunto l'inconveniente del loro guastarsi o dello svisamento delle registrazioni per opera dei freni. Per tale ragione il prof. Agamennone ritiene che *non sia prudente, ai fini degli studii sismici, di fondare osservatorii di prim'ordine, e destinati anche ai terremoti mondiali, in regioni di alta sismicità*; ma in tal caso, con la frequenza che purtroppo i terremoti hanno dovunque in Italia, si dovrebbe rinunziare al possesso d'osservatorii di prim'ordine, mentre questi sono tanto utili sotto molteplici aspetti ed alla stessa sismometria, e tali rimarrebbero anche se si disinteressassero dei terremoti lontani. Nulla impedisce invece che, accanto al sismografo per terremoti lontani, vene siano altri adatti alla registrazione di forti terremoti vicini o locali senza il pericolo che falliscano, almeno fino a tanto che le diligenti ricerche ed i tentativi di chi studia esclusivamente il problema sismometrico non l'abbiano risolto con un apparecchio atto a registrare fedelmente ed indistintamente qualsiasi forma ed ampiezza di moto sismico.

ELENCO

delle registrazioni avute nell'isola d'Ischia dopo la grande perturbazione delle $7^h 53^m 13^s$ del 13 gennaio 1915, a tutto il mese stesso, in corrispandenza coi terremoti della Marsica.

Dì	Istante	Dì	Istante	Dì	Istante	Dì	Istante	Dì	Istante
	h m s		h m s		h m s		h m s		h m s
13	8 21.0	13	17 19.7 (1)	14	12 54.2	15	4 34.2	20	8 29.0
	8 28.4		17 44.6		14 16.7		5 52.3		20 3.0
	8 34.2		21 20.2 (1)		14 26.5		6 9.4	21	3 11.9
	8 59.9		22 11.7		15 35.9		8 56.0		13 29.8 (4)
	9 8.7		23 4.9		17 34.0		13 3 9		14 30.3
	9 23.7		23 21.7		17 55.8 (5)		14 1.9	22	21 15.3 (2)
	9 30.6		23 25.2		19 40.6		21 42.1	23	2 15.0
	9 35.2	14	2 10.9		21 9.0		23 2.1		9 30 0
	9 40.5		2 12 0		21 21.7	16	7 24.1		17 35.3
	10 9.1		2 50 2		21 24.5		13 17 0		17 49.3
	10 35 2		2 51.3 (2)	15	0 9.4	17	23 41.6	24	4 47.0
	10 56.0		3 43.1		1 10.2	18	6 41.2	25	7 46.0
	11 20.1 (1)		5 30.5		2 15.8		14 58.5	28	18 18.4 (2)
	14 58.5		8 17.7 (6)		2 45.1	19	11 45.1		
	17 5.0 (1)		9 16.0		4 58.0		21 17.6		

Le cifre tra parentesi indicano l'ampiezza massima in centimetri di registrazione al centuplo; la mancanza d'indicazione esprime ampiezze inferiori ad un centimetro.

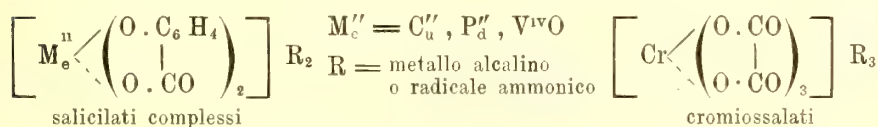
Stazione	Istante dato	Distanza dal Fucino	A	B
	h m s		h m s	h m s
Montecassino	7 52 50	Ch. 57	7 52 57 — 7	7 52 54 — 4
Rocca di Papa	52 54 ± 3s	» 77	52 59 — 5	52 57 — 3
Roma	52 54 ± 2s	» 89	53 0 — 5	53 0 — 5
Napoli, Vomero	53 7	» 139	53 6 + 1	53 5 + 2
Ischia	53 12	» 143	53 7 + 5	53 6 + 6
Valle di Pompei	53 10	» 159	53 9 + 1	53 8 + 2
Siena, Osservanza *	53 40	» 233	53 17 + 23	53 17 + 23
Siena, Università *	53 52	» 234	53 18 + 34	53 17 + 35
Pola	53 27	» 321	53 28 — 1	53 29 — 2
Bologna	53 35	» 328	53 29 + 6	53 29 + 6
Taranto { Sismogr. Wiechert *	53 11	» 347	53 31 — 20	53 31 — 20
Taranto { » Vicentini .	53 32		+ 1	+ 1
Ferrara	53 30 ± 15s	» 349	53 32 — 2	53 32 — 2
Venezia *	55 37	» 390	53 36 + 121	53 37 + 120
Padova	53 39	» 396	53 37 + 2	53 38 + 1
Trieste	53 39	» 407	53 39 0	53 39 0
Treviso	53 31	» 416	53 40 — 9	53 40 — 9
Chiavari	53 47	» 427	53 41 + 6	53 42 + 5
Mileto	53 40	» 429	53 41 — 1	53 42 — 2
Salò *	53 20	» 466	53 46 — 26	53 47 — 27
Catania *	54 18	» 513	53 51 + 27	53 52 + 26
Mineo *	53 30	» 534	53 54 — 24	53 55 — 25
Carloforte *	54 37	» 540	53 54 + 43	53 56 + 41
Moncalieri	54 7	» 578	53 59 + 8	54 1 + 6
Graz	53 59	» 587	54 0 — 1	54 2 — 3
Domodossola *	54 30	» 618	54 4 + 26	54 6 + 24
Vienna	54 16	» 729	54 17 — 1	54 20 — 4
Potsdam	55 15	» 1155	55 8 + 7	55 14 + 1
Amburgo	55 33	» 1311	55 27 + 6	55 34 — 1
Granata	55 44	» 1576	55 59 — 15	56 7 — 23

* Stazioni ommesse nel calcolo delle formole.

Chimica. — *L'acido cromisalicilico e i suoi derivati ammoniacali* [1]. Nota di G. A. BARBIERI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN [2].

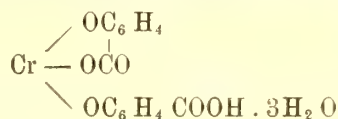
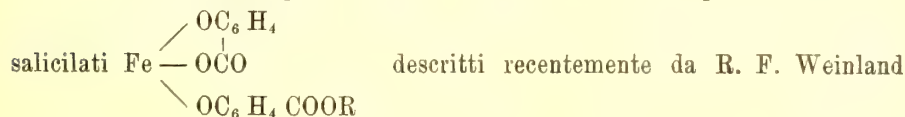
In una Nota [3] precedente ho cercato d'interpretare la costituzione di alcuni salicilati complessi, avvicinandola a quella dei cromiossalati, cioè attribuendo all'acido salicilico lo stesso valore di coordinazione dell'acido ossalico.

$$\left[\overset{II}{M_e} \left(\begin{matrix} O . C_6 H_4 \\ | \\ O . CO \end{matrix} \right)_2 \right] R_2 \qquad \begin{matrix} M_e'' = C_u'' , P_d'' , V^{IV}O \\ R = \text{metallo alcalino} \\ \text{o radicale ammonico} \end{matrix} \qquad \left[Cr \left(\begin{matrix} O . CO \\ | \\ O \cdot CO \end{matrix} \right)_3 \right] R_3$$

salicilati complessi — cromiossalati

Ho trovato una conferma di tale interpretazione nello studio dei composti descritti nella presente Nota.

Facendo reagire, in determinate condizioni, l'allume di cromo con un salicilato alcalino, ho ottenuto una sostanza polverosa giallastra, insolubile nell'acqua e nei comuni solventi organici, solubile nelle soluzioni degli idrati e dei carbonati alcalini, nell'ammoniaca e nella piridina.

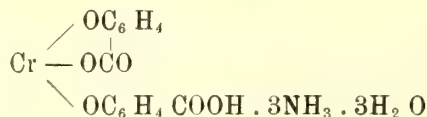
I risultati che diede all'analisi concordano con la formula

$$Cr \begin{cases} OC_6 H_4 \\ \quad | \\ OCO \\ OC_6 H_4 \, COOH . 3H_2 O \end{cases}$$

Si tratterebbe dunque di un acido cromisalicilico corrispondente ai ferrisalicilati $Fe \begin{cases} OC_6 H_4 \\ \quad | \\ OCO \\ OC_6 H_4 \, COOR \end{cases}$ descritti recentemente da R. F. Weinland e A. Herz [4].

Speciale interesse presentano i derivati ammoniacali dell'acido cromisalicilico.

Dalle soluzioni di questo acido nell'ammoniaca concentrata si separa lentamente una sostanza roseo-violetta, cristallizzata in aghi finissimi micro-

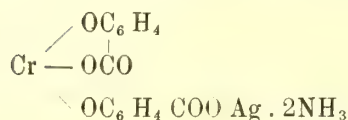
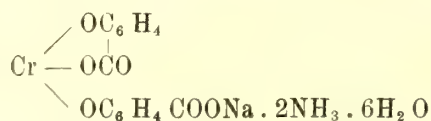
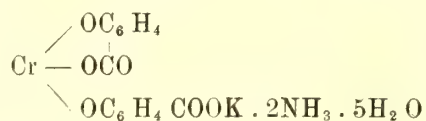
[1] Lavoro eseguito nel laboratorio di chimica generale dell'Università di Ferrara.
[2] Rend. Accad. Lincei, XXIV, 1° sem., 435.
[3] Rend. Accad. Lincei XXIII, (1914), 2° sem., 408.
[4] Liebigs Ann. *400*, 219 (1913).

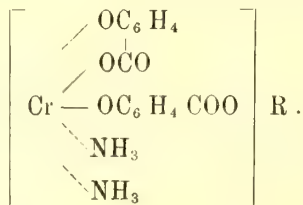
scopici, che all'analisi risulta come il prodotto della combinazione dell'acido cromisalicilico con tre molecole di ammoniaca:

$$Cr \begin{cases} OC_6H_4 \\ \quad | \\ OCO \\ OC_6H_4COOH \,.\, 3NH_3 \,.\, 3H_2O \end{cases}$$

Questo composto deve contenere una sola molecola di ammoniaca allo stato ammonico, perchè, trattata in soluzione con cloruro di potassio, cloruro di sodio, nitrato di argento, dà i seguenti sali cristallizzati che differiscono dalla sostanza di partenza, oltre che per l'acqua di cristallizzazione, anche per la sostituzione di un gruppo NH_4 con un atomo di potassio o di sodio o di argento:

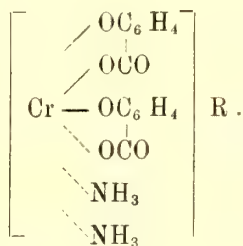
$$Cr \begin{cases} OC_6H_4 \\ \quad | \\ OCO \\ OC_6H_4COOK \,.\, 2NH_3 \,.\, 5H_2O \end{cases}$$

$$Cr \begin{cases} OC_6H_4 \\ \quad | \\ OCO \\ OC_6H_4COONa \,.\, 2NH_3 \,.\, 6H_2O \end{cases}$$

$$Cr \begin{cases} OC_6H_4 \\ \quad | \\ OCO \\ OC_6H_4COOAg \,.\, 2NH_3 \end{cases}$$

Esiste dunque in tutti questi derivati ammoniacali un complesso formato da un atomo di cromo, due molecole di acido salicilico e due molecole di ammoniaca, che rimane inalterato nelle reazioni di doppio scambio. Ciò è spiegabile, colla teoria della coordinazione, ammettendo che due molecole di ammoniaca siano legate all'atomo di cromo mediante valenze secondarie, e attribuendo a detti composti la formula generale:

$$\left[Cr \begin{cases} OC_6H_4 \\ \quad | \\ OCO \\ OC_6H_4COO \\ NH_3 \\ NH_3 \end{cases} \right] R \,.$$

Ma siccome il numero di coordinazione del cromo è sei, e il cromo dà di regola composti coordinativamente saturi, e d'altra parte il sale di argento è anidro e quindi l'acqua contenuta negli altri sali non fa parte del-

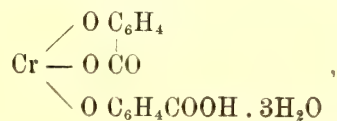
l'anione complesso, è forza ammettere che una valenza secondaria leghi l'atomo di cromo al carbossile impegnato col metallo alcalino, com'è espresso dalla formula

$$\left[Cr \begin{matrix} \diagup OC_6H_4 \\ \diagup OCO \\ - OC_6H_4 \\ \diagdown OCO \\ \diagdown NH_3 \\ \diagdown NH_3 \end{matrix} \right] R .$$

I derivati ammoniacali dell'acido cromisalicilico appartengono quindi al tipo dei tetracidodiamminosali, e, secondo la nomenclatura proposta da A. Werner, sono da chiamarsi disalicilato-diammin-cromiati. Essi corrispondono perfettamente ai diossalo-diammin-cromiati $\left[Cr \begin{matrix} (C_2O_4)_2 \\ (NH_3)_2 \end{matrix} \right]$ R descritti da Clève [1] e da Pfeiffer e Basci [2], e ai diossalo-diammin-cobaltiati $\left[Co \begin{matrix} (C_2O_4)_2 \\ (NH_3)_2 \end{matrix} \right]$ R descritti da Sorensen [3].

Da tale analogia viene confermata l'equivalenza, dal punto di vista della coordinazione, dell'acido salicilico con l'acido ossalico.

Trattando i disalicilato-diammin-cromiati con acidi diluiti, si mette in libertà l'acido $\left[Cr \begin{matrix} \left(C_6H_4 < \begin{matrix} O \\ COO \end{matrix} \right)_2 \\ (NH_3)_2 \end{matrix} \right]$ H insolubile in acqua. Lo stesso acido può venir ottenuto anche scaldando a 100° il suo sale di ammonio. A questa temperatura, viene eliminata non soltanto tutta l'acqua di cristallizzazione, ma anche, per dissociazione termica, l'ammoniaca contenuta allo stato ammonico.

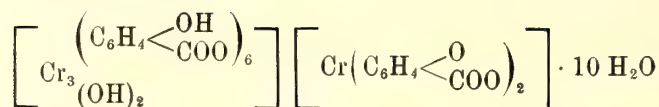
Quanto alla costituzione della sostanza dalla quale, con ammoniaca, si preparano i disalicilato-diammin-cromiati e che in questa Nota chiamo acido cromisalicilico per brevità e in considerazione della sua solubilità nei liquidi alcalini, non mi è ancora possibile d'indicarla con sicurezza. I risultati analitici concordano tanto con la formula

$$Cr \begin{matrix} \diagup O\,C_6H_4 \\ - O\,CO \\ \diagdown O\,C_6H_4COOH \, . \, 3H_2O \end{matrix} ,$$

[1] K. Vet. Akad. Handl. *6*, n. 4, pag. 24 (1865).

[2] Liebigs. Ann. 346_{48} (1906).

[3] Gmelin-Kraut Friedheim Handb., Anorg. Ch. V_{1509}.

quanto con la formula

$$\left[Cr_3 \begin{matrix} \left(C_6H_4 < {OH \atop COO} \right)_6 \\ (OH)_2 \end{matrix} \right] \left[Cr \left(C_6H_4 < {O \atop COO} \right)_2 \right] \cdot 10\, H_2O$$

secondo la quale si tratterrebbe della combinazione di una molecola di acido cromisalicilico con una di esasalicilato-tricromibase. Anche un composto di questo tipo è stato descritto per il ferro da R. F. Weinland e A. Herz (loc. cit.). Forse porterà luce sull'argomento lo studio dei composti che l' « acido cromisalicilico » forma colla soda e colla potassa. Essi sono verdi, estremamente solubili e difficilmente cristallizzabili. Io non ho ancora potuto ottenerli allo stato di purezza.

Parte sperimentale

Acido cromisalicilico.

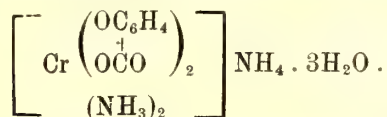
Facendo reagire in soluzione e a caldo un sale di cromo, p. es. allume di cromo e potassio con salicilato alcalino, nel rapporto di tre molecole di salicilato per un atomo di cromo, si ottiene un prodotto verdastro, insolubile nell'acqua, che a caldo ha l'aspetto di una massa molle e vischiosa, e a freddo diventa friabile. In questo prodotto sono contenute almeno due sostanze, perchè, trattandolo con alcool o, meglio, con acetone, si scioglie una sostanza verde e resta una polvere giallastra insolubile in alcool e nei comuni solventi organici. Questa polvere giallastra è l'acido cromisalicilico. Si scioglie nelle soluzioni degli idrati e dei carbonati alcalini con colorazione verde; nell'ammoniaca e nella piridina, con colorazione violetta.

L'acido cromisalicilico è quasi l'unico prodotto della reazione tra l'allume di cromo e i salicilati alcalini quando si operi nelle condizioni seguenti. In una capsula di porcellana si sciolgono gr. 10 di allume di cromo in 250 cc. di acqua: si scalda all'ebullizione e poi si aggiungono gr. 8 di acido salicico e, a goccia a goccia, una soluzione di 3 gr. di carbonato sodico in poca acqua, sempre agitando il liquido e mantenendo all'ebullizione. Si deposita una polvere gialla che viene separata per filtrazione alla pompa dal liquido, e lavato prima con acqua bollente poi con alcool più volte.

All'analisi diede i seguenti risultati:

	Calcolato per $Cr\left(C_7H_4<{O \atop COO}\right)_2 H \cdot 3H_2O$	Trovato
Cr	13,72	13,60 - 13,71 - 13,77
C	44,31	44,13
H	3,99	4,08

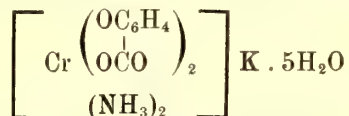
Disalicilato-diammin-cromiato di ammonio.

$$\left[Cr \begin{pmatrix} OC_6H_4 \\ | \\ OCO \end{pmatrix}_2 (NH_3)_2 \right] NH_4 \,.\, 3H_2O \,.$$

Gr. 40 di acido cromisalicilico vengono sciolti, a caldo, in 200 cc. di ammoniaca al 15 % circa: si ottiene un liquido violetto, dal quale, per raffreddamento, cristallizza una sostanza rosea in aghi finissimi microscopici. Dall'acqua madre, continua, per circa una settimana, a separarsi sempre nuovo prodotto. In tutto se ne ottengono circa 30 grammi.

Calcolato per $\left[Cr \begin{matrix} (C_7H_4O_3)_2 \\ (NH_3)_2 \end{matrix} \right] NH_4 \,.\, 3H_2O$		Trovato
Cr	12,10	12,31 - 12,25
N	9,77	9,70
C	39,05	38.94
H	5,62	5,56

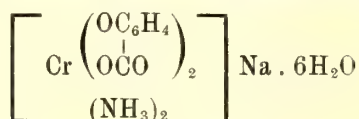
Il disalicilato - diammin - cromiato di ammonio è poco solubile in acqua. Le sue soluzioni, appena preparate, sono violette ; dopo alcun tempo, e specialmente a caldo, diventano verdastre, ma ritornano violette per aggiunta di ammoniaca. La solubilità di questo composto viene diminuita dalla presenza di un sale di ammonio. Se si aggiunge cloruro di ammonio in sostanza ad una soluzione ammoniacale del composto, questo si separa in gran parte dalla soluzione allo stato cristallino.

Disalicilato-diammin-cromiato di potassio.

$$\left[Cr \begin{pmatrix} OC_6H_4 \\ | \\ OCO \end{pmatrix}_2 (NH_3)_2 \right] K \,.\, 5H_2O$$

Se ad una soluzione, abbastanza concentrata e fortemente ammoniacale, del disalicilato - diammin - cromiato di ammonio, si aggiunge una soluzione satura di cloruro di potassio, si ha tosto un precipitato roseo caseoso che a primo aspetto sembra amorfo ma che, esaminato al microscopio, risulta formato di aghetti finissimi.

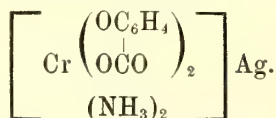
Calcolato per $\left[Cr \begin{matrix} (C_7H_4O_3)_2 \\ (NH_3)_2 \end{matrix} \right] K \,.\, 5H_2O$		Trovato
Cr	10,67	10,58 - 10,68
K	8,02	7,61 - 7,87
C	34,48	34,34
H	4,96	4,75
N	5,75	5,56

Disalicilato-diammin-cromiato di sodio.

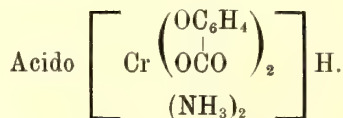
$$\left[Cr \begin{pmatrix} OC_6H_4 \\ | \\ OCO \end{pmatrix}_2 (NH_3)_2 \right] Na \, . \, 6H_2O$$

Questo sale rassomiglia a quello di potassio e a quello di ammonio, e si ottiene trattando quest'ultimo in soluzione ammoniacale con cloruro o con solfato di sodio.

	Calcolato	Trovato
Cr	10,63	10,73
Na	4,70	4,49
C	34,34	34,60
H	5,36	5,48
N	5,73	5,87

Disalicilato-diammin-cromiato di argento.

$$\left[Cr \begin{pmatrix} OC_6H_4 \\ | \\ OCO \end{pmatrix}_2 (NH_3)_2 \right] Ag.$$

Gr. 5 del sale di ammonio vennero fatti digerire per alcun tempo in una soluzione di nitrato di argento al 2 %. Il sale di ammonio, mantenendo apparentemente inalterato il suo aspetto cristallino, si trasforma nel sale di argento. Il prodotto sottoposto all'analisi era stato seccato nel vuoto su P_2 O_5 sino a peso costante.

	Calcolato	Trovato
Cr	11,16	10,90
Ag	23,15	23,27

$$\text{Acido} \left[Cr \begin{pmatrix} OC_6H_4 \\ | \\ OCO \end{pmatrix}_2 (NH_3)_2 \right] H.$$

Le soluzioni dei disalicilati - diammin - cromiati alcalini, per aggiunta di acidi diluiti, dànno un precipitato roseo-pallido che assai difficilmente si può separare per filtrazione. Lo si ottiene in polvere meno fine trattando in un mortaio il sale di ammonio solido colla quantità calcolata di acido solforico diluito, o, meglio, scaldando il sale di ammonio in stufa a 100° sino a peso costante.

È una polvere rosea, insolubile in acqua, solubile, con colorazione violetta, nell'ammoniaca diluita.

	Calcolato	Trovato
Cr	14,48	14,39
C	46,78	46,52
H	4,21	4,36
N	7,81	7,47

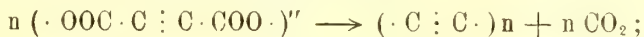
Chimica-fisica. — *Elettrolisi di acidi organici bicarbossilici: acido acetilenbicarbonico* [1]. Nota di B. L. VANZETTI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

In una serie di lavori, i cui risultati furono pubblicati parecchi anni or sono [2], ho potuto dimostrare come la decomposizione di acidi organici bicarbossilici, mediante la corrente elettrica, nella soluzione dei loro sali, è assai varia e complessa, perchè varie e complesse sono le reazioni secondarie che possono aver luogo nello spazio anodico, nel momento in cui la molecola acida, giunta all'anodo, si scarica rimanendo esposta, sia pure per breve tempo, all'azione dell'ossigeno nascente.

Il più importante risultato di queste ricerche si può riassumere così: la formazione di idrocarburi, segnalata da Kolbe e studiata da Kekulé, per gli acidi succinico, fumarico e maleico, ha luogo in grado sempre minore per gli acidi a maggiore numero di atomi di carbonio. Ciò sembra essere in relazione col fatto che per questi acidi, più deboli, si verifica esclusivamente, o quasi, la dissociazione binaria, mentre per i primi termini, più energici, l'andamento della costante lascia intravedere una parziale dissociazione terniaria.

Allo studio dei principali acidi della serie satura e della serie etilenica si aggiunse, per iniziativa di G. Bruni e per opera di A. Borgo, quello dell'*acido acetilenbicarbonico*, primo e più importante termine della serie a triplo legame. Alcuni risultati preliminari furono esposti brevemente al Congresso delle scienze tenutosi in Padova nel 1909.

Ricordo qui che l'A., elettrolizzando soluzioni al 20 $^0/_0$ di acido, o di sale sodico, con, o senza diaframma, usando una corrente di circa 100 ampères per dm.^{2} e tenendo raffreddato ed agitato il liquido, notò da prima imbrunimento del liquido, che egli interpreta come dovuta a formazione di carbone libero, in seguito alla scomposizione ternaria

$$n(\cdot OOC \cdot C \vdots C \cdot COO \cdot)'' \longrightarrow (\cdot C \vdots C \cdot)n + n\, CO_2\,;$$

formazione di piccole quantità di un idrocarburo — non identificato — ed in un caso formazione, all'anodo, di una piccola quantità di acido mellitico.

Si credette opportuno di rifare alcune prove su scala un po' più vasta e variando un poco le condizioni dell'esperienza. Nello stesso laboratorio, con l'aiuto diligente del laureando G. B. Fasoli, preparai dunque una rilevante quantità dell'acido in questione, seguendo le prescrizioni di Ad.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Padova.

[2] Questi Rend. XIII. 2. 112; XV. 1. 574; XVI. 2. 79 e 139; XVII. 2. 331; Gazz. chim. it. XXXIV. 2. 504; XXXVII. 2. 338 e 386; XXXIX. 1. 46.

Bayer [1], e curando soprattutto la purificazione del prodotto, la cui facile alterabilità può giustificare il sospetto di parziali trasformazioni.

Elettrolisi senza sètto poroso di una soluzione al 25 °/₀ di sale bipotassico, eseguita con una corrente della densità 50 amp. × dm.^{2}; catodo di rete di platino cilindrica, e anodo interno di spirale di platino di 1 mm. di diametro. Voltaggio ai morsetti 4,3 ÷ 3,8 volts. L'esperienza fu condotta in modo che il termometro immerso nell'interno della spirale anodica non segnasse più di 17° C.

I gas che si svolgevano furono raccolti, al tubo d'uscita della cellula elettrolitica, direttamente con la buvetta di Hempel, o conservati in piccoli gazometri su acqua salata.

L'elettrolisi fu protratta per 16,6 ore (circa 1000 minuti), cioè sino alla scomparsa dell'ossido di carbonio dalla miscela gasosa. La seguente tabella riassume chiaramente l'andamento della scomposizione:

$d = Adm.^2$	25	25	50	50	50	50	50	50	50	50
t'	10′	280′	400′	525′	585′	600′	635′	720′	750′	1000′
Idroc. n. sat. °/₀	0 0	2.5	2 9	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	—
CO_2 »	12.4	12.5	13.1	8.6	8.1	8 0	7.6	6.4	6.5	—
CO »	28.0	4.8	4.8	23.9	26.1	26.1	1.6	0.5	0.0	—
O_2 »	0 0	16.2	13 7	0.0	0.0	0.0	25.8	27.1	26.5	—
Totale °/₀ . . .	40.4	36.0	34.5	33.0	34.2	34.1	35.0	34.0	33.0	—

La differenza a 100, non sempre determinata, idrogeno; nessun idrocarburo saturo.

L'anidride carbonica, dopo le prime ore di elettrolisi, si svolge in quantità pressochè costante. L'ossido di carbonio, che si presenta da principio in grandi quantità, diminuisce rapidamente, per aumentare in su l'ottava ora, precipitando, dopo la decima, rapidamente a zero.

Con le variazioni nel contenuto in ossido di carbonio, si accordano le variazioni inverse nelle quantità di ossigeno svolto, così che la somma di questi due componenti si mantiene quasi costante.

La differenza tra questo andamento, diremo così, saltuario, e quello regolare osservato da A. Borgo, è dovuta probabilmente al fatto che, contrariamente a quanto egli aveva fatto, nelle nostre esperienze evitammo di proposito l'agitazione del liquido.

Si nota poi la formazione di una piccola quantità di idrocarburo non saturo, assorbibile dall'acqua di bromo, come dall'acido solforico fumante,

(1) Ber. d. d. chem. Ges. *18*, pagg. 677 e 2269.

la cui comparsa (nelle prime ore) pare in rapporto con la diminuzione dell'ossido di carbonio.

Identificazione dell'idrocarburo non saturo. — Tutta la miscela gasosa raccolta nei gasometri (circa 17 litri), fu fatta passare a traverso una serie di apparecchini contenenti i reattivi adatti all'assorbimento dei componenti CO_2, O_2, CO; e il gas rimanente veniva condotto in una soluzione ammoniacale di cloruro rameoso di recente preparazione. Si iniziò tosto la formazione di un precipitato leggero rosso-sangue, che raccolto, lavato ed essiccato (durante l'essiccamento volge al nero), fu sottoposto ad alcune prove. Una piccola quantità fu messa su una lamina metallica, a pochi centimetri da una eguale quantità di acetiluro di rame ottenuto per azione di acetilene puro sulla stessa soluzione rameosa, e si procedette al riscaldamento lento ed eguale della lamina metallica mediante una lampada Bunsen, la cui fiammella ne lambiva una estremità egualmente lontana dai due campioncini. Raggiunta la temperatura di esplosione, si videro i due prodotti esplodere nello stesso istante. La prova fu ripetuta più volte, con uguale risultato: ed io la ritengo altrettanto concludente quanto una determinazione quantitativa dei componenti.

Si forma dunque dell'*acetilene*, per quanto in piccola quantità. Restava da sapersi dove e in seguito a quale reazione.

Eseguimmo una *elettrolisi in cellala, con gli spazii divisi da parete porosa*, al fine di poter raccogliere ed esaminare separatamente gas anodici e gas catodici (d = 50 amp. $dm.^2$; tensione ai morsetti 7 ÷ 5 volts; temper. del liquido anodico 20-25°). La celluta elettrolitica scelta per l'esperienza era necessariamente maggiore per far posto al cilindro di porcellana porosa, e i due spazî ben divisi e muniti di un tubo di uscita ciascuno. Il gas proveniente dall'anodo, dopo essere stato guidato a traverso apparecchini per l'assorbimento della CO_2, dell'O_2 e del CO, doveva attraversare una soluzione ammoniacale di cloruro rameoso. I gas catodici venivano senz'altro condotti sopra una soluzione di questo reattivo. Si potè constatare che lo *acetilene proviene dall'anodo*, perchè solo i gas anodici provocarono una precipitazione di acetiluro di rame,

Questo composto, lavato ed essiccato, fu riconosciuto con la prova di confronto dianzi descritta.

Quanto all'andamento generale dell'elettrolisi, esso si può considerare analogo a quello precedentemente descritto. L'analisi dei gas anodici dà:

dopo $^1/_2$ ora: CO_2 60 %; idr. n. sat. 1,1 % O_2 30 %; CO 9,0 % circa
» 9 ore: » 45 » » » 0,0 » » 0,0 » » 55 » »
» 12 » quasi esclusivamente ossigeno.

Interessante è il fatto che, dopo un certo numero di ore, l'acido acetilenbicarbonico è completamente scomparso, e la elettrolisi va a carico del-

l'idrato alcalino rimasto e del carbonato formatosi durante il processo di decomposizione.

Abbiamo cercato anche l'acido mellitico, sospendendo la elettrolisi del sale qualche ora dopo l'inizio; ma non ci è mai stato possibile di svelarne la presenza. Potemmo isolare, sì, piccole quantità di acido fumarico; ma acido mellitico, mai.

Elettrolisi dell'acido acetilenbicarbonico puro in soluzione al 10 %. Abbiamo adoperato per questa prova un prodotto ulteriormente purificato, allo scopo soprattutto di stabilire la provenienza dell'acetilene: d = 50 amp. × dm.^{2}; tensione 2,5 volts temper. 7° circa. Senza parete porosa e senza agitazione. Il liquido perde rapidamente la leggerissima colorazione ambracea, per diventare perfettamente e permanentemente incoloro.

L'analisi del gas misto diede:

dopo 1 ora:	CO_2 10,0 %;	idroc. n. sat. tracce;	O_2 22,2 %;	CO 4,0 %
" 4 ore:	" 8,2 "	" " "	" 24,8 "	" 2,0 "

Il gas, eliminati come il solito i componenti ossigenati, fu condotto a traverso la soluzione ammoniacale di cloruro rameoso; solo dopo lungo tempo si potè notare la formazione di una piccolissima quantità di acetiluro.

Sulla formazione dell'acetilene si possono fare ipotesi diverse. La più semplice e verosimile è che esso provenga dalla decomposizione anodica di piccole quantità di acido fumarico (o maleico), originatasi durante la preparazione dell'acido acetilenbicarbonico stesso, escluso un processo di riduzione elettrolitica.

Data la formazione, costantemente verificata, di acido fumarico nella preparazione di acido acetilenbicarbonico, si capisce come ne sia estremamente difficile l'allontanamento completo, tanto più che verosimilmente essi formeranno soluzioni solide [1]. Abbiamo però notato che, in seguito ad una accurata purificazione dell'acido acetilenbicarbonico, la quantità di acetilene svoltosi all'anodo diminuisce fin quasi a scomparire. Io credo, perciò, che si debba escludere un'origine diretta di questo idrocarburo dall'acido acetilenbicarbonico.

La scomposizione elettrolitica dell'acido acetilenbicarbonico puro e del suo sale potassico apparisce completa, nelle condizioni descritte, con separazione dei due gruppi COO carbossilici e con ossidazione a CO del carbonio centrale della molecola. Il processo di ossidazione della molecola organica procede con una certa velocità (specialmente se si evita l'agitazione, che impedisce l'accumulo dell'acido intorno all'anodo), per la considerevole conduttività dell'acido e del suo sale e per la conseguente azione dell'ossigeno nascente su atomi di carbonio non saturi e dotati quindi di una forte reagibilità.

[1] Cfr. G. Bruni, *Feste Lösungen u. Isomorphismus*, Lepzig, 1908, pagg. 60 e 72-73.

Una tale ossidazione è, d'altra parte, più comprensibile che non una separazione di carbonato libero, la quale, verosimilmente, richiederebbe la concorrenza di un numero grande di resti (· C ⋮ C ·) — ammesso che possa esistere, durante un tempo finito, questo aggruppamento libero — perchè questa separazione, che a prima giunta può sembrare della massima semplicità, dipende forse da una reazione di grado superiore.

Non abbiamo mai potuto constatare la formazione di qualsiasi sospensione incolora, o colorata, che potesse far nascere il sospetto della presenza di carbone colloidale; nessun effetto Tyndall si manifestò mai nel liquido prelevato dallo spazio anodico, e negative furono anche le ricerche all'ultramicroscopio a fessura (Zsigmondy-Siedentopf).

La spiegazione dell'effetto osservato da A. Borgo si può forse trovare nella formazione di corpi complessi contenenti il gruppo carbonilico (analoghi ai corpi umici), che la forte agitazione del liquido usata dall'A. avrebbe strappato alla ulteriore ossidazione totale.

Per quanto riguarda l'acido mellitico, riscontrato una volta dallo stesso operatore, nessuna traccia nelle nostre esperienze. È quindi probabile che la piccola quantità di questo acido trovata da Borgo fosse già presente nell'acido acetilenbicarbonico da lui impiegato, formatosi verosimilmente per polimerizzazione di questo durante la sua preparazione. Ricordiamo, a questo proposito, che l'acido propiolico dà, per polimierizzazione alla luce, l'acido trimesinico.

Meglio potrebbe pensarsi — come conseguenza di una dissociazione binaria — alla sintesi anodica di acidi contenenti più volte il triplo legame (diacetilenbicarbonico...); si tratterebbe però sempre di corpi assai poco stabili, sui quali l'ossigeno anodico avrebbe facile presa.

In ultima analisi, la decomposizione elettrolitica dell'acido acetilenbicarbonico si presenta come molto semplice e chiara, più chiara forse di quante sono state studiate finora in questo campo, e quasi paragonabile a quella dell'acido ossalico.

Ho in corso esperienze sull'elettrolisi dell'*acido fenilpropiolico.*

Chimica-fisica. — *Conduttività elettrica di miscele di sali fusi* [1]. Nota di C. SANDONNINI, presentata dal Socio GIACOMO CIAMICIAN.

La conduttività elettriche di molti sali fusi venne accuratamente determinata specialmente da Kohlrausch [2], Lorenz [3], Arndt [4], Tubandt [5], Goodwin [6], ed Aten [7]. Per quanto riguarda la conduttività di miscele di sali fusi, all'infuori di ricerche isolate di Kohlrausch, i primi studii abbastanza estesi si debbono a Bouty [8], a Foussereau [9], e Poincaré [10], e secondo quest'ultimo autore i valori delle conduttività delle miscele di sali fusi sarebbero calcolabili con la regola dei miscugli. In seguito, Lorenz e Kalmus (loc. cit.) trovarono che le conduttività delle miscele fuse di cloruro di potassio e di cloruro di piombo sono di molto inferiori a quelle calcolate, e tali deviazioni attribuirono alla formazione di complessi. Goodwin e Mailey [11], in una assai accurata serie di ricerche, studiarono le proprietà chimico-fisiche di alcune miscele di sali fusi; come tipo scelsero quelle di nitrato sodico e nitrato potassico che fondono a temperatura relativamente bassa e nelle quali è da escludere la formazione di complessi tra i due sali, e trovarono che le conduttività sono sempre inferiori a quelle calcolate: non si avrebbe quindi una conferma della Poincaré. Inoltre essi trovarono che la fluidità di tali miscele è superiore a quella calcolata: questo dovrebbe quindi produrre un aumento di mobilità ioniche e, conseguentemente, di conduttività, anzichè una diminuzione; e pertanto la diminuzione osservata venne attribuita a retrocessione di ionizzazione per la presenza di uno ione in comune.

Grazie alle larghissime applicazioni che ha avuto negli ultimi anni l'analisi termica, siamo ora in grado di conoscere esattamente il com-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica generale della R. Università di Padova, diretto dal prof. G. Bruni.

(2) Wied. Ann. *17*, 642 (1882).

(3) Elektrochemie geschmolzener Salze (1909).

(4) Zeit. f. Elektroch., *12*, 337 (1906); *14*, 662-665 (1907). Ber. d. d. chem. Gesellsch. 2937 (1907).

(5) Zeit. f. phys. Chem. *87*, 513 (1914).

(6) Phys. Rewiew, *25*, 469 (1907); *26*, 28 (1908).

(7) Zeit. f. phys. Chem. *66*, 641 (1909); *73*, 574, 624 (1910); *78*, 1 (1912).

(8) Ann. chim. et phys. [6] *5*, 24, pag. 317 (1885).

(9) Ann. chim. et phys. [6] *17*, 24, pag. 52 (1899).

(10) Ann. chim. et phys. [6] *21*, 289 (1890).

(11) Phys. Rewiew, *26*, 28 (1908).

portamento di molte coppie di sali doppî. Con la guida di questi dati ho intrapreso una serie sistematica di ricerche per vedere se dalle determinazioni di conduttività elettrica si possono avere dati caratteristici dei varii casi. Inoltre ho esteso le mie ricerche anche allo stato solido, per vedere quale influenza eserciti l'aggregato cristallino.

In questa mia prima Nota espongo i valori di conduttività di alcune miscele di sali con punti di fusione relativamente bassi. Per le misure delle conduttività usai il solito dispositivo di Kohlrausch; la maggiore difficoltà fu incontrata nella scelta del tipo di cella.

Come è noto, i sali allo stato di fusione sono generalmente ottimi conduttori: quindi fu necessario di scegliere una cella la quale avesse una forte resistenza e che tuttavia potesse essere portata ad alta temperatura ed essere accuratamente pulita per potere poi servire ad una lunga serie di misure. Mentrechè, per misure su sali di valori molto diversi in conduttività si presta molto bene quella proposta da Lorenz, per sali aventi conduttività nello stesso ordine di grandezza si presta assai meglio quella proposta da Arndt [1], usata poi con qualche modificazione da Tubandt e da Aten (loc. cit.), e che in sostanza è quella di Kohlrausch per la determinazione del potere conduttore di elettroliti forti. Essa consiste in un tubo ad U più o meno strozzato nella parte inferiore, il quale porta nella parte superiore più larga delle due branche gli etettrodi.

Per le misure di potere conduttore allo stato fuso usai sempre questo tipo di cella: il diametro della parte inferiore strozzata variava da 2 a 3 mm.; la larghezza da 7 a 10 cm., secondo che era conveniente l'impiego di una cella più o meno resistente.

La parte superiore delle branche del tubo ad U aveva un diametro di 12 mm. e un'altezza di circa 2 cm., e conteneva elettrodi cilindrici di platino lucido di grosso spessore, di circa 1 centimetro di diametro e di 7 millimetri di altezza. A questi erano saldati due fili di platino per tutto lo spazio sottoposto ad alta temperatura, che venivano poi convenientemunte inseriti nel dispositivo per la determinazione delle conduttività.

Per la misura della capacità di resistenza mi son servito di una soluzione normale di cloruro potassico purissimo precipitato dall'alcool, e di una soluzione di acido solforico di peso specifico 1,223, a 18°, già usata da Aten e da Goodwin per avere dati di controllo; ed ottenni risultati concordanti. Fu curato che tanto nelle misure di capacità di resistenza come pure nelle misure di conduttività il liquido giungesse sempre alla medesima altezza sopra gli elettrodi, cioè di 4-5 millimetri. Durante le misure gli elettrodi vennero scossi e girati entro le branche che li contenevano,

[1] Zeit. f. Elektroch., *12*, 337 (1906).

senza che una sensibile influenza potesse venire notata nelle letture del ponte.

Le celle erano di quarzo. Usando questo materiale, dato il suo piccolo coefficiente di dilatazione ($5,4 \cdot 10^{-7}$) (¹), è da tralasciare la correzione che si dovrebbe portare nel calcolo alla temperatura di esperienza, dovuta ad una eventuale variazione delle dimensioni della cella sino a temperature relativamente alte.

Così pure non venne preso in considerazione il potere conduttore della cella stessa, poichè esso è assolutamente trascurabile rispetto a quello dei sali usati.

Non è invece trascurabile la resistenza che offrono le parti metalliche che vengono sottoposte ad alta temperatura; essa venne quindi misurata alle varie temperature, alle quali vennero poi eseguite misure di conduttività, e ne fu tenuto conto nel calcolo della capacità di resistenza della cella e nel calcolo della conduttività.

Le miscele erano mantenute allo stato fuso, in un largo forno a resistenza elettrica in atmosfera di azoto. La misura delle temperature veniva fatta con un termoelemento Pt — Pt + Rh accuratamente controllato, la saldatura del quale era immersa in un tubetto contenente la stessa miscela che era contenuta nella cella di conduttività e posto tra le due branche di quest'ultima.

La corrente usata per il riscaldamento era quella stradale, che veniva regolata con un sistema di reostati con raffreddamento ad acqua, e quindi di resistenza praticamente costante, dimodochè, una volta portato il forno alla temperatura voluta, si poteva ottenere una buona costanza di temperatura.

In ogni determinazione questa venne mantenuta costante per almeno quindici minuti, tempo trovato sufficiente per avere la certezza che tutte le parti della cella di conduttività ed il tubicino che conteneva la saldatura del termoelemento fossero alla stessa temperatura voluta.

Il riempimento della cella venne fatto con ogni cura, per evitare l'occlusione di bollicine di aria nella massa fusa dei sali.

Nella tabella seguente sono raccolti i valori di conduttività, espressi in ohms reciproci, dei singoli sali puri usati, quali risultarono dalle mie esperienze, posti in confronto a quelli, trovati da altri esperimentatori, alla stessa temperatura di 500°.

		Tubandt	Arndt	Lorenz
$Pb\,Cl_2$	1,472	— —	— —	1.411
$Pb\,Br_2$	1,030	— —	— —	— —
Ag Cl	3,654	3,910	— —	— —
Ag Br	2,920	2,920	3,020	— —
Tl Cl	1.224	1,332	— —	— —

(¹) Holborn e Henning, Ann. der Physik [4] *10*, 446 (1903).

I punti di fusione dei sali usati furono i seguenti:

$PbCl_2$	495°	Ag Cl	455°	Tl Cl	429°
$PbBr_2$	368°	Ag Br	422°		

A mio parere, le differenze tra i valori di conduttività dei singoli sali, oltrechè ad impurezze, sono da attribuire a piccole variazioni nelle determinazioni della temperatura. I valori dati tanto per i sali quanto per le loro miscele rappresentano il valore medio di un buon numero di determinazioni fatte separatamente.

Nelle tabelle seguenti sono raccolti i valori ottenuti per i tre sistemi sperimentati $PbCl_2$-$PbBr_2$; Ag Cl - Ag Br; Tl Cl - Ag Cl.

Ognuno dei valori singoli portati in queste tabelle, è la media di almeno tre letture differenti, ottenute con diverse resistenze di confronto; frequentemente furono eseguite diverse serie di misure su miscele preparate a parte.

Nelle tabelle seguenti, oltre alla composizione in peso ed in molecole percento delle varie miscele e ai valori di conduttività specifica realmente osservati, sono ancora riportati i valori calcolati colla regola dei miscugli in base alla composizione in molecole, le differenze assolute tra i due valori e quelle percentuali sui valori calcolati.

Cloruro e bromuro di piombo. — Ricordo come dal diagramma di solidificazione del sistema cloruro-bromuro di piombo risulti la formazione di cristalli misti del primo tipo di Roozeboom [1], e come sia da escludere la formazione di sali doppî tra i due sali e quindi, con ogni verosimiglianza, anche l'esistenza di complessi nel fuso.

Dai valori raccolti nella prima tabella risulta come le conduttività trovate siano sempre leggermente inferiori a quelle calcolate con la regola dei miscugli; le differenze raggiungono il 4 % per la miscela equimolecolare.

TABELLA 1ª.

$PbCl_2 + PbBr_2$

Composizione della miscela		K trovato $t = 500°$	K calcolato	$K_{calc.}$-$K_{trov.}$	Differenze %
% in peso $PbCl_2$	molecole % $PbCl_2$				
0.00	0.0	1 030	—	—	—
7.76	10.0	1.059	1.072	0.013	1.22
20.15	25.0	1.108	1.140	0.032	2.80
43.09	50.0	1.201	1.251	0.050	4 00
69.44	75.0	1.310	1.361	0.051	3.75
87.21	90.0	1.400	1.429	0.029	2 00
100.00	100.0	1.472	—	—	—

[1] Mönkemeyer, N. Jahrb. f. Min. G. u. P., Bb. *22*, 1 (1906).

Cloruro e bromuro d'argento. — Dalle miscele fuse di cloruro e bromuro d'argento si depositano pure cristalli misti omogenei [1] (tipo II di Roozeboom). Come si può vedere dalla 2ª tabella, anche in questo caso i valori trovati sono inferiori a quelli calcolati; le differenze tra valori trovati e valori calcolati sono ancora più piccole che non nel caso precedente.

TABELLA 2ª.

Ag Cl + Ag Br

Composizione della miscela		K trovato $t = 500°$	K calcolato	$K_{calc.}$-$K_{trov.}$	Differenze %
% in peso di Ag Cl	molecole % di Ag Cl				
0.00	0.00	2.924	—	—	—
24 65	30.00	3.130	3.143	0.013	0.22
43.00	50.00	3.246	3 288	0.042	1.27
64.00	70.00	3.409	3.434	0.025	0.73
100.00	100.00	3.653	—	—	—

Cloruro talloso e cloruro d'argento. — Dal diagramma di solidificazione delle miscele di questi due sali [2] risulta la formazione di un composto decomponibile alla fusione, e quindi, indubbiamente largamente dissociato nel fuso. Si noti che l'isoterma di conduttività venne costruita a una temperatura di circa 250° più alta della temperatura di formazione di questo composto. Tuttavia, come risulta dalla tabella 3ª, le differenze percentuali tra i valori trovati e i valori calcolati sono di molto maggiori che non nei casi precedenti, e raggiungono il 25 %: cosicchè, mentre, nei sistemi precedenti, tali differenze potevano venire attribuite in principal modo a retrocessione del grado di dissociazione per la presenza di uno ione in comune, in quest'ultimo esse debbono provenire principalmente dall'esistenza di molecole complesse nel fuso.

(1) Mönkemeyer, loc. cit

(2) Questi Rend., *20*, 2° sem.

TABELLA 3ª.

$TlCl + AgCl$

Bomposizione della miscela		K trovato $t = 500°$	K calcolato	$K_{calc} - K_{trov.}$	Differenze %
% in peso di Tl Cl	molecole % di Tl Cl				
0.00	0.00	3.653	—	—	—
22.77	15.30	2.925	3.277	0.352	10.74
42.00	30.00	2 260	2.921	0.661	22.63
63.00	50 00	1.771	2.433	0.662	27.21
79.43	70.00	1.470	1.946	0.476	24.46
100 00	100.00	1.215	—	—	—

Dalle miscele di conduttività specifica non si possono tuttavia trarre deduzioni decisive, per le possibili variazioni di densità alla mescolanza dei due sali; è necessario ricorrere alla determinazione delle conduttività equivalenti, e quindi a misure di densità delle varie miscele, per poter risalire alle concentrazioni; sotto questo punto di vista proseguo le mie ricerche. Da misure già fatte posso già dire che le variazioni di densità sono assai piccole e tali da non alterare l'andamento generale dei valori della conduttività specifica come sono qui considerati.

In una prossima Nota esporrò i risultati di misure allo stato solido di questi stessi sistemi e le deduzioni che da essi si possono fare.

Chimica-fisica. — *Analisi termica delle miscele degli idrati alcalini coi corrispondenti alogenuri. I. Composti di potassio.* Nota di GIUSEPPE SCARPA, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Sullo zolfo di Zonda - (S. Juan)* (Repubblica Argentina) (1). Nota di C. PERRIER, presentata dal Socio F. PARONA.

Nella collezione dei minerali della Repubblica Argentina, esistente nel Museo di mineralogia della R. Università di Torino, e della quale fu studiato solo recentemente il dioptasio di Còrdoba (2), notai un campione di zolfo portante l'indicazione « Azufre - Zonda - (S. Juan) », che mi parve particolarmente interessante per la ricchezza e lo splendore delle faccie che i numerosi cristallini presentavano.

Siccome non risulta che tale giacimento sia stato finora menzionato a proposito dello zolfo, e tanto meno che sia stato fino ad ora descritto, ho accolto con piacere il consiglio del prof. Zambonini di eseguirne uno studio cristallografico, di cui espongo quì i risultati.

Lo zolfo di Zonda si presenta in aggruppamenti irregolari di cristalli, sopra una massa argillosa compatta, di colore grigiastro, contenente qualche cristallino di quarzo; nelle piccole cavità di questa si rinvengono degli individui generalmente isolati, assai piccoli, molto ricchi di facce, tutte ben lucenti e piane, sui quali ho potuto eseguire delle buone misure.

La grandezza di questi cristalli, che hanno *habitus* esclusivamente globulare, varia da 1 a 2 mm.

In essi mi fu possibile di identificare le seguenti 24 forme:

a {100}	*b* {010}	*c* {001}			
m {110}					
n {011}	*v* {013}				
e {101}	*u* {103}.				
ψ {119}	*ω* {117}	*t* {115}	*o* {114}	*s* {113}	*y* {112}
	p {111}	*δ* {221}	*γ* {331}	*ε* {551}	
q {131}	*x* {133}	*z* {135}			
r {311}	*α* {313}	*β* {315}.			

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di mineralogia della R. Università di Torino, diretto dal prof. F. Zambonini

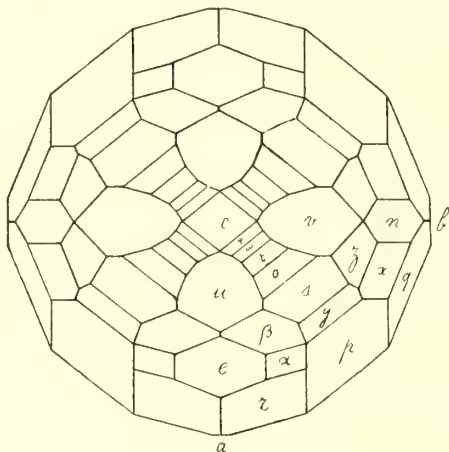
(2) E. Quercigh, *Il dioptasio di Córdoba (Argentina)*. Rend. Acc. sc. fis. e mat. di Napoli, 1914, fasc. 11-12.

Le combinazioni notate furono le seguenti:

1) $c, \psi, \omega, t, o, s, y, p, \gamma\, m, v, n, \beta, r$;
2) $c, t, o, s, y, p, \delta, \gamma, m, v, n, b, \beta, \alpha, r$;
3) $c, \psi, \omega, t, o, s, y, p, v, n, b, z, x, q, a, u, e, \alpha$,
4) $c, \psi, \omega, t, o, s, y, p, \varepsilon, m, a, u, e, \beta, \alpha, r$;
5) $c, \psi, \omega, t, o, s, y, p, v, n, b, z, x, q, u, e, a, \beta, \alpha, r$;
6) $c, \omega, t, s, y, p, \gamma, m, v, n, b, z, x, q, u, e, \beta$;
7) $c, \psi, \omega, t, o, s, y, p, z, x, u, e, \beta$;
8) $c, t, s, p, v, n, b, z, x, q$ (cristallo rotto).

	Valore medio osservato	Limiti	Valori calcolati	Differenze calc-oss.
$c : \psi =$ (001): (119)	18°30′	18°16′ 18°45′	18°32′	2′
ω (117)	23 17	23 23 29	23 19	2
t (115)	31 5	30 55 31 14	31 6 $^1/_2$	1 $^1/_2$
o (114)	37 2	36 57 37 5	37 2	0
s (113)	45 7	44 54 45 18	45 10	3
y (112)	56 31	56 22 56 46	56 27 $^1/_2$	3 $^1/_2$
p (111)	71 39	71 30 71 46	71 40	1
δ (221)	80 42	80°42′	80 35 $^1/_2$	— 6 $^1/_2$
γ (331)	83 39	83°27′ 83°46′	83 42	3
ε (551)	86 15	86°15′	86 12	— 3
m (110)	89 59	89°55′ 90°3′	90	1
v (013)	32 22 $^1/_2$	32 15 32 32	32 23 $^1/_2$	1
n (011)	62 20	62 17 62 22	62 17	— 3
b (010)	90 2	90 1 90 4	90	— 2
z (135)	50 59	50 56 51 5	50 59	0
x (133)	64 5	64 2 64 7	64 4 $^1/_2$	— $^1/_2$
q (131)	80 47	80 41 80 53	80 47 $^3/_4$	$^3/_4$
u (103)	37 56	37 49 38 1	37 58	2
e (101)	66 49	66 37 66 55	66 52	3
a (100)	90 2	90 3 90 1	90	— 2
β (315)	55 29	55 22 55 35	55 30	1
α (313)	67 34	67 26 67 40	67 34	0
r (311)	82 12	82 9 82 17	82 10	— 2
(331): (33$\bar{1}$)	12 33	12°33′	12 36	3

Per la ricchezza di forme, per l'armonico sviluppo delle piramidi e dei prismi, questi cristalli assumono in generale l'aspetto di una botte, e ricordano, perciò, moltissimo i cristalli di zolfo dell'isola di Saba nelle Indie occi-

dentali descritti da Molengraaff[1], solo si nota che nello zolfo di Zonda, oltre ad aversi un piccolo numero di forme in più, le piramidi della zona [001 : 310] sono alquanto più sviluppate, come risulta dalla annessa figura che riproduce un cristallo con la combinazione N°. 5.

Dei pinacoidi, *c* non manca mai ed ha un discreto sviluppo, esso compare però quasi sempre con una faccia sola, essendo per lo più i cristalli impiantati per l'asse delle *z*; *a* venne osservato una volta sola come una piccola facciuzza, assai poco lucente; *b* è, per lo più, assai bello ed ha pure un discreto sviluppo.

Tra i prismi di terza specie si nota solamente *m*, che però non sempre compare ed è, in ogni modo, pochissimo sviluppato.

Nella zona dei prismi di seconda specie *u* ed *e* compaiono con nitide faccette ben sviluppate, e in quella dei prismi di prima specie *v* ed *n*, pure assai belli, con buon sviluppo.

Le piramidi *t*, *s* e *p* non mancano mai (*s* e *p* con buon sviluppo, *t* invece un po' meno sviluppata); *ω*, *o* ed *y* compaiono quasi sempre, ed *o* è, in generale, poco meno sviluppato di *s*. Le piramidi *γ*, *δ* ed *ε* compaiono sempre come esilissime faccette: la prima venne osservata 3 volte; le altre una volta sola.

Nella zona delle piramidi *β*, *α* ed *r*, *α* è, in generale, sempre meno sviluppata delle altre due; assume invece una notevole estensione in quei cristalli dove compare da sola. Le piramidi *x*, *q* e *z* hanno sempre buon sviluppo.

Nella tabella seguente sono indicati i valori angolari misurati, messi a confronto con quelli calcolati in base al rapporto parametrico di v. Kokscharow

$$a : b : c = 0,81309 ; 1 : 1,90339$$

[1] Groth's Zeitscrift, XIV (1888) 45.

il quale, data l'ottima concordanza tra valore calcolato e misurato, deve valere anche per lo zolfo di questa località.

Dal punto di vista cristallografico questo giacimento acquista un notevole interesse in quanto che è noto, come, in generale, siano assai ricchi di facce solo i cristalli di zolfo provenienti dall'alterazione dei solfuri metallici, e quelli, ma più raramente, di origine vulcanica.

Così Pelloux [1] nello zolfo proveniente dall'alterazione della stibina delle Cetine di Cortoniano rinvenne 18 forme; Millosevich [2] in quello rinvenuto sulla galena blendosa di Malfidano constatò ben 27 forme. Assai ricchi di forme (21) sono pure i cristalli provenienti dalla galena di Bassick (Stati Uniti) studiati da Busz [3], come pure quelli provenienti dall'alterazione dell'antimonite di svariate località, studiati da Foullon [4], Pelikan [5], Eakle [6], Šimek [7], Quercigh [8], nei quali il numero delle forme varia da 16 a 27.

Fra i giacimenti di zolfo di natura vulcanica notevoli per ricchezza di forme ricorderò un cristallo di zolfo su lava alterata, esistente nel Museo Britannico, ma di ignota provenienza, nel quale Fletcher [9] osservò 14 forme; i cristalli di Saba misurati da Molengraaff, il quale vi rinvenne ben 23 forme; e da ultimo i cristalli di zolfo del Vesuvio, nei quali lo Zambonini [10] potè notare 11 forme, sebbene, come nota lo stesso A. località vesuviane così ricchi di facce, siano veramente eccezionali.

Lo zolfo di Zonda, mentre è da annoverarsi fra i giacimenti di zolfo più ricchi di facce, non è però, per quanto si disse in principio, da ricondursi a nessuno di questi due tipi, perchè giace sopra una roccia che non è affatto di natura vulcanica ed è priva assolutamente di solfuri metallici, onde la sua origine è verosimilmente da attribuirsi a decomposizione di acque sulfuree.

(1) A. Pelloux, *Appunti sopra alcuni minerali delle Cetine di Cortoniano presso Rosia*. Rendic. Acc. Lincei (1901), X, *2*, 12.

(2) F. Millosevich, *Zolfo ed altri minerali della miniera di Malfidano presso Buggerru*. Rend. Acc. Lincei (1898), VII, *2*, 250.

(3) K. Busz, *Schwefel von Bassick*. Zeit. f. Kryst. (1890), *17*, 549.

(4) Foullon, Verh. geol. Reichsanst. (1890). *40*, 318; (1892), *42*, 175.

(5) Pelikan, *Schwefel von Allchar in Macedonien*. Tschermak's Mitt. N. *F.* (1891), *12*, 34.

(6) A. S. Eakle, *Sekundäre Mineralbildungen auf Antimonit*. Zeitschr. f. Kryst. (1895), *24*, 586.

(7) A. Šimek, *Ueber den Schwefel von Kostajnik in Serbien*. Rozpravy. böm. Akad. Prag, 1908; Ref. Zeitschr. f, Kryst. (1902), *50*, 639.

(8) E. Quercigh, *Lo zolfo dell'antimonite alterata di Selva presso Casal di Pari* (Grosseto). Rend. Acc. Lincei (1915), XXXIV, *1*, 73.

(9) L. Fletcher, *Krystallographische Notizen*. Ref. Zeitsch. f. Kryst. (1881), 5, 109.

(10) F. Zambonini, *Mineralogia Vesuviana*. Memorie Acc. Sc. fis. e mat. Napoli, 1910.

Mineralogia. — *A proposito dell'azione della hauerite sull'argento e sul rame* [1]. Nota di E. QUERCIGH, presentata dal Socio C. F. PARONA.

Alcuni anni fa, il prof. Giovanni Strüver ebbe occasione di osservare [2] l'alterazione prodotta dai cristalli di hauerite sull'argento e sul rame metallici, alterazione che si manifesta colla formazione dei solfuri corrispondenti.

Egli osservò, infatti, che cristalli e solidi di sfaldatura della hauerite appoggiati su lamine levigate e pulite dei due metalli accennati, vi producono, dopo un più o meno lungo periodo di permanenza, una macchia bruna o nera, avente la forma della superficie piana del minerale secondo la quale avviene il contatto; se la durata dell'esperienza si prolunga di molto, l'annerimento si manifesta anche nelle parti circostanti, immediatamente vicine, con intensità, però, rapidamente decrescente.

Il colore bruno-nero dell'impronta, che la faccia del minerale lascia sul metallo, non è uniforme: esso è generalmente molto più debole in corrispondenza alla parte centrale della faccia stessa, e l'alterazione che questa subisce durante il contatto sembra più rapida di quanto non si verifica ordinariamente nella hauerite esposta all'aria.

Le osservazioni relative a tale argomento sono contenute, insieme con altre d'indole analoga, nella Nota citata ed in un'altra [3] che la seguì a brevissima distanza; in esse il compianto mineralista si limitava ad un'esposizione obiettiva dei fatti da lui osservati, che gli suggerivano la possibilità di una reazione chimica fra la hauerite e l'argento od il rame, ed esprimeva il desiderio che altri, potendolo fare, s'impossessasse dell'argomento. Scriveva, infatti [4]: « non avrei naturalmente discaro se altri che hanno a disposizione un laboratorio chimico, e sovrattutto i giovani, i quali hanno più fondata speranza di vedere la fine delle esperienze intraprese, volessero impossessarsi dell'argomento ».

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di mineralogia della R. Università di Torino, diretto dal prof. Ferruccio Zambonini.

[2] G. Struever, *Azione chimica tra la hauerite ed alcuni metalli a temperatura ordinaria ed a secco*. Rend. Accad. Lincei X (1901), 1° sem., pag. 124.

[3] G. Struever, *Azione chimica dei solfuri di ferro e del solfo nativo sul rame e sull'argento a temperatura ordinaria ed a secco*. Rend. Accad. Linc., X (1901), 1° sem., pag. 233.

[4] loc. cit., pag. 127.

Le interessanti esperienze del prof. Strüver sono rimaste, per parecchi anni, senza sèguito; solo recentemente il Beutell [1], con una particolareggiata serie di osservazioni, ha ripreso l'argomento, arrivando, però, ad una conclusione ben diversa: egli, infatti, esclude assolutamente un'eventuale reazione, allo stato solido, fra la hauerite e l'argento ed il rame, ammessa dallo Strüver, ed attribuisce l'annerimento di questi metalli, nelle condizioni indicate, unicamente allo zolfo prodottosi per la scomposizione del minerale causata dall'aria atmosferica, zolfo che, avendo, alla pressione e temperatura ordinarie, una discreta tensione di vapore, rende possibile, com'è ovvio, la sua azione anche in punti relativamente distanti da quelli in cui si è formato.

Queste conclusioni non mi sembrarono pienamente giustificate dalle ricerche del Beutell, e, dato l'interesse che mi parve presentasse questo problema, decisi di eseguire qualche nuova esperienza in proposito.

Mentre mi accingevo a comunicare privatamente al prof. Strüver i miei risultati, — i quali rettificano le conclusioni di Beutell nel senso che dimostrano, oltre alla capacità della hauerite di agire sull'argento e sul rame per mezzo dei vapori di zolfo originatisi nella notissima scomposizione del minerale all'aria, anche quella di reagire allo stato solido coi detti metalli, conformemente all'opinione avanzata dal prof. Strüver, — giunse improvvisa la notizia, triste per la mineralogia, tristissima per quella italiana in particolare, della morte dell'illustre scienziato.

Esporrò quindi in questa Nota le mie osservazioni e le deduzioni che da esse sembrano giustificate, tanto più che così mi è possibile di compiere l'opera gradita di dimostrare come le vedute del compianto Maestro, ben noto per la precisione ed il rigore delle sue indagini scientifiche, corrispondano, anche su questo argomento —, contrariamente alla supposizione di Beutell — , completamente alla realtà delle cose.

Il Beutell constatò anzitutto, come già aveva fatto lo Strüver, che la macchia nera della hauerite si estende tutt'intorno un po' al di là dei limiti della superficie di contatto fra essa e l'argento. Quest'azione, però, che dimostra la presenza di zolfo libero — il quale, com'è noto, agisce anche a distanza, possedendo una discreta tensione di vapore alla temperatura ordinaria —, non esclude in alcun modo la possibilità di una reazione, allo stato solido, fra il minerale ed il metallo.

Lo stesso si deve convenire rispetto all'altro fatto osservato dal Beutell, e parimenti già messo in evidenza dallo Strüver, che, cioè, le macchie hanno i bordi molto marcati, mentre verso la parte centrale possiedono un colore

[1] A. Beutell, *Die Zersetzung des Hauerits an der Luft und die dadurch hervorgerufene Einwirkung auf Silber und Kupfer.* Centralblatt f. Min. Geol. u. Pal. (1913), 758 (Dezember).

assai più debole, colore che solo col lungo prolungarsi dell'esperienza va diventando lentamente più carico; anche qui si mette bene in luce l'azione dell'aria e quella conseguente dello zolfo come prodotto di scomposizione del minerale, ma non si può escludere la reazione allo stato solido, tanto più che, siccome quest'ultima avviene solo quando si verifica un contatto diretto ed intimo, si possono avere gravi dubbî sulla perfezione dell'aderenza nei casi in cui, come nelle esperienze di Beutell, il cristallo di hauerite stava appoggiato semplicemente sulla lamina d'argento.

Un'altra esperienza, e la più conclusiva in apparenza, fu eseguita dal Beutell: la polvere di hauerite, riscaldata a 50° nel vuoto eseguito colla sua pompa a mercurio [1], dava un sublimato di zolfo, e si mostrava, in seguito, inattiva verso l'argento. Analogo comportamento dimostrò un cubetto di sfaldatura di hauerite di 5 mm. di lato.

A me sembra che in queste ultime esperienze rimanga maggiormente problematico il contatto fra l'hauerite ed il metallo: infatti, è evidente che, se un sublimato di zolfo si verifica nelle condizioni suddette, non possiamo più avere la certezza che la superficie esterna dei granuli di polvere o del cubo di sfaldatura sia costituita da hauerite inalterata, ed appare giustificato il dubbio che il contatto diretto e perfetto abbia luogo fra le due sostanze quando, dopo eseguito il vuoto ed il riscaldamento a 50°, esse vengono, con opportune manipolazioni, portate in vicinanza.

In tutta l'esposizione, molto particolareggiata, fatta dal Beutell, non si trova cenno di alcuna precauzione presa per assicurarsi un contatto intimo fra il minerale fresco ed il metallo.

Per dimostrare che una reazione chimica fra solidi non si verifica in questo caso, sarebbe stato necessario di provare che, nonostante il contatto perfetto, l'azione non si manifesta nemmeno in piccolissima misura.

Io ho incominciato col premere in una morsa una lamina d'argento piana e smerigliata di fresco, contro una faccia di sfaldatura, molto piana e splendente, della hauerite di Raddusa (che devo alla cortesia del prof. Zambonini, il quale me ne regalò, qualche anno fa, dei bellissimi esemplari, per servirmene in altre ricerche).

Dopo circa 40 ore, la superficie dell'argento corrispondente alla faccia del minerale apparve leggermente, ma decisamente imbrunita in corrispondenza ai punti in cui il contatto era stato più perfetto (messi in evidenza dalla deformazione subìta dalla lamina, la quale aveva uno spessore di mm. 0,5 ed era separata dalla morsa per mezzo di un interposto disco di cartone d'amianto), con delle striature nere qua e là, le quali si trovano, come poi verificai, in corrispondenza delle sottilissime linee di frattura del

[1] A. Beutell, *Neue automatische Quecksilberluftpumpe.* Chemiker Zeitung, an. 1910, n. 150, pag. 1352.

minerale, nelle quali, come lo stesso Beutell ammette in un'osservazione analoga, probabilmente si è insinuata col tempo l'azione dell'aria.

Per escludere l'azione dell'aria atmosferica, ho, poi, eseguito la pulitura della lamina d'argento sotto il toluolo contenuto in apposita bacinella; nello stesso modo ho pulito colla carta smerigliata una faccia d'ottaedro del minerale, e, mantenendo le sostanze sempre sotto il toluolo, le ho sovrapposte e strette, — per quanto fu possibile, senza incorrere nel pericolo di provocare la rottura del cristallo — in una morsetta.

Dopo 24 ore di riposo sotto il toluolo, la lamina mostrò un notevole imbrunimento in corrispondenza alla faccia del cristallo. Quest'esperienza fu ripetuta moltissime volte senza levare le sostanze dal toluolo e smerigliando sempre accuratamente le due superfici di contatto; fu anche modificata ricorrendo a superficie di sfaldatura della hauerite, ottenute operando sempre sotto toluolo, ed ebbi così costantemente i medesimi risultati.

Tre sono le ipotesi che si possono avanzare per spiegare questi fatti:

1°) reazione, allo stato solido. fra hauerite ed argento;

2°) azione del toluolo sulla hauerite, cioè capacità di sottrarne una parte dello zolfo che viene fissato dall'argento in immediata vicinanza;

3°) presenza di zolfo libero o di idrogeno solforato nel minerale di Raddusa.

Sarebbe ammissibile, inoltre, la concomitanza di due o tutte queste possibilità.

Che la hauerite di Raddusa contenga dello zolfo libero, non pare probabile se si considera l'analisi che ne fece il prof. Eugenio Scacchi [1], trovandosi il 46,05 % di manganese ed il 53,76 di zolfo, mentre la formola $Mn\,S_2$ richiederebbe, per tale quantità di manganese, il 53,77 di zolfo; ad ogni modo io ho distrutto il valore di questa ipotetica obiezione col tenere sotto toluolo la superficie levigata della hauerite, per 24 ore, separata dall'argento prima di sovrapporla a questo: è evidente che il toluolo in questo intervallo di tempo ha avuto modo di sciogliere ed asportare lo zolfo libero eventualmente esistente alla superficie, tanto più che non ho mancato di strofinare, di tanto in tanto, la faccia in quistione sopra un pezzo di velluto posto al fondo della bacinella.

Siccome anche con tale precauzione la macchia bruna si manifestò dopo il contatto fra le due sostanze effettuato per mezzo della morsetta, credo che più non sia sostenibile l'attribuire allo zolfo libero tale fenomeno.

Anche l'ipotesi che il toluolo abbia la capacità di sottrarre dello zolfo alla hauerite, quantunque si sappia che in tale minerale la metà dello zolfo è molto debolmente legata, appare poco fondata dopo l'esperienza precedente,

[1] Eugenio Scacchi, *Sulla hauerite delle solfare di Raddusa in Sicilia.* Rend. R. Accad. d. scienze fis. e mat. Napoli, aprile (1890).

poichè, in tal caso, in 24 ore il toluolo avrebbe ben potuto asportare dello zolfo dalla superficie del cristallo, formandovi in tal modo un esilissimo strato di alabandina la cui azione sull'argento sarebbe ancora più difficile a spiegare, volendo escludere la reazione allo stato solido.

Ad ogni modo, io ho voluto fare un'altra esperienza: un cristallino di hauerite fu accuratamente privato dallo strato superficiale di prodotti d'alterazione, e quindi porfirizzato accuratamente in mortaio d'agata sotto il toluolo. Lasciata quindi depositare la polvere finissima in fondo al mortaio, fu esportata con una pipetta la maggior parte del liquido soprastante, rimpiazzandolo con del nuovo e ripetendo l'operazione un paio di volte nell'intento di allontanare tutto lo zolfo, presente come tale, nelle fenditure microscopiche che esistono spesso nei cristalli di hauerite in direzione dei piani di sfaldatura, fenditure in cui, attraverso il tempo, l'aria atmosferica od altri agenti hanno prodotto una lieve alterazione che si può constatare sfaldando minutamente un cristallo: si osservano infatti, generalmente, fra la maggior parte delle superficie di sfaldatura brillanti e freschissime, alcune poche che sono matte e grigiastre.

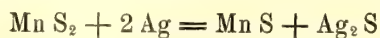
Il liquido di lavaggio, filtrato in pesafiltri tarato, fu evaporato lentamente ed il residuo tenuissimo, costituito da zolfo, fu pesato. Da gr. 1.000 di hauerite ottenni così gr. 0.000 3 di zolfo, cioè il 0.3 $^0/_{00}$: quantità, come si vede, molto piccola.

La polvere di hauerite fu in tutte queste osservazioni tenuta costantemente sotto toluolo, e l'operazione di lavaggio fu in seguito eseguita parecchie volte ad intervalli di tre o quattro giorni. L'evaporazione del toluolo di lavaggio mise in evidenza che nessuna azione sensibile, nelle mie condizioni, è esercitata da questo solvente sulla hauerite pura, e con ciò rimangono maggiormente da escludersi le ipotesi 2ª e 3ª.

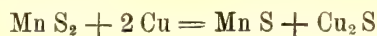
Dopo che per varie settimane la polvere di hauerite fu sottoposta a questo trattamento, ne ho posto una porzione fra due lamine di argento levigate e pulite di fresco, agendo sempre sotto toluolo, ed ho stretto fortemente il tutto nella solita morsetta. In 24 ore, la macchia bruna, in corrispondenza ai punti di contatto, è comparsa come al solito. Sembra, da quanto dissi, che la prima delle tre ipotesi menzionate sia la più verosimile, poichè non mi pare che il fenomeno sia altrimenti spiegabile che coll'ammissione di una reazione chimica fra hauerite ed argento.

Il rame si comporta in modo analogo all'argento; dato il colore del metallo, il fenomeno si manifesta in modo molto meno evidente ma non dubbio.

Non è ammissibile che la pressione, molto piccola del resto, esercitata in tutte queste esperienze fra le due sostanze reagenti, abbia influenza favorevole alla reazione, e tanto meno che ne sia la causa unica, perchè la reazione:

$$Mn\,S_2 + 2\,Ag = Mn\,S + Ag_2\,S$$

avviene con un leggero aumento di volume e quindi non potrà essere che ostacolata da un aumento di pressione.

Anche nel caso del rame si calcola che la reazione:

$$Mn\,S_2 + 2\,Cu = Mn\,S + Cu_2\,S$$

avviene con una leggerissima variazione di volume, ciò che esclude una sensibile influenza delle piccole pressioni sull'andamento della reazione stessa.

Da quanto esposi, sembra giustificata la conclusione che, mentre le ricerche di Beutell dimostrarono ad esuberanza l'azione dell'aria sull'hauerite che si manifesta con liberazione di zolfo, esse però non esclusero in alcun modo la possibilità di una reazione chimica allo stato solido; tale possibilità risulta evidente dalle mie esperienze.

L'azione è molto maggiore, com'è ovvio, alla presenza dell'aria, poichè in tal caso si verifica, inoltre, la liberazione di zolfo elementare, in modo analogo a quanto fu verificato per la cobaltite (1), il glaucodoto (2), l'arsenopirite (3), ecc. dallo stesso Beutell. Lo zolfo, avendo una discreta tensione di vapore a temperatura ordinaria, agisce anche a distanza, e si può dire che, dopo avvenuta l'alterazione superficiale dell'hauerite in contatto coll'argento, ogni ulteriore annerimento di questo è dovuto esclusivamente ai vapori di zolfo.

Biologia. — *Una ipotesi biologica sulla deposizione dello zolfo durante l'epoca gessoso-solfifera.* Nota I^a di G. Bargagli-Petrucci, presentata dal Corrisp. P. Baccarini (4).

In una Nota su « l'origine biologica della *Terra di Siena* » (5) esposi le considerazioni che mi condussero a ritenere i depositi di terre gialle e

(1) A. Beutell, Chemisch-mineralogische Untersuchungen am Glanzkobalt. in Centralblatt f. Min. Geol. u. Pal. (1911) 663.

(2) Id., Chem.-min. Unters. am Glaukodot, loc. cit., pag. 411.

(3) Id., Chem.-min. Unters. am Arsenkies, loc. cit., pag. 316.

(4) Questa Nota era già in corso di stampa quando il *Chemischen Centralblatt* (1915, fasc. 7) ha pubblicato il riassunto di un interessante lavoro di Jacobsen pubblicato in *Folia microbiologica* (dic. 1914), dal quale risulta come da fanghi di diversa origine e da terra di giardino si possa ottenere un microorganismo (*Thiobacillus thioparus*) capace di decomporre $H_2\,S$ in culture liquide di laboratorio, con formazione di piccole goccie molto rifrangenti di zolfo alla superficie del liquido di cultura all'esterno dei batterii. Lo zolfo così formato passerebbe poi lentamente ad acido solforico. Il *Thiobacillus thioparus* agirebbe anche qui da ossidante, ed è importante di notare l'analogia fra le osservazioni di Jacobsen e quelle eseguite sul *B. ferrigenus* alla regione boracifera. Il fenomeno sarebbe dunque assai più comune di quanto si credeva, e ciò rende più verosimile l'ipotesi.

(5) Bargagli-Petrucci G., *Sull'origine biologica della « Terra di Siena »*. (Mem. della R. Accad. dei Lincei, anno CCCIX, 1914).

bolari del monte Amiata come un prodotto del lavoro di microorganismi ossidanti, i quali avrebbero esercitato la loro azione, se non esclusiva, almeno preponderante, in seno ad acque lacustri di piccoli bacini montani.

Si trattava allora di emettere una ipotesi probabile sull'origine di formazioni sedimentari di potenza relativamente assai piccola: e tale ipotesi, suggerita dalle esperienze di laboratorio sul *Bacillus ferrigenus* [1], trovò indirette conferme nelle osservazioni eseguite, non solo nella regione boracifera toscana dalla quale quel germe proveniva [2], ma anche sulle acque di alcune sorgenti del monte Amiata; acque abbastanze ricche in deposito ferrugginoso, che i chimici hanno trovate ozonizzate [3], e nelle quali potei constatare la presenza di microorganismi, poco diversi dal *B. ferrigenus*, agenti in modo analogo sul loro contenuto ferroso [4].

Un'altra serie di ricerche mi permise di osservare sperimentalmente che microorganismi ossidanti, quali il *B. ferrigenus*, sono capaci di agire anche sopra altri composti assai comuni in natura, quali l'idrogeno solforato ed i solfuri, alla ossidazione dei quali essi contribuiscono in modo diverso, secondo le condizioni nelle quali si trovano ad operare, riuscendo spesso, in determinati casi, alla liberazione dello zolfo dai suoi legami ed alla sua deposizione allo stato metalloidico [5].

Da tali constatazioni nacque l'idea di prendere in esame quale potrebbe essere una eventuale azione, in natura, di grandi quantità di simili germi operanti in seno ad acque calde, lacustri o salmastre; e, benchè un accurato esame delle acque della regione boracifera non mi sia stato consentito, i fatti osservati e i dati raccolti in questa regione mi sono sembrati perfettamente concordanti con le ricerche eseguite in laboratorio, portandomi a ritenere che l'idrogeno solforato ed i solfuri, nelle loro trasformazioni chimiche, risentano, in maniera non dubbia, dell'opera di questi microorganismi.

La quantità di zolfo metalloidico che si deposita nelle incrostazioni così frequenti a Larderello e negli altri luoghi boraciferi, e quella che si può riscontrare nei fanghi circostanti a certi lagoni ed a certi soffioni, è ben poca cosa in confronto ai potenti depositi di questo metalloide che si incontrano nei terreni della formazione gessoso-solfifera, tanto importante specialmente

[1] Bargagli-Petrucci G., *Studii della flora microscopica della regione boracifera toscana*. III. *Il Bacillus ferrigenus* n. sp. (N. Giorn. bot. it., nuova serie, vol. XX, an. 1913).

[2] Id., *Studii* ecc. IV. *L'origine biologica della lagonite* (ivi).

[3] Nasini e Porlezza, *Sulla esistenza di acque naturali ozonizzate* ecc. (Rend. della R. Accad. dei Lincei, classe di scienze fisiche, vol. XXI, pag. 740, an. 1912).

[4] Bargagli-Petrucci G., *Sulla presenza di Batteriacee ossidanti nelle acque ozonizzate delle Bàgnore e dei Bagnòli sul monte Amiata*. Proc. verb. della Soc. bot. ital., seduta 14 giugno 1914.

[5] Idem., *Studii sulla flora microscopica della regione boracifera toscana*. V. *L'ossidazione biologica dell'idrogeno solforato* (N. Giorn. bot. it., nuova serie, vol. XXI, an. 1914).

nella Sicilia. Ciò non ostante, non mi è sembrato fuori di luogo il prendere in esame una interessante questione: se, cioè, e fino a qual punto si può supporre che azioni biologiche di microorganismi, e specialmente di batteriacee, possano avere avuto parte nella formazione di quei depositi. All'esame di questa ipotesi sono dedicate le considerazioni che seguono; considerazioni che, mi auguro, non sembreranno fantastiche anche a coloro che non consentissero nella mia ipotesi, perchè io credo non si possa ormai più dubitare della enorme influenza che gli esseri microscopici possono attualmente avere nelle trasformazioni della materia inorganica, e di quella che possono avere avuta nel passato, in epoche nelle quali la più elevata temperatura e l'esuberanza della vita vegetale ed animale dovevano essere particolarmente favorevoli alla moltiplicazione ed alla attività di quei germi; tanto meglio poi in assenza dell'uomo, che con la sua agricoltura e le sue industrie, con i suoi diboscamenti e le sue bonifiche, altera profondamente tanti fenomeni naturali e tanti aspetti della natura.

*
* *

Che lo zolfo ed il calcare solfifero si siano depositati in bacini chiusi o semichiusi fu già sostenuto, con successo, da autori anche non molto recenti, contro la opinione di altri i quali mettevano in rapporto la formazione dei depositi di zolfo unicamente con i fenomeni vulcanici, che avrebbero determinato infiltrazioni di gas nelle roccie preesistenti, dove essi avrebbero depositato lo zolfo, oppure avrebbero determinate addirittura delle sublimazioni di questo elemento [1]. Altri pensavano invece che la deposizione dello zolfo fosse avvenuta per effetto della decomposizione dell'acido solforico che avveniva in acque contenenti marne in sospensione [2], oppure la attribuivano alla decomposizione di questo gas per reazione dell'acido carbonico e dell'acqua sopra i solfuri, l'origine dei quali sarebbe stata dovuta alla riduzione del solfato di calce per mezzo di sostanze organiche [3].

Mottura scrisse a questo proposito, le seguenti parole:

« L'influenza del regno organico sulla produzione dello zolfo allo stato « di libertà era già stata annunziata da Chaptal nel secolo scorso, abbenchè « egli abbia errato nell'indicare il modo di generazione dello zolfo. Egli os- « serva, nella sua opera di Chimica, che lo zolfo trovato nei pozzi neri e « quello trovato a Parigi nelle fosse dei baluardi antichi, allorchè questi « vennero distrutti, debbono alla presenza delle sostanze organiche la loro « origine ».

[1] Schwarzemberg, *Tecnologia dei prodotti chimici*, Braunschweig 1865.
[2] Maravigna, Comptes rendus VII, 1838.
[3] Paillette, Comptes rendus XVII, 1843.

Altrove lo stesso Mottura, parlando delle ipotesi emesse da Bischoff e Paillette i quali consideravano « il minerale di zolfo come il rappresentante « locale di uno strato di solfato di calcio associato a sostanze organiche », cerca di dimostrarne la inammissibità, domandandosi fra le altre cose: « Per « quale ragione non venne ridotto il solfato di calce che si trova nei *par-* « *timenti*, ossia nelle parti più ricche, in sostanze bituminose, di tutta la « formazione solfifera? ».

« Per spiegare questa ipotesi », egli aggiunge, « è necessario di ammettere « che queste sostanze organiche fossero nel banco di minerale in propor- « zioni ragguardevoli, per dare origine ad una così importante formazione « di zolfo. Se questi esseri organici fossero esistiti, come si trovano im- « pronte di pesci, di legno fossile, e perfino delle foglie in stato di perfetta « conservazione, si dovrebbero rintracciare in quantità straordinaria i loro re- « sidui. Il legno fossile tuttavia, i pesci e le foglie, sono elementi rarissimi, « e servono, col loro stato di perfetta conservazione, a provare la quasi as- « soluta deficienza di esseri, sia vegetali sia animali, nel terreno solfifero, e « l'impossibilità della trasformazione locale del solfato di calce, dell'epoca « solfifera, nel minerale di zolfo » [1].

Pienamente d'accordo con questo autore nel ritenere improbabile una tale trasformazione del solfato di calce in minerale di zolfo, ho però riportato i precedenti brani per rilevare l'erroneità della illazione che egli trae a proposito dell'azione organica. Non è giusto infatti dire: *se esseri organici ci fossero stati, se ne troverebbero i resti*; occorre pensare anche a quegli esseri che, come le batteriacee, non possono lasciare traccia di sè, e che pure possono esercitare enormi influenze in natura.

Ma soprattutto intendo notare che l'idea di una azione organica, diretta o indiretta, nella formazione dei depositi solfiferi, è assai antica; e ciò è per me assai importante, benchè l'ipotesi che formulo sia assai diversa da quella immaginata dagli antichi autori e sostenuta anche da alcuni moderni. E a questo proposito è da ricordare anche l'ipotesi del Gemellaro [2] il quale pensava che lo zolfo provenisse da organismi animali (molluschi), nello stesso modo che il carbon fossile proviene da sostanze vegetali.

Per una non trascurabile coincidenza, gli esseri che con il loro comportamento nelle culture mi hanno suggerito la mia ipotesi, provenivano appunto da quella regione boracifera toscana che suggerì ad Hoffmann il seguente ravvicinamento: « In un periodo che è immediatamente successo alle « più recenti formazioni dei terreni secondarii », egli dice, « una gran parte « della Sicilia, in uno spazio geografico di 150 miglia quadrate, fu sotto- « posta all'azione di vapori carichi di zolfo, in quella guisa che le fumac-

[1] Mottura, *Sulla formazione terziaria della zona solfifera della Sicilia* (Mem. d. Com. Geol., vol. I, 1871).

[2] Gemellaro, Atti dell'Acc. Gioenia di Catania, vol. X, 1835.

« chie della Maremma toscana, da me precedentemente visitate, ancora chia-
« ramente mi rappresentavano ».

Mottura però non sembrò accettare l'ipotesi che nelle acque dell'epoca solfifera e nella sovrastante atmosfera esistessero notevoli quantità di acido solfidrico, che con la sua decomposizione avrebbe determinato il deposito di zolfo. Egli osserva che ciò non avviene alle *Acque Albule* di Tivoli, dove l'acido solfidrico si disperde quasi completamente nell'atmosfera senza lasciare un apprezzabile residuo di zolfo nelle concrezioni calcaree (travertini) prodotte dal passaggio del bicarbonato in carbonato di calcio.

Partendo da tale osservazione, il Mottura esprime una ipotesi un poco diversa, ammettendo che le acque di quegli antichi laghi contenessero in soluzione, come materiale primo, del solfuro di calcio, proveniente forse dalla riduzione dei gessi sottostanti ai banchi di tripoli ed al calcare siliceo. Ammesso ciò, ritiene che la decomposizione del solfuro di calcio abbia dato, da un lato carbonato di calcio, e dall'altro idrogeno solforato, il quale, producendosi lentamente, e, per così dire, allo stato nascente, aveva agio di ossidarsi a mano a mano che si formava, producendo zolfo libero, senza disperdersi nell'atmosfera come avviene nei laghi di Tivoli.

L'una e l'altra ipotesi sulla natura del materiale primo che si offriva alla esplicazione del fenomeno, possono concordare con l' intervento in esso di una azione biologica, e non è da escludere che l'uno e l'altro caso possano essersi verificati, sia contemporaneamente, sia in località ed epoche diverse, benchè io propenda a credere più verosimile l'ipotesi che ammette la presenza di bicarbonato di calcio e di idrogeno solforato. Sulla possibile origine di quest'ultimo accennerò qualche cosa più oltre, senza pretendere di approfondire in questo senso le indagini e le ipotesi.

Un concetto, in qualche punto diverso da quello di Mottura, espose il Baldacci, il quale ritiene che i depositi di zolfo non abbiano origine lacustre, ma lagunare, o marina di basso fondo, fondandosi sul ritrovamento di alcuni fossili di pesci marini.

Non è da escludere questo concetto: anzi esso è estremamente probabile, come sembra venir confermato dalla posizione che le più importanti solfare occupano di fronte alle varie formazioni geologiche; ma ciò non influisce sulla ipotesi biologica della deposizione dello zolfo, poichè il fenomeno come è supposto da essa, può ugualmente essersi verificato in laghi di acqua dolce, come in lagune o in insenature marine, e nulla si sarebbe opposto a supporlo possibile anche in mare aperto.

*
* *

Esaminando i diversi sedimenti che si sono formati successivamente in questi bacini lacustri e lagunari, basta, per il mio scopo, incominciare da quello che in modo costante precede, in ordine di tempo, il minerale di

zolfo, e che conserva nel modo più certo la evidente impronta di una origine organica: il tripoli, costituito, come è noto, dai resti silicei di Diatomee.

Tralascio invece i sottostanti strati che non hanno, sotto il mio punto di vista, una speciale importanza, non ostante gli indizii che potrebbero suggerire intesessanti riflessioni, troppo vaghe per ora per essere qui riferite.

La massima potenza di questi banchi si aggira, secondo Mottura, fra i 30 e i 40 metri; ma può anche oltrepassarla. Questo potente deposito corrisponde in più grandiosa scala, ad una fase biologica analoga a quella di quei piccoli laghi dell'Amiata che sono oggi le cave di tripoli, ed analoga a quella che si verificò, per brevissimo periodo, in quegli altri bacini dello stesso monte, dove più tardi si sviluppò il processo biologico della deposizione dell'idrossido di ferro; fenomeno che condusse alla formazione delle terre gialle e bolari (Terra di Siena) [1]. Durante quel periodo le acque dovevano essere assai limpide e pure, e non dovevano essere nè eccessivamente calde, nè troppo cariche di sostanze minerali; forse esse si rinnovavano abbastanza facilmente, perchè non potessero accumularsi e trasformarsi quei sali di calcio che avrebbero prodotto un notevole deposito di materiale calcareo.

Ma verso la fine di questo periodo biologico, caratterizzato dalla egemonia delle Diatomee, le condizioni devono essersi modificate. Forse le acque divennero più ricche in questi sali; forse, la temperatura divenne più elevata; forse modificazioni oro-idrografiche sopraggiunte resero più lento il rinnovarsi delle acque nei bacini, nei quali così vennero ad accumularsi, non solo sali minerali, specialmente calcarei, che si depositarono sopra le spoglie delle Diatomee, ma anche sostanze organiche provenienti principalmente appunto dalla decomposizione di un immenso numero di cadaveri di alghe. In questo periodo, a poco a poco, la vegetazione delle Diatomee si rallentò molto, e ad esso mi sembra corrispondere il deposito, più o meno potente, del *calcare siliceo*.

Non abbiamo dati per affermare o per negare la presenza, durante questi periodi, di idrogeno solforato disciolto nelle acque: ma esso non doveva certamente abbondare, specialmente durante il periodo di prevalenza delle Diatomee, o, se esisteva, si perdeva nell'atmosfera senza lasciare traccie; non troviamo infatti nè gessi, nè zolfo, almeno in quantità notevoli.

Ma esso deve essere ben presto comparso in abbondanza, qualunque sia stata la sua origine (emanazioni, fermentazioni di sostanze organiche, riduzioni di gessi, ecc.), ed allora, in quelle acque difficilmente rinnovantisi, ricche di sostanze organiche, assai ricche pure di bicarbonato di calcio, ed a temperatura piuttosto elevata, io suppongo abbia avuto principio il processo di

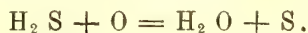
[1] Bargagli-Petrucci, *Sull'origine biologica della « Terra di Siena »* (loc. cit.).

ossidazione di questo gas, per opera dell'aria atmosferica in parte, ma principalmente sotto l'azione di microorganismi, che in quelle acque ed in quei fanghi, trovavano condizioni di vita favorevoli ad un rigoglioso sviluppo. E mentre il bicarbonato, trasformandosi in carbonato insolubile, precipitava verso il fondo, all'idrogeno solforato veniva impedita la dispersione nell'atmosfera dalla azione batterica che energicamente lo ossidava, liberando lo zolfo dai suoi legami chimici. Così si sarebbe formato il calcare solfifero che alimenta le industrie siciliane e di altre località.

Chè se invece si volesse supporre col Mottura, la presenza, nelle acque, di solfuro di calcio in soluzione, le cose non cambierebbero molto, perchè sappiamo che i germi ossidanti, del tipo *B. ferrigenus*, agiscono pure sui solfuri, e non sono dotati della proprietà che hanno invece le Beggiatoacee, di ossidare ulteriormente lo zolfo conducendo alla formazione di solfati o di anidridi dello zolfo. Il *B. ferrigenus* infatti, coltivato in liquidi contenenti solfuro di sodio, sembra agire da ossidante, producendo, in primo luogo, zolfo, che, combinandosi poi con il solfito sodico, formatosi per ossidazione spontanea, conduce alla formazione di iposolfito invece che di solfato. Ove questa seconda reazione manchi, per l'assenza di elementi alcalini, il processo può limitarsi alla prima fase, e dare un deposito permanente di zolfo, (come ho veduto avvenire in alcuni fanghi della regione boracifera) mentre il calcio, sotto l'azione di anidride carbonica o di altri gas carbonati, sviluppati da organismi viventi o da sostanze organiche morte, passa allo stato di carbonato [1].

Si avrebbe insomma un processo perfettamente analogo a quello che ritengo abbia dato origine alle terre gialle e bolari: possono essere state diverse le specie batteriche: certamente fu diverso il materiale primo e, per conseguenza, anche il prodotto finale; ma il processo biologico appare perfettamente analogo.

Bene inteso, però, che questa azione biologica deve intendersi nel senso di una potente cooperazione al processo chimico, e non come una azione esclusiva, potendo come è noto, l'idrogeno solforato trasformarsi spontaneamente in acqua e zolfo, secondo la equazione

$$H_2S + O = H_2O + S.$$

Varie specie di microorganismi possono aver preso parte al fenomeno, e non è escluso che possano avervi contribuito anche quelle Beggiatoacee che, dopo avere accumulato nel loro protoplasma notevoli quantità di zolfo,

[1] Bargagli-Petrucci, *Studii sulla Flora microscopica della regione boracifera toscana*. V: *L'ossidazione biologica dell'idrogeno solforato (analisi chimiche del prof. M. Mayer)*. Nuovo Giornale botan. ital., vol. XXI, 1914.

alla loro morte lasciano un deposito di questo elemento in uno stato fisico tale da rendere facile la sua cristallizzazione, come ha dimostrato Winogradsky [1]. Però non credo che siano state queste le forme prevalenti, perchè, dove esse esistono attualmente (e ciò non è raro), esse non formano notevoli depositi di zolfo; e poi è noto che esse molto spesso ossidano ulteriormente lo zolfo trasformandolo in anidride solforosa, che passa poi ad anidride solforica, dando così origine a solfati. Io penso, invece, che la principale parte del fenomeno spetti a batteriacee ossidanti, proprio come per i depositi di idrossido di ferro dell'Amiata.

Una prova assoluta di questa ipotesi non si ha, e forse non si avrà mai; ma sarà utile osservare con qualche dettaglio che essa spiega assai bene l'intima struttura dei depositi di zolfo, specialmente quando questo minerale presenta la così detta struttura *soriata*, nella quale sottili straterelli solfiferi si alternano con straterelli di calcare non solfifero, o molto povero di zolfo.

Chimica. — *Sullo stato dell'acido carbonico nel sangue. II. Mobilità dell'ione* HCO_3' *alla temperatura* 18° C. Nota dei dottori E. D'Agostino e G. Quagliariello, presentata dal Corrisp. Filippo Bottazzi [2].

Questa ricerca ci è stata necessaria per preparare la via allo studio della dissociazione dei bicarbonati e dell'acido carbonico, studio che sarà pubblicato in seguito.

Esistono in letteratura soltanto i dati di Walker e Cormack [3], per la sola temperatura 18° C: questi autori hanno misurata la conduttività elettrica specifica di soluzioni abbastanza diluite di bicarbonato sodico, sia in acqua pura, che in acqua contenente un poco di acido carbonico. Le due serie di misure, in acqua pura ed in acqua carbonica, dettero risultati pressochè eguali, e perciò i detti autori credettero potere escludere che l'idrolisi del bicarbonato alteri notevolmente i valori della conduttività. I dati degli autori summentovati, ricalcolati da noi per la riduzione in Ohm reciproci e per l'adozione dei valori più recenti determinati dal Kohlrausch, sono i seguenti:

[1] Winogradsky, *Ueber Scwefelbakterien* (Bot. Zeitung, XLV, 1887; cfr. anche Stützer, *Die wichtigsten Lagerstätten der Nicht.-Erze* (Berlin 1911). Bd. I, pag. 260.

[2] Nota I, cfr. questi Rendiconti (5), vol. XXIII, 1° sem., fasc. 10, pag. 844, a. 1914.

[3] Walker e Cormack, Journ. chem. Soc., vol. 77, pag. 5, a. 1900, e Walker, Zeitschr. f. physik. Ch., vol. 32, pag. 137, a. 1900.

1. *Dati di Walker & Cormack.*

Moli di bicarbonato sodico per litri di soluzione $= n$	Conduttività specifica $= \varkappa$	Conduttività molecolare $\mu = \frac{1000\varkappa}{n}$	
0,0 3125	$0,0_2 2195$	70,1	$\mu_\infty = 85,0$
0,0 1562	$0,0_2 1147$	73,4	
$0,0_2 7810$	$0,0_3 5940$	76,0	
$0,0_2 3905$	$0,0_3 3085$	78,9	
$0,0_2 1952$	$0,0_3 1586$	81,2	

Per la conduttività limite si estrapola graficamente il valore:

$$\mu_\infty = 85,0$$

e togliendo da tale valore la conduttività limite del sodioione, che, secondo i dati più recenti del Kohlrausch, è eguale a 43,6 per la temperatura 18° C, si ottiene:

$$\text{mobilità dell' ione } HCO_3' \text{ a } 18° = \mu_{\infty HCO_3'} = 85,0 - 43,6 = 41,4.$$

Nella nostra ricerca ci siamo proposti di determinare di nuovo la mobilità dell'ione HCO_3' alla temperatura 18° C, e di determinare tale valore anche per la temperatura 37° C, in vista delle applicazioni che intendiamo fare ai liquidi dell' organismo; anche noi abbiamo creduto di non poter trascurare l'idrolisi del bicarbonato, anzi ce ne siamo preoccupati più degli autori summentovati, essendochè l' idrolisi esplica un'azione maggiore alla temperatura più elevata 37° C.

1°. *Soluzioni di bicarbonato sodico in acqua pura. Temp. 18° C.*

Riportiamo nella seguente tabella i risultati delle nostre misure; prima vogliamo soltanto spiegare il metodo seguito per tener conto rigoroso della idrolisi del bicarbonato.

La quantità di soda m, espressa in moli per litro, che si libera per l'idrolisi di una soluzione assai diluita di bicarbonato sodico, della concentrazione n, è data dalla nota formola:

$$m = n \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \frac{k_w}{k}} = \sqrt{n} \sqrt{\frac{k_w}{k}},$$

in cui k_w è la costante di dissociazione dell'acqua ($0,0_{14}62$ secondo Lundèn), e k è la costante di dissociazione dell'acido carbonico; per k adottiamo provvisoriamente il valore $0,0_6 36$ che si deduce dai dati di Knox [1]. Si ha allora

$$m = 0,0_3 131 \sqrt{n}$$

[1] Ann. Phys. Chem., vol. 54, pag. 44, an. 1895.

La soluzione di bicarbonato può, in seguito alla idrolisi, essere considerata come costituita dalla miscela di una soluzione di soda e di una soluzione di bicarbonato, reciprocamente isoridiche rispetto al sodioione. La prima soluzione sarebbe costituita (per un litro di soluzione mista) da $1000 \frac{m}{n}$ cmc. di soda della concentrazione n, e la seconda da $1000 \frac{n-m}{n}$ cmc. di bicarbonato sodico della stessa concentrazione n.

La conduttività del bicarbonato, quale risulta dalla misura, dopo averne detratta la conduttività propria dell'acqua, sia $\varkappa$; la conduttività propria di una soluzione n molecolare di soda sia $\varkappa_1$, e quella di una soluzione n molecolare di bicarbonato di sodio sia $\varkappa_2$; sussisterà allora la nota relazione valida per le soluzioni isoidriche:

$$\varkappa = \frac{\varkappa_1 1000 \frac{m}{n} + \varkappa_2 1000 \frac{n-m}{n}}{1000}$$

da cui si ricava

$$\varkappa_2 = \frac{\varkappa n - \varkappa_1 m}{n - m}.$$

Il valore $\varkappa_1$, ossia la conduttività specifica di una soluzione n molecolare di soda, può essere ricavato dai dati di Kohlrausch, e perciò a mezzo della formola precedente sarà possibile calcolare la conduttività $\varkappa_2$ di una soluzione pura non idrolizzata di bicarbonato della concentrazione n, praticando in tal modo una correzione assolutamente rigorosa dell'idrolisi.

2. — *Conduttività specifiche e molecolari di soluzioni di* $NaHCO_3$ *in acqua pura a* 18° C.

Moli $NaHC_3$ per litro $= n$	Conduttività specifica trovata, diminuita della conduttività dell'acqua $= \varkappa$	Concentrazione calcolata della soda $m = 0{,}0131\sqrt{n}$	Conduttività specifica di una soluzione $NaOH$ n mol. $= \varkappa_1$	Conduttività corretta $\varkappa_2 = \frac{\varkappa n - \varkappa_1 m}{n - m}$	Conduttività molecolare $\mu = 1000 \frac{\varkappa_2}{n}$
$0{,}0_2 7505$	$0{,}0_3 6135$	$0{,}0_4 114$	$0{,}0_2 1512$	$0{,}0_3 6094$	81,2
0,0 1489	$0{,}0_2 1177$	$0{,}0_4 160$	$0{,}0_2 2950$	$0{,}0_2 1172$	78,8
0,0 2214	$0{,}0_2 1707$	$0{,}0_4 195$	$0{,}0_2 4340$	$0{,}0_2 1702$	76,9 $\mu_\infty = 84{,}4$
0,0 3630	$0{,}0_2 2707$	$0{,}0_4 250$	$0{,}0_2 6985$	$0{,}0_2 2701$	74,4
0,0 5001	$0{,}0_2 3628$	$0{,}0_4 293$	$0{,}0_2 9501$	$0{,}0_2 3621$	72,4

La conduttività limite, ricavata per estrapolazione grafica, è:

$$\mu_\infty = 84{,}4.$$

(La correzione apportata per eliminare la influenza dell'idrolisi ha una certa importanza, poichè il valore che si ricava per μ_∞ senza tale correzione è sensibilmente superiore, e cioè $\mu_\infty = 86{,}4$).

La mobilità dell'ione HCO_3' a 18° sarebbe dunque:

$$\mu_{\infty\ HCO_3'} = 84{,}4 - 43{,}6 = 40{,}8,$$

valore assai poco differente da quello calcolato sui dati di Walker & Cormack

(41,4), per il quale non si è fatta la correzione dell'idrolisi, e che forse appunto per tale motivo risulta un po' maggiore.

2°. *Soluzioni di* $NaHCO_3$ *e* $KHCO_3$, *oppure di soda e potassa caustica in acqua più o meno ricca di acido carbonico alla temperatura 18° C.*

L'osservazione da noi fatta, che la conduttività di una soluzione di bicarbonato tende ad aumentare lievemente col tempo trascorso dalla preparazione della soluzione, ci ha fatto pensare che la inevitabile liberazione di acido carbonico, da parte di soluzioni di bicarbonato esposte all'aria, potesse fare aumentare la soda libera in una proporzione tale, da influenzare i risulti della misura in un grado maggiore di quello che non faccia l'idrolisi. In tal caso il valore precedente, ricavato per la mobilità dell'ione HCO_3', sarebbe troppo elevato rispetto al valore reale. Tale sospetto è stato completamente confermato da una seconda serie di misure, ottenute usando dapprima delle soluzioni di $NaHCO_3$ e $KHCO_3$ in acqua carbonica, e poi usando addirittura delle soluzioni di NaOH e KOH esattamente titolate e preparate sciogliendo le sostanze in acqua contenente un eccesso di acido carbonico, tale che, dopo la neutralizzazione della base, rimanesse ancora presente nella soluzione allo stato libero; il secondo sistema ci è sembrato più comodo per la facilità di ottenere tali basi purissime ed esattamente titolate, il che non è parimenti facile per i bicarbonati.

Per il calcolo dei dati ci siamo serviti delle seguenti considerazioni.

Per elettroliti assai deboli, come è il caso per l'acido carbonico, sussiste la relazione (per brevità se ne omette la dimostrazione):

$$1000 \frac{\varkappa}{\sqrt{m}} = \mu_\infty \sqrt{k}$$

in cui $\varkappa$ è la conduttività specifica di una soluzione contenente m moli dell'elettrolito debole, μ_∞ è la sua conduttività limite, e k è la sua costante di dissociazione. In conseguenza, anche ignorando i valori μ_∞ e k, è sempre possibile valutare l'esattezza di una serie di misure di conduttività specifiche di un elettrolito debole e la validità dell'isoterma di dissociazione, ricavando i valori $1000 \frac{\varkappa}{\sqrt{m}}$, i quali devono essere costanti. Nei dati seguenti, ad esempio, riguardanti soluzioni di acido carbonico, è praticato un calcolo di tal genere, dal quale appare la buona costanza dei valori $1000 \frac{\varkappa}{\sqrt{m}}$ [1].

[1] La concentrazione delle soluzioni di acido carbonico fu determinata aspirando la soluzione in una bevuta a barite, seguendo il metodo descritto nella nostra Nota I (loc. cit.); la quantità di soluzione aspirata era determinata con la pesata della bevuta prima e dopo l'aspirazione.

3. — *Conduttività specifiche di soluzioni di acido carbonico a 18° C.*
(conduttività specifica dell'acqua $= 0{,}0_6 69$).

Moli di acido carbonico per litro $= m$	Conduttività specifica trovata	La stessa, diminuita della conduttività dell'acqua $= \varkappa$	$1000 \frac{\varkappa}{\sqrt{m}} = \mu_\infty \sqrt{k}$	
0,00813	$0{,}0_4 1989$	$0{,}0_4 1917$	0,213	media $= 0{,}213$
0,02047	$0{,}0_4 3153$	$0{,}0_4 3084$	0,216	
0,03104	$0{,}0_4 3799$	$0{,}0_4 3730$	0,212	
0,03995	$0{,}0_4 4255$	$0{,}0_4 4186$	0,210	

La costanza dei valori dell'ultima colonna dimostra che l'acido carbonico segue fedelmente la legge di diluizione, e che, a mezzo della formola

$$\varkappa = 0{,}0_3 213 \sqrt{m}\,,$$

noi possiamo calcolare la conduttività $\varkappa$ di una soluzione contenente m moli di acido carbonico per litro.

Ora, un litro di soluzione mista di acido carbonico e di bicarbonato alcalino, nelle concentrazioni rispettive di m ed n moli per litro, può essere considerato come costituito da due soluzioni isoidriche rispetto all'ione comune HCO'_3: la prima soluzione, contenendo m_i moli di acido carbonico per litro, occuperebbe il volume di $1000 \frac{m}{m_i}$ cmc.; la seconda, contenendo n_i moli di bicarbonato per litro, occuperebbe il volume di $1000 \frac{n}{n_i}$ cmc.; data però la grande dissociazione del bicarbonato rispetto a quella minima dell'acido carbonico, si può in via di approssimazione mettere $n_i = n$, ed in conseguenza la soluzione isoidrica di bicarbonato, conterrebbe n moli di bicarbonato per litro, ed occuperebbe il volume di 1000 cmc. Ciò premesso, per la nota formola che riguarda le conduttività specifiche di miscele di soluzioni isoidriche, chiamando $\varkappa$ la conduttività specifica trovata, diminuita della conduttività propria dell'acqua, $\varkappa_1$ la conduttività specifica di una soluzione contenente m_i moli di acido carbonico per litro, e $\varkappa_2$ la conduttività di una soluzione contenente n moli di bicarbonato per litro, avremo

$$\varkappa = \frac{\varkappa_1\, 1000 \frac{m}{m_i} + \varkappa_2\, 1000}{1000} = \varkappa_1 \frac{m}{m_i} + \varkappa_2$$

da cui

$$\varkappa_2 = \varkappa - \varkappa_1 \frac{m}{m_i}\,,$$

ossia, profittando della relazione precedentemente trovata,

$$\varkappa_2 = \varkappa - 0{,}0_3 213 \sqrt{m_i}\,.\frac{m}{m_i} = \varkappa - 0{,}0_3 213 \frac{m}{\sqrt{m_i}}\,.$$

Applicando la legge di diluizione all'acido carbonico, si ricava

$$[HCO'_3]^2 = k m_i$$

in cui $[HCO'_3]$ indica la concentrazione dell'ione HCO'_3, k indica la costante di dissociazione dell'acido carbonico, ed m_i è la concentrazione dell'acido carbonico della soluzione isoidrica, eguale in via di approssimazione alla concentrazione dell'acido carbonico indissociato. Essendo, inoltre, le soluzioni investigate di bicarbonato assai diluite, e potendosi in conseguenza ammettere che esse siano completamente dissociate, si ha

$$[HCO'_3] = n$$

e quindi

$$m_i = \frac{n^2}{k} .$$

e sostituendo tale valore nella formola precedente, avremo

$$\varkappa_2 = \varkappa - 0{,}0_3213 \sqrt{k} \cdot \frac{m}{n} .$$

e adottando per k il valore $0{,}0_636$ dedotto dai dati di Knox (che può considerarsi abbastanza esatto, in via di approssimazione), si ottiene

$$\varkappa_2 = \varkappa - 0{,}0_6128 \frac{m}{n} .$$

Seguono i dati sperimentali, in cui la correzione dell'idrolisi è stata eseguita per mezzo di questa ultima formola.

4. *Conduttività di una soluzione* 0,00835 mol. H_2CO_3 *dopo l'aggiunta di quantità variabili di* Na HCO_3 (m cost. $= 0{,}00835$). — *Temp. 18° C.*

Moli $NaHCO_3$ per litro $= n$	Conduttività trovata, diminuita della conduttività dell'acqua $= \varkappa$	Conduttività corretta: $\varkappa_2 = \varkappa - \frac{0{,}0_6128 \times 0{,}0_2835}{n}$	Conduttività molecolare: $\mu = 1000 \frac{\varkappa_2}{n}$	
$0{,}0_27270$	$0{,}0_35985$	$0{,}0_35984$	82,3	
0,0 1442	$0{,}0_21151$	$0{,}0_21151$	79,8	
0,0 2146	$0{,}0_21680$	$0{,}0_21680$	78,3	$\mu_\infty = 85{,}0$
0,0 3520	$0{,}0_22655$	$0{,}0_22655$	75,4	
0,0 4851	$0{,}0_23557$	$0{,}0_23557$	73,3	

5. *Conduttività di una soluzione* 0,0107 mol. H_2CH_3 *dopo l'aggiunta di quantità variabili di* $KHCO_3$ (m cost. $= 0{,}0107$). — *Temp. 18° C.*

Moli $KHCO_3$ per litro $= n$	Conduttività trovata, diminuita della conduttività dell'acqua $= \varkappa$	Conduttività corretta: $\varkappa_2 = \varkappa - \frac{0{,}0_6128 \times 0{,}0107}{n}$	Conduttività molecolare: $\mu = 1000 \frac{\varkappa_2}{n}$	
0,00912	$0{,}0_39182$	$0{,}0_39181$	100,7	
0,01807	$0{,}0_21772$	$0{,}0_21772$	98,1	$\mu_\infty = 104{,}1$
0,02684	$0{,}0_22558$	$0{,}0_22558$	95,3	
0,03545	$0{,}0_23311$	$0{,}0_23311$	93,4	

6. *Conduttività di una soluzione* 0,0298 mol. H_2CO_3 *dopo l'aggiunta di quantità variabili di* $NaHCO_3$ (m cost. = 0,0298). — *Temp. 18° C.*

Moli $NaOH_3$ per litro $= n$	Conduttività trovata, meno la conduttività dell'acqua $= x$	Conduttività corretta: $x_2 = x - \frac{0,0_6128 \times 0,0298}{n}$	Conduttività molecolare: $\mu = 1000 \frac{x_2}{n}$	
$0,0_2 9456$	$0,0_3 7412$	$0,0_3 7408$	78,3	
0,0 1871	$0,0_2 1421$	$0,0_2 1421$	75,9	
0,0 2778	$0,0_2 2063$	$0,0_2 2063$	74,3	$\mu_\infty = 81,6$
0,0 4535	$0,0_2 3232$	$0,0_2 3232$	71,3	
0,0 6223	$0,0_2 4293$	$0,0_2 4293$	69,0	

7. *Conduttività di una soluzione* 0,0405 mol. H_2CO_3 *dopo aggiunte di quantità variabili di* NaOH (m variabile). — *Temp. 18° C.*
(x dell'acqua = $0,0_6 57$).

NaOH aggiunta, moli per litro $= n$	Acido carbonico libero, moli per litre $= m$	Conduttività trovata, meno la conduttività dell'acqua $= x$	Conduttività corretta: $x_2 = x - 0,0_6128 \frac{m}{n}$	Conduttività molecolare del bicarbonato $\mu = 1000 \frac{x_2}{n}$	
$0,0_3 501$	0,0400	$0,0_4 517$	$0,0_4 414$	82,7	
$0,0_3 998$	0,0395	$0,0_4 874$	$0,0_4 823$	82.5	
$0,0_2 191$	0.0386	$0,0_3 1596$	$0,0_3 1570$	82,2	
$0,0_2 375$	0,0367	$0,0_3 3073$	$0,0_3 3060$	81.6	$\mu_\infty = 82,9$
$0,0_2 702$	0,0335	$0,0_3 5657$	$0,0_3 5651$	80,5	
0.0 1306	0,0274	$0.0_2 1028$	$0,0_2 1028$	78.7	
0,0 2303	0,0175	$0,0_2 1762$	$0,0_2 1762$	76,5	

8. *Conduttività di una soluzione* 0,0405 mol. H_2CO_3 *dopo aggiunte di quantità variabili di* KOH (m variabile). — *Temp. 18° C.*
(x dell'acqua = $0,0_6 57$).

KOH aggiunta, moli per litro $= n$	Acido carbonico libero, moli per litro $= m$	Conduttività trovata, meno la conduttività dell'acqua $= x$	Conduttività corretta: $x_2 = x - 0,0_6128 \frac{m}{n}$	Conduttività molecolare del bicarbonato $\mu = 1000 \frac{x_2}{n}$	
$0,0_3 556$	0,0399	$0,0_4 6690$	$0,0_4 5771$	103,8	
$0,0_2 1083$	0,0394	$0,0_3 1168$	$0,0_3 1121$	103,5	
$0,0_2 2115$	0,0384	$0,0_3 2203$	$0,0_3 2180$	103,1	$\mu_\infty = 104,0$
$0,0_2 4120$	0,0364	$0,0_3 4226$	$0,0_3 4215$	102,3	
$0,0_2 804$	0,0325	$0,0_3 8125$	$0,0_3 8120$	101,0	
0,0 1573	0,0248	$0,0_2 1553$	$0,0_2 1553$	98,7	

Le correzioni, come si vede dalle tabelle precedenti, hanno una particolare importanza soltanto per le soluzioni ricche di acido carbonico e povere di bicarbonato; di esse può farsi a meno allorquando la concentrazione del bicarbonato è maggiore di 0,01 mol. e quella dell'acido carbonico è minore di 001 mol.; è ovvio peraltro che per ottenere valori esatti per μ_∞ è necessario adoperare soluzioni assai diluite di bicarbonato.

Riassumendo i dati precedenti noi troviamo:

TAB. 4ª. Conduttività limite $NaHCO_3$, $\mu_\infty = 85{,}0$;
Mobilità $HCO_3' = 85{,}0 - 43{,}6 = \mathbf{41{,}4}$

TAB. 5ª. Conduttività limite $KHCO_3$, $\mu_\infty = 104.1$;
Mobilità $HCO_3' = 104.1 - 64.7 = \mathbf{39.4}$

TAB. 6ª. Conduttività limite $NaHCO_3$, $\mu_\infty = 81{,}6$;
Mobilità $HCO_3' = 81{,}6 - 43{,}6 = \mathbf{38{,}0}$

TAB. 7ª. Conduttività limite $NaHCO_3$, $\mu_\infty = 82{,}9$;
Mobilità $HCO_3' = 82{,}9 - 43{,}6 = \mathbf{39{,}3}$

TAB. 8ª. Conduttività limite $KHCO_3$, $\mu_\infty = 104{,}0$;
Mobilità $HCO_3' = 104{,}0 - 64{,}7 = \mathbf{39{,}3}$

I valori 43,6 e 64,7 corrispondono alle mobilità rispettive del sodioione e del potassioione, quali risultano dai dati più recenti di Kohlrausch.

Dalla media dei valori surriferiti, accordando però maggior valore alle ultime due misure, risulta che *la mobilità dell'ione* HCO_3' *alla temperatura 18° è eguale a 39,3* valore alquanto inferiore a quello trovato da Walker e Cormack (41,4) senza la correzione dell'idrolisi, ed a quello trovato da noi nella prima serie delle nostre ricerche (40,8), misurando soluzioni acquose di bicarbonato, e correggendo i dati per l'idrolisi del sale. Da quello che precede risulta chiaro come queste divergenze sono dovute, sia alla trascuranza dell'idrolisi, sia al fatto che le soluzioni di bicarbonato, esposte per un certo tempo all'aria, perdono acido carbonico ed acquistano di mano in mano una conduttività sempre maggiore.

Matematica. — *Sugli integrali abeliani riducibili.* Nota II di GAETANO SCORZA, presentata dal Corrisp. G. CASTELNUOVO.

8 (*). Un sistema di $\frac{1}{2}p(p-1)$ relazioni fra i periodi $\omega_{j,k}$ del tipo

$$(5) \qquad \sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s}\,\omega_{j,r}\,\omega_{k,s} = 0 \qquad (j\,,k = 1\,,2\,,\dots p\,;\,j<k),$$

dove le $c_{r,s}$ siano dei numeri intieri costituenti gli elementi di un determinante emisimmetrico d'ordine $2p$, si dirà, per i periodi $\omega_{j,k}$, un *sistema di relazioni di Riemann.*

Un sistema di relazioni di Riemann (5) si dirà poi un sistema di Riemann *principale* se, indicati con

$$\xi_j + i\eta_j \qquad (i=\sqrt{-1}\ ;\ \xi_j \text{ e } \eta_j \text{ reali}\ ;\ j = 1 \dots 2p)$$

(*) La numerazione degli articoli, delle formule e delle note è fatta in continuazione di quella della Nota I.

i periodi di una combinazione lineare omogenea qualunque degli integrali $u_1, u_2, \ldots, u_p$ nel fissato sistema primitivo di cicli lineari, si abbia sempre

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{r,s}\, \xi_r\, \eta_s > 0$$

o sempre

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{r,s}\, \xi_r\, \eta_s < 0 .$$

Per quanto è detto nella mia già citata Nota di Palermo ([16]), ciò equivale a dire che il sistema di relazioni di Riemann (5) è principale o non, secondo che è definita o non la forma Hermitiana nelle variabili $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ (e nelle loro coniugate $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2 \ldots \bar{\lambda}_p$) data da

$$\frac{1}{2i} \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} \sum_{j,k}^{1\ldots p} c_{r,s}\, \omega_{j,r}\, \bar{\omega}_{k,s}\, \lambda_j\, \bar{\lambda}_k .$$

Per un classico teorema di Riemann e Weierstrass, poichè le $\omega_{j,k}$ sono i periodi degli integrali $u_1, u_2, \ldots u_p$, *un sistema principale di relazioni di Riemann per le $\omega_{j,k}$ esiste certamente.*

Se i periodi $\omega_{j,k}$ sono legati dalle relazioni di due sistemi di Riemann, aventi l'uno i coefficienti $c_{r,s}$ e l'altro i coefficienti $c'_{r,s}$, i periodi stessi sono legati da tutti i sistemi di relazioni di Riemann aventi per coefficienti le $\varrho c_{r,s} + \sigma c'_{r,s}$, ove ϱ e σ sono intieri qualunque; quindi, di codesti sistemi di relazioni di Riemann, o ve n'ha uno solo — principale — (i suoi coefficienti essendo determinati a meno di un fattore di proporzionalità intero), o ve n'è tutta un'infinità discontinua assimilabile a quella dei punti razionali di uno spazio lineare.

La *caratteristica* di un sistema di relazioni di Riemann sarà la caratteristica (necessariamente pari) del relativo determinante $|c_{r,s}|$; quindi, per un teorema ben noto ([17]), la caratteristica di un sistema principale è $2p$.

9. Ora si osservi che scrivere le (5) equivale a scrivere le condizioni necessarie e sufficienti perchè il sistema nullo razionale di Σ, rappresentato dall'equazione

$$(5^{bis}) \qquad \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{r,s}\, y_r\, x_s = 0 ,$$

([16]) Scorza, loc. cit. [5]), n. 1.

([17]) Krazer, loc. cit. [7]), pag. 119. Del resto, questo fatto e quello invocato più sopra (cfr. la citazione [7])) son tutte e due compresi nella diseguaglianza che, coi simboli della nostra Nota di Palermo, è ivi scritta $\Delta_p > 0$ o $\Delta_1 \Delta_p > 0$.

abbia in τ (e quindi, attesa la realità delle $c_{r,s}$, anche in $\bar{\tau}$) uno spazio totale; dunque:

In Σ *esistono sempre dei sistemi nulli razionali aventi in* τ *e* $\bar{\tau}$ *due spazi totali*; *e se ne esiste più di uno, ne esistono senz'altro infiniti, la loro totalità potendo assimilarsi a quella* (*discontinua*) *dei punti razionali di un conveniente spazio lineare.*

Ciascuno di questi sistemi nulli razionali si dirà, per comodità di discorso, un *sistema nullo di* V_p (relativo al sistema prescelto di cicli lineari).

10. Quando dal sistema di relazioni di Riemann (5) per i periodi $\omega_{j,k}$ si passa al corrispondente sistema nullo (5^{bis}) di V_p, viene a perdersi, in quest'ultimo, ogni traccia della scelta dei p integrali $u_1, u_2, \dots, u_p$ fra gli ∞^{p-1} integrali semplici di 1ª specie di V_p. Ciò significa che il sussistere delle (5) per i periodi degli integrali $u_1, u_2, \dots, u_p$ implica il sussistere di relazioni con gli *stessi* coefficienti per i periodi di altri p *qualsiansi* integrali semplici di 1ª specie indipendenti di V_p [18]; quindi i coefficienti di un sistema di relazioni di Riemann dipendono non già dalla scelta

[18] È facile comporre una dimostrazione algebrica diretta di questa circostanza. Dagli integrali $u_1, u_2, \dots u_p$ (coi periodi $\omega_{j,k}$) si passi agli integrali indipendenti $U_1, U_2, \dots U_p$ (coi periodi $\Omega_{j,k}$), essendo

$$u_j = \sum_{l=1}^{l=p} \mu_{j,l} U_l . \qquad (j = 1, 2, \dots p)$$

e il determinante $|\mu_{j,l}|$ diverso da zero.

Sarà

$$\omega_{j,r} = \sum_{l=1}^{l=p} \mu_{j,l} \Omega_{l,r} \qquad (j = 1, \dots p \; ; \; r = 1, 2, \dots 2p),$$

e quindi, posto

$$a_{l,m} = \sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s} \Omega_{l,r} \Omega_{m,s} \qquad (l, m = 1, 2, \dots p),$$

da

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s} \omega_{j,r} \omega_{k,s} = 0 \qquad (j, k = 1, \dots p \; ; \; j < k),$$

seguirà

$$(\alpha) \qquad \sum_{l,m}^{1\dots p} \mu_{j,l} \mu_{k,m} a_{l,m} = 0 \qquad (j, k = 1, \dots p \; ; \; j < k).$$

Poichè $a_{m,l} = - a_{l,m}$, le $a_{l,m}$ distinte e non nulle sono $\frac{1}{2} p(p-1)$ e si ottengono tutte fissando di considerare soltanto quelle per cui $l < m$. Le relazioni lineari omogenee (α) che le legano sono appunto in numero di $\frac{1}{2} p(p-1)$; e in ciascuna delle (α) il coefficiente complessivo di una $a_{l,m}$ ($l < m$) è del tipo $\mu_{j,l} \mu_{k,m} - \mu_{j,m} \mu_{k,l}$, cioè è un minore del 2° ordine del determinante $|\mu_{j,l}|$. Ma allora, per un noto teorema di Sylvester, le (α) sono indipendenti, e le $a_{l,m}$ sono, come volevasi, tutte nulle.

di p integrali indipendenti fra gli ∞^{p-1} integrali semplici di 1ª specie di V_p, ma dalla scelta del sistema primitivo di cicli lineari sulla riemanniana di V_p.

Per render conto di questo fatto anche col linguaggio, come parliamo di sistemi nulli di V_p (relativamente a un fissato sistema di cicli), parleremo anche di *relazioni di Riemann di* V_p (relativamente a un fissato sistema di cicli), queste ultime rispondendo biunivocamente a quelli, quando si prescinda da fattori di proporzionalità intieri. E la *caratteristica* di una relazione di Riemann di V_p sarà, naturalmente, la caratteristica di uno qualunque dei sistemi di relazioni di Riemann a cui essa dà luogo.

Ma v'è di più. Se il sistema (5) di relazioni di Riemann fra i periodi $\omega_{j,k}$ è un sistema principale, basta tener conto della prima definizione data di sistemi principali, per accorgersi che sono principali *tutti* i sistemi di relazioni di Riemann provenienti, col sistema (5), da una stessa relazione di Riemann di V_p; quindi, anzi che di sistemi di relazioni di Riemann principali o non, potremo, meglio, parlare di *relazioni di Riemann* e di *sistemi nulli — di* V_p *— principali o non.*

Notisi che i sistemi nulli principali sono tutti *non* singolari, e *di essi ne esiste sempre almeno uno.*

11. Abbiamo già detto quale sia su τ e $\overline{\tau}$ l'effetto di un cambiamento nella scelta del sistema primitivo di cicli lineari sulla riemanniana di V_p; quindi possiamo dire, senz'altro, che il cambiare questo sistema equivale ad applicare ai sistemi nulli di V_p relativi all'antico sistemi di cicli una omografia unimodulare razionale, per la quale appunto sistemi nulli razionali vanno in sistemi nulli razionali.

Facciamo vedere che per una tale trasformazione omografica *i sistemi nulli principali si mutano in sistemi nulli principali*; dopo ciò, la nomenclatura introdotta apparirà del tutto giustificata ed opportuna, e la sua importanza verrà posta in tutta la luce desiderabile.

La cosa è intuibile *a priori*, e risulta incidentalmente dall'interpretazione geometrica del teorema di esistenza delle funzioni abeliane che daremo altrove; ma si può dimostrare agevolmente col breve calcolo che segue.

Sia

$$(6) \qquad \sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s}\,\omega_{j,r}\,\omega_{k,s} = 0 \qquad (j\,,k = 1\,,\dots p\;;\; j<k)$$

un sistema principale di relazioni di Riemann per i periodi $\omega_{j,k}$.

Effettuando sui periodi $\omega_{j,k}$ la sostituzione unimodulare a coefficienti interi

$$(7) \qquad \omega_{j,k} = \sum_{l=1}^{l=2p} h_{k,l}\,\Omega_{j,l} \qquad (j=1\,,2\,,\dots p\;;\; k=1\,,2\,,\dots 2p)\,,$$

il sistema di Riemann (6) si muta nel sistema di relazioni di Riemann per i periodi trasformati $\Omega_{j,l}$ dato dalle equazioni

$$(8) \qquad \sum_{l,m}^{1\ldots 2p} C_{l,m}\, \Omega_{j,l}\, \Omega_{k,m} = 0 \qquad (j\,,k = 1\,,\ldots p\;;\; j < k)\,,$$

ove

$$C_{l,m} = \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{r,s}\, h_{r,l}\, h_{s,m}\,.$$

Per la sostituzione (7), la forma Hermitiana

$$\frac{1}{2i} \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} \sum_{j,k}^{1\ldots p} c_{r,s}\, \omega_{j,r}\, \overline{\omega}_{k,s}\, \lambda_j \overline{\lambda}_k\,,$$

diventa

$$\frac{1}{2i} \sum_{l,m}^{1\ldots 2p} \sum_{j,k}^{1\ldots p} C_{l,m}\, \Omega_{j,l}\, \overline{\Omega}_{k,m}\, \lambda_j \overline{\lambda}_k\,;$$

dunque anche il sistema di Riemann (8) è, come (6), un sistema principale.

12. Se un sistema nullo di Σ ha in τ e $\overline{\tau}$ due spazî totali e ha per asse un S_{2l-1}, questo S_{2l-1} deve trovarsi con ciascuno degli spazî τ e $\overline{\tau}$ in un S_{p+l-1}, e quindi deve tagliare τ e $\overline{\tau}$ in spazî la cui dimensione non può essere inferiore a

$$(p-1) + (2l-1) - (p+l-1) = l-1\,.$$

D'altra parte, poichè τ e $\overline{\tau}$ sono indipendenti, uno spazio di τ (o di $\overline{\tau}$) di dimensione superiore ad $l-1$ non può esser congiunto a uno spazio di $\overline{\tau}$ (o di τ) di dimensione uguale o superiore ad $l-1$ da un S_{2l-1}; dunque quell' S_{2l-1} taglia τ e $\overline{\tau}$ in spazî che hanno proprio la dimensione $l-1$.

Ciò dimostra che:

Se fra i sistemi nulli di V_p *ve n'è uno dotato di asse,* V_p *ammette un sistema regolare di integrali riducibili avente per asse l'asse del considerato sistema nullo.*

Questo teorema, come risulterà dalle osservazioni che seguono, è invertibile; e quindi:

I sistemi regolari di integrali riducibili di V_p *della dimensione* $q-1$ *sono tanti, quanti sono gli assi distinti* (*di dimensione* $2q-1$) *dei sistemi nulli singolari di* V_p *di specie* $2q$.

In base a questo risultato, si vede che lo studio della totalità dei sistemi regolari di integrali riducibili di V_p è intimamente legato a quello della varietà dei sistemi nulli o complessi lineari di Σ aventi in τ e $\overline{\tau}$ due spazî totali.

Ci riserbiamo pertanto di ritornarvi quando avremo utilizzato questa stessa varietà per lo studio delle funzioni abeliane singolari: qui ci limitiamo a far osservare che è facile assegnare un massimo per la dimensione dello spazio lineare che dà coi suoi punti razionali, nel modo detto più sopra, una rappresentazione della totalità dei sistemi nulli di V_p.

Tale massimo è $p^2 - 1$, *e può essere effettivamente raggiunto.*

13. Sia Π un sistema nullo di V_p, privo di spazio singolare, e A un sistema regolare di integrali riducibili di V_p della dimensione $q-1$; un sistema nullo come Π esiste certo, qualunque sia V_p.

L'asse A_1 di A è un S_{2q-1} razionale, appoggiato a τ e $\bar\tau$ secondo le imagini α e $\bar\alpha$ di A: dunque lo spazio polare di A_1 rispetto a Π è un $S_{2(p-q)-1}$ razionale, appoggiato a τ e $\bar\tau$ secondo due spazî imaginarii coniugati β e $\bar\beta$ della dimensione $p-q-1$; ma allora questo $S_{2(p-q)-1}$ è l'asse B_1 di un sistema regolare B di V_p della dimensione $p-q-1$, e quindi abbiamo, intanto, che:

Se V_p *ammette un sistema regolare di integrali riducibili della dimensione* $q-1$, *ammette pure un sistema regolare di integrali riducibili della dimensione* $p-q-1$.

14. Due sistemi regolari, come gli A e B del teorema precedente, per cui esiste un sistema nullo di V_p non singolare, tale che rispetto ad esso l'asse dell'un sistema sia lo spazio polare dell'asse dell'altro, si diranno *associati*; due sistemi regolari indipendenti, le cui dimensioni abbiano per somma $p-2$, si diranno, col Severi, *complementari* ([19]).

15. Siano A e B due sistemi regolari associati di integrali riducibili di V_p; saranno essi anche complementari, cioè indipendenti?

La risposta è certo affermativa se, per es., nè A nè B contengono un sistema regolare di dimensione inferiore alla propria, e A e B sono distinti; ma un caso assai più interessante, in cui la risposta è sempre affermativa, è dato dal seguente teorema:

Se esiste un sistema nullo principale di V_p, *rispetto a cui gli assi di* A *e* B *sono l'uno polare dell'altro,* A *e* B *sono non solo associati ma anche complementari.*

Supponiamo, come è lecito, che A sia il sistema determinato dai q integrali $u_1, u_2, \dots u_q$, e che la tabella (I) (Nota I) dei periodi primitivi abbia l'aspetto

$$(9)\qquad \left|\begin{array}{llll} \omega_{1,1} \;\dots\; \omega_{1,2q} & 0 \;\dots\dots\; 0 \\ \omega_{2,1} \;\dots\; \omega_{2,2q} & 0 \;\dots\dots\; 0 \\ \omega_{q,1} \;\dots\; \omega_{q,2q} & 0 \;\dots\dots\; 0 \\ \omega_{q+1,1} \;\dots\; \omega_{q+1,2q} & \omega_{q+1,2q+1} \;\dots\; \omega_{q+1,2p} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \omega_{p,1} \;\dots\; \omega_{p,2q} & \omega_{p,2q+1} \;\dots\; \omega_{p,2p} \end{array}\right| ;$$

([19]) Severi, loc. cit. [2]), pag. 585.

ciò è sempre ottenibile con un conveniente mutamento del sistema primitivo dei cicli lineari sulla riemanniana di V_p, con che i sistemi nulli principali vanno in sistemi nulli principali.

Poi sia

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s}\, y_r\, x_s = 0 \tag{10}$$

l'equazione del considerato sistema nullo principale.

Poniamo

$$\omega_{j,k} = \alpha_{j,k} + i\beta_{j,k} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

con le $\alpha_{j,k}$ e $\beta_{j,k}$ reali e costruiamo il determinante Δ, d'ordine $2p$, le cui prime p righe sono date da quelle della matrice (9) quando al posto delle $\omega_{j,k}$ si supponga di sostituire le $\alpha_{j,k}$ e le successive p righe sono date da quelle della matrice ottenuta sempre da (9) scrivendo $\beta_{j,k}$ al posto di $\omega_{j,k}$.

Allora, se si indica con

$$P_{j_1 j_2 \dots j_{2l}}$$

lo pfaffiano del minore principale del determinante $|c_{r,s}|$ formato con le righe e le colonne $j_1^{ma}, j_2^{ma}, \dots j_{2l}^{ma}$, e con

$$\delta_{j_1 j_2 \dots j_{2l}}$$

il minore di Δ formato con le righe

$$1^a, 2^a, \dots l^{ma}, (p+1)^{ma}, \dots (p+l)^{ma}$$

e le colonne

$$j_1^{ma}, j_2^{ma}, \dots j_{2l}^{ma},$$

posto

$$\Delta_l = (-1)^{\frac{l(l-1)}{2}} \sum_{j_1, j_2, \dots j_{2l}} P_{j_1, j_2, \dots j_{2l}}\, \delta_{j_1, j_2, \dots j_{2l}} \tag{11}$$

$$(j_1, j_2, \dots j_{2l} = 1 \dots 2p \ ; \ j_1 < j_2 < \dots < j_{2l}),$$

dire che (10) è un sistema nullo principale di V_p equivale ad affermare che le Δ_l son tutte diverse da zero, quelle di indice pari essendo tutte positive e quelle di indice dispari essendo tutte dello stesso segno.

È quanto risulta dalla dimostrazione contenuta nella nostra Nota sul teorema d'esistenza delle funzioni abeliane.

Poichè le $\alpha_{j,k}$ e $\beta_{j,k}$ per $j = 1 \dots q$ e $k = 2q+1, \dots 2p$ sono tutte nulle, Δ_q si riduce al prodotto di

$$(-1)^{\frac{q(q-1)}{2}}\, \delta_{1,2,\dots 2q}$$

per lo pfaffiano del determinante emisimmetrico

$$C = \begin{vmatrix} 0 & c_{1,2} & c_{1,3} \dots & c_{1,2q} \\ c_{2,1} & 0 & c_{2,3} \dots & c_{2,2q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{2q,1} & c_{2q,2} & c_{2q,3} \dots & 0 \end{vmatrix} :$$

dunque sarà certo

$$C \neq 0 . \tag{12}$$

Ora l'asse A_1 del sistema regolare A è, nel caso in esame, l'S_{2q-1} di Σ secondo cui si tagliano gli iperpiani

$$x_{2q+1} = 0 \dots x_{2p} = 0 :$$

quindi il sistema nullo subordinato dal sistema nullo (10) in questo S_{2q-1} ha per equazione, nell'S_{2q-1} medesimo,

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2q} c_{rs}\, y_r\, x_s = 0 , \tag{13}$$

cioè l'equazione che si ricava dalla (10) sopprimendovi tutti i termini che contengono coordinate con indice superiore a $2q$.

In virtù di (12), il sistema nullo (13) è certo non singolare, e quindi A_1 e B_1 sono, come volevasi, indipendenti.

Di qua, una volta che V_p ammette sempre un sistema nullo principale, almeno, risulta subito il classico teorema di Poincaré:

Se una varietà algebrica di irregolarità superficiale p ammette un sistema regolare di integrali riducibili della dimensione $q-1$, ammetterà anche un sistema regolare di integrali riducibili della dimensione $p-q-1$ indipendente dal primo.

Osservazione. — Gli integrali $u_1, u_2 \dots u_q$, si possono riguardare come q integrali semplici di 1ª specie indipendenti di una varietà algebrica V_q di irregolarità superficiale q; ebbene per questa V_q l'asse A_1 di A ha lo stesso ufficio che Σ ha per V_p e le imagini α e $\bar{\alpha}$ di A hanno lo stesso ufficio che τ e $\bar{\tau}$ per V_p; quindi il sistema nullo (13), che appunto ha due spazî totali in α ed $\bar{\alpha}$, è un sistema nullo di V_q. Ma non basta. Siccome le $\Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_q$ involgono soltanto i periodi di $u_1, u_2, \dots u_q$ e i soli coefficienti dell'equazione (13), le diseguaglianze che esprimono l'ipotesi fatta sul sistema nullo (10) implicano, senz'altro, che anche il sistema nullo (13) è in A_1 un sistema nullo principale di V_q; dunque:

Un sistema nullo principale di V_p induce nell'asse di un qualsiasi sistema regolare appartenente a V_p un sistema nullo che è sistema nullo

principale per la picardiana a cui competono gli integrali del considerato sistema regolare.

16. Il sistema nullo singolare avente per asse l'asse B_1 del sistema indicato nel n. prec. con B e riflettente in A_1 il sistema nullo (13) è un sistema nullo razionale avente in τ e $\bar{\tau}$ due spazî totali; ora, dei due sistemi A e B, *uno* dei due, per es. B, è un qualsiasi sistema regolare di integrali riducibili di V_p; dunque:

L'asse di un sistema regolare di integrali riducibili di V_p è pure asse di un sistema nullo singolare di V_p.

Con ciò è invertito il primo teorema del n. 11.

17. Abbiamo visto che due sistemi regolari associati di V_p, almeno sotto qualche condizione, sono anche complementari [20]; invece:

Due sistemi complementari sono sempre due sistemi associati.

E infatti, siano A e B i due sistemi complementari di V_p delle dimensioni rispettive $q-1$ e $p-q-1$; A_1 e B_1 i loro assi; α e $\bar{\alpha}$, β e $\bar{\beta}$ le loro imagini.

Sia π_1 un sistema nullo razionale di A_1 che abbia due spazî totali in α e $\bar{\alpha}$; un tal sistema nullo, per quanto risulta dal n. 15 esiste certamente. Poi si indichi con Π_B il sistema nullo (razionale) di Σ che ha per asse B_1 e induce in A_1 il sistema nullo π_1.

Evidentemente, Π_B avrà due spazî totali in τ e $\bar{\tau}$.

Si costruisca, procedendo in modo analogo, un sistema nullo razionale di Σ, Π_A, che abbia per asse A_1 e due spazî totali in τ e $\bar{\tau}$.

I sistemi nulli del fascio determinato da Π_A e Π_B sono tutti, all'infuori di Π_A e Π_B, non singolari; e rispetto a ciascuno di essi, A_1 ha per spazio polare B_1. D'altra parte, fra questi sistemi nulli ve ne sono infiniti che sono razionali; dunque A e B sono, come volevasi, associati.

18. Fin qui non ci siamo valsi che delle corrispondenze stabilite fra gli S_k ed S_{2p-k-2} di Σ dai sistemi nulli di V_p non singolari; ma anche quelli singolari dànno luogo, nello stesso modo, a qualche conseguenza, su cui, per altro, riteniamo inutile di fermarci adesso.

19. Nei teoremi dimostrati è implicitamente contenuto il legame richiesto fra la presenza di sistemi regolari riducibili nel sistema degli integrali (semplici di 1ª specie) di V_p e le relazioni di Riemann che intercedono fra i periodi di questi ultimi: basta, per accorgersene, enunciarli in linguaggio algebrico, anzi che geometrico.

Si ottiene così la seguente proposizione che involge e precisa il teorema di Poincaré:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una varietà algebrica di irregolarità superficiale p contenga un sistema regolare di integrali sem-

[20] Che due sistemi associati possano non essere complementari si mostra subito con esempi.

plici di 1ª specie riducibili, è che fra le sue relazioni di Riemann (relative a un fissato sistema primitivo di cicli lineari) ne esista qualcuna di caratteristica inferiore a $2p$.

Ove esista una di queste relazioni di caratteristica $2q$ $(q < p)$, *ne esiste anche una di caratteristica* $2(p-q)$, *tale che il fascio di relazioni che esse determinano non contiene altre relazioni di caratteristica inferiore a* $2p$.

Si badi che a una relazione di Riemann di caratteristica $2q$ $(q < p)$ risponde sulla V_p un ben determinato sistema regolare ∞^{q-1} di integrali riducibili; quello cioè che ha per asse l'asse del sistema nullo singolare di V_p rispondente alla considerata relazione di Riemann. Ma poichè per $p > 2$ possono aversi sistemi nulli singolari di V_p diversi aventi lo stesso asse, uno stesso sistema regolare ∞^{q-1} di integrali riducibili di V_p può provenire da infinite relazioni di Riemann a caratteristica $2q$ (appartenenti a uno stesso sistema lineare).

Ciò non sussiste, come è chiaro, per il caso $p = 2$; e quindi, per $p = 2$, *la corrispondenza in discorso è perfettamente biunivoca.*

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-XXIV. (1892-1915). Fasc. 6°. Sem. 1°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIII. (1892-1914). Fasc. 7°-10°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-X. Fasc. 18°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE
AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino e Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa e Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 marzo 1915.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 6 maggio 1915.* N. 7.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta dell'11 aprile 1915.

Volume XXIV°. — Fascicolo 7°

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta dell' 11 aprile 1915.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sulla teoria delle distorsioni elastiche.* Nota II del Socio CARLO SOMIGLIANA.

Le condizioni che abbiamo stabilite nella Nota precedente [1] per la superficie σ di discontinuità, erano le seguenti:

$$(1)\qquad D[u]=u_\sigma \qquad D[v]=v_\sigma \qquad D[w]=w_\sigma$$

$$(2)\qquad D[X_\nu]=0 \qquad D[Y_\nu]=0 \qquad D[Z_\nu]=0\,.$$

Esse sono sufficienti, come abbiamo visto, a determinare le discontinuità, attraverso la superficie stessa, dei sei coefficienti di deformazione $x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y$. Ora si può inoltre vedere che da esse sono parimenti determinate le discontinuità di tutte le nove derivate prime delle tre funzioni u, v, w; e, se si tien conto delle equazioni d'equilibrio, cioè si suppone che in tutto il corpo le u, v, w soddisfacciano a queste equazioni, risultano parimenti determinate le discontinuità di tutte le derivate seconde di queste funzioni.

Questo risultato ha un notevole interesse. Ne deriva infatti la conseguenza che se due deformazioni regolari in tutto il corpo, eccetto che attraverso la σ, soddisfanno entrambe, su questa superficie, alle condizioni (1), (2), la deformazione rappresentata dalla loro differenza geometrica sarà completamente regolare in tutto il corpo. Infatti, per questa deformazione, dovranno

[1] Questi Rendiconti, 1° sem. 1914, pag. 463.

essere nulle le discontinuità delle tre funzioni che rappresentano le componenti di spostamento e delle loro derivate prime e seconde. Nè altre singolarità potranno esistere.

Da ciò segue che se si trova una terna qualunque di funzioni U, V, W regolari, soddisfacenti alle equazioni d'equilibrio in tutto il corpo, eccetto che attraverso la superficie σ, sulla quale soddisfacciano alle (1), (2), il problema della determinazione della distorsione potrà essere ridotto a quello della deformazione del corpo sotto l'azione di date forze superficiali. Ponendo, infatti,

$$u = u' + U \qquad v = v' + V \qquad w = w' + W,$$

le nuove funzioni u', v', w' da determinarsi non dovranno avere alcuna singolarità attraverso la superficie σ; e sulla rimanente superficie del corpo, dove la tensione totale deve essere nulla, dovranno soddisfare alla condizione di produrre tensioni uguali e contrarie a quelle prodotte dalla deformazione U, V, W.

Ora noi dimostreremo come sia sempre possibile di ottenere una terna di funzioni U, V, W. Il problema delle distorsioni sarà così ricondotto a quello delle deformazioni per date forze superficiali. Ciò costituisce un metodo per la risoluzione analitica del problema; ma un maggiore interesse può forse avere dal punto di vista dell'esistenza della soluzione nel problema delle distorsioni.

Difatti, dopo le ricerche di Lauricella, dei Cosserat e di Korn [1], l'esistenza della soluzione del problema della deformazione per date forze superficiali può considerarsi, almeno in via generale, come dimostrata. Il problema delle distorsioni potendosi ridurre a questo altro problema, dovrà quindi esso pure ammettere una soluzione. La quistione si potrà in tal modo considerare come risolta.

Veniamo ora alla dimostrazione della proprietà enunciata da principio.

Le formole che dànno le discontinuità dei coefficienti di deformazione, colla orientazione canonica degli assi, sono

$$(3) \qquad D[x_x] = \frac{\partial u_\sigma}{\partial x} \qquad D[y_y] = \frac{\partial v_\sigma}{\partial y} \qquad D[x_y] = \frac{\partial u_\sigma}{\partial y} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial x}$$

$$(4) \qquad D[x_z] = \alpha \qquad D[y_z] = \beta \qquad D[z_z] = \gamma,$$

ove α, β, γ sono funzioni lineari note dei secondi membri delle prime tre equazioni. Nel caso dell'isotropia,

$$\alpha = 0 \qquad \beta = 0 \qquad \gamma = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial y}\right).$$

[1] Ved. particolarmente A. Korn, *Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité dans le cas où les efforts sont donnés à la surface.* Annales de la Faculté des sciences de l'Université de Toulouse, 2me sér., tom. X, année 1908.

Ora a queste equazioni, soddisfatte sulla σ, possiamo aggiungere le seguenti che si ottengono derivando le (1) tangenzialmente:

$$(5)\qquad \begin{cases} D\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]=\frac{\partial w_\sigma}{\partial x} & D\left[\frac{\partial w}{\partial y}\right]=\frac{\partial w_\sigma}{\partial y} \\ D\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]=\frac{\partial u_\sigma}{\partial y} & D\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]=\frac{\partial v_\sigma}{\partial x}. \end{cases}$$

Le prime due equazioni (3), la terza delle (4) e queste ultime determinano le discontinuità di sette delle derivate delle funzioni u, v, w; cioè di tutte, all'infuori di $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}$. Ma dalle prime due equazioni (4), tenuto conto delle (5), si ricava

$$(6)\qquad D\left[\frac{\partial u}{\partial z}\right]=\alpha-\frac{\partial w_\sigma}{\partial x} \qquad D\left[\frac{\partial v}{\partial z}\right]=\beta-\frac{\partial w_\sigma}{\partial y}.$$

La quistione, per quanto riguarda le discontinuità delle derivate prime, è quindi risolta.

Per le derivate seconde si può subito osservare che se si suppongono note le discontinuità delle derivate prime, come lo sono infatti, di una delle funzioni, ad es. la u, le discontinuità delle cinque derivate, secondo che contengono una o nessuna derivazione rispetto a z, si possono subito ottenere con derivazioni tangenziali. Resta quindi, per la u, da cercarsi unicamente la discontinuità della $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Lo stesso può dirsi per le derivate delle altre due funzioni v, w. Tutto si riduce così alla ricerca delle discontinuità di $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$.

Ora, le tre equazioni dell'equilibrio sono lineari a coefficienti costanti nelle derivate seconde delle u, v, w. Da esse perciò, e dalla conoscenza delle discontinuità di tutte le rimanenti derivate seconde, potremo ricavare le discontinuità delle tre derivate seconde rispetto a z.

Nel caso dell'isotropia, le formole che determinano queste discontinuità sono le seguenti:

$$\mu D\left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]=-D\left[\lambda\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right]=$$
$$=-\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x}+\frac{\partial v_\sigma}{\partial y}\right)-\mu\left(\frac{\partial^2 u_\sigma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_\sigma}{\partial y^2}\right)$$

$$\mu D\left[\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right]=-\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x}+\frac{\partial v_\sigma}{\partial y}\right)-\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$\mu D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right]=-D\left[\lambda\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right].$$

da cui

$$(\lambda+\mu)\,\mathrm{D}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right]=-\lambda\,\mathrm{D}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}\right]-\mu\,\mathrm{D}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right];$$

e per le (6), tenendo conto che, nell' isotropia, $\alpha=0$ e $\beta=0$,

$$(\lambda+\mu)\,\mathrm{D}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right]=(\lambda-\mu)\left(\frac{\partial^2 w_\sigma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_\sigma}{\partial y^2}\right).$$

II.

La deformazione U, V, W, di cui abbiamo parlato in principio del numero precedente e che è assoggettata alle sole condizioni (1), (2) sulla superficie σ ed a quella di essere regolare nella rimanente parte del corpo, non è univocamente determinata. Ma per lo scopo nostro basta trovare una qualunque delle infinite deformazioni che soddisfanno a quelle condizioni.

Immaginiamo il corpo elastico indefinitamente esteso, ed in esso la superficie di discontinuità σ. Possiamo cercare la deformazione prodotta in un tal corpo dalle discontinuità che si hanno in σ, aggiungendo la condizione che all' infinito la deformazione sia evanescente: cioè, dal punto di vista fisico, la deformazione prodotta dall' infiltrazione o dalla soppressione di un leggero strato di materia lungo la superficie σ.

È facile il vedere che una tale deformazione è univocamente determinata, ed è data immediatamente, nel caso della isotropia, al quale d'ora innanzi ci limiteremo, dalle formole generali di rappresentazione integrale delle componenti dello spostamento elastico. Se noi infatti supponiamo in quelle formole nulle le forze di massa e superficiali, scompaiono gli integrali relativi a queste forze, ed i rimanenti integrali (qualora sieno estesi alla superficie σ, e per le componenti di spostamento, che in essi compaiono, si prendono le u_σ, v_σ, w_σ, componenti delle discontinuità) dànno appunto la deformazione che soddisfa alle condizioni richieste. Questi integrali corrispondono, nelle formole della statica elastica, alla funzione potenziale di doppio strato della formola di Green; e si può effettivamente dimostrare che essi soddisfanno, oltre che alle condizioni generali, anche alle condizioni (1), (2) con un procedimento che ho indicato in un' altra occasione [1]. Tale procedimento è assai semplice; però è fondato sopra un passaggio al limite, che potrebbe dar luogo a qualche obiezione, e non mette in evidenza le proprietà delle singole parti di cui si compongono gli integrali complessivi.

[1] *Sul problema statico di Maxwell.* Memorie della R. Accademia dei Lincei, vol. VII, 1908.

Riprenderò la dimostrazione di quei risultati con un procedimento diretto, indipendente da qualunque passaggio al limite.

Consideriamo gli integrali

$$A=\int_\sigma u_\sigma \frac{\partial r}{\partial \nu} d\sigma \quad , \quad B=\int_\sigma v_\sigma \frac{\partial r}{\partial \nu} d\sigma \quad , \quad C=\int_\sigma w_\sigma \frac{\partial r}{\partial \nu} d\sigma ,$$

ove r è la distanza di un punto generico $(x\,y\,z)$ dello spazio dal centro dell'elemento superficiale $d\sigma$. Questi integrali possono essere considerati come potenziali biarmonici di doppio strato, in quanto non differiscono dai corrispondenti potenziali newtoniani se non per la sostituzione della funzione r alla $\frac{1}{r}$. Sia ora

$$\Omega=\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}$$

e poniamo

$$4\pi\,(u_1\,,v_1\,,w_1)=\alpha\,\frac{\partial\Omega}{\partial(x\,,y\,,z)}+\Delta_2(A\,,B\,,C)\,. \tag{7}$$

È assai facile di verificare che, per

$$\alpha=-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\,,$$

le espressioni precedenti soddisfanno alle equazioni d'equilibrio

$$(\lambda+\mu)\,\frac{\partial\theta}{\partial(x\,,y\,,z)}+\mu\,\Delta_2(u\,,v\,,w)=0\,,$$

ove

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Esse sono regolari in tutto lo spazio, all'infuori che nella superficie σ, ed all'infinito si annullano come funzioni potenziali newtoniane di doppio strato.

Per studiare le discontinuità delle espressioni (7) e delle corrispondenti componenti di deformazione e di tensione sulla superficie σ, mi servirò di alcuni risultati che pubblicherò prossimamente negli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino. Da essi risulta che le derivate seconde dei potenziali biarmonici di doppio strato sono continue se contengono una sola derivazione, o nessuna, nella direzione della normale allo strato agente. Supposta l'orientazione canonica degli assi, si ha poi, per le derivate seconde rispetto alla normale,

$$D\left[\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\right]=8\pi u_\sigma \qquad D\left[\frac{\partial^2 B}{\partial z^2}\right]=8\pi v_\sigma \qquad D\left[\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right]=8\pi w_\sigma\,.$$

Da ciò seguono subito le seguenti formole per le discontinuità delle $u_1\, v_1\, w_1$:

$$(8) \qquad D[u_1] = 2u_\sigma \qquad D[v_1] = 2v_\sigma \qquad D[w_1] = 2(\alpha + 1)\, w_\sigma .$$

Per ottenere le discontinuità delle componenti di deformazione, conviene ricorrere alle formole che dànno le discontinuità delle derivate terze dei potenziali biarmonici di doppio strato. Mediante queste formole e supponendo gli assi delle x e y tangenti nel punto che si considera alle due linee di curvatura della superficie σ, e indicando con R_1 ed R_2 i rispettivi raggi di curvatura, si trova

$$(8) \quad \begin{cases} D[x_x] = -2\alpha \dfrac{w_\sigma}{R_1} + 2 \dfrac{\partial u_\sigma}{\partial x} \\[2ex] D[y_y] = -2\alpha \dfrac{w_\sigma}{R_2} + 2 \dfrac{\partial v_\sigma}{\partial y} \\[2ex] D[z_z] = 2\alpha \left(\dfrac{\partial u_\sigma}{\partial x} + \dfrac{\partial v_\sigma}{\partial y} \right) + 2\alpha \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} \right) w_\sigma \\[2ex] D[y_z] = -4\alpha \dfrac{v_\sigma}{R_2} + 2(2\alpha + 1) \dfrac{\partial w_\sigma}{\partial y} \\[2ex] D[z_x] = -4\alpha \dfrac{u_\sigma}{R_1} + 2(2\alpha + 1) \dfrac{\partial w_\sigma}{\partial x} \\[2ex] D[x_y] = 2 \left(\dfrac{\partial u_\sigma}{\partial y} + \dfrac{\partial v_\sigma}{\partial x} \right) \end{cases}$$

Da queste formole risulta

$$D[x_x + y_y + z_z] = D[\theta] = 2(\alpha + 1) \left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial y} \right).$$

Le discontinuità relative ai coefficienti di tensione si ottengono mediante le formole precedenti, assai facilmente, ricordando che

$$X_x = \lambda\theta + 2\mu x_x \quad , \quad Z_z = \mu y_z \quad , \quad \text{ecc.}$$

Si trova, così,

$$D[X_x] = 2(\alpha + 1)\, \lambda \left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial y} \right) + 2\mu \left(2 \frac{\partial u_\sigma}{\partial x} - 2\alpha \frac{w_\sigma}{R_1} \right)$$

$$D[Y_y] = 2(\alpha + 1)\, \lambda \left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial y} \right) + 2\mu \left(2 \frac{\partial v_\sigma}{\partial y} - 2\alpha \frac{w_\sigma}{R_2} \right)$$

$$D[Z_z] = [2(\alpha + 1)\, \lambda + 4\mu\alpha] \left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial y} \right) + 4\mu\alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) w_\sigma .$$

Le tre rimanenti formole risultano senz'altro dalle ultime tre delle (8) moltiplicandole per μ.

La deformazione, che dobbiamo costruire per risolvere la quistione proposta, risulta dalla composizione della deformazione ora considerata (7), con un'altra che ora studieremo. Poniamo

$$\varphi = \int_\sigma \left(u_\sigma \frac{\partial a}{\partial \nu} + v_\sigma \frac{\partial b}{\partial \nu} + w_\sigma \frac{\partial c}{\partial \nu} \right) d\sigma$$

$$\psi_1 = \int_\sigma \left(v_\sigma \frac{\partial c}{\partial \nu} - w_\sigma \frac{\partial b}{\partial \nu} \right) d\sigma \qquad \psi_2 = \int_\sigma \left(w_\sigma \frac{\partial a}{\partial \nu} - u_\sigma \frac{\partial b}{\partial \nu} \right) d\sigma$$

$$\psi_3 = \int_\sigma \left(u_\sigma \frac{\partial b}{\partial \nu} - v_\sigma \frac{\partial a}{\partial \nu} \right) d\sigma$$

essendo a, b, c le coordinate del centro dell'elemento superficiale $d\sigma$. Queste quattro funzioni sono potenziali newtoniani. Da ciò segue che risultano soddisfatte le equazioni dell'equilibrio, ponendo

$$7_a) \qquad 4\pi(u_2 , v_2 , w_2) = (2\alpha + 1) \text{ grad } \varphi + \text{rot } (\psi_1 , \psi_2 , \psi_3) \, .$$

Supposta, al solito, l' orientazione canonica degli assi, le discontinuità di queste espressioni si determinano subito mediante le formole delle discontinuità delle derivate prime delle funzioni potenziali di superficie.

Si ha, da queste formole,

$$D\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] = 0 \qquad D\left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] = 0 \qquad D\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right] = -4\pi w_\sigma$$

$$D\left[\frac{\partial \psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z}\right] = -4\pi u_\sigma \qquad D\left[\frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x}\right] = -4\pi v_s$$

$$D\left[\frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right] = 0 \, .$$

Mediante questo formole troviamo

$$D[u_2] = -u_\sigma \qquad D[v_2] = -v_\sigma \qquad D[w_2] = -(2\alpha + 1)\, w_\sigma \, .$$

Confrontando queste formole colle (8), si trova subito che la deformazione, che si ottiene componendo le due deformazioni considerate, soddisfa in superficie alle condizioni seguenti:

$$\text{(I)} \qquad D[u_1 + u_2] = u_\sigma \qquad D[v_1 + v_2] = v_\sigma \qquad D[w_1 + w_2] = w_\sigma \, ;$$

cioè precisamente alle condizioni (1), a cui doveva soddisfare la deformazione richiesta.

Il calcolo delle discontinuità delle componenti di deformazione richiede la conoscenza delle discontinuità delle derivate seconde delle funzioni potenziali di superficie. Queste discontinuità sono note (vedi: Poincaré, *Théorie du potentiel newtonien*, chap. VI); e le formole che si ottengono nel caso

nostro, sempre nell'ipotesi di un orientamento canonico degli assi, sono le seguenti per le componenti di deformazione relative a u_2, v_2, w_2:

$$D[x_x] = 2\alpha \frac{w_\sigma}{R_1} - \frac{\partial u_\sigma}{\partial x}$$

$$D[y_y] = 2\alpha \frac{w_\sigma}{R_2} - \frac{\partial w_\sigma}{\partial y}$$

$$D[z_z] = -2\alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) w_\sigma + \left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial y}\right)$$

$$D[y_z] = 4\alpha \frac{v}{R_2} - 2(2\alpha + 1) \frac{\partial w_\sigma}{\partial y}$$

$$D[z_x] = 4\alpha \frac{u}{R_1} - 2(2\alpha + 1) \frac{\partial w_\sigma}{\partial x}$$

$$D[x_y] = -\left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial y}\right),$$

da cui segue

$$D[\theta] = 0.$$

Da queste formole e dalle (8) possiamo dedurre le discontinuità delle componenti di deformazione relative alla deformazione che risulta dalla composizione $u_1 + u_2$, $v_1 + v_2$, $w_1 + w_2$. Si trova, in questo caso,

$$D[x_x] = \frac{\partial u_\sigma}{\partial x} \qquad D[y_z] = 0$$

$$D[y_y] = \frac{\partial v_\sigma}{\partial y} \qquad D[z_x] = 0$$

$$D[z_z] = (2\alpha + 1)\left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial y}\right) \qquad D[x_y] = \frac{\partial u_\sigma}{\partial y} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial x},$$

e quindi

$$D[\theta] = 2(\alpha + 1)\left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial y}\right).$$

Da queste formole risulta subito, per le componenti di tensione relative ad un elemento superficiale appartenente alla superficie σ,

$$D[X_z] = 0 \qquad D[Z_z] = 0$$

(II)

$$D[Z_z] = [2\lambda(\alpha + 1) + 2\mu(2\alpha + 1)]\left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial y}\right) = 0,$$

ricordando il valore della costante α.

Resta così dimostrato che le componenti di tensione relative ad elementi superficiali di σ sono continue nell'attraversare questa superficie: o, in altri termini, che questi elementi non sono soggetti ad alcuna tensione risultante dalla deformazione del corpo. È questo appunto il significato delle condizioni (2), le quali così risultano soddisfatte per la deformazione $u_1 + u_2$, $v_1 + v_2$, $w_1 + w_2$.

Possiamo poi osservare che le deformazioni (7) (7_a) si annullano entrambe all'infinito, come si annullano le ordinarie funzioni potenziali, nè hanno altra singolarità all'infuori di quelle indicate per la superficie σ.

Dobbiamo quindi concludere che la deformazione rappresentata dalla composizione di queste due deformazioni, soddisfacendo alle condizioni (I) (II) sopra σ, rappresenta la deformazione di un mezzo elastico indefinito prodotta in esso dalla infiltrazione o dalla soppressione di un sottile strato di materia che è determinata dalle discontinuità u_σ, v_σ, w_σ.

Mediante questa deformazione, per quanto abbiamo visto da principio, qualunque problema di distorsione, relativo ad una superficie di discontinuità σ, può essere ricondotto ad un problema di deformazione per forze date in superficie, salvo quelle limitazioni relative al bordo del taglio, quando questo è interno al corpo, di cui abbiamo parlato nella Nota I.

Per quanto concerne le altre tre componenti di tensione della deformazione considerata, dalle formole precedenti deduciamo subito

$$D[X_x] = 2\lambda(\alpha + 1)\left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial y}\right) + 2\mu \frac{\partial u_\sigma}{\partial x}$$

$$D[Z_y] = 2\lambda(\alpha + 1)\left(\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial y}\right) + 2\mu \frac{\partial v_\sigma}{\partial y}$$

$$D[X_y] = \frac{\partial u_\sigma}{\partial y} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial x}.$$

Esse sono quindi in generale discontinue; ma risultano continue quando le componenti delle discontinuità soddisfacciano alle condizioni

$$\frac{\partial u_\sigma}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v_\sigma}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial u_\sigma}{\partial y} + \frac{\partial v_\sigma}{\partial x} = 0 .$$

E questa conclusione è perfettamente conforme alla proprietà generale che abbiamo dimostrato in principio della Nota precedente, quando abbiamo stabilite le condizioni perchè una distorsione soddisfacesse alla definizione di Weingarten, cioè avesse continue, lungo la superficie di discontinuità, tutte le sei componenti di tensione.

Ci sembra pertanto che, mediante le considerazioni che precedono, i principî della teoria delle distorsioni elastiche vengano ad assumere un

assetto generale e definitivo; e che le ricerche del Volterra, il quale ha così felicemente creata questa teoria, ne risultino meglio collegate sotto ogni rapporto colla teoria generale dell'elasticità.

III.

Ci resta però ancora da rispondere ad un'obiezione che può essere sollevata circa alcune deduzioni delle quali abbiamo fatto uso.

Data una relazione della forma

$$f_\nu - f_{\nu'} = g$$

che definisca le discontinuità di una funzione f lungo una superficie σ, noi abbiamo fatto uso delle relazioni che si deducono da questa, derivando tangenzialmente alla superficie stessa. Ora, ammessa la regolarità delle funzioni f_ν, $f_{\nu'}$, g, non vi è alcun dubbio che, insieme alla relazione precedente, debbano sussistere tutte quelle che se ne deducono con derivazioni tangenziali, finchè queste sono possibili. Ma non si può parimenti essere sicuri che queste relazioni rappresentino le discontinuità delle corrispondenti derivate della funzione f; poichè può darsi che le derivate calcolate sulla superficie σ non coincidano col limite delle derivate, calcolate fuori di σ, quando ci avviciniamo indefinitamente a questa superficie. Tuttavia in molti casi questa coincidenza effettivamente si verifica [1].

Non sarebbe facile discutere direttamente nel nostro caso intorno alla validità dei procedimenti seguiti. Però possiamo far vedere che i risultati, a cui siamo arrivati, possono essere stabiliti anche all'infuori di quei procedimenti di derivazione. Non considereremo il problema elastico, ma ci limiteremo al corrispondente problema della teoria del potenziale che abbiamo considerato alla fine della Nota I. Le difficoltà, ed il modo di superarle, sono sostanzialmente identiche nei due casi; formalmente la quistione si presenta assai più semplice nel caso del potenziale.

Il problema considerato era quello di determinare una funzione armonica regolare V in uno spazio S limitato da una superficie s e da un taglio interno σ, colla condizione che fosse

1° sulla superficie s: $\dfrac{\partial V}{\partial n} = 0$;

[1] Ad esempio le equazioni che si deducono dalla relazione che determina le discontinuità di un potenziale di doppio strato

$$W_\nu - W_{\nu'} = 4\pi g \quad , \quad W = \int_\sigma g \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} d\sigma ,$$

derivando tangenzialmente

$$\frac{\partial W_\nu}{\partial x} - \frac{\partial W_{\nu'}}{\partial x} = 4\pi \frac{\partial g}{\partial x} \qquad \frac{\partial W_\nu}{\partial y} - \frac{\partial W_{\nu'}}{\partial y} = 4\pi \frac{\partial g}{\partial y} ,$$

danno effettivamente le discontinuità delle derivate tangenziali $\dfrac{\partial W}{\partial x}$, $\dfrac{\partial W}{\partial y}$ del potenziale di doppio strato (Cfr. Poincaré, *Théorie du potentiel newtonien*).

2° sulla superficie σ: $V_\nu - V_{\nu'} = g$, $\frac{\partial V}{\partial \nu} + \frac{\partial V}{\partial \nu'} = 0$,
ove g era una funzione data dei punti di σ.

Per la validità della relazione

$$\int_S \Delta_1 V dS = -\int (V_\nu - V_{\nu'}) \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma = -\int g \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma$$

da cui deriva l'unicità della soluzione del problema proposto, basta che le derivate seconde di V in S esistano e siano integrabili.

Per determinare la V conviene porre

$$V = U + W \quad \text{ove} \quad W = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma g \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} d\sigma$$

supponendo che g soddisfaccia a quelle condizioni, indicate nella Nota I, affinchè non si presentino, per le derivate di W, degli infiniti sul contorno di σ.

Le condizioni a cui deve soddisfare la U, a cagione delle relazioni verificate sopra σ dalla W:

$$W_\nu - W_{\nu'} = g \qquad \frac{\partial W}{\partial \nu} + \frac{\partial W}{\partial \nu'} = 0,$$

sono allora

$$U_\nu - U_{\nu'} = 0 \qquad \frac{\partial U_\nu}{\partial \nu} + \frac{\partial U_{\nu'}}{\partial \nu'} = 0$$

mentre la condizione sopra s

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0,$$

ci dà

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{\partial W}{\partial n}.$$

Inoltre la U dovrà essere armonica. Da queste condizioni è facile dedurre che la U dovrà essere regolare insieme alle sue derivate, quando si attraversa la superficie σ.

Considerando infatti lo spazio S come limitato, oltre che dalla superficie s, dalle due faccie del taglio σ, e rappresentando U colla formola di Green, troviamo

$$U = \frac{1}{4\pi} \int_s \left(U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds + \frac{1}{4\pi} \int_\sigma (U_\nu - U_{\nu'}) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} d\sigma +$$
$$+ \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \left(\frac{\partial U}{\partial \nu} + \frac{\partial U}{\partial \nu'} \right) \frac{d\sigma}{r}$$

ossia per le condizioni a cui soddisfa U sopra σ

$$U = \frac{1}{4\pi}\int_s \left(U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n} \right) ds .$$

Ora questo integrale non ha alcun rapporto con la superficie σ e quindi la U non avrà alcuna singolarità sopra questa superficie.

Possiamo quindi concludere che la U non ha nello spazio S alcuna singolarità, e perciò la determinazione di essa è ridotta a quella di una funzione armonica regolare, di cui sono dati i valori della derivata normale sulla superficie, che limita il campo.

Questa funzione, come è ben noto, esiste in generale, e quindi, si può concludere, esiste anche la V. Inoltre, poichè la funzione V è univocamente determinata dalle condizioni poste, ne viene di conseguenza che sopra la superficie σ risultano pure completamente determinate le discontinuità di tutte le sue derivate di qualsiasi ordine.

L'esistenza nella statica elastica di formole analoghe a quella di Green permette di trasportare immediatamente le considerazioni precedenti nei problemi della teoria delle distorsioni, che abbiamo precedentemente studiato.

Meccanica. — *Una proprietà di simmetria delle traiettorie dinamiche spiccate da due punti.* Nota del Socio T. Levi-Civita.

Il sig. R. Straubel rilevò, pochi anni or sono, una notevole relazione di reciprocità, concernente i pennelli elementari di raggi emessi da due centri luminosi di un mezzo qualsiasi [1] (comunque eterogeneo, ma isotropo). Questa relazione dà luogo a interessanti applicazioni fotometriche e diottriche, indicate dallo stesso Straubel, e ricorre nei fondamenti della teoria dell'irraggiamento, secondo il metodo integrale di Hilbert [2].

Mi propongo di far vedere, sfruttando in generale le caratteristiche dell'azione hamiltoniana [3], che il risultato in questione rientra come caso

(1) *Ueber einen allgemeinen Satz der geometrischen Optik und einige Anwendungen*, Phys. Zeitschrift, IV, 1903, pp. 114-117. Il sig. A. Gleichen ne ha dato poco dopo [ibidem, 226-227] una dimostrazione di carattere elementare, considerando un numero finito di mezzi omogenei, e valutando l'influenza delle successive rifrazioni.

(2) *Begründung der elementaren Strahlungstheorie*, Nachr. der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen, 1912, pp. 1-17; riprodotto in Phys. Zeitschrift, XIII, 1912, pp. 1056-1064; e in Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung, XXII, 1913, pp. 1-20.

(3) Nella forma che meglio si presta alle applicazioni ottiche, quale emerge ad es. dal *Treatise on natural philosophy* di Kelvin e Tait, part I [Cambridge, University Press, 1896], pp. 347-358. A pag. 358, sotto il titolo *Application to common optics*, si trova accennato con espressivo commento un caso particolare del teorema di Straubel.

particolare in una proprietà di simmetria dei fasci conservativi di traiettorie dinamiche, il che è quanto dire delle geodetiche di un arbitrario ds^2. Nella relativa metrica la proposizione generale appare anche più semplice dei suoi corollarî ottici. Ne illustrerò uno a titolo d'esempio, ricavando sotto forma esplicita l'estensione della formula di Straubel ai mezzi anisotropi.

1. *Generalità - Enunciato del teorema.* — Sia O un punto di una varietà V_n a n dimensioni, definita metricamente dal quadrato del suo elemento lineare

$$ds^2 = \sum_{1}^{n}{}_{ik} a_{ik}\, dx_i\, dx_k . \tag{1}$$

Consideriamo una geodetica G passante per O e un circostante pennello elementare (di geodetiche, spiccate tutte da O). Sia l la lunghezza dell'arco contato, su ogni geodetica del pennello, a partire da O. Le ipersuperficie (ipersfere geodetiche di centro O e raggio l) $l = \text{cost}$ tagliano ortogonalmente [1] il pennello in campi $d\omega$ ad $n-1$ dimensioni. Fissiamo una di queste ipersfere di raggio generico l, e sia O' il punto di G che ad essa appartiene.

Il rapporto

$$d\Omega_l = \frac{d\omega}{l^{n-1}}$$

si può considerare come ampiezza angolare del pennello, misurata alla distanza l. Negli spazî euclidei, $d\Omega_l$ è indipendente da l (= per es. al $d\omega$ dell'ipersfera di raggio 1) e si può identificare coll'angolo solido del pennello nel suo vertice O, cioè con

$$d\Omega = \lim_{l=0} \frac{d\omega}{l^{n-1}} .$$

In uno spazio di natura qualunque, $d\Omega_l$ varia, in generale, con l, e così il rapporto

$$\frac{d\Omega_l}{d\Omega} = \mathrm{J}(\mathrm{O}, \mathrm{O}') ,$$

che misura manifestamente l'*ingrandimento* (angolare) in O' d'un pennello elementare di geodetiche, spiccate da O verso O'.

Ciò posto, si consideri invece un pennello spiccato da O' verso O, e il relativo ingrandimento angolare, in O, J(O', O). L'annunciata relazione di simmetria è espressa dalla formula

$$\mathrm{J}(\mathrm{O}, \mathrm{O}') = \mathrm{J}(\mathrm{O}', \mathrm{O}) .$$

[1] Cfr., per es., Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I [Pisa, Spoerri, 1902], pp. 336-338.

2. *La distanza geodetica* W(P, P′) va risguardata come una funzione simmetrica dei due punti P, P′, regolare, finchè questi rimangono distinti, entro una regione convenientemente limitata della varietà V_n. Essa coincide notoriamente coll'azione hamiltoniana di un sistema libero da forze, la cui energia cinetica abbia per espressione $\frac{1}{2}\frac{ds^2}{dt^2}$ e si conservi $=\frac{1}{2}$ durante tutto il moto. Giova rammentarne, per quanto verrà in uso qui appresso, il comportamento differenziale caratteristico.

Fissiamo, all'uopo, una geodetica generica, indicando con $\dot{x}_i$ le derivate delle coordinate x_i rispetto all'arco della stessa geodetica, e introduciamo le *coniugate* o *momenti cinetici*

$$p_i = \sum_1^n {}_k\, a_{ik}\, \dot{x}_k\,, \tag{2}$$

atte, al pari delle $\dot{x}_i$, a caratterizzare la direzione della geodetica in un suo punto qualsiasi [1]. L'identità

$$\sum_1^n {}_{ik}\, a_{ik}\, \dot{x}_i\, \dot{x}_k = 1\,, \tag{3}$$

cui, per loro definizione, soddisfanno le $\dot{x}_i$, implica tra le p la relazione quadratica reciproca

$$\sum_1^n {}_{ik}\, a^{(ik)}\, p_i\, p_k = 1 \tag{3'}$$

($a^{(ik)}$ complementi algebrici delle a_{ik} nel determinante da esse costituito, divisi per il determinante stesso).

Riferiamoci in particolare alla geodetica congiungente P con P′. Siano x_i, x'_i le coordinate di questi due punti; p_i, p'_i i valori che in essi assumono i momenti, convenendo che essi corrispondano, in entrambi i casi, alla direzione della geodetica che è rivolta *verso l'esterno dell'arco* PP′.

Per arbitrarî spostamenti infinitesimi di questi due punti, cioè per arbitrarî incrementi dx_i, dx'_i delle loro coordinate, sussiste l'identità

$$dW = \sum_1^n {}_i\, p_i\, dx_i + \sum_1^n {}_i\, p'_i\, dx'_i \quad [2]\,, \tag{4}$$

[1] È manifesto che le p_i non differiscono dalle λ_i di Ricci, cioè dal sistema coordinato covariante della geodetica in questione.

[2] Non si dimentichi la convenzione fatta circa i versi positivi in P e in P′. Di solito si presenta la (4) sotto la forma (emisimmetrica rispetto ai due punti P, P′)

$$dW = \sum_1^n {}_i\, p'_i\, dx'_i - \sum_1^n {}_i\, p_i\, dx_i\,,$$

ma allora si intende che le p e le p' si riferiscano ad uno stesso verso di percorrenza (da P verso P′).

la quale mostra che le p_i, p'_i coincidono ordinatamente con $\frac{\partial W}{\partial x_i}, \frac{\partial W}{\partial x'_i}$.

3. *Piccoli intorni di variabilità per* P *e* P′ – *Specificazioni del sistema di riferimento.* — Immaginiamo, ormai, che P rimanga nell'immediata prossimità di un assegnato punto O, e P′ in prossimità di un altro punto O′ distinto da O.

Siano $x_i^{(0)}$ e $x_i'^{(0)}$ le coordinate di O e di O′, e si ponga

$$
(5) \qquad \begin{cases} x_i = x_i^{(0)} + \xi_i, \\ x'_i = x_i'^{(0)} + \xi'_i. \end{cases}
$$

Si designi poi con G la geodetica passante per O, O′, e si noti che (previa opportuna trasformazione delle coordinate generali x_i) è sempre lecito ritenere:

a) che, nei due punti O, O′, i valori numerici dei coefficienti a_{ik} del quadrato dell'elemento lineare, e con essi i loro reciproci $a^{(ik)}$, si riducono ad ε_{ik} (cioè zero per $i \neq k$, e 1 per $i = k$);

b) che le $\dot{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ relative alla G sono nulle in O ed in O′, avendosi ulteriormente [in causa della (3), che si riduce a $\sum_1^n {}_i \dot{x}_i^2 = 1$] $\dot{x}_n^2 = 1$, o addirittura (fissando convenientemente i versi) $\dot{x}_n = 1$.

Dalle (2), e da *a*) e *b*) segue che i momenti della G in O ed O′ valgono rispettivamente

$$
(6) \qquad \begin{cases} p_i = 0, \; p'_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ p_n = 1, \; p'_n = 1. \end{cases}
$$

Avuto riguardo alle (4) e (5), lo sviluppo di W(P, P′) nell'intorno di O, O′ (fino al secondo ordine inclusivo) si presenta sotto la forma

$$
(7) \qquad W(P, P') = l + \xi_n + \xi'_n + \Xi_2 + \Xi'_2 + \sum_1^n {}_{ik} \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \, \partial x'_k} \xi_i \xi'_k,
$$

dove l sta per la distanza geodetica W(O, O′), e Ξ_2, Ξ'_2 designano forme quadratiche degli argomenti ξ e ξ' rispettivamente: ben si intende che i coefficienti $\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \, \partial x'_k}$ della forma bilineare vanno (come le altre derivate di W) riferiti alla coppia O, O′.

Per derivazione rispetto a $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (o, ciò che è lo stesso, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$), si ha, in base alla (7) (e a meno di termini d'ordine superiore al primo),

$$
(8) \qquad p_i = \Xi_1 + \sum_1^n {}_k \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \, \partial x'_k} \xi'_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),
$$

e, in modo analogo,

$$p'_i = \Xi'_1 + \sum_1^n {}_k \frac{\partial^2 W}{\partial x'_i \, \partial x_k} \xi_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{9}$$

con ovvio significato di Ξ_1, Ξ'_1 (forme lineari, delle ξ la prima, delle ξ' la seconda).

Dacchè, in O e in O′, $a^{(ik)} = \varepsilon_{ik}$, la (3′) porge $\sum_1^n {}_i p_i^2 = 1$, $\sum_1^n {}_i p_i'^2 = 1$. Perciò, a meno di termini di second'ordine, p_n e p'_n seguitano ad avere il valore 1 (che ad essi spetta, sulla G, in O e, rispettivamente, in O′).

4. *Pennello elementare di centro* O – *Ampiezza angolare misurata in prossimità di* O′, *e all'origine.* — Per le geodetiche (prossime a G) spiccate da O, le ξ vanno poste eguali a zero. La W(O, P′), limitata ai termini di primo ordine, si riduce a

$$l + \xi'_n,$$

e, nello stesso ordine di approssimazione, l'ipersfera geodetica di centro O

$$W(O, P') = l$$

si confonde coll'iperpiano passante per O′

$$\xi'_n = 0.$$

Sia $d\omega$ un campo elementare di questo iperpiano circostante ad O′, e si consideri il pennello di geodetiche che proiettano $d\omega$ da O.

L'ampiezza angolare di questo pennello, misurata alla distanza l, vale manifestamente

$$d\Omega_l = \frac{d\omega}{l^{n-1}}.$$

In partenza (intendo dire nel vertice O), queste geodetiche hanno dei momenti p_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, definiti dalle (8), in cui si sieno poste le ξ e la ξ'_n eguali a zero: ossia

$$p_i = \sum_1^{n-1} {}_k \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \, \partial x'_k} \xi'_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1);$$

mentre, sempre a meno di termini del secondo ordine (nelle ξ'), $p_n = 1$.

D'altra parte, a norma delle (2), ed *a*), le p_i coincidono in O colle $\dot{x}_i$. Ne consegue che, sopra una generica geodetica del pennello, alla distanza elementare λ da O, le coordinate x_i si trovano incrementate di $p_i\lambda$. Si ha così, confrontando colle (5),

$$\xi_i = \lambda \sum_1^{n-1} {}_k \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \, \partial x'_k} \xi'_k, \tag{10}$$

$$\xi_n = \lambda. \tag{11}$$

Quest'ultima mostra che l'ipersfera di centro O e raggio λ si confonde, nell'intorno considerato, coll'iperpiano $\xi_n = \lambda$. La (10) stabilisce così una corrispondenza omografica fra i due iperpiani $\xi'_n = 0$ e $\xi_n = \lambda$, corrispondendosi le intersezioni con una medesima geodetica del pennello. Fra due elementi omologhi $d\omega$ e $d\omega_\lambda$ di questi due iperpiani passa, a norma della (10), la relazione

$$d\omega_\lambda = \lambda^{n-1} |\Delta| \, d\omega \,, \tag{12}$$

rappresentando Δ il determinante dei coefficienti $\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \, \partial x'_k}$ (certo diverso da zero entro il campo di regolarità, cui si suppone di riferirsi).

Angolo solido all'origine del nostro pennello (proiettante $d\omega$ da O) è manifestamente il rapporto

$$d\Omega = \frac{d\omega_\lambda}{\lambda^{n-1}} \,,$$

che si confonde, nell'adottato ordine di approssimazione, con $\lim_{l=0} \frac{d\omega_l}{l^{n-1}}$.

5. *Ingrandimento in O′ – Teorema di reciprocità.* — Ingrandimento in O′ del nostro pennello di centro O sarà da dirsi il rapporto $J(O, O')$ delle due ampiezze angolari $d\Omega_l$ e $d\Omega$, ossia

$$J(O, O') = \frac{d\Omega_l}{d\Omega} = \frac{d\omega}{l^{n-1}} : \frac{d\omega_\lambda}{\lambda^{n-1}} \,.$$

La (12) ce ne fornisce l'espressione

$$J(O, O') = \frac{1}{l^{n-1} |\Delta|} \,.$$

Se si nota che $W(O, O')$ è, per sua definizione, simmetrica rispetto ai due punti da cui dipende, e che simmetriche sono altresì le particolarizzazioni di coordinate *a*) e *b*), di cui ci siamo valsi per semplificare le formule, senz'altro risulta che il determinante Δ rimane invariato, al pari di $l = W(O, O')$, quando si scambino O ed O′. Di qua la relazione

$$J(O, O') = J(O', O) \,,$$

che esprime, si può dire, la reversibilità dei pennelli geodetici rispetto all'ingrandimento angolare.

6. *Applicazione ottica ai mezzi anisotropi.* — In un punto generico P di un mezzo birifrangente, siano (per la specie di raggi che si dovranno considerare) n_1, n_2, n_3 gli indici di rifrazione nelle direzioni degli assi ottici x, y, z. In base al principio di Fermat, i raggi luminosi entro un mezzo siffatto coincidono colle geodetiche del

$$ds^2 = n_1^2 \, dx^2 + n_2^2 \, dy^2 + n_3^2 \, dz^2 \,. \tag{13}$$

Sia S la varietà a tre dimensioni caratterizzata metricamente da un tale ds^2, e S^* lo spazio ordinario, sede del fenomeno ottico. Queste due varietà, definite entrambe metricamente, sono poste in corrispondenza biunivoca dalla varietà analitica (x, y, z).

Detta ds^* la distanza elementare euclidea fra due punti vicinissimi (x, y, z) e $(x+dx, y+dy, z+dz)$, e

$$\alpha = \frac{dx}{ds^*} \quad , \quad \beta = \frac{dy}{ds^*} \quad , \quad \gamma = \frac{dz}{ds^*}$$

i coseni direttori dell'arco che li congiunge, dalla (13) si ha

$$\frac{ds}{ds^*} = \sqrt{n_1^2 \alpha^2 + n_2^2 \beta^2 + n_3^2 \gamma^2} \, , \tag{14}$$

il radicale andando preso in valore assoluto.

Consideriamo ancora un intorno a tre dimensioni di (x, y, z), e i relativi elementi di volume dS e dS^*, nella metrica (13) e nell'ordinaria. Avremo

$$\frac{dS}{dS^*} = n_1 \, n_2 \, n_3 \, . \tag{15}$$

Consideriamo infine l'elemento superficiale normale alla direzione (α, β, γ), cui compete la misura euclidea $d\sigma^* = \frac{dS^*}{ds^*}$. Sarà $d\sigma = \frac{dS}{ds}$ la sua misura nella metrica (13), con che le (14) e (15) dànno

$$\frac{d\sigma}{d\sigma^*} = \frac{n_1 \, n_2 \, n_3}{\sqrt{n_1^2 \alpha^2 + n_2^2 \beta^2 + n_3^2 \gamma^2}} \, . \tag{16}$$

Mediante queste formule possiamo riportare allo spazio euclideo del mezzo ambiente le ampiezze angolari $d\Omega$ e $d\Omega_l$, definite al n. 4, con referenza ad un generico ds^2 e alle sue geodetiche [nel caso attuale, il ds^2 (13) a tre dimensioni, e i raggi luminosi].

Occupiamoci dapprima dell'angolo solido all'origine

$$d\Omega = \frac{d\omega_\lambda}{\lambda^2} \, .$$

La misura di quest'angolo, nello spazio fisico, è, con manifesto significato dei simboli,

$$d\Omega^* = \frac{d\omega_\lambda^*}{\lambda^{*2}} \, .$$

Per divisione, si ha

$$\frac{d\Omega}{d\Omega^\star} = \frac{d\omega_\lambda}{d\omega_\lambda^\star}\left(\frac{\lambda^\star}{\lambda}\right)^2,$$

donde, tenendo presente che λ, $\lambda^\star$ vanno trattate come misure di uno stesso arco elementare, e applicando le (14) e (16),

$$d\Omega = d\Omega^\star \frac{n_1\, n_2\, n_3}{(n_1^2\alpha^2 + n_2^2\beta^2 + n_3^2\gamma^2)^{3/2}}. \tag{17}$$

Va da sè che, in quest'ultima formula, i valori di n_1, n_2, n_3 si riferiscono al punto O; quelli di α, β, γ pure ad O e alla direzione del raggio che va a passare per O'.

In prossimità di O', abbiamo, nella varietà S, un'ampiezza angolare misurata da

$$d\Omega_l = \frac{d\omega}{l^2}.$$

L'ampiezza euclidea dello stesso pennello vale

$$d\Omega_l^\star = \frac{d\omega^\star}{\overline{OO'}^2},$$

designandosi manifestamente con $\overline{OO'}$ la distanza dei due punti in senso ordinario. La (16) dà

$$d\Omega_l = d\Omega_l^\star \frac{\overline{OO'}^2}{l^2} \frac{n_1'\, n_2'\, n_3'}{\sqrt{n_1'^2\alpha'^2 + n_2'^2\beta'^2 + n_3'^2\gamma'^2}}, \tag{18}$$

le quantità accentate riferendosi ad O' e alla direzione del raggio che va a passare per O.

Ciò posto, indichiamo con

$$J^\star(O, O') = \frac{d\Omega_l^\star}{d\Omega^\star}$$

l'ingrandimento angolare (inteso nell'ordinario senso euclideo) che si verifica per il nostro pennello di raggi, nel passare dall'origine O fino in O'. Dalle (18) e (17) si ricava

$$\frac{l^2}{\overline{OO'}^2} J(O, O') = J^\star(O, O') \frac{n_1'\, n_2'\, n_3'}{n_1\, n_2\, n_3} \frac{(n_1^2\alpha^2 + n_2^2\beta^2 + n_3^2\gamma^2)^{3/2}}{(n_1'^2\alpha'^2 + n_2'^2\beta'^2 + n_3'^2\gamma'^2)^{1/2}}.$$

Il primo membro è funzione simmetrica dei punti O, O'. Lo è quindi anche il secondo. Esprimendo materialmente questa circostanza, si ricava l'estensione della formula di Straubel ai mezzi anisotropi.

Per $n_1 = n_2 = n_3 = n$, si ritrova naturalmente la relazione già data da questo autore. Colle nostre notazioni essa assume l'aspetto

$$J^*(O, O')\, n'^2 = J^*(O', O)\, n^2,$$

da cui apparisce che gli ingrandimenti angolari di due pennelli, diremo così, affacciati, stanno fra loro nel rapporto inverso dei quadrati degli indici di rifrazione nei rispettivi centri.

Chimica. — *Trasformazione dell'acido butirrico in butirrato di propile, per azione della luce.* Nota del Socio E. Paternò.

Nella Nota V, « Sulla sintesi in chimica organica per mezzo della luce », ci siamo occupati, insieme col dott. Chieffi, del comportamento degli acidi col benzofenone [1]. Il risultato più notevole di quelle ricerche è stata la sintesi dell'acido α-trifenillattico dall'acido fenilacetico, e quella dell'acido difeniladipico (o dibenzilsuccinico) dal fenilpropionico.

In quanto agli acidi grassi abbiamo osservato che l'acido acetico non reagisce col benzofenone; con il propionico si ottiene solo una piccola quantità di resina gialla, mentre con l'acido butirrico la reazione si compie con formazione di notevole quantità di benzopinacone. Fin da principio mi proposi di studiare meglio questa reazione, ed il 28 giugno 1909 esposi alla luce un miscuglio di gr. 80 di acido butirrico normale e di gr. 50 di benzofenone; dopo circa 10 mesi, cioè al 10 aprile del 1910, ritirai il tubo, che fu lasciato per circa 5 anni alla luce diffusa; ma, occupato in altre ricerche, solo in questi giorni mi fu possibile cominciare lo studio di questo prodotto.

Non sembra che durante questo secondo periodo siano avvenute ulteriori trasformazioni, perchè la proporzione di sostanza solida depostasi non ha apparentemente mutato, nè il colore giallo arancio intenso ha subìto modificazioni.

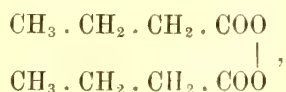
Lasciando al dott. R. de Fazi lo studio particolareggiato dei prodotti di questa reazione, le mie ricerche si limitarono soltanto all'esame di un prodotto secondario volatile di cui ho notato la presenza.

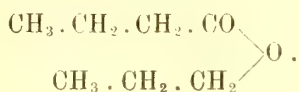
Osserverò, prima di ogni altro, che all'apertura del tubo fu osservata una non indifferente pressione, e che potè constatarsi che il gas formatosi era anidride carbonica. Separando per filtrazione alla pompa il benzopinacone dalla parte rimasta liquida, e neutralizzando questa con carbonato potassico, si constatò un caratteristico odore di frutta, prima mascherato da quello, più acuto, dell'acido butirrico. L'etere trasporta dalla soluzione alcalina il benzofenone inalterato ed il nuovo prodotto.

(1) Gazzetta chimica, 1910, parte II, pag. 431.

Il residuo etereo, sottoposto alla distillazione frazionata, si separa facilmente in benzofenone, ed in una piccola quantità di un olio più leggiero dell'acqua mobilissimo, bollente verso 135°, di odore caratteristico e che ha tutto il comportamento e le proprietà del *butirrato di propile.*

La formazione di questo composto s'interpreta facilmente, supponendo che il benzofenone, per trasformarsi in pinacone, prenda l'idrogeno del carbossile dell'acido butirrico, e che il composto

$$\begin{array}{l} CH_3 . CH_2 . CH_2 . COO \\ \qquad\qquad\qquad\quad | \\ CH_3 . CH_2 . CH_2 . COO \end{array} ,$$

che dovrebbe formarsi, perda una molecola di CO_2 per dare origine al butirrato di propile

$$\left.\begin{array}{l} CH_3 . CH_2 . CH_2 . CO \\ \quad CH_3 . CH_2 . CH_2 \end{array}\right> O .$$

Nessun esempio di simile reazione è stato finora osservato nelle reazioni fotochimiche; ma la reazione in se stessa non è nuova.

Ed invero nella elettrolisi degli acidi grassi è stata osservata la formazione, come prodotto secondario, di eteri composti dell'acido con l'alcool immediatamente inferiore. E dall'altro lato A. Simonini [1], per l'azione dello iodio sul butirrato di argento, ha ottenuto appunto butirrato di propile. Onde è provato che, ogni qual volta si tende a togliere agli acidi l'idrogeno del carbossile, non si ha solo il raddoppiamento della molecola residuale, ma insieme ha luogo eliminazione di anidride carbonica, e così dall'acido acetico si ha l'etano; ma la eliminazione dell'anidride carbonica può limitarsi ad un solo CO_2, formandosi come prodotto intermedio dall'acido acetico l'acetato di metile, e dal butirrico il butirrato di propile.

L'avere constatato questa reazione anche per l'azione della luce solare, sembra possa servire a spiegare la formazione di alcuni eteri nelle piante. Mi propongo di continuare ed estendere questo studio.

[1] Monatshefte, tom. XIII, pag. 320; e tom. XIV, pag. 81.

Fisica. — *Osservazioni a proposito della Nota del professore G. Guglielmo, dal titolo « Sull'esperienza di Clément e Desormes e sulla determinazione dell'equivalente meccanico della caloria ».* Nota del Corrisp. GUIDO GRASSI.

In una Nota pubblicata nel fasc. 3 maggio 1914 degli Atti di questa Accademia, il prof. Guglielmo solleva il dubbio che il modo ordinario di calcolare dall'esperienza di Clément e Desormes il rapporto fra il calor specifico a pressione costante e quello a volume costante nei gas, basandosi sulla legge delle trasformazioni adiabatiche dei gas come fu formulata da Laplace e Poisson, e di dedurre poi da questo rapporto il valore dell'equivalente meccanico della caloria, come fece R. Mayer, sia in sostanza una petizione di principio. La ragione di ciò sarebbe che la legge di Poisson-Laplace sulla variazione adiabatica della pressione nei gas vien dedotta dal 1° principio della termodinamica, e cesserebbe d'esser vera se questo non lo fosse.

L'autore però si propone precisamente di rimuovere quel dubbio e di mostrare che si può dedurre dall'esperienza di Clément e Desormes il suddetto rapporto senza far uso nè della legge di Poisson, nè del 1° principio di termodinamica.

Ora io vorrei mettere ben in chiaro, anzitutto, che non c'è motivo di sollevare cotesto dubbio. La formola che esprime il modo di variare della pressione e del volume specifico dei gas nelle trasformazioni adiabatiche, e che si scrive d'ordinario: $pv^k =$ cost. (dove k è il rapporto fra il calor specifico a pressione costante e quello a volume costante), non è una conseguenza del 1° principio di termodinamica e da molto tempo se ne dà la dimostrazione semplicissima, basata soltanto sulla conoscenza delle leggi di Boyle e Gay-Lussac e sui concetti generici di calor specifico a pressione costante e a volume costante. Se talvolta nei trattati si fa precedere l'esposizione del 1° principio di termodinamica e poi, nello scrivere le equazioni relative alle trasformazioni dei gas, si introducono espressioni che si riferiscono al 1° principio, ciò non infirma la sostanza della dimostrazione della formola $pv^k =$ cost., la quale, ripeto, è indipendente dal principio dell'equivalenza.

Ad abbondanza, riassumo il procedimento di cotesta dimostrazione. Basta ricordare che la variazione di calore di un corpo qualunque si può esprimere, per esempio, in funzione delle variazioni di volume e di temperatura, colla formola

$$dQ = c_1\, dt + l dv\,, \tag{1}$$

dove il coefficiente di dt necessariamente coincide con ciò che si chiama calor specifico a volume costante. Dalle leggi di Boyle e Gay-Lussac si ha l'equazione caratteristica dei gas $pv = Rt$, e, da questa,

$$pdv + vdp = Rdt. \tag{2}$$

Eliminando il dv colla (1), risulta

$$dQ = \left(c_v + l\frac{R}{p}\right) dt - \frac{lv}{p} dp$$

e qui evidentemente il coefficiente di dt deve rappresentare il calor specifico a pressione costante c_p; dunque

$$c_v + l\frac{R}{p} = c_p$$

Per vedere ciò che avviene in una trasformazione adiabatica, basta sostituire nella (1) il valore di l ricavato da quest'ultima relazione, e poi eguagliare a zero l'espressione di dQ. Se allora si sostituisce a dt il valore che si ricava dalla (2), si ottiene

$$dQ = c_v vdp + c_p pdv = 0$$

che, integrata, dà la equazione delle trasformazioni adiabatiche sotto la forma consueta $pv^k = \text{cost.}$, e ciò, come si vede, senza presupporre affatto l'esistenza della legge dell'equivalenza.

Resta adunque perfettamente rimosso il dubbio dell'A. e dimostrato che, quando si calcola il rapporto k dalla esperienza di Clément e Desormes, supponendo nota la equazione della trasformazione adiabatica, e poi dal valore trovato di k si deduce l'equivalente meccanico, non vi è in questo procedimento alcuna petizione di principio.

Il prof. Guglielmo giunge sostanzialmente alla stessa conclusione, cosicchè la mia osservazione potrebbe sembrare affatto superflua; perchè, come dissi, l'A., dopo aver accennato al suo dubbio, si propone di rimuoverlo, ed anzi bisogna dire che è questo lo scopo della sua Nota. Se non che, nel suo modo di considerare l'esperimento di Clément e Desormes per dedurne il rapporto k senza ricorrere al 1° principio di termodinamica, egli, a mio parere, ha equivocato. Ed ha equivocato precisamente perchè ha scelto una via tale, che, per giungere ad una conclusione esatta, avrebbe dovuto tener conto del 1° principio; ed avendolo invece trascurato, è giunto ad una conclusione inesatta.

L'A. suppone di fare, coll'apparecchio di Clément e Desormes, delle esperienze, nelle quali il gas viene assoggettato a trasformazioni ora a pressione costante, ora adiabatiche ed ora a volume costante, e si propone di

mostrare che si può combinarle in diversi modi e dedurne il valore di k senza far uso della legge di Poisson. Siccome però il modo di interpretare i risultati delle esperienze è basato sempre su di un medesimo criterio, basterà prendere in esame una sola combinazione, per esempio la seguente:

L'A. considera le seguenti operazioni:

1°) Si riscaldi 1 kg. d'aria di 1 grado a pressione costante, spendendo il calore c_p (calor specifico a pressione costante); il volume aumenterà.

2°) Si comprima adiabaticamente il gas fino al volume primitivo; la temperatura aumenta di δT.

3°) Ora, dice l'A., se, prendendo l'aria nelle condizioni iniziali, la si riscalda a volume costante di $1 + \delta T$, si avrà la stessa aria nelle medesime condizioni come dopo le operazioni 1ª e 2ª, e si sarà spesa la quantità di calore $c_v (1 + \delta T)$, essendo c_v il calor specifico a volume costante. E siccome le due quantità di calore ricevute dall'aria nei due casi devono essere eguali, poichè, dice l'A., non è concepibile che la stessa aria in condizioni eguali possieda diverse quantità di calore, sarà $c_p = c_v (1 + \delta T)$. Il rapporto k risulterebbe eguale semplicemente a $1 + \delta T$.

L'equivoco sta nel ritenere che debbano essere eguali le due quantità di calore spese nei due casi. È vero che nella 3ª operazione supposta si spenderebbe la quantità di calore $c_v (1 + \delta T)$; ma questa non può essere eguale a quella c_p spesa nella 1ª operazione, perchè in quella 1ª operazione si è compiuto un lavoro esterno, e il calore equivalente non è rimasto nel gas; e inoltre nella 2ª operazione, se non si è comunicato calore (essendo la compressione adiabatica), si è però speso un lavoro esterno, e il calore equivalente fu acquistato dal gas. Bisogna dunque tener conto di queste quantità di calore, positive e negative, per stabilire l'equazione finale: e cioè, come dissi, qnando si vuol considerare l'esperienza da questo punto di vista, bisogna necessariamente tener conto del 1° principio di termodinamica; ciò che invece l'A. voleva appunto evitare.

Il ragionamento dunque si dovrebbe completare così: siano p, v, t pressione, volume specifico e temperatura iniziali, p, v_1 e t_1 i valori dopo il primo riscaldamento a pressione costante; si avrà il calore speso $c_p (t_1 - t)$ e il calore equivalente al lavoro esterno $Ap (v_1 - v)$, essendo A l'inversa dell'equivalente meccanico.

Nella 2ª operazione (compressione adiabatica), la temperatura sale da t_1 a t_2; il calore equivalente al lavoro di compressione è $c_v (t_2 - t_1)$.

Nella 3ª operazione (riscaldamento a volume costante) il calore speso è $c_v(t_2 - t)$.

Eguagliando le variazioni di calore delle due prime operazioni a quella della terza, si ottiene

$$c_p(t_1 - t) - Ap(v_1 - v) + c_v(t_2 - t_1) = c_v(t_2 - t),$$

ossia

$$c_p = c_v + Ap \frac{v_1 - v}{t_1 - t}. \tag{3}$$

Invece, secondo il ragionamento dell'A., si dovrebbe avere

$$c_p(t_1 - t) = c_v(t_2 - t),$$

ossia

$$c_p = c_v \frac{t_2 - t}{t_1 - t}; \tag{4}$$

e siccome egli ha supposto $t_1 - t = 1$ e pone $t_2 - t_1 = \delta T$, si ha la formola da lui trovata $c_p = c_v(1 + \delta T)$.

La formola (3) non è altro che la nota relazione, per mezzo della quale si può calcolare l'equivalente meccanico, come fece il Mayer.

La (4), quantunque inesatta, può all'A. essere sembrata corrispondente al vero, per essersi egli limitato a considerare, nell'esperimento supposto, il riscaldamento di 1 grado; allora la piccolissima differenza tra il lavoro di espansione a pressione costante e quello di compressione adiabatica fa sì che il *risultato numerico* sia assai prossimo al vero. Ma si riconosce facilmente che la formola (4) conduce a conseguenze erronee. Infatti nella 1ª operazione (trasformazione a pressione costante) si ha

$$\frac{t_1}{t} = \frac{v_1}{v};$$

nella 2ª operazione (compressione adiabatica),

$$\frac{t_2}{t_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{k-1}.$$

Se la (4) fosse vera, si otterrebbe

$$k\left(\frac{v_1}{v} - 1\right) = \left(\frac{v_1}{v}\right)^k - 1$$

Ora, le radici positive di questa equazione sono tre: e propriamente *zero*, 1 e *infinito*. Se si pongono questi valori di k nella formola $pv^k = \text{cost.}$, vi corrispondono rispettivamente trasformazioni a pressione costante, isotermiche e a volume costante; ciò che s'accorda con quanto dissi sopra, che cioè l'equivoco è nato dall'aver trascurato la differenza tra il lavoro esterno nella trasformazione adiabatica e quello a pressione costante.

Anche nell'ultima parte della Nota, dove l'A. si propone di mostrare che dall'esperienza di Clément e Desormes si può dedurre l'equivalente meccanico della caloria direttamente e in modo semplice, il ragionamento pecca per un equivoco dello stesso genere. Volendo semplificare il calcolo del

lavoro nella compressione adiabatica, l'A. arriva a porre $pdv = - vdp$; ora questa condizione equivale a supporre che la trasformazione sia isotermica e non adiabatica. Se, ciononostante, l'A. giunge infine a scrivere esattamente l'ultima formola che dà l'equivalente meccanico, ciò dipende dall'aver egli supposto che nell'esperienza di Clément e Desormes il rapporto k sia dato esattamente dal rapporto fra le differenze di pressione osservate, mentre quella non è che una espressione approssimata; l'espressione esatta è quella in funzione dei logaritmi delle pressioni, che l'A. stesso ha ricordato in principio della sua Nota. Del resto è evidente che qualunque esperimento, atto a determinare il rapporto k, serve pure a calcolare direttamente l'equivalente meccanico, quando si conosca uno dei due calori specifici.

Cristallografia. — *Sulla sistematica dei cristalli.* Nota del Socio C. Viola.

Benchè si riconoscesse la convenienza di classificare i cristalli secondo le 32 simmetrie, ciò nondimeno l'antico aggruppamento in 6 o 7 sistemi ha sempre avuto la precedenza per ragioni didattiche, pratiche e scientifiche; io anzi ho fiducia che ciò si manterrà ancora, ciascun sistema riassumendo una serie di proprietà fisiche e una caratteristica delle figure cristalline, che lo rendono individuato completamente e distinto da altri.

Ma se l'antica sistematica si è affermata non ostante qualche moderna innovazione, non si può del pari asserire che le definizioni dei singoli sistemi siano state sempre conseguenti e uniformi.

Chr. S. Weiss (1) e la sua scuola stabilirono le basi dei sistemi nella disposizione degli assi della piramide fondamentale; R. I. Hauy (2), Broocke, A. Lévy (3) e altri nella disposizione degli spigoli del parallelepido fondamentale. Taluni, come M. Bauer (4), C. F. Naumann (5), Zirkel ecc., definirono i sistemi cristallini valendosi delle simmetrie delle forme oloedriche. Altri, come P. Groth (6), Schoenfliess (7), ecc., aggruppano le simmetrie in sistemi, quest'ultimo più conseguente, ma meno felice, creando p. es. il sistema digonale con assi 2-ri esclusivamente e il sistema monogonale senza assi; il primo uniformando il carattere di un sistema con quello della rispet-

(1) Chr. S. Weiss, *Uebersichtliche Darst. d. versch. natür. Abth. der Krystallisations systeme.* Abh. Berl. Akad., 1815, pag. 289.

(2) R. I. Hauy, *Traité de cristall.,* Paris, 1882.

(3) A. Lévy, *Descript. d'une collect. d. minéraux formé par M. Henland,* Londres 1837.

(4) M. Bauer, *Lehrbuch der Mineralogie.*

(5) C. F. Naumann, *Elem. d. Mineralogie,* I ed. 1846.

(6) P. Groth., *Physikalische Krystallographie,* 1905.

(7) A. Schoenfliess, *Kristallstructur,* 1891.

tiva forma oloedrica, aggiungendo l'equivalenza degli assi, che non è rigorosa conseguenza delle premesse. Bravais (1851), Mallard (1879), Wallerant (1909) e in generale la scuola francese fondarono la sistematica sugli edificî molecolari, introducendo così nell'insegnamento una ipotesi che dal punto di vista didattico si dovrebbe sopprimere.

Goldschmidt [1] credette di riformare e unificare la sistematica, definendo il sistema cristallino come quell'insieme di cristalli che hanno la stessa simmetria degli elementi, ovvero lo stesso numero di elementi variabili. Più conseguente, credo, procede in questa questione lo Tschermak. Per lui i cristalli monoclini hanno una zona mediana, rispetto alla quale le altre zone o sono normali o a due egualmente inclinate; i cristalli trimetrici hanno tre zone fra loro normali, e così via.

Una sistematica razionale può fondarsi sul principio delle simmetrie, e può essere rigorosamente condotta, come ha fatto vedere il prof. Panebianco [2]. Ma è anche facile che l'analogia dei numeri tragga in inganno, come è accaduto nella sistematica di Schoenfliess. Nè si può dire che Groth, nel definire il sistema esagonale, sia stato felice, giudicando dai risultati ottenuti.

Q. Sella [3] non discute nè i limiti, nè le definizioni dei sistemi cristallini; seguendo gli autori classici, stabilisce come tipo in ogni sistema la simmetria oloedrica, e come carattere gli assi di riferimento e i rispettivi parametri della faccia unitaria.

Se io qui spezzo una lancia in favore di una sistematica indipendente dalle simmetrie che possono o no verificarsi, intendo solo rilevare e ribadire il principio, forse meglio di quanto si è fatto fin'ora, pel quale le simmetrie fisiche possono non esserci, non ostante le condizioni geometriche. Alcuni esempî chiariranno il pensiero.

Dalle esperienze di Beckenkamp risulta che l'aragonite è o asimmetrica o dotata del centro di inversione: eppure essa è trimetrica, argomentando dalle sue figure. Le figure di corrosione nel gesso dimostrano che questo minerale ha le proprietà fisiche dei cristalli triclini; eppure, dato il suo sviluppo, non può figurare se non nel sistema monoclino. Anche l'ortoclasio, come il microclino, ha la simmetria del sistema triclino, eppure è monoclino. Dai quali esempî si rileva che nè le simmetrie nè l'equivalenza degli assi, come fece il Liebisch [4], dovrebbero essere guida nella definizione dei sistemi.

Mi pare, quindi, che riprendere in esame i sistemi cristallini, rilevarne i caratteri, prescindendo da qualsiasi principio di simmetria o di equivalenza, non sia un lavoro fuor di luogo, specialmente poi se le definizioni, a cui si

[1] V. Goldschmidt, *Ueber Krystallsysteme, deren Definition und Erkennung*. Zeitschr. f. Krystall. 1899, vol. 31, pag. 135.

[2] R. Panebianco, *Trattato di cristallografia morfologica*, Padova 1904.

[3] Q. Sella, *Primi elementi di cristallografia*, Torino 1877.

[4] Th. Liebisch, *Geometrische Krystallographie*. Leipzig, 1881.

arriva per questa via, non scompongono l'attuale sistematica, che si è affermata e conservata nelle opere dei più insigni cristallografi.

Il còmpito nostro è di far spiccare il carattere geometrico nella figura di un cristallo necessario perchè un elemento di simmetria, asse di simmetria, asse speculare, piano di simmetria, sia possibile. Per ragioni di chiarezza e semplicità potremo trattare questo problema dimostrando alcuni teoremi.

1° Teorema. *Un piano di simmetria è faccia ed è normale a zona.*

Questo teorema si dimostra graficamente con un tratto di penna. Sia E ed E', rispettivamente, il piano di simmetria (¹) (fig. 1); P_1 e P_1' due facce

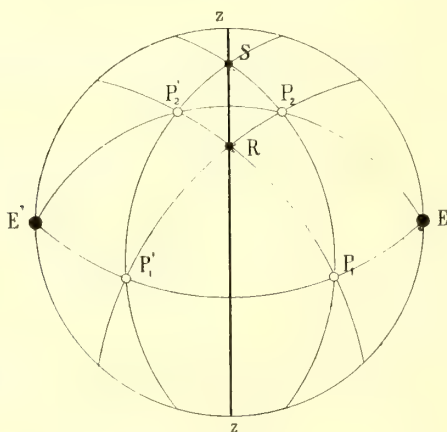



Fig. 1.

simmetriche per rispetto al detto piano, e così pure P_2 e P_2'. Le due zone $P_1\,P_1'$ e $P_2\,P_2'$ si incontrano in E ed E', epperò il piano di simmetria è faccia. Di più, le due zone $P_1\,P_2'$ e $P_1'\,P_2$ si incontrano in R, come le zone $P_1'\,P_2'$ e $P_1\,P_2$ si incontrano in S, quindi il cerchio comune ad R, ed S è zona.

2° Teorema. *Un asse di simmetria è zona ed è normale a faccia.*

Anche per questo teorema una dimostrazione grafica è da preferirsi. Sia l'asse di simmetria normale al piano del disegno e rappresentato dal cerchio fondamentale *AA* della proiezione stereografica. Se l'asse è binario, si assumono due coppie di facce simmetriche come $P_1\,P_1'$ e $P_2\,P_2'$ (fig. 2). Le due zone $P_1\,P_1'$ e $P_2\,P_2'$ si incontrano nel centro O, che quindi è faccia, normale all'asse di simmetria. D'altra parte, le due zone $P_1\,P_2'$ e $P_1\,P_2$ si incontrano nei poli R e R', come le due zone $P_2\,P_1'$ e $P_1\,P_2'$ si incontrano nei

(¹) Per ragioni di brevità, scambieremo i poli con faccie o piani, e i cerchi zonali con zone, o spigoli o assi.

poli S e S′: onde il cerchio *AA*, comune ad R ed S, è cerchio zonale, e l'asse di simmetria è zona.

Nella stessa guisa si procede se l'asse di simmetria è 4-rio o 6-rio.

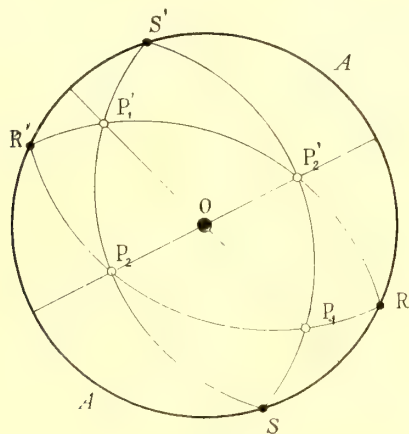



Fig. 2.

Sia l'asse di simmetria di nuovo rappresentato dal cerchio fondamentale *AA*, e siano $P_1\,P_2\,P_3 \ldots\ldots$ (fig. 3), le facce simmetriche per rispetto al detto asse.

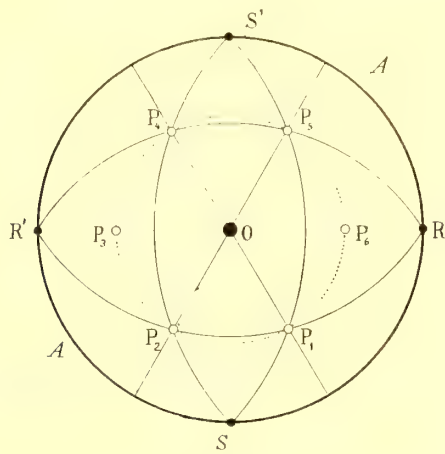



Fig. 3.

Le zone $P_1\,P_4$ e $P_2\,P_5$ si incontrano in O, che è perciò polo di faccia normale all'asse. Le due zone $P_1\,P_2$ e $P_4\,P_5$ si incontrano nei poli R ed R′ come le due zone $P_1\,P_5$ e $P_2\,P_4$ si incontrano in S ed S′. Onde il cerchio *AA*, comune ad S e R, è zona.

Se l'asse è 3-rio la dimostrazione geometrica non è possibile; conviene in tal caso richiamare in aiuto la omogeneità fisica [1]. Se la materia è omogenea in tutta la sua estensione, vi esisteranno non uno, ma innumeri assi di simmetria 3-ri paralleli ed uniformemente distribuiti nello spazio; ed un piano che contenga due di essi è luogo di facce, onde l'asse 3-rio è asse di zona, e, come conseguenza, il piano ad esso normale è faccia.

Corollario. *Un asse speculare è asse di zona e normale a faccia.*

Infatti un asse speculare 4-rio e 6-rio è insieme asse di simmetria 2-rio e 3-rio.

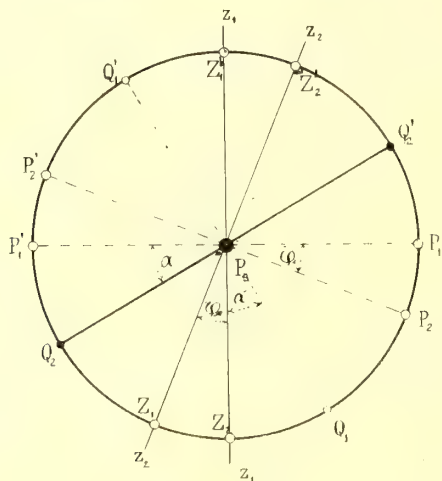



Fig. 4.

3° Teorema. *Una zona normale a faccia è necessaria per l'esistenza di un piano di simmetria, o di un asse di simmetria o speculare.*

Benchè questo teorema sia dimostrabile direttamente, è anche l'immediata conseguenza del 1° teorema, del 2° teorema e del suo corollario, poichè, se l'asse di simmetria o speculare è sempre zona e normale a faccia, ne deriva che per l'esistenza di essi questa condizione è necessaria; altrettanto dicasi del piano di simmetria.

Corollario. *I cristalli del sistema triclino sono privi di zone normali a facce*; epperò essi sono o asimmetrici o dotati del centro di inversione.

4° Teorema. *Due zone normali a facce, e inclinate fra loro, traggono con sè la presenza di una zona ortogonale ad esse, e tante zone normali a facce, quante possono esserci nel loro piano comune.*

Le due zone z_1 e z_2 normali a facce P_1 e P_2 (fig. 4), facciano fra loro l'angolo φ diverso da 90°.

[1] C. Viola, *Beweis der Rationalität einer Symmetrieaxe.* Zeitschr. f. Krystall. *27*, pag. 399.

Il cerchio $P_2 P_1 P_1' P_2'$ è cerchio zonale; e il polo P_3, incontro delle zone $z_1 z_2$, è polo di faccia. Con ciò si vede che la zona $P_1 P_2' \ldots$, normale a faccia è ortogonale alle zone date.

Si possono assumere come assi di riferimento le due zone z_1 e $P_1 P_3$, e come faccia unitaria P_2 nella comune zona di Z_2 e P_1. Se Q_1 e Q_1' sono i poli di qualsiasi faccia nella stessa zona facente con Z_1 l'angolo α, saranno anche Q_2 e Q_2' i poli di una faccia nella stessa zona facente con P_1' l'angolo α, poichè nel quadrante $P_1' P_3 Z_2$ le relazioni fra i parametri della faccia unitaria Z_1 e quelli della faccia Q_2 saranno le stesse come nel quadrante $Z_2 P_1 P_3$, fra i parametri della faccia P_2 e quelli della faccia Q_1; e poichè l'angolo fra Q_1 e Q_2 è 90°, si conclude che la qualsivoglia faccia Q_1 ha per zona normale la $P_3 Q_2$, come a sua volta la faccia Q_2 ha per zona normale la $P_3 Q_1$; e così tutte le zone contenute nella faccia P_3 sono zone normali a facce, ed esse sole sono tali.

Due zone normali a facce inclinate fra loro, possono dar luogo a tre casi distinti ed importanti, secondo che, fra le innumeri zone contenute nel loro piano comune, ci siano gli angoli di 45°, di 60° ovvero nessuno dei due.

Infatti indichiamo con a, b i parametri fondamentali determinati dalla faccia unitaria P_2 sugli assi di riferimento $\overline{P_1 P_3}$ e z_1. Il loro rapporto è

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tag} \varphi$$

essendo φ l angolo che P_2 fa con P_1.

La faccia Z_1 normale a P_2 nella zona principule deve avere per rapporto dei suoi parametri

$$\frac{a_1}{b_1} \operatorname{cotag} \varphi$$

salvo il segno; i due primi indici di Z_1 sono allora nel rapporto

$$\frac{h}{k} = \frac{a}{b} : \frac{a_1}{b_1} = \operatorname{tag}^2 \varphi\,,$$

il quale, dovendo essere razionale, conduce a

$$\operatorname{tag} \varphi = \sqrt{N}, \text{ o multiplo,}$$

essendo N razionale.

Ed ecco ora i casi possibili e distinti:

Per $N = 1$, sarà $\varphi = 45°$
» $N = 3$ » $\varphi = 60°$ e
» $N = 2, 5, 6,$ ecc. sarà φ diverso di 45° e 60°, ma prossimamente a questi.

I due primi casi possono essere trattati a parte; il terzo è oggetto di un problema speciale, che può entrare nel 5° teorema e nel 6°.

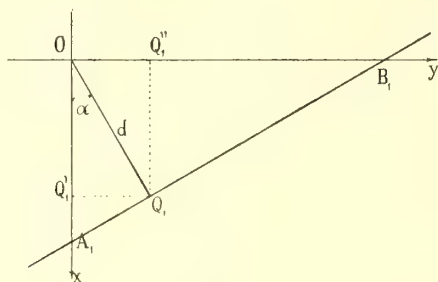



Fig. 5.

Nel caso in cui si tratti di angoli di 45°, possiamo assumere quali assi di riferimento due zone normali, x, y (fig. 5), e come faccia unitaria quella che con x ed y fa 45°, i cui parametri stanno come $1:1$.

Sia A_1B_1, con la polare OQ_1, fig. 5, una qualsivoglia faccia i cui parametri sono $a_1 = OA_1$, $b_1 = OB_1$ e ∞. I suoi due primi indici sono nel rapporto

$$h:k = \frac{a}{a_1} : \frac{a}{b_1} = \cos\alpha : \mathrm{sen}\,\alpha\,.$$

D'altra parte, essendo $a_1' = OQ_1' = d\cos\alpha$, e $b_1' = OQ_1'' = d\,\mathrm{sen}\,\alpha$, gli indici m ed n della zona OQ_1 normale alla faccia data, saranno nel rapporto

$$m:n = \frac{a_1'}{a} : \frac{b_1'}{a} = \cos\alpha : \mathrm{sen}\,\alpha\,.$$

Vale a dire, essendo $(h\,k\,o)$ il simbolo di una faccia contenuta nella zona principale, sarà $[h\,k\,o]$ il simbolo della zona ad essa normale.

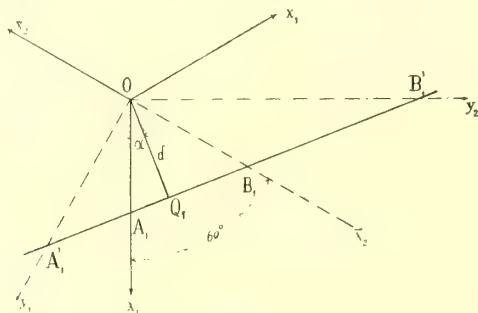



Fig. 6.

Nel secondo caso, in cui si tratta di angoli di 60°, si assumono quali assi di riferimento tre spigoli (zone) x_1, x_2, x_3 facenti fra loro 120° (180-60) (fig. 6).

Una qualsiasi faccia $A_1 B_1$ dal simbolo $(hkio)$ contenuta nella zona principale, la cui normale OQ_1 fa con x_1 l'angolo α, determina su x_1 e x_2 i parametri

$$a_1 = OA_1 = \frac{d}{\cos\alpha} \quad , \quad b_1 = OB_1 = \frac{-d}{\cos(60-\alpha)} .$$

Ci sarà il rapporto fra i due primi indici

$$h:k = \cos\alpha : -\cos(60-\alpha) .$$

Gli indici della zona OQ_1, normale alla faccia data, si calcolano [1] col sussidio del piano normale alla zona e degli assi polari y_1 ed y_2 normali rispettivamente a x_2 e x_1. Essendo i rispettivi parametri

$$OA_1' = a_1' = \frac{d}{\operatorname{sen}(60-\alpha)} \quad \text{e} \quad OB_1' = b_1' = \frac{d}{\operatorname{sen}\alpha} ,$$

si avrà il rapporto

$$m:n = \frac{a}{a_1'} : \frac{a}{b_1'} = \operatorname{sen}(60-\alpha) : \operatorname{sen}\alpha .$$

Questi due rapporti si riducono alle espressioni seguenti:

$$\frac{2k+h}{h} = -\sqrt{3}\operatorname{tag}\alpha \quad , \quad \frac{2m+n}{n} = \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tag}\alpha} ,$$

le quali, moltiplicate fra loro, dànno, dopo riduzioni, la equazione

$$2mk + nk + mh + 2nh = 0 ,$$

e quindi

$$\frac{m}{n} = -\frac{2h+k}{2k+h} \quad ; \quad \frac{h}{k} = -\frac{2m+n}{2n+m} .$$

Dunque una qualsiasi faccia della zona principale data dal simbolo $(hkio)$, ha per zona normale, il cui simbolo è $[mnqo]$, essendo naturalmente $h+k+i=o$ e

$$m+n+q=0 \quad ; \quad \frac{n}{q} = -\frac{2k+h}{k-h} \quad ; \quad \frac{q}{m} = \frac{k-h}{2h+k} .$$

[1] C. Viola, *Relazione fra gli indici di facce e zone nel simboleggiamento a tre o quattro indici*. Rivista di miner. e cristall. del prof. Panebianco, 1909, *36*, 70; Id. *Ueber das in den Symbolen mit vier Indices enthaltene Zonengesetz*, Zeitschr. f. Krystall., 1909, *46*, 345.

Si comprende che le condizioni date dal 4° teorema soddisfano ai sistemi dimetrico ed esagonale: al primo, se fra gli angoli di due facce nella zona principale ci siano 45°; al secondo, se ci siano 60°.

Il terzo caso, quando cioè φ è diverso di 45° e 60°, entra nel 5° teorema per casi speciali come è facile rendersi conto.

5° Teorema. *Due zone normali a facce fra loro ortogonali traggono con sè l'esistenza di una terza zona normale a faccia, ed una sola.*

Questo teorema non è che la conseguenza immediata del 4° teorema, poichè, se ivi l'angolo φ fra le due zone normali a facce è di 90°, per ogni e qualsiasi faccia contenuta nella zona principale non si ottiene la zona normale. Le tre zone z_1 z_2 e z_3 sono ortogonali, e si assumono quali assi di riferimento. Tuttavia vi possono essere dei casi speciali, come è apparso nel 4° teorema, nei quali tutte le zone di una zona principale possono avere faccie normali, ma in tali casi sono esclusi gli angoli di 45° o 60°.

1° Corollario. *Data l'esistenza di una sola zona normale a faccia, la zona non può essere che asse di simmetria* 2-*ri*, *nè mai asse speculare.*

Se infatti quest'asse fosse 3-*rio*, 4-*rio*, 6-*rio*, ogni faccia in esso contenuta sarebbe normale a zona, contrariamente alla premessa. Altrettanto dicasi di un asse speculare 4-*rio* o 6-*rio*.

I cristalli aventi una sola zona normale a faccia sono monoclini.

2° Corollario. *Data l'esistenza di tre sole zone normali a facce, esse non possono essere che assi di simmetria* 2-*ri*, *nè mai assi speculari.*

Le tre zone devono essere ortogonali, come risulta dal 5° teorema. Se esse fossero assi di simmetria 3-*ri*, 4-*ri* o 6-*ri*, o assi speculari 4-*rio* o 6-*rio*, ciascuna faccia contenuta in una di esse, ove ciò ha luogo, sarebbe normale a faccia, contrariamente alla premessa.

I cristalli dotati di tre sole zone normali a facce, appartengono al trimetrico.

6° Teorema. *Tre zone normali a facce inclinate fra loro sono condizione necessaria e sufficiente perchè ogni faccia sia normale a zona.*

Siano z_1, z_2, z_3, le tre zone, fig. 7, non giacenti in un piano, con le facce rispettivamente normali P_1, P_2, P_3. Per semplicità si sono assunte due di esse zone, z_1 e z_2, perpendicolari fra loro, senza che perciò scemi la generalità del problema, purchè la zona z_3 non giaccia nè nel piano z_1 z_2 nè nelle facce P_1 o P_2.

Si osservi che la zona $P_3 O$ determina con la zona $P_1 P_2$ la faccia N, N', ed essendo P_3 ed O facce normali a zone ed inclinate fra loro, ne segue che N è faccia normale a zona in virtù del 4° teorema.

Sia ora Q_1 una qualsivoglia faccia, di cui si vuol dimostrare che è normale a zona. Si conducono le due zone $Q_1 P_3$ e $Q_1 P_3'$, le quali determinano

sulla zona $P_1 P_2$ le due facce $S_1 S_1'$ e $S_2 S_2'$, che sono normali a zone; onde anche le zone $Q_1 P_3$ e $Q_1 P_3'$ sono normali a facce, e precisamente alle facce R_1 e, rispettivamente, R_2; epperò si conclude che la zona q_1, ad esse comune, è normale a Q_1.

Se con a_1, b_1, c_1 si chiamino i parametri di una faccia sopra tre spigoli di riferimento ortogonali, si sa che gli indici di essa faccia, h, k, l, sono inversamente proporzionali ai detti parametri; altrettanto gli indici della zona normale a detta faccia sono inversamente proporzionali agli stessi parametri; d'onde segue che, se $(h\,k\,l)$ è il simbolo di una faccia nel monometrico, dovrà essere $[h\,k\,l]$ il simbolo della zona ad essa normale, qualunque sia d'altronde la faccia unitaria.

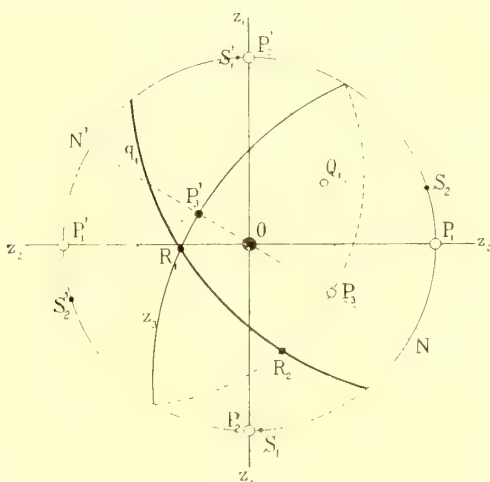



Fig. 7.

Se si considerano tutte le zone normali a facce determinate in questo teorema e che rispecchiano il carattere del sistema monometrico, tre specie di zone si mettono in evidenza come è rilevato nella dimostrazione del 4° teorema, vale a dire zone nelle quali vi sono angoli di 45°, zone nelle quali vi sono angoli di 60° e zone nelle quali non vi sono angoli nè di 45° nè di 60°. Le prime sono in numero di tre, le seconde in numero di quattro, le terze sono le rimanenti. Ed è facile distinguere queste tre specie di zone e di determinarle da un qualsiasi complesso di quattro facce date.

Mi pare che nei sei teoremi qui esposti siano risultate le relazioni che possono esserci fra le simmetrie e i sistemi cristallini; mi pare, anzi, che spicchi chiaramente la condizione geometrica necessaria perchè in un cristallo possa verificarsi un qualsiasi grado di simmetria. Solamente la asimmetria e il centro di simmetria non sono subordinate a veruna condizione. La condizione geometrica necessaria perchè assi di simmetria o speculari, o piani di simmetria, dal punto di vista delle proprietà fisiche, siano possibili, è

dunque l'esistenza di zone normali a facce, ed è quindi naturale che i sistemi cristallini debbano essere fondati sulla presenza di zone normali a facce, dalla quale condizione si deducono le altre condizioni geometriche che usualmente hanno servito per la definizione dei sistemi.

Possiamo ora riassumere i caratteri dei sei sistemi cristallini nel modo seguente:

1°) *sistema triclino.* Mancanza di zone normali a facce;

2°) " *monoclino.* Presenza di una sola zona normale a faccia;

3°) " *trimetrico.* Presenza di tre zone normali a facce;

4°) " *dimetrico.* Presenza di una zona normale a faccia, che è la principale; e tutte le facce in essa contenute sono normali a zone, fra le quali vi sono angoli di 45°;

5°) " *esagonale.* Presenza di una zona normale a facce, che è la principale; e tutte le facce in essa contenute sono normali a zone, fra le quali vi sono angoli di 60°;

6°) " *monometrico.* Ogni zona è normale a faccia. Gli angoli di 45° sono in tre zone ortogonali e gli angoli di 60° in quattro.

Il sistema trimetrico è assimilabile al dimetrico, all'esagonale e al monometrico per casi speciali degli angoli, quando cioè nelle tre zone o in una sola di esse tutte le facce sono normali a zone senza la presenza di angoli di 45° o 60°, ossia quando i rapporti dei parametri fondamentali siano espressi da $\frac{a}{b} = \sqrt{N_1}$ e $\frac{b}{c} = \sqrt{N_2}$ essendo N_1 e N_2 numeri razionali diversi da quadrati e da 3. Anche il dimetrico e l'esagonale sono assimilabili al monometrico per le stesse ragioni. Ma queste speciali condizioni che forniscono i caratteri per i pseudodimetrici, pseudoesagonali, e pseudomonometrici non turbano i caratteri fondamentali dei sei sistemi.

Sostituendo le zone normali a facce al criterio degli angoli fra gli assi con il rapporto dei parametri fondamentali, non si è alterato il primitivo concetto dei sistemi cristallini, ma all'opposto lo si è rinforzato togliendo nello stesso tempo la subordinazione dell'equivalenza degli assi e della simmetria.

Non sarà difficile di suddividere il sistema esagonale nel sistema esagonale propriamente detto e nel sistema trigonale con le limitazioni usualmente accettate; basterà p. es. aggiungere, al carattere suesposto, che nel sistema esagonale non vi sono mai meno di 6 zone egualmente inclinate verso la zona principale, e nel sistema trigonale ve ne sono tre.

Il criterio della zona normale a faccia come condizione geometrica necessaria per il verificarsi di una data simmetria, può essere punto di origine per dimostrare elementarmente le 32 simmetrie possibili nei cristalli, e in ogni sistema. Ma io mi sono limitato qui esclusivamente ai sistemi cristallini; ed uscirei dallo scopo, che mi sono prefisso nel pubblicare questa Nota, se volessi divagare in altri problemi, per quanto fra loro connessi. Essi potrebbero, al più, formare oggetto di un'altra Nota.

Matematica. — *Il teorema del valor medio.* Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Socio C. SEGRE.

Nella teoria degli integrali multipli manca, a quanto io so, una generalizzazione del teorema del valor medio, che pure ha tanta importanza per la ricerca delle funzioni primitive di una funzione di una sola variabile. Cosicchè non è ancora dimostrato che una funzione additiva di insieme sia determinata dalla sua derivata. Queste domande mi sono state suggerite dalle esigenze dell'insegnamento per una esposizione elementare della teoria degli integrali multipli. Questi problemi diventano banali, nei casi che l'integrale (inteso anche al modo del Lebesgue) della derivata *esista, e sia uguale alla funzione primitiva.* In una precedente Nota [1] ho già trattato di tali questioni; nella presente ricerca do alcuni teoremi che, sotto certi riguardi, esauriscono la questione proposta. Per chiarezza ripeterò alcune definizioni.

Sia J un dominio misurabile ad una, due o tre dimensioni. Con la lettera T indicherò sia un qualsiasi dominio parziale di J, sia la sua misura (per es., lunghezza, area, volume, ecc.). Diremo che f è funzione di T, se per ogni tale dominio T è determinato uno e un solo valore $f(\mathrm{T})$ della f [2]. Se per ogni terna di dominii parziali $\mathrm{T}, \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2$ tali che $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2$ è $f(\mathrm{T}) = f(\mathrm{T}_1) + f(\mathrm{T}_2)$, la f si dirà funzione *additiva.* Se T è un campo parziale, e se esiste ed è finito il limite [3] di $\frac{f(\mathrm{T})}{\mathrm{T}}$, quando la massima distanza tra un punto variabile in T, e un punto fisso A di J tende a zero, tale limite si indicherà con $f'(\mathrm{A})$ e si chiamerà la derivata di $f(\mathrm{T})$ nel punto A [4].

[1] *Esiste un corpo pesante a densità nulla?.* Rendic. della R. Accad. delle Scienze di Torino, 1915. Il risultato di questa nota è ricordato più avanti; il suo titolo invece non è stato scelto bene, perchè se la derivata (densità) è nulla, ad essa si possono applicare i teoremi del Lebesgue.

[2] Definizione e notazione affatto simili a quelle usuali per le funzioni di una sola variabile. Valgono osservazioni critiche affatto analoghe a quelle che si possono svolgere in questo caso elementare.

[3] Sul significato della parola *limite* in questo caso non possono sorgere ambiguità.

[4] Se J è un intervallo $a \leqq x \leqq b$, T un intervallo $x_1 \leqq x \leqq x_2$ con $a \leqq x_1 \leqq \leqq x_2 \leqq b$, se $\varphi(x)$ è una funzione della x definita in J, ed $f(\mathrm{T}) = \varphi(x_2) - \varphi(x_1)$, allora la definizione qui data per $f'(\mathrm{A})$ coincide con l'ordinaria per la derivata di φ nel punto A con questa sola differenza. Per calcolare la derivata di φ nel punto A si suppone di solito che T *sia un intervallo avente un estremo in* A, mentre per calcolare la derivata di f secondo l'attuale definizione si suppone soltanto che *i due estremi di* T *tendano al punto* A.

Così, se J è una lamina, o un corpo pesante, ed $f(T)$ è il peso del suo pezzo T, allora $f'(A)$ vale la densità in A. Così, se $f(T)$ è l'integrale esteso a T di una funzione continua φ delle coordinate di A, allora $f'(A)$ vale $\varphi(A)$, cioè il valore dell'integrando nel punto A.

Le domande più importanti sono le seguenti: *Supposto* $f(T)$ *derivabile in ogni punto*

1°) *è possibile estendere i teoremi di Rolle e del valore medio?*

2°) *la funzione* $f(T)$ *è completamente determinata dalla conoscenza di* $f'(A)$?

A queste domande nella mia Nota citata ho dato risposta affermativa con questa ulteriore ipotesi. Se per es. J è un dominio del solito spazio (x, y, z) si suppone che il valore di $f(T)$ corrispondente a un dominio parziale compreso tra due piani π', π'' paralleli a un piano coordinato tenda a zero, quando tende a zero la distanza dei due piani π', π''. Ma, anche per capire le ragioni intime del solito teorema del valor medio, è assai importante rispondere alle domande 1ª) e 2ª) *senza imporre alcuna ipotesi* (oltre a quella che $f(T)$ sia additiva e derivabile). Per giungere a tale risultato si osservi che l'ordinario teorema del valor medio si può enunciare nel modo seguente:

A) *Se* $\varphi(x)$ *è una funzione derivabile nell'intervallo* $a \leq x \leq b$, *allora il numero* $\Phi = \dfrac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a}$ *è un numero compreso tra i limiti superiore* L *ed inferiore* l *della* $\varphi'(x)$ *nell'intervallo* (a, b). *Ed anzi, se* $L > l$, *allora proprio* $L > \Phi > l$, *cioè* Φ *non coincide nè con* L, *nè con* l.

B) (Teorema di Darboux). *Se* Φ *è un tale numero compreso tra* L *ed* l, *esiste almeno un punto* c *dell'inervallo* (a, b) *tale che* $\varphi'(c) = \Phi$.

Dai due teoremi (A) e (B) segue l'ordinario teorema della media.

Qui dimostreremo che il teorema della media enunciato nella forma A) vale proprio per le funzioni additive più generali (mentre *il teorema della media, enunciato nella forma usuale, è stato dimostrato soltanto con l'ipotesi restrittiva su ricordata*); e ne dedurremo la risposta alla domanda 2ª).

Se $f(T)$ *è funzione additiva e derivabile dei dominii* T *parziali di un dominio finito e misurabile* J, *e se* L, l *sono i limiti superiore ed inferiore dei valori* $f'(A)$ *della derivata* f' *nei punti* A *di* J, *allora* $L \geq \dfrac{f(J)}{J} \geq l$. *Ed anzi, se* $L > l$, *è proprio* $L > \dfrac{f(J)}{J} > l$ [1].

Supponiamo positiva la misura dei campi T. Indichiamo con ε un numero positivo arbitrario. La derivata di $g(T) = f(T) - (L + \varepsilon) T$ vale

[1] Si suppone f derivabile anche sul contorno di J (ipotesi inutile se J è un segmento ad una dimensione).

$f' - L - \varepsilon$ ed è sempre negativa (¹). Io dico che anche $g(T)$ può assumere soltanto valori negativi. Sia infatti T_1 un dominio parziale tale che $g(T_1) \geq 0$. Scomponendo T_1 in due dominii parziali T_2, T'_2 tali che $T_1 = T_2 + T'_2$ sarà $g(T_1) = g(T_2) + g(T'_2) \geq 0$. Quindi almeno uno dei due addendi $g(T_2)$, $g(T'_2)$, non è negativo. Sia p. es. $g(T_2) \geq 0$. Scomposto T_2 in due campi parziali T_3, T'_3, almeno uno degli addendi $g(T_3)$, $g(T'_3)$ non è negativo. Sia p. es. $g(T_3) \geq 0$. E così via.

Possiamo facilmente determinare una legge di divisione in campi parziali, in guisa che i campi T_1, T_2, T_3, ecc., abbiano a comune un solo punto A, in altre parole in guisa che esista un punto A tale che la massima distanza da A ad un punto di T_n tenda a zero per $n = \infty$.

Allora $g'(A)$ è anche il $\lim_{n=\infty} \frac{g(T_n)}{T_n}$, cioè è il limite di una frazione positiva o nulla. Sarebbe quindi $g'(A) \geq 0$ contro quanto abbiamo osservato. È dunque $g(T) < 0$, cioè $f(T) - (L + \varepsilon) T < 0$, cioè $\frac{f(T)}{T} < L + \varepsilon$. Facendo tendere ε a zero, si trova $\frac{f(T)}{T} \leq L$. In modo analogo si trova $\frac{f(T)}{T} \geq l$.

Supponiamo ora $L > l$. Sostituendo, caso mai, lo studio della $f(T) - LT$ a quello della $f(T)$, possiamo supporre $L = 0$, e quindi l negativo. Da quanto abbiamo già provato segue che per ogni campo parziale T è $\frac{f(T)}{T} \leq 0$, e quindi $f(T) \leq 0$. Sia, se possibile, $\frac{f(J)}{J} = L$, cioè $f(J) = 0$. Sia T_1 un qualsiasi campo parziale, e T_2 il campo complementare $J - T_1$.

Sarà $f(T_1) \leq 0$, $f(T_2) \leq 0$. Poichè $0 = f(J) = f(T_1) + f(T_2)$, sarà proprio $f(T_1) = 0$. Cioè la f sarà identicamente nulla. Altrettanto avverrà quindi di f' e di l. Sarebbe dunque, contro l'ipotesi, $L = l$.

Se ne deduce tosto la risposta alla seconda domanda col seguente teorema:

Se due funzioni additive e derivabili $f(T)$, $g(T)$ *hanno derivate* (finite) *uguali, esse sono uguali.*

Infatti, dalla $f' = g'$ si deduce che $f(T) - g(T)$ ha derivata nulla. I limiti superiore ed inferiore di tale derivata sono dunque nulli. Per il teorema precedente è dunque $f(T) - g(T) = 0$, cioè $f(T) = g(T)$.

Questo risultato si può riguardare come punto di partenza per la ricerca delle funzioni primitive di una funzione data: ricerca che ha così intimi contatti con la teoria degli integrali multipli. E resta in modo affatto elementare reso evidente il legame fra tale teoria, e quella degli ordinarii integrali definiti.

(¹) Qui si suppone L finito. Se fosse $L = +\infty$, ogni dimostrazione sarebbe evidentemente superflua.

Fisica matematica. — *Sulla propagazione di onde elettromagnetiche in un conduttore toroidale.* Nota di A. Signorini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

§ 1. In questa Nota, e in un'altra che le farà immediatamente seguito, mi occupo della propagazione di onde elettromagnetiche in un conduttore metallico toroidale, assumendo a caratterizzare la dipendenza dal tempo un fattore complesso del tipo $e^{i\nu t}$ (ν cost. reale) e supponendo il campo elettromagnetico identico in tutti i piani meridiani del toro [1]. Subordinatamente a tali ipotesi, riferisco la mia ricerca alla propagazione d'onde che in corrispondenza ad un valore prefissato dell'intensità efficace della corrente, minimizza il valor medio (rispetto al tempo) del calore di Joule (relativo a un tratto qualunque del conduttore): cioè alla propagazione d'onde che al crescere indefinito del raggio della circonferenza direttrice del toro [2], si riduce alla propagazione che viene ordinariamente assunta come tipica nel caso di un conduttore cilindrico (a sezione circolare).

Di una tale propagazione è facile provare l'unicità: della sua effettiva esistenza non do in questo lavoro una dimostrazione rigorosa altro che nel caso particolare dei campi stazionari, e ammettendola senz'altro pel caso generale, determino un'espressione del campo elettromagnetico che ha valore tutte le volte che il toro sia sottile, cioè sia piccolo il rapporto φ tra il raggio della sua sezione meridiana e il raggio della sua circonferenza direttrice. Per brevità non sto qui a riassumere i risultati cui così pervengo, e mi limito a rilevare che per la propagazione d'onde in questione il distacco dalle formole relative al caso cilindrico si manifesta per quel che riguarda gli elementi locali del campo elettromagnetico (forza elettrica, magnetica, ecc.), appena si tenga conto di quantità dell'ordine di grandezza di φ: per quel che riguarda gli elementi globali (calore di Joule, resistenza efficace, autoinduzione ecc.), solo quando si tenga conto anche di quantità dell'ordine di grandezza di φ^2.

Aggiungerò infine, rimandando di questo la dimostrazione a un prossimo lavoro, che la teoria delle funzioni di linea dà modo di trasportare inalterate tutte le formole stabilite al caso generale di un tubo conduttore sottile (a sezione circolare, ma) a direttrice qualunque: colla sola avvertenza

[1] Ciò che dal lato matematico è perfettamente compatibile colla forma delle equazioni del campo, e fisicamente è giustificato tutte le volte che la lunghezza d'onda relativa alla propagazione considerata sia grandissima rispetto alle dimensioni del conduttore.

[2] V. A. Signorini, *Sulla propagazione di onde elettromagnetiche in un conduttore cilindrico.* Questi Rend., vol. XXIII, serie 5ª, 1° sem.

di sostituire in esse al raggio della circonferenza direttrice del toro, il raggio di curvatura della direttrice del conduttore, relativo alla sezione cui le formole stesse hanno da essere riferite.

§ 2. Siano: C la circonferenza direttrice del toro; a il suo raggio; z l'arco di C contato da un'origine arbitraria; P un punto qualunque del toro; C la sua proiezione su C; S la sezione normale del toro condotta per C; b il raggio di S; n la normale ad S orientata concordemente al verso positivo di C. Riferito il piano di S ad un sistema di coordinate polari di origine C, assumendo il raggio di C (orientato verso il centro) come raggio polare, e contando le anomalie in verso destrorso rispetto al verso positivo di C, siano infine r, ϑ i valori di tali coordinate in P. Posto:

$$\varphi = \frac{b}{a} \qquad \varrho = \frac{r}{b}$$

riferiamo le equazioni dell'elettrodinamica al sistema di coordinate curvilinee (z, ϱ, ϑ). Dentro il toro, supposto il campo elettromagnetico indipendente da z e trascurando le correnti di spostamento, le equazioni di Heaviside-Hertz

$$\frac{4\pi\sigma}{c}\mathbf{E} = \text{rot}\,\mathbf{H} \qquad -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot}\,\mathbf{E}$$

assumono allora, con ovvio significato dei simboli, la forma seguente (¹):

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{4\pi\sigma b}{c}\mathrm{E}_n = \dfrac{1}{\varrho}\left\{\dfrac{\partial(\varrho \mathrm{H}_z)}{\partial\varrho} - \dfrac{\partial \mathrm{H}_\varrho}{\partial\vartheta}\right\} \\[2ex] \dfrac{4\pi\sigma b}{c}\mathrm{E}_\varrho = \dfrac{1}{\varrho(1-\varrho\varphi\cos\vartheta)}\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{\mathrm{H}_n(1-\varrho\varphi\cos\vartheta)\right\} \\[2ex] \dfrac{4\pi\sigma b}{c}\mathrm{E}_z = \dfrac{-1}{1-\varrho\varphi\cos\vartheta}\dfrac{\partial}{\partial\varrho}\left\{\mathrm{H}_n(1-\varrho\varphi\cos\vartheta)\right\}, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} -\dfrac{\mu b}{c}\dfrac{\partial \mathrm{H}_n}{\partial t} = \dfrac{1}{\varrho}\left\{\dfrac{\partial(\varrho \mathrm{E}_z)}{\partial\varrho} - \dfrac{\partial \mathrm{E}_\varrho}{\partial\vartheta}\right\} \\[2ex] -\dfrac{\mu b}{c}\dfrac{\partial \mathrm{H}_\varrho}{\partial t} = \dfrac{1}{\varrho(1-\varrho\varphi\cos\vartheta)}\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{\mathrm{E}_n(1-\varrho\varphi\cos\vartheta)\right\} \\[2ex] -\dfrac{\mu b}{c}\dfrac{\partial \mathrm{H}_z}{\partial t} = \dfrac{-1}{1-\varrho\varphi\cos\vartheta}\dfrac{\partial}{\partial\varrho}\left\{\mathrm{E}_n(1-\varrho\varphi\cos\vartheta)\right\}. \end{cases}$$

(¹) V. A. Signorini, *Resistenza effettiva e resistenza ohmica*. Questi Rend., vol. XXV, ser. 5ª, 1° sem.

Evidentemente si può sempre soddisfare a queste equazioni ponendo, qualunque siano P e t:

$$(3) \qquad E_\rho = E_z = H_n = 0 .$$

§ 3. Supposto il campo elettromagnetico non stazionario, assumiamo a caratterizzare la dipendenza dal tempo un fattore complesso del tipo $e^{i\nu t}$ (ν cost. reale $\neq o$) e poniamo

$$k = \sqrt{\frac{-4\pi i \mu \nu \sigma}{c^2}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} |k| .$$

Nel toro si avrà così una propagazione di onde elettromagnetiche P, il cui studio quando valgono le (3) si ridurrà essenzialmente a quello dell'unica equazione

$$(4) \qquad \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 E_n}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 E_n}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial E_n}{\partial \varrho} -$$

$$- \varphi \frac{\cos\vartheta \dfrac{\partial E_n}{\partial \varrho} - \dfrac{1}{\varrho}\operatorname{sen}\vartheta \dfrac{\partial E_n}{\partial \vartheta}}{1 - \varrho\varphi\cos\vartheta} - \frac{\varphi^2 E_n}{(1-\varrho\varphi\cos\vartheta)^2} + b^2 k^2 E_n = 0 ,$$

ottenuta eliminando (per derivazione rispetto a t) H_ρ ed H_z tra la $(1)_1$ e le $(2)_2$, $(2)_3$.

§ 4. Siano $\mathbf{E}^{(m)}$, $\mathbf{H}^{(m)}$ i valori di $\mathbf{E}$ e di $\mathbf{H}$ relativi ad una propagazione d'onde P_m (supposta esistente) che in corrispondenza ad un determinato valore J dell'intensità efficace della corrente [1]:

$$J_{eff} = \sigma \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} dt \left[R_e \int_S E_n \, dS \right]^2} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \left| \int_S E_n \, dS \right|$$

minimizzi il valore medio rispetto a t del calore di Joule relativo a una qualunque sezione normale del conduttore. Siccome nel sistema di coordinate curvilinee (z, ϱ, ϑ) l'elemento del volume è espresso da $dz\, d\varrho\, d\vartheta\, \varrho(1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)$, avremo, come espressione di tale valore medio:

$$Q = \frac{\sigma\nu}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} dt \int_S \{ R_e^2(E_n) + R_e^2(E_z) + R_e^2(E_\rho) \} (1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)\, dS =$$

$$= \frac{\sigma}{2}\int_S \{ |E_n|^2 + |E_z|^2 + |E_\rho|^2 \} (1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)\, dS$$

[1] Adottiamo fin da ora i simboli consueti $R_e(a)$, $I_m(a)$ per rappresentare rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di una quantità complessa a: talvolta però ci sarà più comodo scrivere a', a'' al posto di $R_e(a)$, $I_m(a)$.

Evidentemente dovrà essere: $E_\rho^{(m)} = E_\vartheta^{(m)} = (H_n^{(m)} =) 0$. È poi facile convincersi che non può esistere più di una propagazione d'onde che soddisfi alla condizione voluta [1] (quando si considerino, naturalmente, come identici

[1] Supposto invero che ne esistano due, $P_m^{(1)}$ e $P_m^{(2)}$, siano $E_1^{(m)}$, $E_2^{(m)}$ i valori ad esse relativi di E_n. In base alla condizione

$$J = J_{eff} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \left| \int_S E_1^{(m)} dS \right| = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \left| \int_S E_2^{(m)} dS \right|$$

potremo sempre ammettere che sia

$$\int_S E_1^{(m)} dS = \int_S E_2^{(m)} dS ,$$

onde, stante la linearità della (4) rispetto ad E_n, qualunque sia la costante (complessa) γ, si avrà una propagazione d'onde corrispondente al valore J dell'intensità efficace, assumendo

$$E_\rho = E_\vartheta = 0 \qquad E_n = E_1^{(m)} + \gamma(E_2^{(m)} - E_1^{(m)}) .$$

Per una tale propagazione, posto

$$\gamma = \gamma' + i\gamma'' \qquad \int_S E_1^{(m)} \{ \overline{E}_2^{(m)} - \overline{E}_1^{(m)} \} (1 - \varrho\varphi \cos\vartheta)\, dS = I' + i I''$$

è

$$Q = \frac{\sigma}{2} \left\{ \int_S |E_1^{(m)}|^2 (1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)\, dS + 2(\gamma' I' + \gamma'' I'') + \right.$$
$$\left. + (\gamma'^2 + \gamma''^2) \int_S |E_2^{(m)} - E_1^{(m)}|^2 (1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)\, dS \right\} .$$

In conseguenza (al variare di γ' e γ'') Q assumerà anche il valore (minimo):

$$Q = \frac{\sigma}{2} \left\{ \int_S |E_1^{(m)}|^2 (1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)\, dS - \frac{I'^2 + I''^2}{\int_S |E_2^{(m)} - E_1^{(m)}|^2 (1 - \varrho\varphi\cos\vartheta) dS} \right\} .$$

Non potendo, per ipotesi, essere mai

$$Q < \frac{\sigma}{2} \int_S |E_1^{(m)}|^2 (1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)\, dS ,$$

ciò porta di conseguenza $I' = I'' = 0$, e successivamente:

$$\int_S |E_2^{(m)}|^2 (1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)\, dS = \int_S |E_1^{(m)}|^2 (1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)\, dS +$$
$$+ \int_S |E_2^{(m)} - E_1^{(m)}|^2 (1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)\, dS .$$

E questo è inconciliabile coll'ipotesi che $P_m^{(1)}$ e $P_m^{(2)}$ corrispondano allo stesso valore del calore di Joule, se non è:

$$\int_S |E_2^{(m)} - E_1^{(m)}|^2 (1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)\, dS = 0 ,$$

cioè, (dal momento che essendo $\nu \neq 0$ il campo elettrico individua il campom agnetico) se $P_m^{(1)}$ e $P_m^{(2)}$ non coincidono.

due campi elettromagnetici che possano dedursi l'uno dall'altro moltiplicando **E** ed **H** solo per una costante complessa di modulo 1).

§ 5. Ammettiamo che esista una P_m per ogni valore di $(\nu, \mu, \sigma, b, e)\varphi$: ammettiamo ulteriormente che sia possibile porre

$$(5)\qquad E_n^{(m)} = e^{i\nu t} \sum_0^\infty {}_i\, \varphi^i e_i = e^{i\nu t} \sum_0^\infty {}_i\, \varphi^i \sum_0^\infty {}_l\, e_{il} \cos l\vartheta\,,$$

ove le e_{il} (le e_i) dipendono da ϱ (da ϱ e ϑ) ma non da φ, e, almeno dentro il toro, sono funzioni regolari dei loro argomenti.

Il valore di Q corrispondente a P_m sarà allora espresso da ([1]):

$$(6)\qquad Q^{(m)} = \frac{\sigma}{2} \left\{ \int_S e_0 \bar{e}_0 \, dS + \varphi \int_S (e_0 \bar{e}_1 + e_1 \bar{e}_0 - \varrho \cos\vartheta\, e_0 \bar{e}_0)\, dS + \right.$$

$$\left. + \varphi^2 \int_S (e_0 \bar{e}_2 + e_1 \bar{e}_1 + e_2 \bar{e}_0 - \varrho \cos\vartheta\, [e_0 \bar{e}_1 + e_1 \bar{e}_0])\, dS + \cdots \right\}.$$

Introducendo nella (4) l'espressione (5) di $E_n^{(m)}$, sviluppando il primo membro in serie ordinata per le potenze di φ ed eguagliando a zero i coefficienti delle singole potenze di φ, si trova:

$$(7)\qquad \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 e_0}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 e_0}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial e_0}{\partial \varrho} + k^2 b^2 e_0 = 0$$

$$(8)\qquad \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 e_1}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 e_1}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial e_1}{\partial \varrho} + k^2 b^2 e_1 = \cos\vartheta \frac{\partial e_0}{\partial \varrho} - \operatorname{sen}\vartheta \frac{1}{\varrho} \frac{\partial e_0}{\partial \vartheta}$$

$$(9)\qquad \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 e_2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 e_2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial e_2}{\partial \varrho} + k^2 b^2 e_2 =$$

$$= \varrho \cos\vartheta \left\{ \cos\vartheta \frac{\partial e_0}{\partial \varrho} - \operatorname{sen}\vartheta \frac{1}{\varrho} \frac{\partial e_0}{\partial \vartheta} \right\} + \cos\vartheta \frac{\partial e_1}{\partial \varrho} - \operatorname{sen}\vartheta \frac{1}{\varrho} \frac{\partial e_1}{\partial \vartheta} + e_0$$

ecc. ecc.

Vedremo nei prossimi paragrafi che queste equazioni forniscono per ciascuna delle $e_{0l}, e_{1l}, e_{2l}, \ldots$ un'espressione in cui resta indeterminata solo una costante d'integrazione δ_{il} $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, da supporsi, come le e_{il}, indipendente da φ. La determinazione delle δ dovrà, naturalmente, essere eseguita in base alle condizioni che definiscono la P_m. A questo scopo osser-

([1]) Si osservi che le e_i sono necessariamente da supporre funzioni pari di ϑ, perchè, come è subito visto, la P_m, in conseguenza della sua unicità, deve risultare simmetrica rispetto al piano della circonferenza direttrice del toro.

Qui e nel seguito il soprassegno sta ad indicare, come è di consuetudine, il passaggio da una quantità complessa alla sua coniugata.

veremo in primo luogo che subordinatamente alla (5) si ha

$$J_{eff} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \left| \sum_0^\infty{}_i \varphi_i \int_S e_i \, dS \right| = \left| \sum_0^\infty{}_i \varphi^i \int_S e_{i0} \, dS \right| ,$$

onde la condizione

(10) $$J_{eff} = J$$

sarà soddisfatta qualunque sia φ, allora e allora soltanto che le δ siano scelte in modo che risulti:

(11) $$J = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \left| \int_S l_{00} \, dS \right|$$ (12) $$\int_S l_{i0} \, dS = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

In corrispondenza a ciò, cercheremo di individuare le singole δ con un procedimento d'esclusione. Precisamente, scarteremo quei valori delle δ pei quali si sia potuto riconoscere che, anche solo per uno speciale valore di φ, non minimizzano $Q^{(m)}$ subordinatamente alle (11) e (12): e quando accada che dagli scarti fatti non rimanga escluso per una delle δ altro che un valore ben determinato e finito, riterremo senz'altro che esso sia il valore cercato di tale δ. Questo procedimento, come vedremo, risulta sufficiente alla determinazione completa della $E_n^{(m)}$, almeno nell'ordine d'approssimazione cui limiteremo la nostra ricerca: ma non è da tacere che le ipotesi già fatte riguardo all'esistenza e alla proprietà della P_m non sono sufficienti a giustificarlo rigorosamente. Del resto, fin da quando abbiamo ammessa senza dimostrazione l'esistenza della P_m, ci siamo posti da un punto di vista essenzialmente euristico, rinunziando a svolgere la ricerca in modo che non si prestasse ad alcuna obbiezione di carattere rigorista.

§ 6. Dalla (7), posto $x = kb\varrho$, segue

$$\frac{d^2 e_{0l}}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{de_{0l}}{x} + \left(1 - \frac{l^2}{x^2}\right) e_{0l} = 0 \qquad (l = 0, 1, \ldots)$$

onde e_{0l}, dovendo anche per ($\varrho = 0$, cioè) $x = 0$, mantenersi finita, risulta espressa, come è ben noto, da:

$$l_{0l} = \delta_{0l} \, J_l(x) \qquad (l = 0, 1, \ldots).$$

La (11) fornisce per la δ_{00}:

$$|\delta_{00}| = \frac{\sqrt{2}\, J}{\sigma \left| \int_S J_0(x) \, dS \right|} ,$$

donde è per noi lecito dedurre (¹)

$$\delta_{00} = \frac{\sqrt{2}\,J}{\sigma \int_S J_0(x)\,dS} = \frac{J\sqrt{2}\,k}{2\pi\sigma b J_1(kb)}. \tag{13}$$

D'altra parte (²) $Q^{(m)}$ non potrà per $\varphi = 0$ assumere il minimo valore compatibile colla (10) altro che quando sia

$$\delta_{0l} = 0 \qquad (l \geq 1).$$

Sarà dunque da assumere

$$e_0 = \delta_{00}\,J_0(x) = \frac{J\sqrt{2}\,k}{2\pi\sigma b J_1(kb)}\,J_0(x). \tag{14}$$

§ 7. Dalla (7) tenendo conto della (14), si ha

$$\frac{d^2 e_{1l}}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{de_{1l}}{dx} + \left(1 - \frac{l^2}{x^2}\right) e_{1l} = 0 \qquad (l \neq 1) \tag{15}$$

$$\frac{d^2 e_{11}}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{de_{11}}{dx} + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e_{11} = -\,K J_0(x) \tag{16}$$

ove si è posto

$$K = -\,\frac{\delta_{00}}{kb}.$$

Dalla (15) risulta subito

$$e_{1l} = \delta_{1l}\,J_l(x),$$

e in conseguenza la (11) dà

$$\int_S e_{10}\,dS = \frac{2\pi\delta_{10}}{k^2}\int_0^{kb} J_0(x)\,x\,dx = \frac{2\pi\delta_{10}}{k}\,b\,J_1(kb) = 0,$$

cioè, la $J_n(x)$ non avendo mai radici complesse (³), $\delta_{10} = 0$. Dalle (16) si ottiene poi (⁴):

(¹) Cfr. § 4 in fine.

(²) Ved. loc. cit. (²) a pag. 1.

(³) Cfr., ad es., Riemann-Weber, *Die Partiellen differential-Gleichungen der Mathematischen-Physik*, Bd. I, § 74.

(⁴) Fin da questo punto è forse utile rilevare che, qualunque sia n:

1°) valgono le ben note identità

$$\frac{2(n-1)J_{n-1}(x)}{x} = J_{n-2}(x) + J_n(x) \qquad \frac{2\,dJ_{n-1}(x)}{dx} = J_{n-2}(x) - J_n(x);$$

2°) l'equazione

$$\frac{d^2 e(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{de(x)}{dx} + e\left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) = 0$$

$$e_{11} = J_1(x) \left\{ \delta_{11} - K \int_0^x \frac{dx'}{x' J_1^2(x')} \int_0^{x'} x'' J_1^2(x'')\, dx'' \right\} =$$

$$= J_1(x) \left\{ \delta_{11} - K \int_0^x \frac{dx'}{x' J_1^2(x')} \cdot \frac{x'}{2} J_1^2(x') \frac{d}{dx'} \left[x' \frac{J_2(x')}{J_1(x)} \right] \right\} =$$

$$= (\delta_{11} - K)\, J_1(x) + \frac{Kx}{2} J_0(x) .$$

Se ne conclude, la e_1 è del tipo:

$$e_1 = \cos \vartheta \left\{ (\delta_{11} - K)\, J_1(x) + \frac{Kx}{2} J_0(x) \right\} + \sum_2^\infty {}_l\, \delta_{1l} \cos l\vartheta\, J_l(x) . \tag{17}$$

§ 8. Dalla (9) in base alle (14), (17) segue

$$\frac{d^2 e_{20}}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{de_{20}}{dx} + e_{20} = \frac{1}{2kbx} \frac{d}{dx} \left\{ x e_{11} + \frac{x^2}{kb} e_{00} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2kbx} \frac{d}{dx} \left\{ (\delta_{11} - K)\, J_1(x)\, x + \frac{3K}{2} x^2 J_0(x) \right\} ,$$

---

essendo soddisfatta da $e(x) = J_n(x)$, l'integrale più generale dell'equazione

$$\frac{d^2 e(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{de(x)}{dx} + e \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) = F(x)$$

che si mantenga finito per $x = 0$, è dato da

$$e(x) = J_n(x) \left\{ \delta + \int_0^x \frac{dx'}{x' J_n^2(x')} \int_0^{x'} x'' F(x'')\, J_n(x'')\, dx'' \right\} ;$$

2°) dalla formola ben nota

$$2\alpha \int_0^1 \varrho\, J_n^2(\alpha\varrho)\, d\varrho = J_n(\alpha)\, J_{n+1}(\alpha) + \alpha \left[J'_{n+1}(\alpha)\, J_n(\alpha) - J'_n(\alpha)\, J_{n+1}(\alpha) \right],$$

segue

$$\int_0^{x'} x'' J_n^2(x'')\, dx'' = \frac{x'}{2} \left\{ J_n(x')\, J_{n+1}(x') + x' \left[J'_{n+1}(x')\, J_n(x') - J'_n(x')\, J_{n+1}(x') \right] \right\} =$$

$$= \frac{x'}{2} J_n^2(x') \frac{d}{dx'} \left(\frac{x' J_{n+1}(x')}{J_n(x')} \right) .$$

donde risulta

$$e_{20} = J_0(x) \left\{ \delta_{20} + \frac{1}{2kb} \int_0^x \frac{dx'}{x' J_0^2(x')} \int_0^{x'} J_0(x) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{d}{dx} \left[(\delta_{11} - K) J_1(x) x + \frac{3K}{2} x^2 J_0(x) \right] \right\} =$$

$$= J_0(x) \left\{ \delta_{20} + \frac{1}{2kb} \int_0^x \frac{dx'}{x' J_0^2(x)} \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^{x'} \left[x'' J_0^2(x'') (\delta_{11} + 2K) - \frac{3}{2} K x''^2 J_0(x'') J_1(x'') \right] \right\} dx'' =$$

$$= J_0(x) \left\{ \delta_{20} + \frac{1}{2kb} \int_0^x \frac{dx'}{x' J_0^2(x')} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{3x'^2}{4} J_0^2(x') + \left(\delta_{11} + \frac{K}{2} \right) \int_0^x x'' J_0^2(x'') \, dx'' \right] \right\} =$$

$$= \delta_{20} J_0(x) + \frac{1}{4kb} \left(\delta_{11} + \frac{K}{2} \right) x J_1(x) + \frac{3K}{16kb} x^2 J_0(x) ;$$

Per la (12) la δ_{20} dovrà essere determinata (in funzione di δ_{11}) in modo da soddisfare l'equazione

$$0 = \int_0^{kb} e_{20} \, x \, dx = \int_0^{kb} x \left\{ \delta_{20} J_0(x) + \frac{1}{4kb} \left(\delta_{11} + \frac{K}{2} \right) x J_1(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{3K}{16kb} x^2 J_0(x) \right\} .$$

Siccome è

$$\int_0^{kb} J_0(x) \, x \, dx = kb \, J_1(kb)$$

$$\int_0^{kb} x^2 J_1(x) \, dx = - k^2 b^2 J_0(kb) + 2kb \, J_1(kb)$$

$$\int_0 x^3 J_0(x) \, dx = 2k^2 b^2 J_0(kb) + kb \, J_1(kb) \, (k^2 b^2 - 4) ,$$

ciò dà senza difficoltà

$$\delta_{20} = - \frac{J_2(kb)}{4 J_1(kb)} (\delta_{11} - K) - \frac{3 \delta_{00}}{16} :$$

e in conseguenza

$$(18) \qquad \delta_{20} = J_0(x) \left\{ \frac{K - \delta_{11}}{4} \frac{J_2(kb)}{J_1(kb)} - \frac{3 \delta_{00}}{16} \right\} +$$

$$+ \frac{x J_1(x)}{4kb} \left(\delta_{11} + \frac{K}{2} \right) + \frac{x^2 J_0(x) 3K}{16kb}$$

Astronomia. — *Sulla osservazione meridiana delle stelle quasi fondamentali.* Nota di Giovanni Zappa, presentata dal Corrispondente A. Di Legge.

L'osservazione delle stelle fondamentali e delle quasi fondamentali, destinata alla determinazione delle loro posizioni assolute o quasi assolute, è eseguita in un numero straordinariamente piccolo di Osservatorî, perchè rarissimi sono gli strumenti meridiani di tal bontà ed in tali condizioni da poter essere usati per tale scopo. Per le quasi fondamentali soccorrono le osservazioni differenziali in zona quando siano eccellenti, e quindi eseguite con strumenti ottimi od ottimamente studiati: ma il procedimento fino ad ora tenuto per esse può venir oggi utilmente modificato in modo da aver non solo risultati migliori con gli strumenti buoni, ma altresì risultati preziosi anche con strumenti mediocri; cosicchè la maggior parte degli strumenti meridiani oggi in uso potrà contribuire alla costruzione del catalogo di fondamentali dell'avvenire immediato, vale a dire di quel catalogo che conterrà, oltre alle attuali fondamentali con posizioni migliori, le stelle che oggi si devono considerare soltanto come quasi fondamentali. La base essenziale di questa modificazione è nel « Preliminar General Catalogue » di L. Boss, e in determinate particolarità di esso, non comuni a nessun catalogo precedente. Questo catalogo, pubblicato circa quattro anni or sono, contiene le posizioni normali, cioè le posizioni più probabili che si possono dedurre dalle osservazioni, fino ad ora eseguite, di oltre 6000 stelle sparse per i due emisferi, nelle quali sono comprese le fondamentali di Boss stesso, mentre le altre sono stelle con coordinate di poco inferiori in precisione a quelle delle fondamentali, cioè sono, come si dicono, quasi fondamentali. Per ogni stella (e questa è la nuova caratteristica importante del catalogo) è dato l'errore probabile di ciascuna coordinata per il 1910.0 e gli elementi per ottenere lo stesso errore per gli anni precedenti e seguenti (errore probabile dei moti proprî), cioè sono dati i mezzi per una stima completa dell'esattezza probabile di ciascuna posizione.

Sulla base dell'errore probabile di Boss si possono distinguere le sue fondamentali dalle altre sue stelle, nel senso che quelle sono nel loro complesso le stelle le quali hanno un errore probabile per ciascuna coordinata $\leq 0''12$ ed una buona parte di quelle che hanno un tale errore $\leq 0''16$. Questo limite non nitido dipende dal fatto che la scelta delle fondamentali fu fatta da L. Boss anche in base ad un concetto di uniforme distribuzione; ma questo criterio è pel momento un criterio di comodità per fornire punti di riferimento in tutte le regioni del cielo e per richiamare l'attenzione degli astro-

nomi, che si dedicano a migliorare le posizioni delle fondamentali, su quelle stelle che più sono adatte ad esser tenute oggi e domani come fondamentali (domani potranno esser, più esattamente, fondamentali di prima classe). Ma se vogliamo dire, come ci occorre anche per quel che segue, che si devono ritenere come fondamentali le stelle che hanno le coordinate d'una precisione determinata, possiamo stabilire di chiamar fondamentali le stelle che hanno un errore probabile per ciascuna coordinata $< 0''.15$. Oltre queste stelle, il cui numero supera di poco il migliaio, si hanno nel P. G. C. quasi cinquemila stelle che hanno l'errore probabile di ciascuna coordinata minore di $0''.30$, ed altre poche che superano questo limite. Ora, per quasi tutte queste cinquemila stelle valgono le osservazioni differenziali, e con esse è possibile, anche con mezzi modesti, quando si eseguiscano osservazioni appropriate, ottenere posizioni che possano esser utilmente considerate nello studio di quelle stelle per la formazione del prossimo catalogo di fondamentali.

La maggior parte dei cerchi meridiani, migliorata per alcuni la collocazione, sono certo in condizione di dare buone osservazioni differenziali in una zona di 10 gradi in declinazione per regioni di 3^h di ascensione retta, intendendosi, con questo, che anche gli errori strumentali possono esser determinati con la precisione sufficiente per riferire un astro della regione al baricentro di alcuni altri distribuiti abbastanza uniformemente nella regione stessa. Ora in una zona di 10 gradi si contano in media 300 stelle del P. G. C.; nelle zone vicine al polo il numero sarà molto minore; nelle regioni vicino all'equatore, un poco più forte. Se, per essere esatti, consideriamo le zone, anzichè di un numero eguale di gradi in declinazione, a intervalli uguali di sen δ (zone di uguale superficie sulla sfera), per una distribuzione uniforme nel cielo dovremo avere un numero costante di stelle. Dividiamo dunque la mezza sfera in zone in cui sen δ abbia un' escursione di 0.10, e avremo le zone seguenti:

da 0° a 6°, da 6° a 12°, da 12° a 18°, da 18° a 24°, da 24° a 30°, ciascuna di 6°; da 30° a 37°, di 7°,; da 37° a 45°, da 45° a 53°, ciascuna di 8°; da 53° a 64°, di 11°, e l'ultima da 64° a 90°.

Queste zone contengono all'incirca 300 stelle del P. G. C. e sono tutte di tal larghezza da esser considerate non troppo ampie, fuorchè l'ultima, che escluderemo, anche perchè le nostre considerazioni non si applicano alle osservazioni troppo vicine ai poli. Ora, 300 stelle dànno, per ogni 3 ore, 38 stelle circa, vale a dire una stella ogni cinque minuti di ascensione retta: si ha dunque un materiale non scarso per una osservazione continuata, anche se ammettiamo che per la non uniforme distribuzione delle stelle il programma di osservazione possa comprendere solo 25 stelle.

I coefficienti degli errori di orientamento per tali zone differiscono, a una latitudine di 46°, e, si può dire, a tutte le latitudini degli Osservatorî

boreali, dal valore medio di ciascuna zona dell' importo della tabella seguente:

zona	limite	collim.	azimut	inclin.	zona	limite	collim.	azimut	inclin.
1ª	0° + 6°	0.00	0.04	0.04	6ª	+ 30° + 37°	0.05	0.06	0.06
2ª	+ 6 + 12	01	04	04	7ª	+ 37 + 45	08	09	08
3ª	+ 12 + 18	01	04	04	8ª	+ 45 + 53	12	11	12
4ª	+ 18 + 24	02	04	04	9ª	+ 53 + 64	31	25	26
5ª	+ 24 + 30	03	05	05					

Se poniamo la condizione di tener conto dell' effetto degli errori che superino $0^s.005 \cos\delta$, si devono conoscere le costanti strumentali tenute costanti durante ciascuna sera, con l'approssimazione che segue:

zona	limite	collim.	azimut	inclin.	zona	limite	collim.	azimut	inclin.
1ª	0° + 6°	$2^s.$	$0^s.1$	$0^s.1$	6ª	+ 30° + 37°	$0^s.1$	$0^s.1$	$0^s.1$
2ª	+ 6 + 12	0.5	0.1	0.1	7ª	+ 37 + 45	0.1	0.1	0.1
3ª	+ 12 + 18	0.5	0.1	0.1	8ª	+ 45 + 53	0.07	0.07	0.07
4ª	+ 18 + 24	0.3	0.1	0.1	9ª	+ 53 + 64	0.03	0.04	0.04
5ª	+ 24 + 30	0.2	0.1	0.1					

e per le zone australi che possono esser osservate negli Osservatorî boreali valgono i numeri della zona 1ª. La precisione così determinata è tale che essa, ed anche una maggiore, può esser facilmente ottenuta col maggior numero degli strumenti meridiani. E le eventuali variazioni delle costanti durante ciascuna sera, per le quali la precisione definita non basta, potranno venir scoperte o meglio determinate nel modo che vedremo da ultimo.

Continuando a trattare della determinazione dell'ascensione retta, veniamo al punto più importante: la correzione dell'orologio. Si osservano, come si è detto, 25 stelle del P. G. C. ciascuna sera; di esse, $^1/_5$ è di fondamentali, e il resto con un errore probabile variabile da $0''.15$ a $0''.30$. L'errore dell'orologio deve esser determinato con tutte le 25 stelle, tenuto conto del loro errore probabile, e non, come sinora si è fatto, con le sole fondamentali; in altre parole, ciascuna quasi fondamentale sia riferita al baricentro pesato delle 25 stelle, non al baricentro semplice delle sole fondamentali. Sia $0''.35 \sec\delta$ l'errore probabile di un passaggio, osservato con uno degli strumenti medii, di un passaggio osservato, intendiamo, non di una ascensione

retta conclusa, vale a dire, sia valutato tenendo conto dell' errore di osservazione e dell'errore di riduzione per le costanti strumentali e non di quello del punto di riferimento, di modo che l' osservazione di ciascuna stella darà luogo ad un valore del Δt, uguale alla differenza tra l'ascensione retta di L. Boss e il tempo osservato e corretto, il cui errore probabile sarà

$$\sqrt{0''.35^2 + a^2} \sec \delta$$

se a è l'errore probabile dell'ascensione retta del P. G. C. Dividiamo ora, per semplicità, le stelle del P. G. C. in tre classi; nella prima poniamo quelle che abbiamo definito come fondamentali, e ad esse attribuiamo un errore probabile medio di

$$0''.12 \sec \delta;$$

in una seconda classe poniamo quelle con errore probabile da 0''.15 a 0'',24, alle quali attribuiamo un errore probabile medio di

$$0''.19 \sec \delta;$$

e in una terza classe poniamo tutte le altre e diamo ad esse un errore probabile di

$$0''.27 \sec \delta.$$

All'ingrosso, possiamo dire che $^1/_5$ delle stelle osservate sarà della prima classe, $^2/_5$ della seconda, e $^2/_5$ della terza. Allora i valori dei Δt delle tre classi avranno un errore probabile rispettivo di $0''.37 \sec \delta$, $0''.40 \sec \delta$, $0''.45 \sec \delta$: vale a dire un peso di 1.00, di 0.87, di 0.67 rispettivamente; e quindi la somma dei pesi sarà uguale a 20, e l'errore probabile del Δt finale sarà di

$$\frac{0''.37}{4.5} \sec \delta = 0''.08 \sec \delta,$$

e, di conseguenza, le ascensioni rette concluse avranno un errore probabile di

$$\sqrt{0''.35^2 + 0.08^2} \sec \delta = 0.36 \sec \delta.$$

Con quattro o sei osservazioni potremo concludere le ascensioni rette con un errore probabile non superiore a

$$0''.2 \sec \delta,$$

cioè paragonabile a quello della maggior parte delle posizioni del P. G. C.

Gli stessi numeri che valgono per l'ascensione retta tolto il fattore sec δ, valgono per la declinazione, sia per gli errori di osservazioni, sia per gli

errori del P. G. C., e quindi lo stesso risultato si ha per i valori finali di una o più osservazioni; solo per l'errore di osservazione occorre tener presente che il cerchio deve avere errori di divisione non grandi o conosciuti o eliminabili, e che le puntate sulla stella per ogni osservazione siano 3 o 4. E allora la stessa conclusione, alla quale siamo giunti per l'ascensione retta, vale per la declinazione: cioè con quattro o sei osservazioni potremo concludere le declinazioni con un errore probabile non superiore a $0''.2$, valore comparabile a quello della maggior parte delle posizioni del P. G. C.

Ma ancor di meglio si può fare, specialmente dal punto di vista degli errori sistematici, se si riferisce ciascuna stella ad ambedue le regioni contigue, ricorrendo all'osservazione a catena con gli anelli formati da un numero piccolissimo di stelle, nel modo che segue: Si consideri ad esempio la stella 25ª della lista da osservare: essa sarà l'ultima della prima regione, che comprenderà le stelle da 1 a 25. Siccome ogni stella passa in meridiano ogni otto minuti all'incirca, tenendo fissa l'ora di tempo medio in cui si devono cominciare le osservazioni, si avranno ogni settimana tre o quattro stelle perdute in principio della serie; ebbene, il numero 25 venga reintegrato con altrettante stelle aggiunte alla serie, dimodochè la prima settimana si osservi da 1 a 25, la seconda da 4 a 28, la terza da 8 a 32, e così via.

Se ogni zona viene osservata una volta la settimana, si hanno per ogni stella sei osservazioni, riferite a stelle in parte diverse ogni volta e più di frequente alle stelle più vicine, che son quelle che conducono a coordinate migliori. Si può quasi dire che in tal modo ogni stella è riferita alle stelle di 6^h di ascensione retta, e si devono almeno allora escludere effetti di errori sistematici minimi del sistema di Boss secondo l'ascensione retta. Un altro, ma minore, perfezionamento di tali osservazioni vien dato dalle osservazioni a catena anche secondo la declinazione: vale a dire, dopo aver osservato ad esempio la zona 18°-24° di declinazione, si osservi non la zona da 24° a 30° ma la 20°-26° o la 19°-25° o la 21°-27°: si avrà così aumentato il numero delle stelle a cui ciascuna posizione finale vien riferita, e allargata, anzi quasi raddoppiata, la larghezza della zona di riferimento. Se, per giunta, anche il numero delle osservazioni su ogni stella viene così aumentato oltre il 6, come prima si è detto, fin verso il 12, si può sperare di riuscire a ridurre l'errore probabile della posizione finale, come effetto del collegamento di una singola quasi fondamentale al sistema di L. Boss, a non molto maggiore di

$$0''.10 \sec \delta \qquad \text{e} \qquad 0''.10$$

rispettivamente per l'ascensione retta e per la declinazione.

Il materiale che si ottiene osservando nel modo descritto, permette un buono studio degli errori sistematici di osservazione, poichè da una parte il

grande numero di Δt e di equatori strumentali che si ottengono in una sera [equivalenti a quelli di 20 fondamentali] permette di investigare se l'uno o l'altro varii col tempo durante la serata di osservazione o con la declinazione o con altra variabile (per variazioni delle costanti strumentali o per altra causa), e d' altra parte il non piccolo numero di posizioni che si hanno per ciascuna stella con riferimento a regioni diverse permette di investigare se vi sia andamento nelle posizioni concluse secondo la distanza della stella dal baricentro del sistema di riferimento, o secondo l'ora di tempo medio di osservazione, o se esistono altri errori sistematici.

Abbiamo considerato sino ad ora il caso di uno strumento mediocre, ma tutto quello che precede, a parte l'ammontare degli errori probabili che sarà necessariamente minore, vale anche per uno strumento ottimo, cioè anche per esso il riferimento al baricentro pesato di tutta la zona e l'osservazione a catena ridurranno l' effetto degli errori accidentali e quello degli errori sistematici.

Fisica matematica. — *Sull'irraggiamento del corpo nero: osservazioni alla Nota di* C. Poli. Nota di O. M. Corbino, presentata dal Socio P. Blaserna.

Nel fascicolo 5° di questi Rendiconti è pubblicata una Nota del dottor Poli, il quale si è proposto di dimostrare che « non esiste incompatibilità tra la formola del Planck e i principî della dinamica classica ». L'A. intendeva con ciò sottrarre la formola del Planck alle difficoltà note, ottenendola « senza ipotesi dei *quanta*, o altre che contraddicono ai principi classici »

Sembra invece a me che quelle difficoltà siano eliminate solo in modo apparente, nella dimostrazione che l'A. dà della formola dell'irraggiamento.

E invero egli introduce, in un certo punto della sua deduzione, la seguente ipotesi. L'ampiezza a delle oscillazioni elettriche di ogni ione dipenderebbe dalla sua carica elettrica ϱ in modo da essere costante il prodotto $a^2 \varrho$. E poichè la carica ϱ deve essere un multiplo, secondo un numero intero m, della carica elettronica e, ne deduce che l'energia di qualunque ione, costituito da m elettroni, e oscillante con la frequenza ν, ha il valore

$$E = m h \nu$$

dove h è una costante universale perchè contiene il prodotto $m a^2$ che si è supposto costante.

Or ammettere ciò, senza giustificazione alcuna, significa ammettere che l'energia possa variare, da uno ione all'altro di egual periodo, *solo per gra-*

dini fissi, ciascuno eguale a $h\nu$, e perciò significa far capo al concetto essenziale della teoria dei *quanta*. Invero il Planck fu condotto alla sua formola senza volere introdurre nessun concetto rivoluzionario, ma solo per avere ammesso che l'energia media di un complesso di risuonatori si può ritenere distribuita fra loro, in qualunque istante, secondo multipli interi di un granulo di energia ε.

Sembra, così, che il modo di deduzione della formola del Planck proposto dal Poli, e che io non intendo discutere nelle altre ipotesi che comporta, faccia capo implicitamente allo stesso concetto incomprensibile della teoria dei *quanta*: e cioè che da un risuonatore all'altro, nello stesso istante, o in uno stesso risuonatore da un istante ad un altro, l'energia debba variare per salti di quantità finite di energia eguali al *quantum* $h\nu$.

Fisica. — *La verifica del principio di reciprocità di Volterra, nel caso generale* [1]. Nota di G. Tasca Bordonaro, presentata dal Socio V. Volterra.

In una Nota precedente [2] ho descritto un'esperienza la quale mi permise di verificare l'enunciato del prof. Volterra che estende ad una lamina

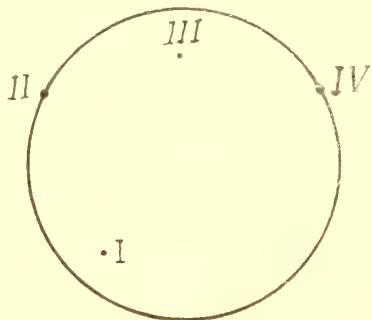



Fig. 1.

metallica, percorsa da corrente elettrica e sottoposta all'azione di un campo magnetico, il principio di reciprocità. Completando la sua bella teoria del fenomeno di Hall, il prof. Volterra ha potuto stabilire che la reciprocità sussiste ancora quando il campo magnetico che agisce sulla lamina non è uniforme, purchè le linee di forza siano punto per punto normali alla lamina. Anche di questa estensione del principio di reciprocità ho voluto ottenere la conferma sperimentale.

Mi son servito di un disco di bismuto con elettrodi dissimmetricamente saldati (fig. 1). Esso veniva posto fra le espansioni polari dell'elettroma-

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Roma.

[2] G. Tasca Bordonaro, Rend. Linc., vol. XXIV, 1° sem., fasc. 4°, an. 1915.

gnete Weiss terminate da dischetti piani di 5 mm. di diametro. Tutta la disposizione elettrica per la misura era identica a quella descritta nella Nota precedente.

È interessante di conoscere la distribuzione del campo in queste condizioni.

Il prof. Corbino, utilizzando la birifrangenza del ferro Bravais di vecchia preparazione, potè studiare l'andamento della intensità del campo fra i poli d'un'elettrocalamita (egli adoperò per questo studio lo stesso elettromagnete di cui mi son servito in queste esperienze).

FIG. 2.

Una vaschetta, contenente il liquido attivo, viene illuminata, fra nicols incrociati, con luce monocromatica. Osservando l'immagine con un cannocchiale, questa appare solcata da numerose frangie; ad ognuna di queste corrisponde una birifrangenza di una, due, tre lunghezze d'onda; si possono così osservare direttamente le isodinamiche che corrispondono ad una intensità del campo proporzionale a $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3} \ldots$ secondo il numero d'ordine della frangia.

Riproduco una delle fotografie che il prof. Corbino ottenne adoperando le medesime espansioni polari terminate da dischetti di 5 mm. di diametro. Da questa si può dedurre la distribuzione del campo nella mia esperienza. Come si vede dalla figura, l'intensità del campo assume valori estremamente diversi nei varî punti del disco di bismuto: da qualche centinaio di unità a circa 15000; ma per la simmetria rispetto al piano equatoriale dell'elettromagnete si può ritenere soddisfatta la condizione che la lamina sia normale alle linee di forza, poichè essa era disposta nella regione media tra le facce popolari.

I risultati ottenuti confermano ancora una volta la previsione teorica del prof. Volterra.

Eccone i dati numerici:

		campo diretto	campo invertito
Elettrodi	I — III	256	21
"	II — IV	20	256

Si riconosce, dalle cifre, che le condizioni realizzate erano le più favorevoli per verificare la validità del principio di reciprocità. Infatti il semplice scambio degli elettrodi produceva una variazione del potenziale da 256 a 20, ed occorreva l'inversione del campo per ristabilire il valore primitivo della differenza di potenziale.

Fisica. — *Azione delle onde hertziane su di un dielettrico sottoposto all'influenza di un campo elettrico rotante.* Nota dell'ing. Giulio Giulietti, presentata dal Socio G. Colombo.

Dopo gli studî di Naccari e Bellati [1] riguardanti le perdite di energia nei condensatori sottoposti a differenze di potenziale variabili e le prove termometriche di Borgmann [2] dirette ad analoghe ricerche, il signor Proteus Steinmetz [3] nel 1892 impiegando, un condensatore in carta paraffinata, trovò che, agendo con potenziali periodicamente variabili, l'energia dissipata nel dielettrico era sensibilmente proporzionale al quadrato del valore massimo della intensità di campo. Gli interessanti studî di Steinmetz formano argomento di molte sue pubblicazioni in cui l'autore, rilevando l'analogia coi fenomeni presentati dalla magnetizzazione periodica del ferro, estende ai dielettrici la definizione di isteresi.

Nello stesso anno in cui Steinmetz iniziava le sue importanti ricerche, seguìto poi da un numero grandissimo di sperimentatori [4] attratti dall'interesse dell'argomento, il prof. Riccardo Arnò, riflettendo sopra una esperienza di Galileo Ferraris [5] riguardante lo studio della rotazione provocata dall'isteresi magnetica di un cilindro di ferro in un campo magnetico rotante, ebbe la geniale intuizione che fenomeni corrispondenti si dovessero verificare, sostituendo alle forze magnetiche le forze elettriche ed ai corpi magnetici i corpi dielettrici.

Il fenomeno posto in evidenza dal prof. Arnò [6], ed i risultati di nu-

[1] Naccari e Bellati, Atti Accad. scienze di Torino, tom. XVII, 1882; Journal de phys., 2ème série, tom. I, 1882.

[2] J. Borgmann, Journal russe de la Soc. phys. et chim., tom. XVIII, 1886; Journal de phys., 2ème série, tom. VII, 1888.

[3] Stetnmetz, Electrotechn. Zeitschrift, avril 1892; Electr. Eingeneer, New York, 1892; Lumière electrique, tom. VLIV, avril 1882.

[4] Ricordo: Kleiner, *Ueber die durch electrische Polarisation in Isolatoren erzeugte Warme* Vierteljarschrift d. natf. Gesel.sehaft., Zurich, tom. XXXVII, 1893). — H. Fritz, *Ueber Warmetonung bei electrischer Polarisation des Glases,* Thèse, Zurich 1893.

[5] Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, vol. XXIII, pag. 360.

[6] Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, fascicolo del 6 ottobre 1892: *Campo elettrico rotante e rotazioni dovute all'isteresi elettrostatica.*

merose sue ricerche [1] sulla dissipazione di energia che avviene nel dielettrico sottoposto all'azione di un campo elettrico rotante hanno dimostrato l'esistenza di un ritardo con cui la polarizzazione del dielettrico segue la rotazione del campo, e che inoltre la relazione tra l'energia dissipata W nel dielettrico e l'induzione elettrostatica B in un punto qualunque del campo rotante è della forma

$$W = k\,B^x,$$

ove x e k hanno valori che variano col variare dei limiti di B. Tale relazione è analoga a quella che Ewing e miss Klassen [2] stabilirono a proposito del lavoro consumato per isteresi magnetica nel ferro, quando B rappresenti l'induzione magnetica. Gli studî del prof. Arnò vennero presi in speciale considerazione da P. Steinmetz [3], rappresentando una elegante conferma dell'analogia tra i fenomeni presentati dalla magnetizzazione periodica del ferro e quelli corrispondenti dovuti all'azione, sui dielettrici, di campi elettrici periodicamente variabili.

Ricordo, infine, che gli studî di Gerosa e Finzi [4], di Rutherford [5], miss Broaks [6], Wilson [7], Marconi [8], Maurain [9], Arnò [10], Ewing e Walter [11], hanno dimostrato che allorquando un materiale magnetico, sottoposto a una variazione ciclica della forza magnetizzante, è influenzato da campi magnetici dovuti a correnti ad alta frequenza, si verifica il fenomeno della variazione del ciclo di isteresi anche se la corrente è straordinariamente piccola, quale per esempio può essere determinata da un sistema di onde hertziane.

Tale fenomeno venne dal prof. Arnò messo in evidenza dimostrando che un materiale magnetico, il quale ruoti in un campo magnetico rotante

(1) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, fascicoli del 30 aprile e 12 novembre 1893; 18 marzo, 17 giugno, 18 novembre 1894; 12 aprile 1896.

(2) The eletrician, 13 aprile 1894, pag. 668: *Magnetic qualities of. iron.*

(3) *Dielectric and electrostatic phenomena* (estratto dal Theory) *and calculation of alternating current phenomena* cy Charles Proteus Steiumetz. New York, 1897, pag. 144.

(4) Rendiconti del R. Istituto lombardo di scienze e lettere, 1891, serie 2ª, pag. 677.

(5) Proc. Roy. Soc. 1896, vol. 60, pag. 184; Philosoph. trans. of the Roy. Soc. 1897, vol. 189, pag. 1.

(6) Philosophical magazine, agosto 1901.

(7) Report of the British Association at Belfast, 1902.

(8) Proc. Roy. Soc. 1902, vol. VII, pag. 341.

(9) Comptes rendus, 30 novembre 1903, pag. 914.

(10) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1° semestre 1914. pag. 272; Atti della Associaziene elettrotecnica italiana (comunicazione fatta alla sezione di Milano, 25 maggio 1904).

(11) The eletrician, 1914.

per isteresi magnetica, ha modificata la velocità di rotazione per effetto di un campo magnetico oscillante ad alta frequenza; dovuto alla corrente prodotta da un sistema di onde hertziane ed agente normalmente al primo.

Ciò posto, si ponga mente ai fatti ora ricordati, e cioè:

Al fenomeno della rotazione di un cilindro dielettrico in un campo elettrico rotante, in cui la polarizzazíone del dielettrico segue con un certo ritardo la rotazione del campo.

Al fenomeno dell'isteresi dielettrica, verificato da Steinmetz per un dielettrico sottoposto a differenze di potenziale alternative.

Al fenomeno della modificazione del ritardo di magnetizzazione in un cilindro magnetico posto in un campo magnetico rotante e simultaneamente influenzato da campo magnetico alternativo, eventualmente prodotto da un sistema di onde hertziane.

Ne viene allora, come naturale conseguenza, di pensare che, qualora l'esperimento interessante di un cilindro dielettrico mobile in un campo elettrico rotante venisse così modificato da sottoporre contemporaneamente il cilindro anche all'azione di un campo elettrico alternativo che in particolare può essere oscillante di alta frequenza producibile per esempio con un sistema di onde hertziane, il fenomeno della rotazione del cilindro dovrebbe esplicarsi in condizioni diverse da quelle in cui il fenomeno stesso si ottiene allorquando il cilindro è sottoposto alla sola azione del campo elettrico rotante.

Seguendo questo ordine di idee e pensando alle disposizioni impiegate negli studî riguardanti le variazioni dell'isteresi magnetica prodotta in campi magnetici rotanti dall'azione di campi magnetici oscillanti ad alta frequenza, ho adottato per le mie esperienze una disposizione di apparecchio che risponde alle seguenti caratteristiche:

L'apparecchio consta essenzialmente di un equipaggio mobile costituito da due identici cilindri dell'uguale materiale dielettrico, resi solidali fra di loro mediante un asse comune di rotazione costituito pure da materiale coibente. L'equipaggio è sospeso ad un bifilare di seta ed è fissato al di sotto con un bifilare, oppure termina in un piccolo peso immerso in un liquido ammortitore.

I due cilindri sono situati in due campi elettrici rotanti. aventi senso contrario di rotazione ed intensità tali da equilibrare le loro azioni sull'equipaggio mobile.

Per l'azione simultanea dei campi elettrici rotanti, l'equipaggio rimane a riposo.

Uno dei cilindri, oltre che all'azione di un campo elettrico rotante, può essere contemporaneamente assoggettato a quella di un campo elettrico alternativo, determinato da una tensione alternativa agente fra due lastre metalliche affacciate, disposte una superiormente, l'altra inferiormente al cilindro,

e normali al suo asse. In tal modo l'azione del campo elettrico alternativo si esplica normalmente a quella del campo rotante, e può in particolare essere ad alta frequenza se il condensatore, costituito dalle due lastrine ed avente per dielettrico mobile uno dei due cilindri, fa parte di un circuito oscillante ad alta frequenza. Può ancora tale campo alternativo essere dovuto ad un sistema di onde hertziane se il condensatore ora indicato rappresenta una capacità aggiunta di un circuito a risonanza regolabile, accoppiato direttamente o indirettamente ad una antenna ricevitrice, non collegata con la terra ed influenzata dalle onde emesse da una piccola antenna trasmettente, pure isolata da terra e dipendente o direttamente o indirettamente da un circuito oscillante di elevata frequenza.

Le mie esperienze si riferiscono appunto all'azione simultanea, su uno dei cilindri, di un campo rotante e di un campo oscillante, di frequenza elevata, avente direzione normale al primo.

Indicherò i dati principali degli apparecchi impiegati e dei circuiti stabiliti:

Condizioni dell'apparecchio.

Campi rotanti. — Ciascuno dei campi rotanti si ottenne mediante tre lastrine metalliche a generatrici parallele a quelle dei cilindretti e simmetricamente disposte rispetto all'asse del sistema, cioè equidistanti ed a 120°.

Tra ogni coppia di lastre agisce una delle tre tensioni concatenate di un ordinario sistema trifase, ottenute ricorrendo ad un trasformatore trifase elevatore, alimentato dalla rete cittadina a bassa frequenza (Periodi 42).

Il trasformatore è provvisto di varie prese sugli avvolgimenti secondarî allo scopo di poter variare opportunamente ed in ugual modo le tensioni di alimentazione.

I valori delle tensioni concatenate di alimentazione, oscillarono, nelle esperienze, tra 500 e 3000 volts.

Le lastrine impiegate per i campi rotanti hanno la stessa altezza dei cilindretti, sono di uguali dimensioni, ed i loro sostegni possono scorrere in tre scanalature normali all'asse di rotazione ed a 120 gradi, in modo da poter regolare opportunamente la distanza dall'equipaggio mobile per equilibrare l'azione dei due campi rotanti in senso opposto.

Le due rotazioni contrarie si ottengono mediante un opportuno collegamento delle lastre ai morsetti secondarî del trasformatore, per il quale collegamento nei due campi rotanti due coppie di lastre corrispondenti risultano alimentate da tensioni uguali ma invertite.

Equipaggio mobile. — È costituito essenzialmente da due cilindretti identici C′, C″, formati con una sottile striscia di carta paraffinata e montati su una stessa asticina di vetro a cui è fissato lo specchietto nella parte

superiore. L'asticina è sospesa ad un bifilare di seta; e al disotto può agganciarsi ad un corto bifilare, oppure termina in un piccolo peso immerso in un liquido ammortitore.

Nella fig. 1 si è rappresentata schematicamente la disposizione generale d'apparecchio ed il circuito di collegamento al trasformatore elevatore.

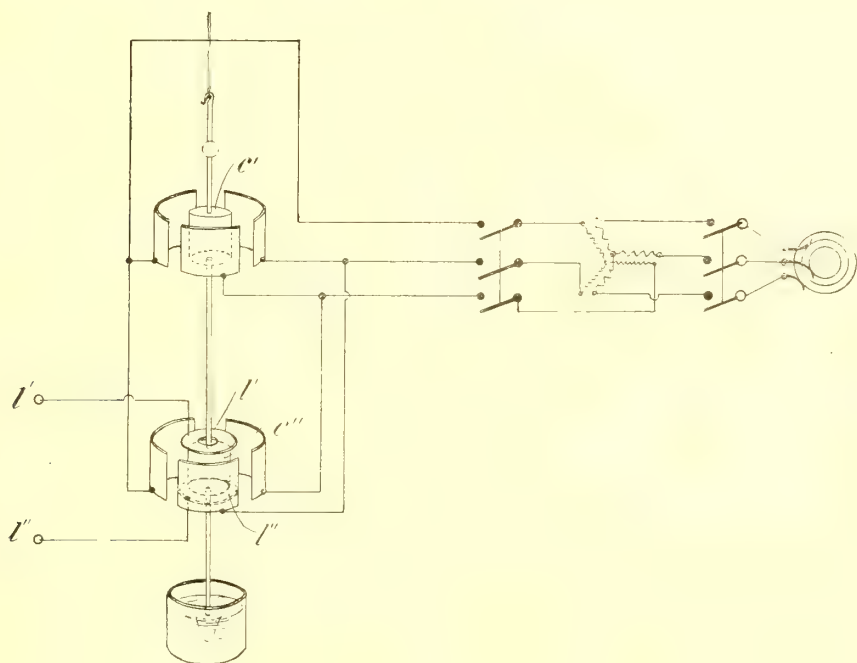



Fig. 1.

In tale rappresentazione l' e l'' sono le lastrine impiegate per la produzione del:

Campo oscillante di elevata frequenza. — Le lastrine destinate alla produzione di tale campo sono circolari, disposte l'una superiormente, l'altra inferiormente al cilindretto influenzato dal campo rotante inferiore. Ciascuna lastrina è anulare, ha il centro sull'asse di rotazione, è disposta normalmente a tale asse ed è a piccolissima distanza dal cilindretto. L'azione delle lastrine si esplica mediante le disposizioni seguenti di:

Circuiti di esperienza. — Nelle esperienze ricorsi a due inserzioni distinte dell'apparecchio: e precisamente, le lastrine l' e l'' vennero collegate direttamente ad un circuito oscillante derivato su di uno scintillatore alimentato da un rocchetto di Ruhmkorff (fig. 2), oppure la loro inserzione venne fatta in un circuito oscillante a risonanza regolabile eccitato col mezzo di una piccola antenna ricevente influenzata dalle onde emesse da una an-

tenna trasmettente dipendente da un circuito oscillante alimentato con un rocchetto di Ruhmkorff ed opportuno scintillatore.

Nelle esperienze eseguite le antenne non vennero collegate alla terra.

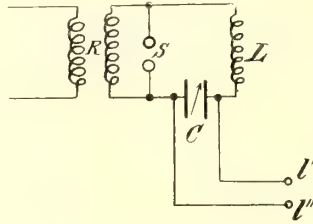



Fig. 2.

In fig. 3 si è indicata la connessione diretta delle antenne coi rispettivi circuiti oscillanti.

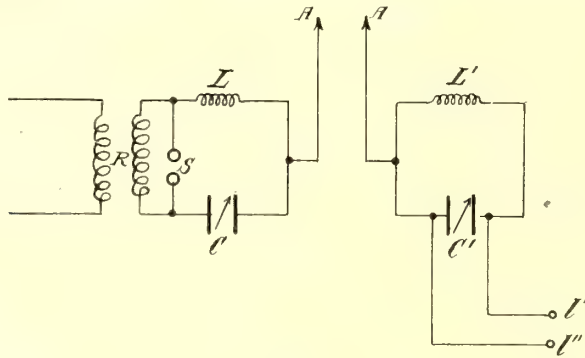



Fig. 3.

In fig. 4 si è rappresentato il collegamento indiretto per mezzo di jigger. Nelle figure L e C rappresentano l'induttanza e la capacità del circuito

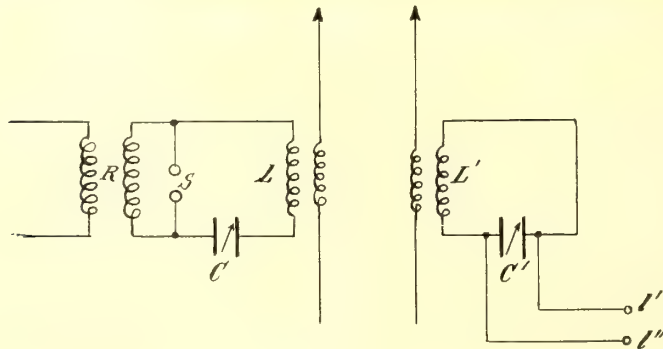



Fig. 4.

oscillante alimentato direttamente dal rocchetto di Ruhmkorff. L' e C' l'induttanza e la capacità del circuito oscillante ricevitore.

Tutti e tre gli schemi indicati sono stati da me applicati, con conseguimento di risultati sperimentali che hanno per caratteristica comune:

una deviazione dell'equipaggio mobile, quando il cilindro inferiore è simultaneamente sottoposto all'influenza del rispetttivo campo elettrico rotante e del campo oscillante di elevata frequenza.

Eseguii esperienze, impiegando, per l'alimentazione del rocchetto sia la corrente continua sia l'alterna. In tale ultimo caso impiegai due frequenze distinte di alimentazione: 42 periodi al secondo e 50 periodi al secondo. Trattandosi di 42 periodi, ricorsi sia ad una corrente alternata di identica forma di quella utilizzata per il conseguimento dei campi elettrici rotanti (ricorrendo in tal caso ad una sorgente sincrona), sia ancora ad una corrente di forma molto dissimile, fornita da un alternatore posseduto dal laboratorio di elettrotecnica del R. I. T. S. di Milano.

Nelle esperienze si ebbero i migliori risultati impiegando per l'alimentazione del rocchetto una sorgente sincrona a quella impiegata per l'alimentazione dei campi elettrici rotanti.

Siccome le esperienze eseguite vennero dirette a ricerche di indole qualitativa, aventi per scopo essenziale una semplice verifica di principio, ritengo inutile di farne un elenco completo. Mi limiterò pertanto ad indicare uno dei molti risultati sperimentali ottenuti in rapporto a determinate condizioni di alimentazione ed a condizioni speciali di circuito.

Valore comune delle tensioni concatenate di alimentazione dei campi elettrici rotanti: volts 1500 Periodi 42.

Distanza, dai cilindretti, delle lastrine utilizzate per la produzione dei campi elettrici rotanti: 5 mm.

Distanza delle lastrine anulari dal cilindretto influenzato dal campo elettrico rotante inferiore: circa 1 mm.

Lunghezza bifilare: circa 45 cm.

Distanza dello specchio applicato all'equipaggio della scala: 1 metro.

Circuito ricevitore. — Il condensatore, avente per armature le lastrine anulari e per dielettrico mobile il cilindretto inferiore, rappresenta una capacità aggiunte e collegata in derivazione alla capacità variabile di un circuito a risonanza regolabile di cui fa parte una induttanza costituita da due spire di nastro di rame del diametro di 15 cm. e della larghezza di circa 15 mm.

Tale circuito è collegato ad una piccola antenna ricevitrice situata a breve distanza (dai 20 ai 40 cm.) da una piccola antenna trasmettente.

Circuito trasmettitore. — L'antenna trasmettente è collegata a un circuito a capacità variabile (costituito da un gruppo di condensatori a vetro collegati in derivazione) ed avente una induttanza fornita da 6 spire quadre di 300 mm. di lato, formate con conduttore grosso multifilare. Tale circuito

è derivato su uno scintillatore ad elettrodi cilindrici, di zinco, dipendente da un rocchetto di Ruhmkorff alimentato da una sorgente sincrona a quella di alimentazione dei campi elettrici rotanti.

Per l'alimentazione del rocchetto l'intensità utilizzata varia dai 10 ai 15 ampères. La distanza disruttiva nello scintillatore è di circa 5 mm.

Mettendo in funzione il rocchetto, per l'azione delle onde emesse dall'antenna trasmettente, il campo oscillante che si determina tra le lastrine anulari ha provocato una deviazione nell'equipaggio mobile che ha raggiunto anche i 20 mm. sulla scala ad 1 metro dallo specchio, regolando gli elementi del circuito ricevitore.

La disposizione d'esperienza adottata è indicata in fig. 3.

Per le disposizioni indicate è da osservare che basterebbe connettere a terra l'antenna trasmettente e l'antenna ricevitrice per portare l'apparecchio da me ideato nel campo radiotelegrafico.

Stavo per eseguire esperienze secondo questo ordine di idee, approfittando dell'antenna ricevitrice posseduta dalla stazione radiotelegrafica del laboratorio Arnò nel R. I. T. S. di Milano, quando per gli avvenimenti politici attuali abbiamo ricevuto l'ordine di abbattere l'antenna.

Le esperienze rimasero pertanto in sospeso; e quantunque non mi illuda di conseguire risultati speciali dalle esperienze stesse, tuttavia ritengo che meriti di fare qualche ricerca del genere.

Venendo ad una interpretazione del risultato sperimentale da me accennato, e tenendo presente che

1°) *nella rotazione del cilindro dielettrico* in un campo elettrico rotante, la polarizzazione del dielettrico segue con un certo ritardo la rotazione del campo;

2°) *nell'elettrizzazione alternativa di un dielettrico* si verifica una isteresi dielettrica,

ritengo che nel fenomeno da me riscontrato debba certamente concorrere una variazione nel ritardo con cui la polarizzazione di un dielettrico segue la rotazione di un campo elettrico rotante: cioè nel fenomeno riscontrato dovrebbe avvenire una vera e propria variazione di isteresi dielettrica.

In quest'ordine di idee, e seguendo analoghi criterî sperimentali, sto proseguendo nelle mie ricerche, riferendomi a dielettrici di varia natura, e spero che i risultati sperimentali che verrò conseguendo mi permetteranno di mettere bene in evidenza le caratteristiche del fenomeno da me previsto e la cui constatazione forma l'oggetto del presente lavoro.

Fisica. — *Il fenomeno di Stark-Lo Surdo nell'elio* (1). Nota di RITA BRUNETTI, presentata dal Corrispondente A. GARBASSO.

Dopo le ricerche del professor Lo Surdo (2) sulla serie di Balmer, le quali portano un primo esempio di differenziazione qualitativa tra le varie righe d'una serie e ci danno la certezza che il concetto di scomposizione, come è stato desunto dal fenomeno di Zeeman, non possa applicarsi immutato ai nuovi fatti spettrali, appare opportuno di cominciare a raccogliere il materiale che servirà poi alla realizzazione di un modello o alla costruzione di una teoria del fenomeno.

In particolare la differenza di risultati, che con metodi differenti raggiunsero i professori Stark e Lo Surdo nei riguardi dell'idrogeno, additava senz'altro come primo gas da cimentare col metodo di Lo Surdo l'elio, già studiato con l'altro metodo da Stark (3). E le conclusioni a cui questa ricerca ha condotto sono riuscite lontane non solo da quelle ottenute per altra via, ma anche in parte da ogni previsione. Essa, per quanto poi riguarda la scelta del metodo di indagine, mette in particolare evidenza il valore del metodo dovuto al prof. Lo Surdo.

Per le osservazioni dirette ho usato tubi di mm. 1,5 .... 2 di diametro; e per fotografie tubi di circa mm. 4, secondo le indicazioni del prof. Lo Surdo (4).

(1) Lavoro eseguito nel Gabinetto di fisica del R. Istituto di studî superiori di Firenze.

(2) In questi Rendiconti: serie 5a, vol. XXII, 2° semestre, 1913; vol. XXIII, 1° e 2° semestre, 1914. Le varie Memorie si trovano riassunte nella monografia: *L'analogo elettrico del fenomeno di Zeeman e la costituzione dell'atomo.* (L'elettrotecnica, anno I, n. 25, pag. 624).

(3) J. Stark, *Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien.* Sitzungsberichte der K. Preuss. Akademie der Wissenschaften, 47, pag. 932, 20 nov. 1913. — Id. id., *Elektrische Spektralanalyse.* Leipzig, 1914, pp. 67 seguenti.

(4) A. Lo Surdo, *Sul fenomeno analogo a quello di Zeeman nel campo elettrico.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXII, serie 5a, fasc. 15, seduta del 21 dicembre 1913. — Id. id., *Osservazione diretta della scomposizione delle righe spettrali davanti al catodo in un tubo molto sottile,* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, seduta del 15 febbraio 1914.

Ho preparato l'elio scaldando con un bruciatore di Bunsen cleveite [1] mescolata a una quantità eguale di bisolfato potassico. L'ho purificato facendo passare i gas, che si sviluppavano dalla cleveite, per un tubo di vetro contenente rame, ossido di rame e magnesio a strati successivi e immerso in un forno elettrico che lo portava alla temperatura di 500° circa. Con nitrato d'argento toglievo gli eventuali composti di zolfo ed asciugavo tutto con cloruro di calce e anidride fosforica. Il gas, così preparato e purificato una prima volta, entrava in un serbatoio passando attraverso a un tubo piegato ad U, contenente carbone di noce di cocco e immerso in aria liquida. Dal serbatoio un opportuno raccordo portava il gas nel tubo ove aveva luogo la scarica. Questo, secondo il caso, veniva staccato dal sistema di preparazione del gas dopo essere stato portato alla pressione opportuna, o era lasciato in comunicazione col sistema di preparazione e la pompa a mercurio di Gaede. Si aveva così un mezzo abbastanza facile per mantenere nel tubo la pressione, e però la corrente e il potenziale voluti, durante le pose necessarie per ottenere una fotografia (da 10 minuti a 1 ora).

La prima riga di cui abbia osservato la scomposizione nel campo elettrico è la 4922.

Essa, con una differenza di potenziale agli estremi del tubo di scarica di 4000 volts e una corrente di circa 2 milliampères, presenta l'aspetto della figura 1. Vale a dire, è scissa in modo dissimmetrico rispetto alla posizione originale; e *una delle componenti la figura di scomposizione è completamente staccata dalla riga principale al limite dello spazio di Hittorf-Crookes*, presentandosi quasi un satellite di questa, sôrto per effetto del campo elettrico dalla parte delle λ brevi.

Fig 1.

Quando il campo elettrico dello spazio di Hittorf-Crookes è molto debole (agli estremi del tubo 2000 volts), esso è debolmente visibile solo nella regione dello spettro che proviene dallo spazio immediatamente prossimo al catodo; man mano che il campo cresce, il satellite si allunga ed esce dalla regione corrispondente allo spazio di Hittorf-Crookes, disponendosi al di là con lieve inclinazione rispetto alla riga principale.

L'aspetto e il comportamento del 4° elemento di scomposizione della 4922 inducono a credere che esso vada considerato con criterî differenti da quelli con cui si riguardano sinora gli altri: e però l'ho sottoposto ad alcune prove ulteriori, che, per quanto non siano decisive, credo opportuno riferire.

[1] Ringrazio il professor A. Piutti che ha favorito a questo Istituto un primo campione di cleveite, col quale ho eseguito prove spettroscopiche preliminari.

Ho indebolito più che fosse possibile il campo dello spazio di Hittorf-Crookes, e però quello dello spazio oscuro di Faraday, ponendo agli estremi del tubo una differenza di potenziale di 2000 volts e mandando una corrente di 1 milliampère.

Quando l'attacco del satellite avesse avuto luogo più in alto delle altre componenti per effetto del campo esistente più su, in regione ove non poteva essere luminoso, esso avrebbe dovuto secondare il campo e abbassarsi fino a rientrare nello spazio di Hittorf-Crookes. Con simili osservazioni però non ho visto altro che: *la intensità luminosa sparisce senza che il satellite si riattacchi alla sua riga.*

Per limitare l'azione di indebolimento del campo allo spazio di Faraday in tubi la cui pressione era regolata per modo che lo spazio di Crookes riuscisse di 2 mm., immergevo nel tubo di 5 cm. di diametro il capillare tagliato a due millimetri di distanza dall'elettrodo; oppure facevo allargare fino a 2 o 3 cm. il capillare a due mm. di distanza dall'elettrodo. Anche in questo modo non ho visto il satellite riattaccarsi all'inizio della prima luminosità negativa alla riga principale, come le altre componenti.

Infine, come lo scostamento del satellite dipende dalla variazione del campo elettrico?

Lo spostamento delle altre componenti della 4922 diminuisce al diminuire del campo sino a diventare nullo per campo debole. Questo si vede, sia guardando il loro andamento dal catodo metallico al primo strato di luminosità negativa (vedi figura 1), sia quando si indebolisce effettivamente dall'esterno il campo dello spazio di Crookes.

Sappiamo che per le righe d'idrogeno si è verificata la proporzionalità dello spostamento al campo. Ho allora ispezionato sopra fotografie, su cui era visibile anche la scomposizione delle righe dell'idrogeno, in quale rapporto stessero fra loro gli scostamenti in unità Ångström fra le componenti delle righe dell'elio, dato che quelle dell'idrogeno stavano fra loro nel rapporto da 1 a 2. E ho trovato che per le componenti di tipo normale il rapporto degli scostamenti è il medesimo che per l'idrogeno.

Le componenti di tipo normale subiscono dunque uno spostamento $\varDelta\lambda$ dallá riga primitiva, che è proporzionale al campo. Pel satellite invece ho già notato come con campi deboli si annulli prima la intensità luminosa che non il suo scostamento dalla riga principale.

Ho eseguito poi varie fotografie con campi differenti. Esse non portano il satellite se il campo era troppo debole (volts 3000, milliampères 1,3, in tubi di 4 mm. di diametro); lo portano a distanza che varia di poco quando il campo era sufficiente per renderlo luminoso (volts 4000, da 1 a 2 milliampères, in tubi da 2 a 4 mm. di diametro).

Forse l'ordine di grandezza delle variazioni di scostamento, per le variazioni del campo da me usate è tanto piccolo da non rendersi apprezzabile ai mezzi con cui si è compiuto questo studio. Infatti non è il caso di pensare che questo elemento sia indipendente dal campo, in quanto esso dimostra chiaramente di subirne l'effetto presentandosi fortemente inclinato e alquanto curvo nella regione precatodica. Presumibilmente è un elemento che, sensibilissimo all'azione del campo elettrico, diventa luminoso pei nostri mezzi d'osservazione solo quando il campo ha raggiunto un valore limite opportuno.

Ma in tal caso bisogna escludere la proporzionalità tra l'effetto e il campo, poichè il satellite si presenta quasi rettilineo lontano dal catodo, e quindi colla stessa inclinazione dentro e fuori dello spazio oscuro, al limite del quale dovrebbe invece aver luogo una notevole variazione di inclinazione.

Quello su cui non cade dubbio si è, però, che *gli spostamenti degli elementi normali di scomposizione nel campo elettrico e lo spostamento del satellite non avvengono con la medesima legge.*

L'osservazione di un'altra riga appartenente alla serie della 4922 (III serie accessoria diffusa) ha portato a risultati analoghi.

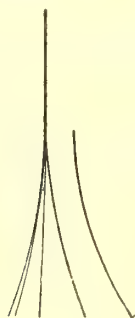



Fig. 2.

Fig. 3.

La 4388 si scinde in 5 componenti dissimmetriche, disposte come nella figura 2, il cui disegno è stato dedotto da una fotografia. Quattro componenti asimmetriche si partono dalla riga principale: una quinta componente, staccata dalla principale, è posta accanto ad essa dalla parte delle λ brevi.

Il satellite delle due righe, 4922 e 4388, pare presenti scostamento decrescente dalla riga fissa, al diminuire della lunghezza d'onda.

La 4144 della stessa serie conta sei componenti, disposte sempre in modo dissimmetrico intorno alla posizione di riposo della riga.

Con campo molto intenso la 5048 presenta nitidamente un satellite dalla parte delle λ brevi.

Di altre righe dello spettro dell'elio noterò come la 4471, nelle condizioni in cui le altre righe dànno la scomposizione già notata, presenti due

componenti asimmetriche, come indica schematicamente il disegno (figura 3). A occhio e sulle fotografie i due rami di scomposizione appaiono assai grossi, il che fa sembrare probabile che sotto un'azione più intensa essi abbiano ad apparire sdoppiati.

La 4026 si scinde in tre componenti asimmetriche di tipo normale.

Quindi, per osservazioni col metodo di Lo Surdo, si possono tirare le seguenti conclusioni:

Sotto l'azione di un campo elettrico

1°) *varie righe dell'elio si scompongono, e la scomposizione è dissimmetrica rispetto alla riga fondamentale*;

2°) *alcune righe presentano un satellite dalla parte delle λ brevi: cioè un elemento di scomposizione staccato già all'inizio del campo elettrico dalla riga principale, e a scostamento crescente man mano che si avvicina al catodo*;

3°) *agli spostamenti degli elementi di scomposizione e allo spostamento del satellite non appartiene la medesima legge*;

4°) *le righe della terza serie accessoria diffusa non si scompongono nello stesso numero di componenti.*

I risultati ottenuti differiscono dunque in generale quantitativamente e qualitativamente da quelli che sono stati trovati col metodo di Stark.

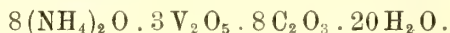
Infatti, differente è per le righe, che presentano scomposizione, il numero delle componenti che si possono contare coi due metodi; inoltre, per la natura del metodo dello Stark non era possibile fosse notata la anomalia di scomposizione che appartiene ad alcune righe dell'elio.

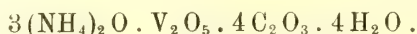
Questo era possibile solo col metodo di Lo Surdo, che mette in evidenza l'origine di ogni elemento delle righe dello spettro.

Ulteriori osservazioni riguarderanno la polarizzazione degli elementi di scomposizione e il comportamento delle righe della stessa serie.

Chimica. — *Sui complessi dell'acido vanadico con l'acido citrico* (¹). Nota di G. A. BARBIERI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Nel trattato di chimica di Berzelius [2] si trova il primo accenno a composti dell'acido vanadico con acidi organici. Secondo Berzelius, l'acido vanadico si scioglie, con colorazione gialla, nelle soluzioni degli acidi ossalico, tartarico e citrico: se questi acidi sono in eccesso, la soluzione diventa rapidamente verde, poi bleu perchè si forma un sale di vanadile: se gli acidi organici non sono in eccesso, la loro unione con l'acido vanadico può divenir stabile. Berzelius descrisse anche un composto dell'acido vanadico con l'acido ossalico come un prodotto amorfo rossastro che ottenne ossidando con acido nitrico l'ossalato di vanadile, ma non ne diede la formula. Nel 1886 Ditte [3], sciogliendo l'acido vanadico in una soluzione concentrata di ossalato di ammonio, ottenne una sostanza cristallizzata in prismi trasparenti giallochiari, che conteneva acido vanadico, acido ossalico e ammoniaca, e alla quale attribuì la formula

$$8(NH_4)_2O \,.\, 3V_2O_5 \,.\, 8C_2O_3 \,.\, 20H_2O\,.$$

A. Rosenheim [4], cui si devono le più estese e importanti ricerche sull'azione degli acidi metallici sugli acidi organici, ripetè l'esperienza di Ditte e ottenne con ogni probabilità lo stesso composto al quale, però, riconobbe competere la formula

$$3(NH_4)_2O \,.\, V_2O_5 \,.\, 4C_2O_3 \,.\, 4H_2O\,.$$

Non venne descritto finora nessun composto dell'acido vanadico con gli acidi tartarico e citrico.

Studiando i vanadiltartrati [5] io ebbi occasione di constatare l'esattezza dell'osservazione di Berzelius sulla solubilità dell'acido vanadico, tanto nelle soluzioni di acido tartarico quanto in quelle di acido citrico, e mi proposi d'isolare i composti complessi che probabilmente si formavano in tali soluzioni. Le ricerche con l'acido tartarico non mi hanno dato finora risultati soddisfacenti. Sciogliendo il metavanadato di ammonio in presenza di acido tartarico,

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica generale dell'Università di Ferrara.

[2] *Traité de chimie*, par I. I. Berzelius a. 1839, tomo II_{219}.

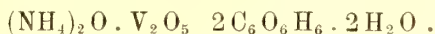
[3] Compt. rend., 102_{1021} (1886).

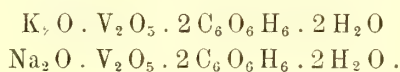
[4] Z. anorg. Ch., 4_{369} (1893).

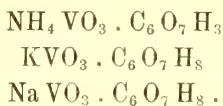
[5] Rendiconti Accad. Lincei. XXIII, 2° sem., pag. 47.

si ha un liquido rosso-aranciato incristallizzabile. Per aggiunta di alcool, precipita una polvere giallo verdastra che contiene acido tartarico, acido vanadico e ammoniaca, ma all'analisi non risultò essere un composto definito.

Risultati molto migliori ho ottenuto con l'acido citrico. Dalle soluzioni di metavanadato di ammonio e acido citrico si separa facilmente una bella sostanza cristallina bianco-giallognola che all'analisi mostrò avere la formula

$$(NH_4)_2O . V_2O_5 \quad 2C_6O_6H_6 . 2H_2O .$$

Se, invece del metavanadato di ammonio, s'impiega quello di potassio o quello di sodio, si ottengono i composti analoghi

$$K_2O . V_2O_5 . 2C_6O_6H_6 . 2H_2O$$
$$Na_2O . V_2O_5 . 2C_6O_6H_6 . 2H_2O .$$

A un primo esame sommario questi composti sembrano prodotti di addizione di metavanadato con l'acido citrico

$$NH_4VO_3 . C_6O_7H_8$$
$$KVO_3 . C_6O_7H_8$$
$$NaVO_3 . C_6O_7H_8 .$$

In realtà si tratta, invece, di composti complessi. L'acqua in essi contenuta viene eliminata facilmente sotto i 100°; quindi non fa parte dell'acido citrico. Inoltre questi composti presentano alcune reazioni che sono interpretabili soltanto ammettendo in essi un anione complesso citro-vanadico, abbastanza stabile anche in soluzione. Tali reazioni sono le seguenti. Il composto di ammonio, che è abbastanza solubile in acqua, lo è assai poco in presenza di cloruro o di solfato di ammonio. Dalle sue soluzioni concentrate esso cristallizza con buon rendimento, per aggiunta di cloruro di ammonio in sostanza. Analogamente si comportano il composto di sodio col cloruro di sodio e quello di potassio col cloruro di potassio. Dalla soluzione del composto di ammonio, per aggiunta di cloruro di potassio, cristallizza il composto di potassio. Infine, dalle soluzioni dei citrovanadati, per aggiunta di nitrato di argento, si ha un precipitato che contiene argento, acido vanadico e acido citrico, mentre è noto che l'acido citrico non viene precipitato dal nitrato di argento.

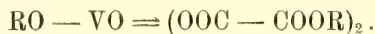
Come si può ammettere costituito il complesso citrovanadico esistente in questi composti?

A. Rosenhein cercò d'interpretare la costituzione dei composti risultanti dall'azione degli acidi metallici sugli acidi organici, mediante la teoria della valenza. Bisogna notare che la teoria della coordinazione di A. Werner era stata, allora (1893), appena enunciata.

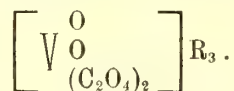
Secondo A. Rosenhein, gli ossalo vanadati avrebbero la costituzione espressa dalla formula

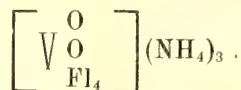
$$\begin{matrix} RO \\ RO \end{matrix}\Big\rangle V_2O_4 \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \Big(OOC - COOR\Big)_4 \qquad R = \text{metallo alcalino o radicale ammonico}$$

o, più semplicemente, dalla formula

$$RO - VO \rightleftharpoons (OOC - COOR)_2 .$$

Studiando recentemente alcuni tartrati e salicilati complessi, io ho cercato d'interpretarne la costituzione mediante la teoria della coordinazione.

A me sembra che, anche per gli ossalovanadati, la teoria della coordinazione possa fornire l'interpretazione più chiara con la formula

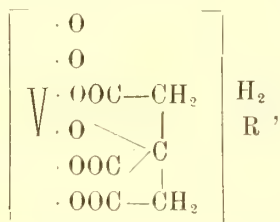
$$\left[V \begin{matrix} O \\ O \\ (C_2O_4)_2 \end{matrix} \right] R_3 .$$

In tal modo gli ossalovanadati appariscono analoghi al fluossivanadato di ammonio $VO_2Fl . 3NH_4Fl$ descritto da A. Piccini. A questo composto la teoria della valenza è incapace di attribuire una formula di costituzione, mentre la teoria della cordinazione lo rappresenta assai bene con la formula

$$\left[V \begin{matrix} O \\ O \\ Fl_4 \end{matrix} \right] (NH_4)_3 .$$

Se ora confrontiamo i citrovanadati cogli ossalovanadati e col fluossivanadato di ammonio vediamo, che in essi una molecola di acido citrico tiene il posto di due molecole di acido ossalico o di quattro atomi di fluoro.

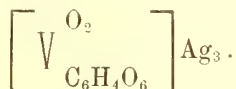
L'acido citrico possiede tre carbossili e un gruppo alcoolico terziario. Siccome l'acido vanadico è insolubile (come io ho constatato) nelle soluzioni di acido succinico, è molto probabile che la sua solubilità nelle soluzioni di acido tartarico e in quelle di acido citrico dipenda dalla presenza, in questi acidi di ossidrili alcoolici. È noto inoltre, per le ricerche recenti di Prandtl [1], che l'acido vanadico si scioglie in molti alcoli eterificandosi e che dà composti stabili specialmente cogli alcoli terziarî. Tutto ciò rende verosimile che il legame tra l'acido vanadico e l'acido citrico avvenga a spese dell'ossidrile alcoolico.

[1] Z. anorg. Ch. 82$_{103}$ (1913).

In alcune Note recenti [1] io ho cercato di dimostrare che nei salicilati e nei tartrati complessi esistono legami per valenza secondaria tra l'atomo metallico centrale e gruppi carbossilici. Nei citrovanadati le tre unità di coordinazione residue dell'atomo centrale si possono ritenere saturate dai tre carbossili dell'acido citrico. Ai citrovanadati competerebbe quindi la formula

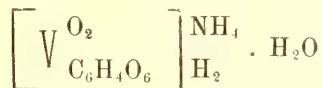
$$\left[V \begin{array}{l} \cdot O \\ \cdot O \\ \cdot OOC-CH_2 \\ \cdot O \diagdown \quad | \\ \qquad\quad C \\ \cdot OOC \diagup \quad | \\ \cdot OOC-CH_2 \end{array} \right] \begin{array}{l} H_2 \\ R \end{array} ,$$

dalla quale risulta ch'essi sono sali acidi.

Ciò mi ha indotto a tentare la preparazione dei sali neutri. Facendo reagire in opportune condizioni i citrovanadati alcalini col nitrato di argento, si ottiene il composto

$$\left[V \begin{array}{l} O_2 \\ C_6H_4O_6 \end{array} \right] Ag_3 .$$

L'esistenza di questo composto sta in accordo colla costituzione proposta.

Parte sperimentale

Citrovanadato di ammonio.

$$\left[V \begin{array}{l} O_2 \\ C_6H_4O_6 \end{array} \right] \begin{array}{l} NH_4 \\ H_2 \end{array} . H_2O$$

In 100 cc. di acqua si sciolgono 20 gr. di acido citrico: si scalda a 60°-70° la soluzione; poi vi si aggiungono a poco a poco gr. 10 di metavanadato di ammonio. Si ottiene un liquido giallo-verdastro, dal quale, per raffreddamento, si separa una sostanza bianco-giallognola in bei cristalli monoclini che vengono separati per filtrazione alla pompa e lavati con poca acqua fredda e con alcool metilico.

All'analisi si ebbero i seguenti risultati:

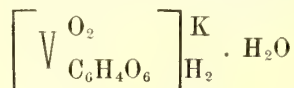
	Calcolato	Trovato
V	16,49	16,44
N	4,53	4,72
C	23,28	23,58
H	3,91	3,76

[1] Rendiconti Accad. Lincei XXIII, 2° sem., pp. 47 e 408; e vedi Nota precedente sull'acido cromisalicilico.

Il citrovanadato di ammonio è abbastanza solubile in acqua calda (60°-70°). Dalle sue soluzioni cristallizza per raffreddamento, per evaporazione o per aggiunta di cloruro di ammonio in sostanza.

Le soluzioni di citrovanadato di ammonio, scaldate all'ebullizione, diventano verdi e poi azzurre, e svolgono vapori di acetone perchè il vanadio pentavalente viene ridotto a tetravalente a spese dell'acido citrico.

Citrovanadato di potassio.

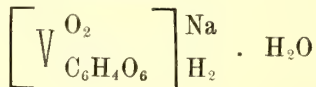
$$\left[V \begin{matrix} O_2 \\ C_6H_4O_6 \end{matrix} \right] \begin{matrix} K \\ H_2 \end{matrix} . H_2O$$

Questo composto può venir preparato tanto sciogliendo il metavanadato di potassio (una mol.) in una soluzione concentrata di acido citrico (una mol.), quanto trattando il sale di ammonio, in soluzione concentrata, con una soluzione satura di cloruro potassico.

Cristalli monoclini, trasparenti, incolori.

	Calcolato	Trovato
V	15,44	15,25
K	11,84	11,67
C	21,80	21,58
H	2,44	2,71

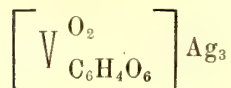
Il citrovanadato di potassio, a 100°, perdette 5,70 % del suo peso. Calcolato per 1 mol. di acqua: 5,44 %.

Citrovanadato di sodio.

$$\left[V \begin{matrix} O_2 \\ C_6H_4O_6 \end{matrix} \right] \begin{matrix} Na \\ H_2 \end{matrix} . H_2O$$

A gr. 11,7 di metavanadato di ammonio, sospesi in poca acqua, vengono aggiunti gr. 4 di soda caustica, e si scalda all'ebullizione finchè cessa lo sviluppo di ammoniaca. Alla soluzione di metavanadato sodico così ottenuta si aggiunge la soluzione di gr. 21 di acido citrico in poca acqua. Dopo alcune ore, si trova in fondo al liquido un abbondante deposito di citrovanadato sodico costituito da cristalli monoclini incolori.

	Calcolato	Trovato
V	16,24	16.31
Na	7,32	7,18
C	22,92	23,02
H	2,56	2,59

Citrovanadato di argento.

$$\left[V\begin{matrix}O_2\\C_6H_4O_6\end{matrix}\right]Ag_3$$

gr. 5 di citrovanadato di potassio vengono introdotti nella soluzione di gr. 10 di nitrato di argento in 150 cc. di acqua, e vi si lasciano digerire per 12 ore.

Polvere bianca microcristallina, insolubile in acqua.

Dopo essicazione in stufa ad acqua fino a peso costante, diedo all'analisi i seguenti risultati:

	Calcolato	Trovato
V	8,57	8,31
Ag	54,43	54,27
C	12,11	11,98
H	0,67	0,78

Chimica. — *Prodotti di disidratazione dell'acido β-difenil-lattico* [1]. Nota di R. de Fazi, presentata dal Socio E. Paternò.

In una Nota precedente [2], descrivendo alcune ricerche fatte sull'acido β-trifenil-lattico che Paternò e Chieffi avevano ottenuto per azione della luce su una mescolanza di benzofenone ed acido fenil-acetico, ho dimostrato che, per azione dell'anidride fosforica, questo acido si trasforma in α-β-difenil-indone, identico a quello descritto da Heyl e Meyer [3].

Ho ora intrapreso lo studio dell'acido β-difenil-lattico, per vedere se, sottoposto all'azione dell'anidride fosforica, dava origine al β-fenil-indone. Ma l'anidride fosforica con questo acido, nelle stesse condizioni nelle quali l'acido β-trifenil-lattico fornisce l'α-β-difenil-indone, dà luogo ad una reazione diversa.

Il β-fenil-indone però ho potuto averlo per altra via, come esporrò in una prossima Nota.

L'anidride fosforica, reagendo con l'acido β-difenil-lattico, dà un acido della formula $C_{30}\ H_{26}\ O_5$, per condensazione di due molecole di acido β-difenil-lattico, meno una molecola di acqua.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Roma.

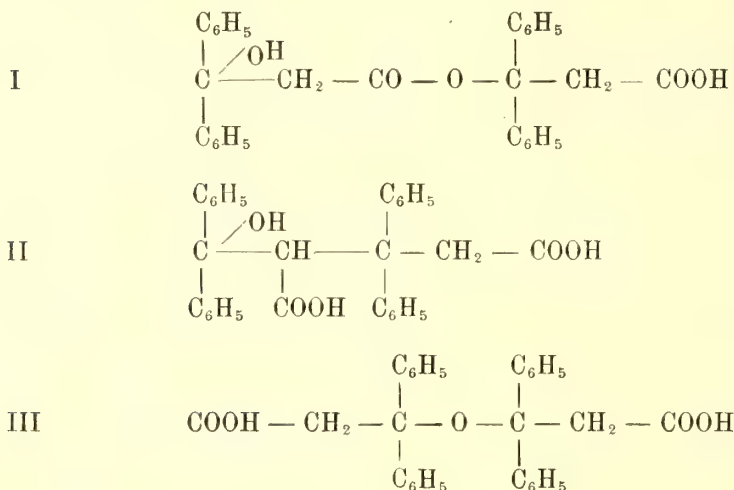
(2) Questi Rend. *24*, (1), 439 (1915).

(3) Heyl e Meyer, Ber. *28*, 2787 (1895).

Questa eliminazione poteva essere avvenuta in vario modo; e, tra le formule più probabili, quelle da prendere in maggior considerazione erano le seguenti:

$$\text{I} \qquad \begin{array}{ccccccccccccc} C_6H_5 & & & & & & & & C_6H_5 & & & & \\ \vert\ \diagup OH & & & & & & & & \vert & & & & \\ C & — & CH_2 & — & CO & — & O & — & C & — & CH_2 & — & COOH \\ \vert & & & & & & & & \vert & & & & \\ C_6H_5 & & & & & & & & C_6H_5 & & & & \end{array}$$

$$\text{II} \qquad \begin{array}{ccccccccc} C_6H_5 & & & & C_6H_5 & & & & \\ \vert\ \diagup OH & & & & \vert & & & & \\ C & — & CH & — & C & — & CH_2 & — & COOH \\ \vert & & \vert & & \vert & & & & \\ C_6H_5 & & COOH & & C_6H_5 & & & & \end{array}$$

$$\text{III} \qquad \begin{array}{ccccccccccccc} & & & & C_6H_5 & & & & C_6H_5 & & & & \\ & & & & \vert & & & & \vert & & & & \\ COOH & — & CH_2 & — & C & — & O & — & C & — & CH_2 & — & COOH \\ & & & & \vert & & & & \vert & & & & \\ & & & & C_6H_5 & & & & C_6H_5 & & & & \end{array}$$

Però l'analisi del sale d'argento di questo acido, e la titolazione con Na OH $N/_{10}$, hanno escluso la formazione di un etere del tipo della formula I; questa esclusione è confermata anche dal fatto che ho potuto ottenere, per azione dell'anidride fosforica sull'etere etilico dell'acido β-difenil-lattico, l'etere etilico, che saponificato con KOH alcoolica, dà lo stesso acido. E poichè con l'anidride acetica non reagisce, resta esclusa la presenza di un ossidrile, è resa quindi probabile la formula III. Chiamerò perciò questo acido *deidro-di-β-difenil-lattico*.

Siccome in questa reazione si poteva prevedere anche la formazione dell'acido β-difenil-acrilico, ho voluto confrontare l'acido deidro-di-β-difenil-lattico con l'acido β-difenil-acrilico, che preparai seguendo le indicazioni di Rupe e Busolt [1], cioè per azione dell'anidride acetica e acetato sodico sull'acido β-difenil-lattico. Mi accorsi, allora, che, variando di poco le condizioni di esperienza, si forma, insieme coll'acido β-difenil-acrilico, un'altra sostanza la quale dà all'analisi risultati concordanti per la formula $C_{30}\,H_{22}\,O_3$, cioè per la formula dell'anidride dell'acido β-difenil-acrilico. Infatti ho potuto trasformarla nell'acido β-difenil-acrilico; e facendo agire su questo acido l'anidride acetica e l'acetato sodico, ho ottenuto egualmente l'anidride dell'acido β-difenil-acrilico.

Continuerò lo studio degli acidi fenil-lattici, con l'acido β-fenil-lattico.

[1] Rupe e Busolt, Ber. *40*, 4537 (1907).

Azione dell'anidride fosforica sull'acido β-difenil-lattico.
Acido deidro-di-β-difenil-lattico.

Ho preparato l'acido β-difenil-lattico, secondo le indicazioni di Rupe e Busolt (¹). Facendo agire il bromo acetato di etile sul benzofenone, in soluzione nel benzolo, in presenza di zinco granulato, si ottiene l'etere etilico dell'acido β-difenil-lattico, il quale saponificato, dà l'acido.

A 3 gr. di acido β-difenil-lattico, disciolto ed in parte sospeso in 300 cc. di cloroformio anidro, a freddo, ho aggiunto a poco a poco, circa 10 gr. di anidride fosforica. La soluzione, da incolora diviene prima gialla, poi di un brl colore verde erba. Riscaldando a b. m., la colorazione verde, dopo circa 1 ora, passa al giallo arancio, poi al colore rosso, mentre tutto l'acido va in soluzione. Nel fondo del recipiente si raccoglie l'anidride fosforica colorata in rosso bruno. Dopo 6 ore di riscaldamento, decanto il cloroformio e lo distillo. Rimane un olio rosso, che poco dopo si rapprende in una massa di aghi, colorati in giallo arancio, che così impuri fondono a 154-156°. La cristallizzo da una mescolanza a parti eguali di acqua ed alcool etilico. Si ha così una sostanza in ciuffi di aghi di color giallo crema, fusibili a 155-158°. Cristallizza molto bene dall'acqua: si presenta allora in lunghissimi e fini aghi bianchi lucenti.

Si dissecca a 100° e si analizza:

I sostanza gr. 0,2092: CO_2 gr. 0,5942; H_2O gr. 0,1022
II » » 0,2593: CO_2 » 0,7327; H_2O » 0,1286

Donde %:

	Trovato	Calcolato per $C_{30}H_{26}O_5$
C	77,47-77,07	77,20
H	5,46-5,55	5,60

Ho titolato questo acido con una soluzione di Na OH $N/_{40}$:

I sostanza gr. 0,3526 Na OH adoperata gr. 0,0651
per l'acido monobasico si calcola Na OH . . . » 0,0301
per l'acido bibasico si calcola Na OH . . . . . » 0,0603
II sostanza gr. 0,0987 Na OH adoperata » 0,0184
per l'acido bibasico si calcola Na OH . . . . » 0,0170

Ho preparato il sale d'argento di questo acido deidro-di-β-difenil-lattico nel seguente modo:

A gr. 0,50 del sale d'ammonio di questo composto ho aggiunto una soluzione di nitrato d'argento (la quantità teorica di nitrato d'argento): pre-

(¹) Rupe e Busolt, loc. cit.

cipita così una sostanza bianca, fioccosa. In istufa a 100°, dopo 2 ore, sembra si alteri.

Se ne determina l'argento:

I sostanza tenuta in essicatore, su anidride fosforica, gr. 0,1915: Ag gr. 0,0608.

II sostanza gr. 0,1941: Ag gr. 0,0611.

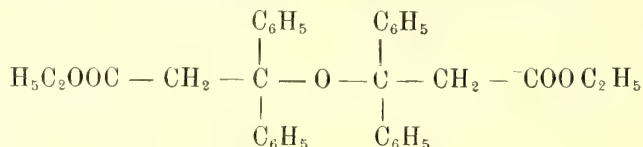
Donde °/₀:

	Trovato	Calcolato per $C_{30} H_{24} O_5 Ag_2$
Ag	31,74-31,46	31,76

Su 1 gr. di acido deidro-di-β-difenil-lattico ho fatto agire, a caldo, per 2 ore l'anidride acetica e l'acetato sodico, ma ho ottenuto il prodotto inalterato.

L'acido deidro-di-β-difenil-lattico è molto solubile in alcool etilico, metilico, in benzolo, in acetone e in cloroformio. Con $H_2 SO_4$ conc., a freddo, si colora in verde smeraldo; a caldo, in rosso.

Azione dell'anidride fosforica sull'etere etilico dell'acido β-difenil-lattico. Etere etilico dell'acido deidro-di-β-difenil-lattico.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & C_6H_5 & & C_6H_5 & \\
 & | & & | & \\
H_5C_2OOC - CH_2 - & C & - O - & C & - CH_2 - COO C_2 H_5 \\
 & | & & | & \\
 & C_6H_5 & & C_6H_5 &
\end{array}
$$

Si disciolgono 5 gr. di etere etilico dell'acido β-difenil-lattico, in 200 cc. di cloroformio anidro, e poi si aggiungono circa 10 gr. di anidride fosforica. Si fa bollire a b. m. per 8 ore. La soluzione, da incolora, diviene di color giallo pallido, poi giallo verdastro, passa quindi al colore arancio e al rosso intenso.

Distillato il cloroformio, rimane un olio denso, di colore rosso, che si dissecca con $Ca Cl_2$, per due giorni; poi si distilla nel vuoto:

a 8 cm. si raccolgono i prodotti tra 210-215°; e si analizzano:

Sostanza gr. 0,3345: CO_2 gr. 0,9703; $H_2 O$ gr. 0,1929.

Donde °/₀:

Trovato		Calcolato per $C_{34} H_{34} O_5$	
C	79,10	C	78,16
H	6,45	H	6,51

Questa quantità in più di carbonio e in meno di idrogeno non deve meravigliare, poichè è dovuta alla presenza di traccie di etere etilico dell'acido β-difenil-acrilico, che si formano durante la distillazione.

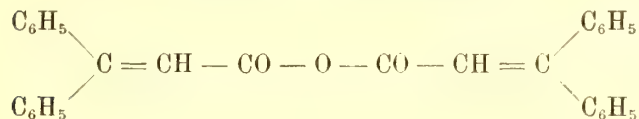
Ho voluto provare se per saponificazione di questo etere potevo ottenere l'acido deidro-di-β-difenil-lattico.

Ho disciolto questo etere in una soluzione di KOH alcoolica al 30 %, e ho fatto bollire per 2 ore. Poi ho distillato l'alcool, e, dopo aver aggiunto acqua ed estratto con etere, ho acidificato la soluzione con HCl diluito. Precipita una sostanza in fiocchi, di colore bianco sporco, che così impura fonde a 154-156°. Cristallizzata da una mescolanza di acqua ed alcool (1:1), si ha l'acido deidro-di-β-difenil-lattico, in lunghi aghi, incolori, trasparenti e lucenti, che fondono a 156-158°.

Da 3 gr. di etere etilico dell'acido deidro-di-β-difenil-lattico si ottengono circa gr. 2 di acido. Conviene quindi prepararlo saponificando l'etere etilico.

Anche questo, con H_2SO_4 conc. si colora in verde smeraldo; per aggiunta di acqua, raffreddando la soluzione, precipita una sostanza in fiocchi, che fonde a 150-155° ed è acido deidro-di-β-difenil-lattico impuro.

Azione dell'anidride acetica sull'acido β-difenil-lattico.
Anidride dell'acido β-difenil-acrilico.

$$\begin{matrix} C_6H_5 \diagdown & & & \diagup C_6H_5 \\ & C = CH - CO - O - CO - CH = C & & \\ C_6H_5 \diagup & & & \diagdown C_6H_5 \end{matrix}$$

Rupe e Busolt [1], facendo agire l'anidride acetica sull'acido β-difenil-lattico, ottennero l'acido β-difenil-acrilico.

Avendo voluto preparare di nuovo questo acido, come ho già detto, ho notato che si formano due sostanze, una è l'acido β-difenil-acrilico descritto da Rupe e Busolt; l'altra è l'anidride dell'acido β-difenil-acrilico.

Ho fatto agire per 3 ore, a caldo, gr. 10 di anidride acetica e gr. 10 di acetato sodico, su gr. 3 di acido β-difenil-lattico. Poi ho aggiunto acqua e riscaldato a b. m. per mandare via l'eccesso di anidride acetica. Per raffreddamento, solidifica la sostanza oleosa formatasi, che si era raccolta in fondo al recipiente; mentre nel liquido rimane sospesa una sostanza bianca, in piccole foglie lucenti. Si filtra e si discioglie poi tutto, in poco alcool bollente. Per raffreddamento si depositano dei pic coli aghi bianchi, che fondono a 120° circa.

Se alle acque madri si aggiunge un po' d'acqua e si fa bollire, quando la soluzione è fredda si depositano delle foglioline trasparenti, setacee, lucenti, fusibili a 158-160°, che sono acido β-difenil-acrilico.

[1] Rupe e Bulsolt, loc. cit.

La sostanza, fusibile a 120° circa, si ricristallizza dall'alcool. Si hanno così ciuffi di aghi bianchi, che fondono a 118-120°. Si disseccano a 100° e si analizzano:

Sostanza gr. 0,2015: CO_2 gr. 0,6171; H_2O gr. 0,0939.

Donde %:

Trovato	Calcolato per $C_{30}H_{22}O_3$
C 83,53	C 83,82
H 5,21	H 5,11

I risultati dell'analisi concordano dunque con la formula dell'anidride dell'acido β-difenil-acrilico. Infatti la sostanza si discioglie a caldo negli idrati alcalini.

Aggiungendo H_2SO_4 diluito alla soluzione, e estraendo con etere, si può avere l'acido β-difenil-acrilico fusibile a 158-160°. Si ottiene anche questa anidride facendo agire l'anidride acetica e l'acetato sodico, a caldo, per 3 ore, sull'acido β-difenil-acrilico.

Questa anidride, con H_2SO_4 conc., a freddo, si colora in verde smeraldo; a caldo, in rosso intenso.

Chimica. — *Sulle amalgame di magnesio* [1]. Nota di L. Cambi e di G. Speroni, presentata dal Socio R. Nasini.

Proseguendo nelle ricerche sulle amalgame dei metalli alcalino-terrosi, delle quali abbiamo già comunicate [2] quelle riguardanti le amalgame di calcio, esponiamo in questa Nota le esperienze da noi compiute sulle amalgame di magnesio.

Applicammo allo studio di queste leghe il metodo stesso descritto nella nostra Nota precedente.

Le amalgame vennero preparate nel modo ben noto, di disciogliere cioè il magnesio in pezzi ben tersi, con superficie di fresco rinnovata, nel mercurio bollente [3]. Facemmo avvenire la reazione in tubi di vetro Jena ed in atmosfera di azoto puro.

Il mercurio adoperato era puro, ridistillato; il magnesio era quello del commercio, in lastre. L'analisi ci ha indicato in esso un contenuto di magnesio del 99 per cento; conteneva allumino e ferro, complessivamente per il 0.36 su cento.

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di elettrochimica del R. Istituto tecnico superiore di Milano, diretto dal prof. G. Carrara.

[2] Questi Rendiconti 1914, II, 599.

[3] Wanklin e Chapmann, Journal Chem. Soc. *19*, pag. 144; Kerp, Böttger, Iggena, Zeit. anorg. Chemie, *25* (1900), pag. 33.

Per le miscele ad un contenuto di magnesio superiore ai 20 atomi su cento, per avere una formazione completa dell'amalgama senza incorrere in troppo rilevanti variazioni nei rapporti fra magnesio e mercurio, preferimmo iniziare soltanto la formazione dell'amalgama in tubo aperto e riscaldare poi a 390°-400° in tubo chiuso: tale riscaldamento prolungammo per 36 o 48 ore a seconda dei casi. Tutte le varie miscele poi, indistintamente, prima di sottoporle all'analisi termica, vennero riscaldate per 48 ore circa, a 150°.

Le ricerche che ora comunichiamo si arrestano alla miscela 1 Mg : 1 Hg, perchè già questa offerse notevole difficoltà ad assumere un aspetto uniforme: il magnesio in questi rapporti finisce per reagire assai lentamente, alle temperature alle quali operammo, con l'amalgama formatasi inizialmente. Occorrerebbe agire a pressioni elevate per poter raggiungere la temperatura di fusione completa di queste leghe ad elevato tenore di magnesio. Si presenta dunque un caso analogo a quello osservato nelle amalgame di calcio.

L'analisi termica venne compiuta con gli stessi apparecchi descritti a proposito delle amalgame di calcio. Durante l'analisi stessa, le amalgame vennero mantenute in atmosfera di anidride carbonica secca che anche in questo caso non aveva azione chimica sensibile su di esse, mentre invece le preservava assai bene dall'ossidazione e dall'umidità atmosferica.

Eseguimmo due serie di analisi termiche, l'una con letture dirette, l'altra con un galvanometro registratore: usammo generalmente 30 gr. di lega, e a questa quantità si riferiscono le durate di arresto più oltre riportate. Le temperature di inizio di congelamento vennero determinate, per il tratto da 0 a 20 atomi su cento di magnesio, impiegando 70 grammi di ogni miscela ed agitando opportunamente la lega durante il raffreddamento.

In numerosi casi controllammo, dopo l'analisi termica, la composizione della lega, trattando la massa totale di essa con acido solforico diluito e dosando il magnesio in un'aliquota della soluzione ottenuta: nella tabella che segue riportiamo questi dati analitici che dimostrano come durante l'analisi termica le varie amalgame subissero variazioni pressochè trascurabili di composizione.

Notiamo, infine, che il raffreddamento nelle nostre misure venne seguìto fino alla temperatura del miscuglio frigorifero anidride carbonica solida-acetone.

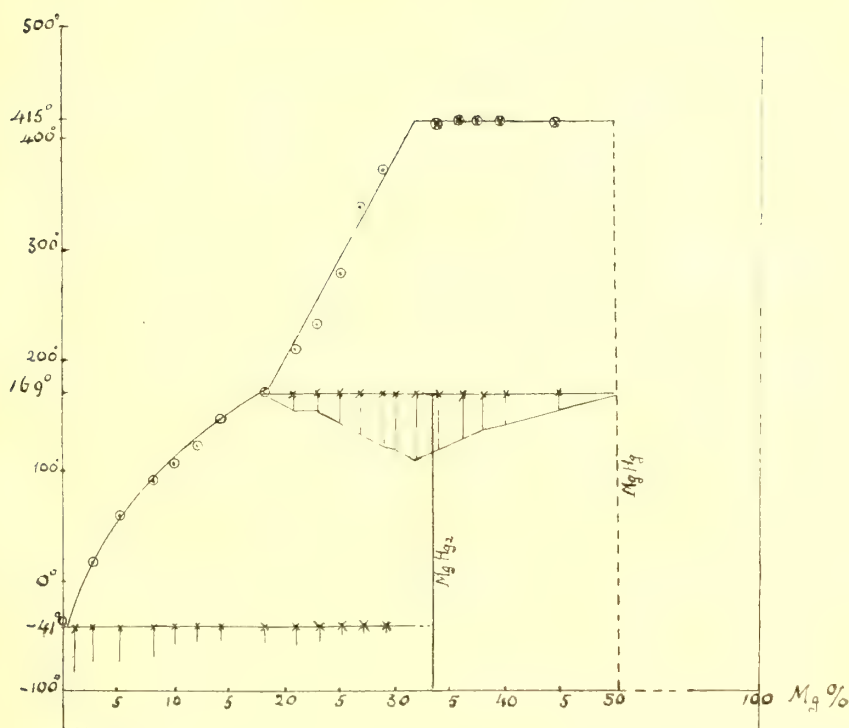
I dati termici sono riassunti nella tabella e nel diagramma seguenti:

Num.	Mg. °/o in gr. atomi	Mg. °/o in gr. preparato	Mg. °/o in gr. trovato analiticam.	Inizio della cristallizzazione	Arresto	Durata dell'arresto	Eutettico	Durata dell'eutettico	Temperatura di ebullizione
1	0	0	0	39°,6	—	—	—	—	—
2	1	0,12	0.12	?	—	—	—41°	120″	—
3	2,5	0,31	0,31	17	—	—	—41	100	—
4	5	0,64	—	55	—	—	—41	100	—
5	8	1,04	1,04	89	—	—	—41	90	—
6	10	1,32	1,34	106	—	—	—41	50	—
7	12	1,62	—	119	—	—	—	—	—
8	14	1,93	1,94	145	—	—	—41	40	—
9	18	2,58	2,48	168	168°	—	—41	50	—
10	21	3,11	2,95	207	168	40″	—41	50	—
11	23	3,48	—	230	168	40	—41	50	—
12	25	3,88	3,64	277	169	80	—41	20	—
13	27	4,27	4,21	335	169	110	—41	20	—
14	29	4,71	4,25	370	169	150	—41	10	—
15	30	4,94	5,08	?	169	150	—41	10	405°
16	32	5,37	5,64	—	169	170	—	—	412
17	34	5,87	5,96	—	169	150	—	—	412
18	36	6,36	6,73	—	169	130	—	—	415
19	38	6,86	—	—	169	100	—	—	415
20	40	7,40	7,56	—	169	80	—	—	415
21	45	9,02	—	—	169	40	-	—	415
22	50	10,81	—	—	169	10	—	—	—

L'analisi termica adunque indica nettamente la presenza del composto $Mg\,Hg_2$ che fonde, decomponendosi, a 168°. Indica pure la presenza del composto Mg Hg, per quanto questa non possa affermarsi in modo assoluto avendo appunto dovuto limitare lo studio del sistema alla lega avente il rapporto 1 Mg : 1 Hg.

Alla concentrazione di 30 atomi di magnesio, su cento, le amalgame raggiungono la temperatura d'ebollizione, a pressione ordinaria, di 415°: oltre questo rapporto, le miscele non fondono completamente alla pressione atmosferica.

I nostri dati differiscono alquanto dalle osservazioni di Kerp, Böttger ed Iggena [1]: questi autori dicono che la solubilità del magnesio a 300°,

[1] Kerp, Böttger e Iggena, loc. cit., pag. 34.

nel mercurio, è di circa una parte su cento, mentre dalle nostre misure risulta che già a 280° il magnesio ha una solubilità del 3,88 su cento. La diversità dei dati deve forse attribuirsi ad un incompleto stabilirsi dell'equilibrio, nelle esperienze di questi autori; d'altra parte non sappiamo come essi operassero in questa determinazione. Concorda invece col nostro dato la solubilità, che gli stessi autori indicano a temperatura ambiente, di 0,313 su cento; noi troviamo che tale soluzione è satura a 17°.

I sistemi Ca-Hg e Mg-Hg, nei due tratti studiati presentano una certa analogia: le amalgame di magnesio si differenziano però per una maggiore solubilità del magnesio ($MgHg_2$), rispetto al calcio ($CaHg_4$), nel mercurio. A 109°, ad esempio, l'amalgama satura di calcio ha una concentrazione di 2,86 % atomi Ca (0,63 % grammi) [1], contro 10 % atomi Mg (1.34 % grammi), a 106°, dell'amalgama di magnesio.

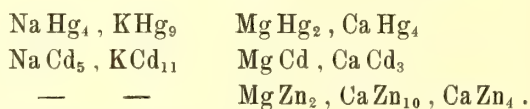
In accordo osserviamo che l'amalgama di calcio, satura, bolle, a pressione atmosferica, a 377° ed ha la composizione di 13-14 % atomi di calcio, mentre quella di magnesio, pure satura, bolle a 415° ed ha la composizione di 32-34 % atomi.

[1] Cambi e Speroni, loc. cit., pag. 604.

Finora erano stati descritti due composti fra magnesio e mercurio: $Mg Hg_6$ separato per filtrazione da amalgame semifluide [1], ed $Mg Hg_4$ la cui esistenza era stata dedotta in base a misure di calori sperifici [2]. L'analisi termica non conferma questi composti. Miscele $Mg : 6\,Hg$ si conservano del resto semifluide, eterogenee. Rispetto poi al metodo con cui venne isolato il presunto composto $Mg Hg_6$, rimandiamo alle osservazioni che noi abbiamo fatto a proposito dei composti delle amalgame di calcio.

Il composto $Mg Hg_2$ trova l'analogo nel noto composto $Mg Zn_2$, mentre il composto probabile $Mg Hg$ avrebbe un riscontro nel composto $Mg Cd$.

Conchiudendo infine sui rapporti fra le amalgame di calcio e quelle di magnesio, riportiamo le formole dei seguenti composti metallici che mostrano un'analogia di comportamento fra le due coppie omologhe sodio-potassio, magnesio-calcio:

$Na Hg_4$, $K Hg_9$	$Mg Hg_2$, $Ca Hg_4$
$Na Cd_5$, $K Cd_{11}$	$Mg Cd$, $Ca Cd_3$
— —	$Mg Zn_2$, $Ca Zn_{10}$, $Ca Zn_4$.

Per un confronto sistematico sui varî composti metallici presentano interesse le ricerche che stiamo compiendo sulle amalgame di stronzio e di bario.

Chimica-fisica. — *Analisi termica delle miscele degli idrati alcalini coi corrispondenti alogenuri. I. Composti di potassio* [3]. Nota di Giuseppe Scarpa, presentata dal Socio G. Ciamician.

È noto, da molto tempo, che gli ossidi di alcuni metalli possano combinarsi coi rispettivi sali alogenati, dando luogo alla formazione di composti stabili ben definiti. Molti di questi composti, che vengono chiamati ossialogenuri, sono stati preparati per via umida.

W. Spring e M. Lucion [4] studiarono il comportamento dell'idrato di rame nelle soluzioni dei rispettivi sali alogenati, e riuscirono ad isolare i tre ossialogenuri corrispondenti: $Cu_2 Cl_2 \cdot CuO \cdot 3H_2O$; $Cu_2 Br_2 \cdot CuO \cdot 3H_2O$; $Cu_2 I_2 \cdot CuO \cdot 3H_2O$.

Egualmente, per il mercurio, Cox [5] ottenne un ossifluoruro: $Hg Fl_2 \cdot HgO \cdot H_2O$; Millon e Thummel [6] riuscirono a preparare i quattro ossicloruri

(1) Kerp, Böttger e Iggena, loc. cit., pag. 34.

(2) Bachmetjeff e Wsharoff, Jahr. Ber., 1893, pag. 108.

(3) Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Padova, diretto dal prof. G. Bruni.

(4) Zeitschr. f. anorg. Chem., *2*, 195 (1892).

(5) Zeitschr. f. anorg. Chem., *40*, 146 (1904).

(6) Ann. Chem. Journ., *29*, 319 (1903).

$HgCl_2 \cdot HgO$, $HgCl_2 \cdot 2HgO$, $HgCl_2 \cdot 3HgO$, $HgCl_2 \cdot 4HgO$, e gli ossibromuri di analoga composizione; Rammelsberg (1) l'ossiioduro $HgI_2 \cdot 3HgO$.

Uno studio accurato fece D. Strömbolm (2) sugli ossisali del piombo e riuscì ad isolare i seguenti composti ossialogenati: $6PbO \cdot PbCl_2 \cdot 2H_2O$; $3PbO \cdot PbCl_2 \cdot {}^1/_2 H_2O$; $6PbO \cdot PbBr_2 \cdot 2H_2O$; $3PbO \cdot PbBr_2 \cdot {}^3/_4 H_2O$; $PbO \cdot PbBr_2 \cdot H_2O$; $6PbO \cdot PbI_2 \cdot 2H_2O$; $9PbO \cdot PbI_2 \cdot 2H_2O$; $3PbO \cdot PbI_2 \cdot H_2O$; $PbO \cdot PbI_2 \cdot H_2O$.

Questa proprietà di formare composti ossialogenati si estende, oltre ai sopracitati, ad alcuni altri metalli, fra i quali il Ca, Mg, Zn, e i di cui composti sono descritti dettagliatamente nella letteratura.

Mentre però le cognizioni sulla formazione di questi composti ossialogenati per via umida sono estese, assai scarsi e limitati sono gli studî sul comportamento, ad alta temperatura, degli stessi ossidi metallici verso i corrispondenti sali alogenati. La ragione di questo deve attribuirsi alla facile alterabilità di molti ossidi e alla grandissima difficoltà che essi presentano alla fusione.

Le ricerche, a quanto mi consta, si riducono a quelle di Ruer (3), il quale studiò il sistema $PbO - PbCl_2$; di C. Sandonnini (4), il quale estese lo studio termico ai due sistemi $PbO - PbBr_2$ e $PbO - PbFl_2$, e a quelle di W. Truthe (5) il quale prese in esame il sistema $Cu_2O - Cu_2Cl_2$.

Dalle osperienze di questi autori risulta che, mentre per il sistema $Cu_2O - Cu_2Cl_2$ e $PbO - PbFl_2$ non si nota formazione di alcun composto, per i sistemi fra l'ossido di piombo e i corrispondenti cloruro e bromuro si ha formazione di composti ossialogenati ben definiti.

Data la scarsezza delle nostre cognizioni, mi parve interessante di estendere le ricerche in questo campo; e approfittando della facilità alla fusione e stabilità degli idrati alcalini, intrapresi a studiare il comportamento di questi sali nelle miscele dei corrispondenti sali alogenati, per vedere se anche per i metalli alcalini era possibile la formazione di composti ossialogenati.

Vennero perciò anzitutto sperimentati i quattro seguenti sistemi: KOH - KFl , KOH - KCl , KOH - KBr , KOH - KJ , i cui risultati sono esposti nella presente Nota.

Lo studio di questi sistemi viene reso alquanto difficile: in primo luogo, perchè non si riesce a trovare un recipiente il quale sia completamente inattaccabile dagli idrati alcalini: secondariamente, perchè questi ultimi sali ten-

(1) Pogg. Ann., *48*, 182; *131*, 524.
(2) Zeitschr. f. anorg. Chem., *38*, 429 (1904).
(3) Zeitschr. f. anorg. Chem., *49*, 365 (1906).
(4) Rend. R. Accad. Lincei [5], 23, I, 959 (1914).
(5) Zeitschr. f. anorg. Chem., *76*, 165 (1912).

dono ad assorbire notevoli quantità di umidità e di anidride carbonica dell'aria.

Siccome dalle numerose esperienze di molti autori, fra i quali Scheuner-Kestner [1], Dittmar [2], Le Blanc e Brode [3], Liebenon e Strasser [4], Lorenz e Sacher [5], Le Blanc e Bergmann [6], i quali studiarono l'attaccabilità dei metalli mediante gli idrati alcalini fusi, appare che l'argento, fra tutti i metalli, dopo l'oro, presenta la proprietà di esser attaccato il più leggermente dagli idrati alcalini, specie quando la temperatura non sia troppo alta, e il sale fuso sia fuori del contatto dell'aria, mi servii, come recipiente per la fusione delle diverse miscele, di crogiuoli di argento. Il crogiuolo veniva messo entro un cilindro di ferro posto dentro un fornetto elettrico a resistenza di nichel, e ben chiuso superiormente con un coperchio di porcellana, attraverso il quale si faceva arrivare una forte corrente di azoto, in modo da evitare l'azione dell'umidità e dell'anidride carbonica dell'aria sulla miscela fusa.

Per la misura delle temperature, non potendo usare la pila termoelettrica platino-platino rodio, poichè nella fusione il platino viene fortemente attaccato, dovetti ricorrere ad un termoelemento di argento-nichel. Questo termoelemento venne da me costruito in laboratorio con due fili calibrati, ciascuno dello spessore di 0,5 mm.

Le curve di solidificazione vennero determinate immergendo direttamente la pila nella massa fusa, poichè, ponendo la pila dentro un piccolo cilindro pure di argento, si notavano sulle curve di solidificazione, in modo assai poco netto ed evidente, le variazioni di calore che avvengono nella massa durante il raffreddamento.

Operando in questo modo, si osserva, però, che il filo di nichel si copre di uno strato sottilissimo nero, forse dovuto alla formazione di ossido di nichel, mentre il filo di argento, dopo un uso assai prolungato, viene intaccato leggermente; tuttavia ho osservato che la forza elettromotrice dell'elemento si mantiene sensibilmente la stessa, portando quindi, sui risultati ottenuti, delle alterazioni assai piccole e, praticamente, del tutto trascurabili.

Con questo termoelemento vennero determinate le curve di solidificazione di tutte le miscele, le cui temperature di solidificazione non erano di molto superiori ai 900°; per un piccolo numero di miscele, quali quelle più ricche in fluoruro, dovetti servirmi di un crogiuolo di platino e di una pila

(1) Bull. Soc. Chim. [3], *15,* 1250.
(2) Zeitschr. f. analyt. Chem., *24,* 76 (1815).
(3) Zeitschr. f. Elektr. Chem., *8,* 719 (1902).
(4) Zeitschr. f. Elektr. Chem., *3,* 333 (1897).
(5) Elektrolyse gesmolzener Salze III.
(6) Ber. d. d. chem. Ges., *42,* 4728 (1909).

platino - platino rodio. Data però la povertà di queste miscele in idrato alcalino, l'attacco sia del crogiuolo di platino sia della pila fu quasi nullo.

Le curve di solidificazione eseguite coll'elemento Ag - Ni, vennero ottenute seguendo le variazioni della forza elettromotrice, espressa in millivolts di un galvanometro Siemens ed Halske.

Da questi dati espressi in millivolts, si passa alle temperature corrispondenti esprimendo la forza elettromotrice come funzione della temperatura, prendendo cioè un sistema di assi cartesiani e portandovi in esso come ascisse le temperature e come ordinate le forze elettromotrici espresse in millivolts.

Per la graduazione degli strumenti furono presi i punti di ebollizione dell'acqua (100°), dell'anilina (183°), il punto di fusione dello stagno (232°), dello zinco (419°), dell'antimonio (624°), determinati colla pila Pt-Pt-Rh, e le forze elettromotrici espresse in millivolts corrispondenti a questi punti, eseguiti cola pila Ag - Ni.

I prodotti adoperati provenivano tutti dalla ditta C. Erba di Milano, e alla fusione si mostrarono assai puri.

Venne determinato, prima di iniziare le ricerche sperimentali, il contenuto in acqua e in carbonato dell'idrato potassico.

Le analisi, eseguite sul prodotto preso da un vaso aperto per la prima volta, diedero i seguenti risultati:

KOH contiene: $KOH = 89.53\ \%$; $K_2CO_3 = 1.47\ \%$; $H_2O = 9\ \%$.

Per eliminare completamente l'acqua contenuta nell'idrato alcalino, le quantità di esso di ciascuna miscela venivano da sole portate alla fusione e mantenute a questa temperatura per tre, quattro ore, in forte corrente di azoto. Durante questo riscaldamento la temperatura venne sempre tenuta alquanto al disotto di 500°, poichè al disopra di questa temperatura il crogiuolo di argento viene piuttosto fortemente intaccato. Dopo l'eliminazione completa dell'acqua, venivano aggiunte le quantità corrispondenti degli altri sali.

Nel corso delle esperienze vennero usate sempre miscele di una massa costante eguale a trenta grammi.

Sistema KOH - KFl.

Il punto di fusione di KOH venne da me trovato a 380° e si discosta alquanto da quello dato da Hevesy [1] (360°), e maggiormente da quello dato da Neuman e Bergve [2] (345°). Il punto di trasformazione, secondo Hevesy (loc. cit.), giace a 248°; dalle mie misure risulta a 260°.

(1) Zeitschr. f. physik. Ch., *73*, 667 (1910).
(2) Zeitschr. f. Elektroch., *20*, 271 (1914).

Il fluoruro potassico solidifica a 857°. Questa temperatura è in buon accordo con quella trovata da Plato [1] (859°.9) e da Karandezen [2] (867°); differisce alquanto da quelle date da Kurnakow e Žemcžužny [3] (837°), da Puschin e Baskow [4] (885°).

Le temperature di solidificazione di tutte le miscele stanno fra i punti di solidificazione dei due componenti, i quali sono completamente miscibili allo stato solido dando luogo alla formazione di cristalli misti di una sola specie. Conseguentemente al formarsi di soluzioni solide, il punto di trasformazione di KOH, come risulta dalle curve di solidificazione, va gradatamente abbassandosi coll'aumentare, nelle miscele, della concentrazione del fluoruro potassico (vedi tabella 1ª e fig. 1ª).

Sistema KOH - KCl.

Il cloruro potassico da me adoperato fondeva a 776°. Il suo punto di fusione sta quindi in buon accordo con quello dato da Hüttner e Tammann [5] (778°), da Menge [6] (776°), da Truthe [7] (775°), da Sandonnini [8] (776°); è di alcuni gradi inferiore a quello trovato da Kurnakow e Žemcžužny [9] (790°) e da Ruff e Plato [10] (790°).

Come appare dal diagramma fig. 2ª, la curva di cristallizzazione primaria discende dal punto di solidificazione di KCl a quello di KOH, presentando un evidente gomito alla temperatura di 430° e alla concentrazione di circa 67 mol. °/₀ di idrato potassico. Le miscele da 36 a 67 mol. °/₀ di KOH presentano, oltre all'arresto di cristallizzazione primaria, un secondo arresto a 430°; le miscele da 0 a 25, e da 47 a 100 °/₀ mol. di KOH presentano un intervallo di cristallizzazione, dovuto alla formazione di cristalli misti.

Questi due sali presentano perciò il 4° tipo di Roozeboom: dànno cioè luogo a formazione di cristalli misti di due specie, con lacuna di miscibilità.

Il punto di trasformazione di KOH viene notevolmente abbassato per aggiunta di KCl, tanto che a 82° mol. °/₀ di idrato potassico risulta già a circa 120°.

A questa temperatura si nota nelle curve di raffreddamento un forte arresto.

(1) Zeitschr. f. phys. Chem. *58*, 350 (1907).
(2) Zbl. Min. Geol., 728 (1909).
(3) Zeitschr. f. anorg. Chem., *74*, 90 (1912).
(4) Zeitschr. f. anorg. Chem., *81*, 350 (1913).
(5) Zeitschr. f. anorg. Chem., *43*, 224 (1905).
(6) Dissertation, Göttingen 1911.
(7) Zeitschr. f. anorg. Chem., *76*, 136 (1912).
(8) Rend. R. Accad. dei Lincei (5), 20, I, 457 (1911).
(9) Zeitschr. f. anorg. Chem., *52*, 186 (1907).
(10) Ber. chem. Ges., *36*, 2357 (1903).

Questo arresto, il quale assume un massimo di durata a circa 82 mol. % di KOH e si rende nullo rispettivamente a 20 e a 100 mol. % di idrato potassico, è un eutettico che si forma tra il punto di trasformazione di KOH e il limite dei cristalli misti che si formano dalla parte dell'idrato potassico.

Mentre però si potè seguire con ogni sicurezza l'abbassarsi della trasformazione di KOH, e il formarsi dell'arresto eutettico, non fu possibile di cogliere con sicurezza alcun punto della curva di cristallizzazione discendente dal limite delle soluzioni solide di KCl in KOH (vedi tabella 2ª, fig. 2ª).

TABELLA I.

Peso % KOH	Peso % KFl	Mol. % KOH	Mol. % KFl	Temperature inizio cristallizzazione	Temperature fine cristallizzazione	Temperature trasformazione KOH
0.00	100.00	0.00	100.00	857	—	—
10.00	90.00	10.40	89.60	835	790	—
20.00	80.00	20.34	79.66	795	750	—
30.00	70.00	30.63	69.37	750	700	138
40.00	60.00	40.80	59.20	710	660	142
50.00	50.00	51.14	48.86	665	615	155
60.00	40.00	61.14	38.86	625	560	170
70.00	30.00	71.02	28.93	570	505	188
80.00	20.00	80.79	19.21	505	460	200
90.00	10.00	90.39	09.61	450	415	220
95.00	5.00	95.15	4.85	420	395	235
100.00	0.00	100.00	0.00	380	—	265

TABELLA II.

Peso % KOH	Peso % KOH	Mol. % KOH	Mol. % KCl	Temperature inizio cristallizzaz.	Temperature I arresto	Temperature fine cristallizzaz.	Temper. trasformazione KOH	Temper. arresto eutettico	Durate in secondi
00.00	100.00	00 00	100.00	776	—	—	—	—	—
10.00	90.00	12.94	87.06	734	—	660	—	—	—
20.00	80.00	24.65	75.35	692	—	560	—	—	—
30.00	70.00	36.06	63.94	645	430	—	—	125	30
40.00	60.00	47.02	52.98	585	432	—	—	125	80
50.00	50.00	57.05	42.95	475	430	410	—	128	120
60.00	40 00	66.87	33.13	430	430	400	—	130	140
70.00	30.00	75.61	24.39	422	—	395	—	128	170
80.00	20.00	84 02	15.98	415	—	390	150	122	100
90.00	10.00	92 48	7.52	402	—	385	215	120	50
95.00	5.00	96.19	3.81	395	—	385	245	110	20
100.00	00.00	—	00.00	380	—	—	265	—	—

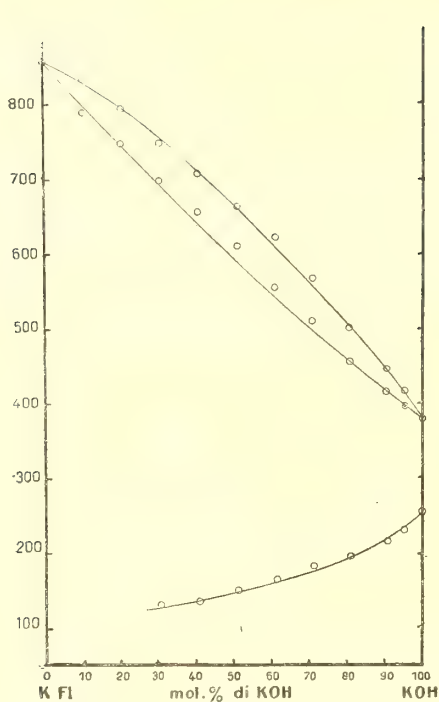
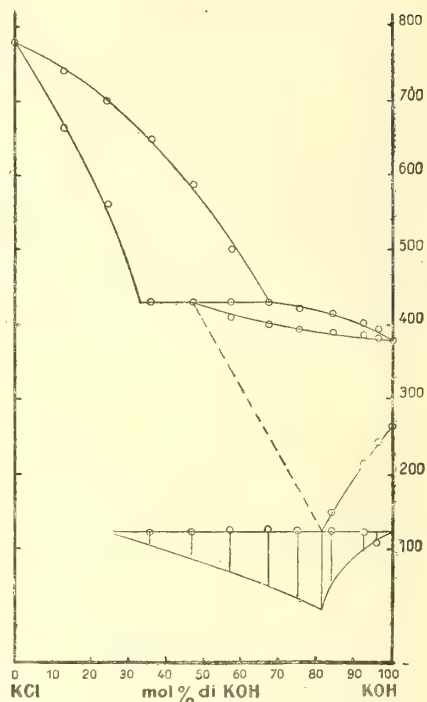



FIG 1. FIG. 2.

Sistema KOH - KBr.

Il punto di fusione del bromuro potassico da me usato giaceva a 760°, e concorda perciò con quello di Ruff e Plato (loc. cit.) (750°), di Kurnakow e Žemcžužny (loc. cit.) (757°); è alquanto superiore a quello dato da Hüttner e Tammann (loc. cit.) (740°), da Amadori (¹) (740°) e da De Cesaris (²) (730°).

I dati termici di questo sistema sono raccolti nella tabella 3ª e graficamente rappresentati nella fig. 3ª.

Il diagramma di solidificazione mostra che i due componenti, se si eccettua la formazione di cristalli misti in rapporti piuttosto ristretti dalla parte di KOH, sono completamente miscibili allo stato liquido.

L'arresto eutettico giace a 300° e assume un massimo di durata a 75 mol. % di KOH, mentre si annulla rispettivamente a 0 e a 85 circa mol. % di idrato potassico.

(¹) Rend. R. Accad. Lincei [5], 20, II, 572 (1911).
(²) Rend. R. Accad. Lincei [5], 20 (1911).

Dalle curve di raffreddamento appare che il punto di trasformazione di KOH si abbassa dapprima rapidamente, tanto che per la miscela a circa 90° mol. % di KOH giace a 205°; poi, per tutte le altre miscele rimane pressochè costante a questa temperatura.

Sistema KOH - KJ.

L'ioduro potassico da me adoperato solidificava a 695°. Questa temperatura concorda pienamente coi punti di fusione dati dalla maggior parte degli autori sopracitati: Ruff e Plato (loc. cit.) (705°), Kurnakow e Žemčužny (loc. cit.) (693°), Hüttner e Tammann (loc. cit) (680°).

La curva di cristallizzazione primaria è costituita da due rami, i quali, scendendo dai punti di fusione dei due componenti s'intersecano in un punto eutettico a circa 73 mol. % di KOH e alla temperatura di 250°.

La trasformazione dell'idrato potassico avviene a una temperatura di assai poco superiore a quella dell'arresto eutettico.

Dalle curve di raffreddamento si può tuttavia cogliere con sufficiente sicurezza l'inizio della trasformazione (vedi fig. 4ª, tav. 4ª).

Riassumendo, dai risultati termici ottenuti si conclude che l'idrato potassico dà:

col fluoruro, soluzioni solide in ogni rapporto;

col cloruro e col bromuro, soluzioni solide di due specie, con lacuna di miscibilità;

coll'ioduro, formazione di un semplice eutettico.

TABELLA III.

Peso % KOH	Peso % KBr	Mol. % KOH	Mol. % KBr	Temperature inizio cristallizzazione	Temperature arresto eutettico	Durate in secondi	Temperature trasformazione KOH
0.00	100.00	0.00	100.00	760	—	—	—
2.50	97.50	6.94	93.06	680°	270	20	190
10.00	90.50	19.35	80.65	595	295	30	190
20.00	80.00	34.31	65.69	520	300	50	195
30.00	70.00	47.74	52.26	440	305	80	205
40 00	60.00	58.67	41.33	355	305	90	205
50.00	50.00	67.94	32.06	310	300	120	195
60.00	40.00	76.43	23.57	340	300	100	195
70.00	30.00	83.33	16.67	365-325	280	30	195
80.00	20.00	89.37	10.63	370-350	—	—	205
90.00	10.00	95.24	4.76	375	—	—	230
100.00	0.00	100.00	0.00	380	—	—	265

TABELLA IV.

Peso °/o KHO	Peso °/o KJ	Mol. °/o KOH	Mol. °/o KJ	Temperature inizio cristallizzazione	Temperature arresto eutettico	Durate in secondi	Temperature trasformazione KOH
0.00	100.00	0.00	100.00	695	—	—	—
2.50	97.50	6.94	93.07	665	245	20	
10.00	90.00	25.00	75.00	580	250	45	
20.00	80.00	42.17	57.83	485	255	60	
30.00	70.00	55.79	44.21	365	255	90	
40.00	60.00	66 45	33.55	290	250	130	
50.00	50.00	74.79	25.21	270	245	140	260
60.00	40.00	81.68	18.32	310	245	100	260
70.00	30.00	87.41	12.59	335	245	60	260
80.00	20.00	92.25	7.25	360	245	40	260
90.00	10.00	96.38	3.62	375	245	20	265
100.00	0.00	100.00	0 00	380	—	—	265

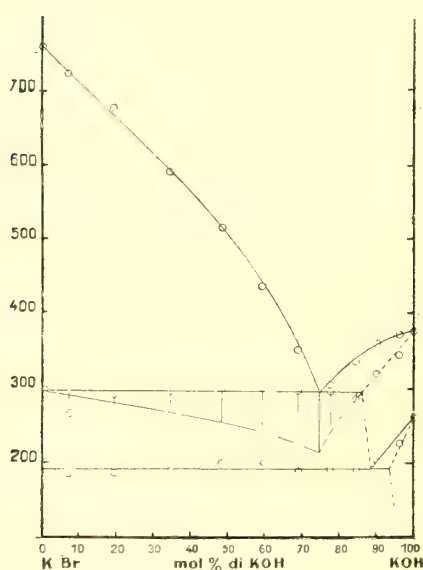
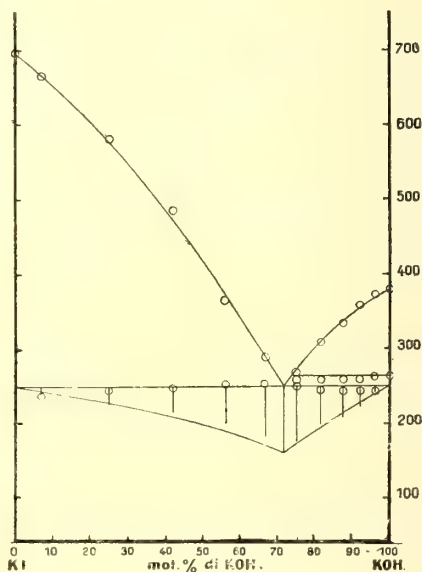



FIG. 3. FIG. 4.

Chimica-fisica. — *Sul potere elettromotore delle amalgame di magnesio e ancora sul potere elettromotore delle amalgame di calcio.* Nota di LIVIO CAMBI, presentata dal Socio R. NASINI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica generale. — *Azione dei sali neutri sulla costante dell'equilibrio chimico* (1). Nota di G. POMA e di G. ALBONICO, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

L'intimo meccanismo secondo il quale si determina la singolare proprietà, posseduta dai sali neutri, di accelerare il decorso di alcune reazioni, è ancor oggi perfettamente oscuro; vi sono però elementi per ritenere che esso sia collegato con l'anomalia che gli elettroliti forti presentano nei riguardi della legge di azione di massa, e quindi anche col problema fondamentale che concerne l'essenza del processo di soluzione.

Uno di noi (2) ebbe già occasione di concorrere a dimostrare sperimentalmente:

1°) che l'intensità dell'azione spiegata dai sali neutri è in stretta relazione con la natura chimica dei loro anioni, e va ordinatamente diminuendo passando dai cloruri ai bromuri e da questi ai nitrati ed agli ioduri;

2°) che essa è indipendente dalla natura chimica dei loro cationi;

3°) che essa sembra essere proporzionale, non già alla concentrazione salina complessiva della soluzione, ma solo alla sua concentrazione ionica.

Questi risultati bastano a dimostrare che l'azione dei sali neutri sulla velocità di reazione non è dovuta, nè in modo esclusivo e neppure in modo prevalente, alla probabile formazione degli idrati in soluzione. Per venire ora rapidamente allo scopo della presente comunicazione, ci limitiamo a ricordare che uno di noi (3), al fine di chiarire questo argomento, ha cercato di realizzare un fatto omologo a quello dell'azione dei sali neutri sulla velocità di reazione, in un ordine di fenomeni completamente diverso da quello in cui tale influenza era stata fin allora studiata. Se si determina, misurando la forza elettromotrice di una pila convenientemente preparata ed impiegando la nota formola del Nernst, la concentrazione dello ione rameico in una serie di soluzioni acquose contenenti nitrato di rame ad una concentrazione costante e quantità variabili di un nitrato alcalino od alcalino-terroso, si osserva che, in contrasto con la legge di azione di massa, la concentrazione apparente dello ione rameico cresce col crescere di quella del sale

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Parma.

(2) G. Poma, *Ueber Neutralsalzwirkung*. Meddel. K. Vetens. Akad. Nobelinstitut. Bd. 2, n. 11. Uppsala, 1912.

(3) G. Poma ed A. Patroni, *Einfluss der Neutralsalze auf den Zustand der Ionen in Lösung*, Erste Mitteilung-Ztschr. physk. Chemie, *87*, 196 (1914); G. Poma, *Neutralsalzwirkung und Zustand der Ionen in Lösung*, Zweite Mitteil. Ztschr. physik. Chemie, *88*, 678 (1914).

neutro. Altrettanto si verifica, *ceteris paribus*, per la concentrazione dello ione idrogenico, quando essa pure venga determinata col metodo elettrometrico nelle soluzioni acquose di un acido qualsiasi.

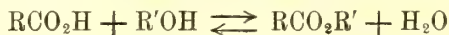
L'azione esercitata dai sali neutri sulla concentrazione apparente degli ioni rameici ed idrogenici possiede le seguenti caratteristiche:

1°) la sua intensità è una funzione della natura chimica dei *cationi*; essa cresce al crescere dell'affinità per l'acqua dei sali che li contengono: infatti, ordinandoli secondo la loro crescente attività, si ottiene la serie Rb, K, Na, Li, Ca e Mg;

2°) essa non è una proprietà esclusiva degli elettroliti, poichè la presenza di sostanze non ionizzate, almeno in misura apprezzabile, ma fortemente acquoaffini, come sono gli alcooli metilico ed etilico [1], esercita sulla concentrazione dello ione rameico una influenza analoga a quella dei sali deliquescenti;

3°) al crescere della diluizione dello ione rameico, essa diminuisce fortemente.

Per queste ragioni si può concludere che l'influenza dei sali neutri sulla concentrazione apparente degli ioni rameici ed idrogenici, a differenza di quanto abbiamo visto sussistere per quella che essi spiegano sulla velocità di reazione, può essere ritenuta, allo stato attuale della questione, la conseguenza della formazione degli idrati in soluzione. Allo scopo appunto di valutare l'attendibilità di una tale interpretazione, e, soprattutto, di estendere la cerchia delle nostre conoscenze sull'argomento, abbiamo pensato di studiare in modo sistematico e completo l'azione che i sali neutri esercitano sugli equilibrî chimici. Per ragioni evidenti di semplicità, abbiamo prescelto la reazione

$$RCO_2H + R'OH \rightleftarrows RCO_2R' + H_2O$$

che, come è noto, venne studiata dal Berthelot [2]. Per far raggiungere più rapidamente al sistema lo stato di equilibrio, lo abbiamo messo in presenza di un acido forte.

La costante di questo equilibrio è quasi indipendente dalla temperatura e, come vuole la legge di Guldberg e Waage, dalle concentrazioni iniziali che le singole sostanze reagenti avevano nella miscela. Questi fatti appaiono ovvii ad un primo esame, ma lo sembrano meno, quando si tenga presente che l'acqua e l'alcool, essendo sostanze dissocianti ed ossidrilate, sono liquidi

[1] Uno di noi, in collaborazione con B. Tanzi, ha dimostrato che l'aggiunta di un non elettrolita esercita sulla velocità di una reazione un'influenza acceleratrice quando la sua costante dielettrica sia maggiore di quella del solvente in cui avviene la reazione; in caso contrario, l'influenza è o piccolissima o nulla. Gazz. chim., *42*, **I**, 425.

[2] *Essai de mécanique chimique fondée sur la thermodynamique*, tome second, pag. 69.

fortemente associati, nei quali sono presenti molecole semplici e molecole di varia complessità, tutte fra loro in equilibrio. Ora, siccome è da ritenere molto probabile, che al gioco immediato dell'equilibrio chimico, da noi considerato, partecipino esclusivamente le molecole semplici di ciascuna delle sostanze reagenti, così bisognerebbe anche ammettere che singole concentrazioni delle speci monomolecolari dell'acqua e dell'alcool si mantenessero tra loro costantemente proporzionali, attraverso a qualsiasi variazione di temperatura e di concentrazione delle sostanze costituenti il sistema. Su questo punto assai importante, ma oltremodo oscuro, del problema degli equilibrî omogenei, stiamo eseguendo una ricerca, sulla quale speriamo poter riferire tra breve.

Data la natura essenzialmente dinamica dell'equilibrio chimico, dobbiamo ritenere che qualunque spostamento di esso, determinato dalla presenza di una sostanza estranea, sia la risultante di una azione esercitata in diversa misura sulla velocità delle due reazioni inverse che avvengono simultaneamente nel sistema e che caratterizzano quell'equilibrio. Nel caso nostro, se la molecola indissociata dell'acido minerale idrolizzante, o lo ione idrogenico che esso mette in libertà, avesse un'azione puramente catalitica, e se l'influenza che i sali neutri esercitano sulla velocità di reazione interessasse soltanto questa attività, allora catalizzatore e sali neutri non dovrebbero spostare in alcun modo l'equilibrio, e quindi dovrebbero far variare proporzionalmente la velocità delle due reazioni simultanee ed inverse di eterificazione e d'idrolisi che ad esso conducono.

Ma in realtà le cose non procedono in questo modo; ciò infatti ha dimostrato per il primo O. Knoblauch [1] e confermarono in questi ultimi tempi W. J. Jones [2], F. P. Worley [3] ed altri. Allo scopo di meglio precisare l'oggetto della presente ricerca, diremo che abbiamo voluto studiare l'azione dei sali neutri sulla costante di equilibrio in rapporto con la concentrazione del catalizzatore, con la natura chimica dell'acido organico da eterificare, con quella dell'alcool eterificante, con la natura e la concentrazione dei sali neutri adoperati, e, finalmente, in funzione del rapporto molecolare tra le quantità di acqua e di alcool presenti nel sistema. Nelle diverse miscele che abbiamo impiegato, erano presenti, all'inizio di ciascuna esperienza, solo tre delle quattro sostanze partecipanti all'equilibrio; di esse due, erano date costantemente dall'acqua e dall'alcool, e la terza era, a seconda dei casi, l'etere salino ovvero l'acido libero corrispondente. Inoltre, in ciascuna miscela, si trovava sempre un acido minerale energico, il catalizzatore e,

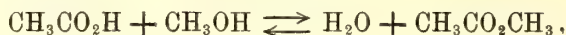
(1) Ztschr. physik. Chemie, *22*, 269 (1897).

(2) Journ. chem. Soc. London, *99*, 1427 (1911); *105*, 1542 (1914).

(3) Journ. chem. Soc. London, *99*, 349 (1911); Proc. Royal Soc. London. *87*, A, 604, dal Z. 1913-1-898.

quando ne era il caso, anche un sale neutro che aveva l'anione in comune con tale acido.

Nel processo da noi ora considerato

$$CH_3CO_2H + CH_3OH \rightleftarrows H_2O + CH_3CO_2CH_3 ,$$

rappresentiamo rispettivamente con a, b, c, d, le concentrazioni iniziali espresse in mole delle quattro sostanze reagenti,; con k_1 e k_2 le costanti di eterificazione e d' idrolisi, e con K la costante dell'equilibrio; con x conveniamo di rappresentare le quantità di acido acetico e di alcool metilico scomparse dal sistema per effetto della reazione, e quindi anche quelle di acqua e di etere formatesi sino al momento della misura. Come ben sappiamo, raggiunto nel sistema lo stato di equilibrio, deve sussistere la seguente equazione:

$$K = \frac{k_2}{k_1} = \frac{(a-x)(b-x)}{(c+x)(d+x)} .$$

D'altro lato, quando la reazione sia ancora in atto, deve essere verificata la seguente equazione differenziale:

$$\frac{dx}{dt} = k_1(a-x)(b-x) - k_2(c+x)(d+x) .$$

Però, nel nostro caso, dicemmo già che una delle quattro concentrazioni iniziali è stata fatta uguale a zero. Supponiamo che ciò si sia verificato per la concentrazione d dell'etere salino; allora, trasformando opportunamente l'equazione soprascritta, in modo da facilitarne la integrazione, avremo:

$$dt = \frac{dx}{x^2(k_1 - k_2) - x(a\,k_1 + b\,k_1 + c\,k_2) + a\,b\,k_2} ,$$

da cui può ottenersi, ricordando che il rapporto tra k_1 e k_2 è uguale a K, quanto segue:

$$(k_1 - k_2)\,dt = \frac{dx}{x^2 - x\,\frac{a\,k_1 + b\,k_1 + c\,k_2}{k_1 - k_2} + ab\,\frac{k_1}{k_1 - k_2}} =$$

$$= \frac{dx}{x^2 - x\,\frac{a + b + cK}{1 - K} + \frac{ab}{1 - K}} .$$

Per ragioni di semplicità facciamo ora

$$\alpha = \frac{a + b + cK}{1 - K} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{ab}{1 - K} .$$

Sostituendo queste lettere ai loro valori, nella precedente equazione, si ottiene:

$$(k_1 - k_2)\, dt = \frac{dx}{x^2 - \alpha x + \beta} = \frac{dx}{(x - \zeta)(x - \xi)} =$$
$$= \frac{1}{\zeta - \xi} \left(\frac{dx}{x - \zeta} + \frac{dx}{x - \xi} \right),$$

in cui ζ e ξ sono le radici dell'equazione quadratica: $x^2 - \alpha x + \beta = 0$. Integriamo ora questa funzione e definiamo la costante d'integrazione facendo $t = 0$, nel qual caso deve anche essere $x = 0$; in definitiva otterremo così l'equazione:

$$k_1 - k_2 = \frac{1}{(\zeta - \xi)\, t}\, ln \frac{\xi (x - \zeta)}{\zeta (x - \xi)}$$

che, associata con l'altra $K = \frac{k_2}{k_1}$, ci permette di calcolare i singoli valori di k_1 e k_2.

Le nostre determinazioni di equilibrio e, insieme, di velocità di reazione, vennero effettuate nelle ordinarie condizioni sperimentali, alla temperatura di $25° \pm 0{,}01°$, in bevute di vetro di Jena, munite del dispositivo Price, destinato a diminuire le inevitabili perdite per evaporazione dei più volatili componenti del sistema, e tenute immerse in un grande termostato ad acqua, della capacità di circa centocinquanta litri. Abbiamo preparato una serie di soluzioni acquose degli acidi organici da eterificare, di quelli minerali da usare come catalizzatori, dei sali neutri aventi con questi ultimi l'anione in comune; preparammo inoltre le soluzioni alcooliche (metiliche ed etiliche) degli eteri salini corrispondenti, e le miscele acquose alcooliche dei due alcooli adoperati (metilico ed etilico). Di ciascuna di queste soluzioni determinammo, col massimo rigore possibile, la concentrazione e la densità alla temperatura di 15°. Mescolando volumi convenienti, esattissimamente misurati alla medesima temperatura, di alcune di queste soluzioni, e portandole al segno in matracci graduati, abbiamo ottenuto i sistemi omogenei, a composizione perfettamente nota, che erano sede dei fenomeni da noi studiati; da queste miscele, poste in termostato nelle condizioni già accennate, abbiamo prelevato, di tempo in tempo, volumi noti, e in questi abbiamo determinato l'acidità complessiva, con una soluzione titolata di barite. In tutte queste misure abbiamo usato matracci tarati e burette controllate dall'Istituto imperiale di Berlino. Le pipette vennero costruite su nostro disegno: esse erano a doppia parete, come sono i vasi Dewar; i loro tubi di efflusso e di aspirazione, sui quali erano incisi i segni limiti per la capacità, erano capillari e muniti di rubinetti. Queste pipette vennero da noi

stessi tarate con acqua distillata a 25°. In tutte le esperienze descritte nelle sottostanti tabelle, abbiamo impiegato, come catalizzatore, l'acido cloridrico 0,20 normale.

TABELLA 1ª.

In assenza di sali neutri.

Numero di mole contenute in 100 ccm^3		Tempo	X in ccm^3	$k_1 - k_2$
all'inizio $t = 0$	all'equilibrio $t = \infty$			
$a = 0{,}1200$	$a_1 = 0{,}0329$	82′	55,70	0,0022
$b = 1{,}2620$	$b_1 = 1{,}1750$	207	44,40	0,0020
$c = 2{,}5260$	$c_1 = 2{,}6131$	300	38,90	0,0020
$d = 0$	$d_1 = 0{,}0871$	390	35,30	0,0020
		775	28,55	0,0019
$\zeta = 2{,}093$; $\xi = 0{,}0870$			valor medio	**0,0020**
$K = \frac{k_2}{k_1} = \mathbf{0{,}1700}$		$k_1 = \mathbf{0{,}00240}$; $k_2 = \mathbf{0{,}00041}$		

Nella quarta colonna di questa tabella figurano i volumi di una soluzione di barite 0,2007 normale, necessarî per neutralizzare 10 ccm^3 della miscela. Con le lettere a, b, c, d abbiamo inteso rappresentare le quantità molari dell'acido CH_3CO_2H, dell'alcool CH_3OH, dell'acqua e dell'etere salino, contenute inizialmente in cento ccm^3 della miscela stessa: con le lettere a_1, b_1, c_1, d_1, le quantità delle medesime sostanze che si trovavano nello stesso volume, dopo che il sistema aveva raggiunto il proprio stato di equilibrio. Come si vede, mentre, secondo le classiche esperienze del Berthelot, la costante di equilibrio possiede per alcooli ed acidi diversi il valore 0,25, nel nostro caso, invece, forse per la presenza del così detto catalizzatore, essa è uguale 0,17.

Tabella 2ª.

Sale neutro: Li Cl 0,4315 norm.

Numero di mole contenute in 100 ccm³ — all'inizio $t=0$	all'equilibrio $t=\infty$	Tempo	X in ccm³	k_1-k_2
$a=0,1200$	$a_1=0,0319$	56′	58,70	0,0025
$b=1,2550$	$b_1=1,1669$	199	43,30	0,0023
$c=2,5100$	$c_1=2,5981$	289	37,45	0,0023
$d=0$	$d_1=0,0881$	380	33,70	0,0023
		767	27,31	0,0023
		valor medio		**0,0023**

$\zeta=2,0390$; $\xi=0,0877$

$K=\frac{k_2}{k_1}=$ **0,1620**

$k_1=$ **0,00274**
$k_2=$ **0,00044**

Tabella 3ª.

Sale neutro: Li Cl 0,863 norm.

Numero di mole contenute in 100 ccm³ — all'inizio $t=0$	all'equilibrio $t=\infty$	Tempo	X in ccm³	k_1-k_2
$a=0,1200$	$a_1=0,0315$	48′	59,66	0,0027
$b=1,2470$	$b_1=1,1583$	178	42,60	0,0027
$c=2,4940$	$c_1=2,5828$	269	36,40	0,0027
$d=0$	$d_1=0,0885$	362	32,30	0,0027
		747	26,30	0,0028
		valor medio		**0,0027**

$\zeta=2,0113$; $\xi=0,0885$

$K=\frac{k_2}{k_1}=$ **0,1590**

$k_1=$ **0,00321**
$k_2=$ **0,00051**

Tabella 4ª.

Sale neutro: Li Cl 1,295 norm.

all'inizio $t=0$	all'equilibrio $t=\infty$	Tempo	X in ccm³	k_1-k_2
$a=0,1200$	$a_1=0,0291$	172′	40,71	0,0032
$b=1,2346$	$b_1=1,1437$	259	34,60	0,0031
$c=2,4707$	$c_1=2,5616$	352	30,64	0,0031
$d=0$	$d_1=0,0909$	739	25,24	0,0030
		valor medio		**0,0031**

$\zeta=1,9008$; $\xi=0,0910$

$K=\frac{k_2}{k_1}=$ **0,1428**

$k_1=$ **0,00362**
$k_2=$ **0,00052**

Tabella 5ª.

Sale neutro: Li Cl 2,000 norm.

all'inizio $t=0$	all'equilibrio $t=\infty$	Tempo	X in ccm³	k_1-k_2
$a=0,1200$	$a_1=0,0270$	59′	53,50	0,0041
$b=1,2175$	$b_1=1,1245$	129	41,82	0,0040
$c=2,4355$	$c_1=2,4355$	220	33,53	0,0039
$d=0$	$d_1=0,0930$	309	29,20	0,0039
		697	24,57	0,0038
		valor medio		**0,0039**

$\zeta=1,8046$; $\xi=0,0930$

$K=\frac{k_2}{k_1}=$ **0,1293**

$k_1=$ **0,00448**
$k_2=$ **0,00058**

Tabella 6ª.

Sale neutro: Li Cl 2,589 norm.

all'inizio $t=0$	all'equilibrio $t=\infty$	Tempo	X in ccm³	k_1-k_2
$a=0,1200$	$a_1=0,0251$	51′	54,70	0,0045
$b=1,2039$	$b_1=1,1090$	121	40,30	0,0047
$c=2,4095$	$c_1=2,5044$	213	31,44	0,0046
$d=0$	$d_1=0,0949$	301	27,21	0,0046
		valor medio		**0,0046**

$\zeta=1,7234$; $\xi=0,0950$

$K=\frac{k_2}{k_1}=$ **0,1170**

$k_1=$ **0,00521**
$k_2=$ **0,00061**

Tabella 7ª.

Sale neutro: Li Cl 3,020 norm.

all'inizio $t=0$	all'equilibrio $t=\infty$	Tempo	X in ccm³	k_1-k_2
$a=0,1200$	$a_1=0,0237$	47′	52,72	0,0056
$b=1,1904$	$b_1=1,0941$	120	28,50	0,0054
$c=2,3831$	$c_1=2,4794$	201	29,74	0,0053
$d=0$	$d_1=0,0963$	304	25,41	0,0051
		valor medio		**0,0053**

$\zeta=1,6609$; $\xi=0,0965$

$K=\frac{k_2}{k_1}=$ **0,1080**

$k_1=$ **0,00594**
$k_2=$ **0,00064**

In tutte queste misure il rapporto molecolare tra le quantità iniziali di acqua e di alcool metilico era mantenuto rigorosamente costante ed uguale a due: ciò è stato fatto allo scopo di rendere più agevolmente paragonabili fra loro i risultati ottenuti impiegando diverse concentrazioni del sale neutro. È bensì vero che tale rapporto variava per effetto del procedere della reazione: ma, siccome l'acqua e l'alcool erano, nella nostra miscela, presenti in quantità assai superiori a quelle dell'acido acetico, così queste variazioni possono essere ritenute, con errore relativamente piccolo, irrilevanti per le conclusioni alle quali arriveremo.

I risultati da noi ottenuti dimostrano che la presenza del Li Cl, anche in un solvente acquoso alcoolico, esercita un'azione acceleratrice tanto sulla velocità di eterificazione, quanto su quella d'idrolisi; però tale azione si esercita in misura diversa sulle due reazioni, poichè, mentre k_1, la costante della prima, in presenza di tre mole di LiCl per litro, cresce da 0,00240 a 0,00594; k_2, la costante della seconda, varia da 0,00041 a 0,00064; questo fatto corrisponde alla diminuzione della costante di equilibrio K, che, nelle stesse circostanze, discende da 0,170 a 0,108. Possiamo dunque concludere che la influenza, dal LiCl esercitata sul processo da noi considerato, non presenta la caratteristica fondamentale delle azioni catalitiche, ma che invece essa si determina come se il sale neutro sottraesse al giuoco immediato dell'equilibrio una parte dell'acqua presente nel sistema.

In una prossima Nota, per la quale abbiamo già raccolto il materiale sperimentale, esporremo i nuovi risultati ottenuti nella continuazione della presente ricerca.

Chimica fisica. — *Sugli equilibri dell'idrogenazione.* Nota di M. Padoa e di B. Foresti, presentata dal Socio G. Ciamician.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisiologia vegetale. — *Influenza del fosforo e del magnesio sulla formazione della clorofilla* [1]. Nota della dottoressa Eva Mameli, presentata dal Socio Giovanni Briosi.

Nelle sue importanti ricerche sulla composizione chimica della clorofilla, Willstätter [2] giunse alla conclusione che il pigmento verde delle piante, estratto, sia da foglie fresche, sia da foglie secche, non contiene fosforo, o ne contiene solo minime traccie dovute ad impurezze. Queste traccie, riscontrabili nella *clorofilla greggia* ottenuta col vecchio metodo di estrazione (Kraus e Sorby) generalmente adottato, non si riscontrano invece nella clorofilla purificata mediante il soluto colloidale acquoso (Willstätter). Naturalmente, l'autore non esclude che qualche pianta contenga una sostanza verde fosforata, nè che possa formarsi un prodotto di addizione della clorofilla con composti fosforati; certo è che, secondo i risultati delle sue vaste ed accurate ricerche, sono da confutarsi tanto l'ipotesi della natura lecitinica della clorofilla, sostenuta da Hoppe-Seyler [3], quanto la tesi sostenuta da Stoklasa [4], che cioè non sian possibili senza fosforo la produzione di clorofilla e la formazione di cloroplasti.

Nonostante che Stoklasa abbia ripetutamente confermato le sue ricerche [5], la teoria lecitinica della clorofilla è oggidì fortemente scossa, ed autori quali Marschlewski [6], Tswett [7], Czapek [8] l'hanno già definitivamente abbandonata. L'interessante rivista critica pubblicata recentemente da quest'ultimo

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto botanico della R. Università di Pavia, aprile 1915.

[2] Willstätter R. u. W. Mieg, *Ueber eine Methode der Trennung und Bestimmung von Chlorophyllderivaten* (Ann. d. Chemie, *350*, 1), 1906.

[3] Hoppe-Seyler, *Ueber das Chlorophyll* (Ber. d. deut. Chem. Ges. *12*, 1555), 1879; *Ueber das Chlorophyll der Pflanzen* (Zeitschr. f. physiol. Chem. *3*, 399, an. 1879; *4*, 1193, an. 1880; *5*, 75, an. 1881).

[4] Stoklasa J. (Sitzungsber. d. Kais. Akad. d. Wiss. Wien., *104*, 1895); (Ber. d. deut. Chem. Ges. *29*, 2761, an. 1896); (Bull. Soc. chim. *17*, 520, 1897); (Ann. agron. *23*, 79, an. 1897). Ved. anche Griffon: Rev. gén. d. bot. *14*, 141, an. 1902.

[5] Stoklasa J., Brdlik V. u. Just J., *Ist der Phosphor an dem Aufbau des Chlorophylls beteiligt?* (Ber. d. bot. Gesellsch. XXXI *a*) 1908. — Stoklasa, *Beitrage zur Kenntniss der physiologischen Funktion des Kalis im Pflanzenorganismus* (Zeitschr. f. landw. Versuchswesen, XI, 52), 1908. — Stoklasa, Brdlik u. Ernest, *Zur frage des Pposphorgehaltes des Chlorophylls* (Ber. d. bot. Ges. XXVII), 1909.

[6] Marschlewski, *Studien in der Chlorophyllgruppe* I. (Biochem. Zeitschr. *10*, 131), 1908.

[7] Tswett M., *Ist der Phosphor an dem Aufbau der Chlorophylline beteiligt?* (Ber. d. bot. Ges. XXVI *a*, 214) 1907.

[8] Czapek I., *Neuere Literatur über das Chlorophyll* (Zeitschr. f. Bot. III, 43), 1911.

sulle moderne ricerche riguardanti la clorofilla, mi esime dal riportare per esteso i dati sperimentali controversi e i particolari sull'importante dibattito.

Mi soffermerò invece a considerare un altro ordine di ricerche riguardanti i rapporti tra fosforo e clorofilla, e cioè quelle che direttamente o indirettamente portarono un contributo alla questione se la nutrizione fosfatica abbia o no un'influenza sulla formazione del pigmento verde.

Il Loew [1] constatò che, coltivando delle alghe in soluzioni nutritizie ricche in ferro, ma prive di fosforo, esse assumono una colorazione giallastra. Inoltre, filamenti di *Spirogyra majuscula*, coltivati in soluzione nutritizia contenente solo nitrato di calcio e solfato d'ammonio, diventarono da gialli, di un verde intenso, per aggiunta di solfato di ferro e di fosfato bisodico, mentre per la sola aggiunta di solfato di ferro l'inverdimento non avveniva. L'autore conclude, da ciò, che per le alghe l'acido fosforico è necessario alla formazione della clorofilla.

Si noti, però, che le soluzioni nutritizie adoperate in queste esperienze (soluzioni *ricche* in ferro, o contenenti *solo* alcuni fra gli elementi necessarî alle sviluppo delle alghe) non sono le più adatte per ottenere risultati sicuri e conclusivi sulla questione dell'influenza che un dato elemento esercita sulla vita delle piante.

Servettaz [2] coltivò recentemente l'*Hypnum purum* in soluzioni nutritizie sterili diverse. Egli non fa osservazione alcuna sul colore delle piantine nelle soluzioni esenti da fosforo, mentre osserva che, in capo a 15 giorni, tutti i protonemì in culture prive di magnesio avevano una tinta giallo-verdastra, poi morirono; quelli coltivati senza calcio diedero segni di sofferenza dopo un mese, e ingiallirono solo dopo 72 giorni.

Nessun altro lavoro venne pubblicato, almeno per quanto a me consta, nè sulle crittogame clorofilliane nè sulle fanerogame, sino a quello, recente, di Stoklasa, Sebor e Senft [3], che merita una speciale attenzione.

Da culture di *Zea Mais* e di *Polygonum Fagopyrum* — *a*) in soluzione nutritizia completa; *b*) in soluzione priva di fosforo; *c*) in soluzione priva di magnesio — gli autori ottongono i seguenti risultati:

Senza magnesio, le piante di *Polygonum* vivono 70-80 giorni; senza fosforo, 40-50. Dopo 20-30 giorni, le piante in soluzione priva di magnesio erano ben sviluppate; le foglie avevano un bel color verde, e, al microscopio, il tessuto a palizzata era ricco di cloroplasti dal colore verde normale. In

(1) Loew O., *Ueber den Einfluss der Phosphorsäure auf die Chlorophyllbildung* (Bot. Centralbl. *48*, 37) 1891.

(2) Servettaz C., *Recherches expérimentales sur le développement et la nutrition des mousses en milieux stérilisés* (Annales d. sciences nat. XVII, 111) 1913.

(3) Stoklasa, Sebor, e Senft, *Beitrag zur Kenntnis der Zusammensetzung des Chlorophylls* (Beitr. bot. Centralbl., XXX, 167) 1913.

assenza di fosforo, invece, lo sviluppo era più stentato. Le piante erano da principio verdi; ma, dopo 30 giorni, divennero bruno rossastre come se la clorofilla si scindesse per idrolisi, e morirono dopo 40-50 giorni di vegetazione. L'esame microscopico delle foglie, fatto quando esse erano ancora verdi, indicò che le cellule del palizzata erano molto povere di cloroplasti.

Le culture di *Zea Maïs* durarono 125-128 giorni se in soluzione completa o in soluzione esente di magnesio; 40-65 giorni se in soluzione esente di fosforo. Nelle piante private del magnesio, il tessuto a palizzata (!) era sviluppato normalmente e ricco di granuli clorofilliani, normalmente verdi; in quelle private del fosforo, il tessuto a palizzata (!) conteneva solo pochi cloroplasti, e il verde delle foglie diventava presto bruno.

Gli autori concludono (pag. 231) che il fosforo fa parte della molecola della clorofilla, e che i cloroplasti non possono formarsi senza di esso.

I risultati suddetti sono, per ciò che riguarda le culture prive di magnesio, in così palese contraddizione con le osservazioni da me fatte e pubblicate sin dal 1911 [1] (ma non citate dai suddetti autori), che mi parve utile, anzichè limitarmi al pubblicare una Nota puramente critica, ripetere fedelmente le esperienze fatte dagli autori. Mi confermò in questo proposito la considerazione che ben diversa dalla soluzione nutritizia da me usata era quella adoperata dai tre autori su citati, e che qui riporto. Soluzione completa: nitrato di calcio gr. 1; cloruro potassico gr. 0,25; cloruro di sodio gr. 0,02; solfato di magnesio gr. 0,25; fosfato bipotassico gr. 0,50; fosfato di ferro gr. 0,1; silicato di calcio gr. 0,25.

Soluzione senza Mg: i sali precedenti, meno il solfato di magnesio, più solfato potassico gr. 0,25.

Soluzione senza P: come nella soluzione completa, meno i due sali di fosforo, più solfato di ferro gr. 0,01.

Per ragioni diverse, che esporrò in seguito, eseguii anche una seconda serie di culture con soluzioni nutritizie diverse da queste.

Il metodo seguìto è lo stesso descritto a pagina 152 del mio precedente lavoro.

Riporto da prima i risultati ottenuti dalle culture fatte con le soluzioni di Stoklasa:

Zea Maïs: *a*) in soluzione completa le piante crescono stentate e pallide; — *b*) in soluzione priva di magnesio le foglie appaiono leggermente venate di verde, o pallide, o perfettamente gialle, pur restando erette e rigide. Dopo un mese, ogni pianta ha 5-6 foglie, ed è alta 35-40 cm. Alcune foglie presentano grandi macchie antocianiche, e piccole zone antocianiche sono anche sul fusto. Dopo 50 giorni, 1-2 foglie basali sono inaridite; tutte le

[1] Mameli Eva, *Sulla influenza del magnesio sopra la formazione della clorofilla* (Atti della Soc. ital. per il progr. delle scienze, V, 93, an. 1911); e (Atti Ist. bot. di Pavia, XV, 251, an. 1912).

altre (5-8) sono pallidissime, largamente chiazzate di antocianina. L'osservazione microscopica, se non rivela la presenza di un tessuto a palizzata, scoperto dallo Stoklasa nelle foglie di *Zea Mais*, rivela nel mesofillo la presenza di cloroplasti, in grandissima maggioranza gialli; pochi eccettuati, di un verde pallido, sono situati in vicinanza della nervatura mediana. Il loro diametro è di μ 2,22-2 50; — *c*) in soluzione priva di fosforo, dopo 14 giorni il color verde delle foglie appare normale, ed è ben netta la differenza tra queste piante e quelle prive di magnesio, aventi foglie assai pallide. Dopo un mese, la colorazione è in alcune foglie stazionaria, in altre è diventata più intensa; lo sviluppo, il vigore, l'altezza non sono differenti da quelli delle piante prive di magnesio. Pochissima antocianina si osserva sulle foglie; abbondante è sui fusti. Dopo 50 giorni, le foglie più giovani sono ancora verdi: alcune, anzi, sono veramente colorate in verde-scuro; ma ogni pianta ha 4-5 foglie basali inaridite. Tuttavia le restanti non accennano a impallidire neppure dopo un altro mese di soggiorno nello stesso liquido; le piante, naturalmente, non crescono più. L'osservazione delle foglie al microscopio, fatta dopo 50 giorni dalla nascita delle piantine, rivela la presenza di cloroplasti normali per forma e per colore. Dopo un mese, si nota che alcuni di essi appaiono in via di disgregazione: fatto, questo, più che naturale, data l'importanza che ha il fosforo nella costituzione delle sostanze proteiche. I cloroplasti che appaiono interi misurano μ 4,44-6,6.

Polygonum Fagopyrum: *a*) in soluzione completa. In generale le piantine muoiono dopo pochi giorni; quelle che sopravvivono hanno foglie di un verde oscuro e uno sviluppo buono in confronto a quelle senza magnesio, ma non rigoglioso. Altezza 18 cm.; — *b*) in soluzione priva di magnesio. Dopo 20 giorni le piante hanno foglie o pallidissime o di un verde chiaro; sono alte 14-17 cm. ed hanno 3-5 foglie e numerosi bocciuoli fiorali. Dopo un mese l'intensità del colore non è affatto aumentata. L'esame delle foglie al microscopio rivela la presenza di cloroplasti pallidissimi, molti dei quali lenticolari o quasi filiformi, addossati alle pareti cellulari; — *c*) in soluzione priva di fosforo. Le nove piante che formano questa serie di culture, hanno tutte, dopo 20 giorni, 2-3 foglie di un bel verde scuro, e qualcuna ha fiori sbocciati. Lo sviluppo è più stentato in confronto di quelle senza magnesio, ma l'intensità del colore non accenna a diminuire neppure dopo un mese. L'esame delle foglie al microscopio rivela la presenza di cloroplasti normali per colore e per forma.

I risultati ottenuti, perfettamente opposti a quelli resi noti dallo Stoklasa, e confermanti, per ciò che riguarda il magnesio, le mie esperienze precedenti, erano tuttavia poco soddisfacenti, dato lo scarso sviluppo che raggiungevano le piante nella soluzione nutritizia completa: fatto che, per la poca sicurezza degli elementi di controllo, toglieva efficacia alla dimostrazione.

Già un semplice esame dell'elenco dei componenti le soluzioni nutritizie adoperate dallo Stoklasa e dai suoi collaboratori conduce alla considerazione che soluzioni siffatte non sono comparabili fra loro nè per la qualità nè per la quantità dei costituenti. La concentrazione delle due prime è infatti del 3,37 ‰; quella della terza, dell'1,78 ‰.

Inoltre, la presenza del fosfato bipotassico e del nitrato di calcio, contenuti nelle due prime soluzioni, provoca la precipitazione di un fosfato di calcio insolubile, che insieme col silicato di calcio, anch'esso quasi insolubile, rende assai inadatte queste soluzioni allo sviluppo delle piante. L'uso del fosfato bipotassico nelle soluzioni nutritizie venne seguìto anche da Crone [1]; ma Takeuchi [2] e Benecke [3] lo sconsigliano, perchè, nel caso da essi criticato, provocava la precipitazione di un fosfato di ferro insolubile. È sempre più opportuno, perciò, l'uso del fosfato monopotassico.

Le soluzioni nutritizie adoperate dallo Stoklasa, e contenenti notevoli quantità di sali indisciolti, erano assai torbide, e nel fondo dei recipienti di cultura si aveva ben presto un accumulo di sali precipitati. Era necessario quindi fare un'altra serie di culture con soluzioni nutritizie più adatte e comparabili fra loro per la qualità e la quantità dei sali in esse contenuti. Scelsi a questo scopo le soluzioni seguenti, due delle quali avevo già adoperate nel mio precedente lavoro:

Soluzione completa: H_2O gr. 1000; $Ca(NO_3)_2$ gr. 1; KNO_3 gr. 0,25; KH_2PO_4 gr. 0,25; $(NH_4)_2SO_4$ gr. 0,25; $MgSO_4$ gr. 0,25; $FeSO_4$ gr. 0,02.

Soluzione esente da magnesio: come la precedente, meno $MgSO_4$.

Soluzione esente da fosforo: come la soluzione completa, meno KH_2PO_4.

Queste soluzioni hanno, sopra quelle usate dallo Stoklasa, i seguenti vantaggi:

1°) quello di avere concentrazioni non eccessive e non troppo diverse da una soluzione all'altra (2,02 % nella prima; 1,77 % nelle altre due;

2°) quello di essere comparabili fra loro, poichè le soluzioni esenti da fosforo e da magnesio differiscono da quella completa solo per la mancanza di un sale. Ciò ho potuto ottenere mediante l'introduzione del solfato d'ammonio, che supplisce alla mancanza dello zolfo allorchè si esclude il solfato di magnesio, ed è un sale che contribuisce moltissimo allo svi-

[1] Crone G., *Ergebnisse von Untersuchungen über die Wirkung der Phosphorsäure auf die höhere Pflanze und eine neue Nahrlösung. Diss.*, Bonn 1904; Just., *33*, *3 A*, 11, an. 1905.

[2] Takeuchi T., *Können Phosphate Chlorose erzeugen?*, The bull. of Coll. agric. Tokyo, VII, 425, an. 1907.

[3] Benecke W., *Die von der Cronesche Nahrsalzlösung*, Zeitschr. f. Bot., I, 235, an. 1909.

luppo degli organi verdi delle piante. Nè la soluzione di Knop, nè quella di Strasburger, presentano questo vantaggio;

3º) quello di non produrre precipitazioni di sali, la cui formazione è per varî aspetti dannosa alla vita delle piante coltivate in soluzioni nutritizie.

Con queste soluzioni ottenni:

1º) sviluppo vigoroso e colorazione verde intensa delle piante in soluzione completa;

2º) sviluppo discreto e foglie a colorazione pallida o quasi completamente eziolate nella soluzione priva di magnesio;

3º) sviluppo ridotto, e colorazione verde intensa delle piante nella soluzione priva di fosforo.

Anche questa serie di esperienze ha dato dunque risultati contrarî a quelli esposti nel recente lavoro dello Stoklasa.

Conclusione.

Da culture di *Zea Mais* e di *Polygonum Fagopyrum* in soluzioni nutritizie prive di magnesio ottenni, come già in esperienze precedentemente pubblicate [1], piante completamente eziolate o appena debolmente verdi e contenenti cloroplasti anormali per forma e per colore.

Invece, da colture delle stesse specie in soluzioni nutritizie prive di fosforo ottenni piante con intensa colorazione verde e contenenti cloroplasti normali per colore e per forma.

Questi risultati, ripetutamente controllati, sono contrarî a quelli recentemente ottenuti dallo Stoklasa, sostenitore della teoria lecitinica sulla costituzione della clorofilla, e concordano invece con i risultati analitici ottenuti da Willstätter e dai suoi collaboratori circa la presenza del magnesio e l'assenza del fosforo nella molecola della clorofilla.

[1] Mameli E. loc. cit.

Biologia. — *Una ipotesi biologica sulla deposizione dello zolfo durante l'epoca gessoso-solfifera.* Nota II di G. Bargagli Petrucci, presentata dal Corrisp. P. Baccarini.

Per spiegare la struttura *soriata* del minerale solfifero, il Mottura è costretto a ricorrere alla ipotesi che il materiale solfureo subisse delle alternative regolari annuali; sia che esso fosse rappresentato da idrogeno solforato, sia che esso consistesse in solfuro di calcio. Queste oscillazioni annuali sarebbero state in rapporto, secondo l'A., con i diversi periodi, piovosi od asciutti, dell'annata; ed a conforto di questa supposizione egli cita il caso delle *maccalube*, che appunto vanno soggette ad oscillazioni nel corso dell'anno. Tale supposizione non sarebbe in contrasto con la ipotesi biologica, perchè è naturale che, se mancasse per un certo tempo al lavoro microbico il materiale primo sulfureo (che però non è necessario alla vita dei microorganismi), il processo di deposizione dello zolfo subirebbe una sosta; pronto a riprendere il suo andamento normale appena le condizioni ritornassero favorevoli.

Dubito però assai che tali periodi di ricchezza e di scarsità del materiale sulfureo avrebbero potuto essere così fortemente diversi fra loro e così nettamente distinti da far succedere, a straterelli ricchissimi in zolfo, altri straterelli che non ne contengono affatto, o ne contengono traccie insignificanti. Piuttosto è da pensare se, nella successione delle stagioni, non si sia verificato il caso che durante periodi invernali l'attività dei microorganismi non abbia dovuto essere sospesa. In questo caso l'idrogeno solforato — non più ossidato, come prima, dai microorganismi — si sarebbe disperso nell'atmosfera, mentre al fondo delle acque si sarebbe depositato il solo calcare.

Il Mottura pensa che nella struttura soriata si possa leggere il numero di anni che il deposito ha impiegato a formarsi: « La struttura venosa », egli dice « si osserva meglio nello stesso giacimento della solfara (di Sommatino) che costituisce la solfara di Riesi. In ogni caso, tuttavia, la media « dello spessore complessivo degli straterelli componenti un periodo non supera i 7 millimetri. Tenendo calcolo di questo fatto, si può arguire che la « durata del tempo impiegato nella formazione di questa miniera non fu minore di 4000 anni. Alcune solfare si sarebbero formate in un tempo molto « minore, cioè da 500 a 1000 anni.

« Se ora si osserva che in alcune località i depositi di zolfo cominciarono a formarsi allorchè in altre località i depositi erano già da lungo « tempo cessati, si può arguire che la durata dell'epoca solfifera, propria-

« mente detta, nell'ipotesi ora espressa, non è probabilmente inferiore ai « 10.000 anni ».

Nella ipotesi biologica questo rilievo sul significato delle piccole stratificazioni non cambia sostanzialmente di valore: solo, invece di vedere, in esse, dei periodi alternanti di pioggie e di siccità, o di maggiore o minore abbondanza di materiale sulfureo, si dovrebbero vedere le alternative di attività e di riposo della vita vegetativa microbica, e si conterebbero gli anni in questi depositi non altrimenti che nelle sezioni dei tronchi di alberi annosi.

Il che viene poi ad essere, praticamente, lo stesso.

Ma vi sono solfare nelle quali queste stratificazioni mancano, o sono poco marcate. Ciò potrebbe essere avvenuto in quei luoghi nei quali la temperatura delle acque si manteneva presso a poco costante, mantenendo così ininterrotta la vita microbica durante tutto l'anno.

Vi sono luoghi nei quali lo zolfo ha aspetto pulverulento, amorfo, e questo aspetto concorda assai bene con il modo di deposizione che supponiamo, giacchè l'azione di microorganismi, agenti nella massa acquea, avrebbe determinato una continua formazione di minutissime particelle di zolfo. In altri luoghi invece lo zolfo non è così uniformemente distribuito ed invece è sparso in masse, spesso cristalline, in mezzo al calcare che serve da matrice. Questo modo di presentarsi corrisponderebbe piuttosto all'azione di germi filamentosi della famiglia delle *Beggiatoacee*, che si raggruppano o si intrecciano in ammassi più o meno importanti, e che lasciano poi lo zolfo in uno stato fisico favorevole alla sua cristallizzazione.

Vi è poi una varietà della struttura soriata, nella quale, fra loraterello di zolfo e quello sovrastante calcareo, si osserva un piccolo spazio vuoto, guarnito, in alto, di cristalli di calcite con le punte rivolte in basso, e in basso, di cristalli di zolfo rivolti verso l'alto. L'assettamento ed il consolidamento del deposito di zolfo ha determinato la formazione dello spazio vuoto, dove per azioni secondarie, del tutto inorganiche, la calcite e lo zolfo hanno potuto cristallizzare.

I così detti *partimenti*, che dividono in alte zone il deposito di zolfo, sono costituiti da marne o gessi, generalmente bituminosi, in strati di non grande spessore. Si può pensare che questi strati corrispondano a periodi di anni nei quali il processo biologico fu sospeso, ed il materiale inorganico fu abbandonato alle pure forze fisiche e chimiche; ma la causa di tali sospensioni rimarrebbe in ogni modo un poco oscura, benchè si possano fare ipotesi anche a questo proposito. Le condizioni dell'ambiente, del materiale portato dalle acque, la temperatura, l'accumulo dei prodotti stessi della vita microbica, ecc. ecc., potrebbero avere determinato questi periodi di assenza di attività vitale, durante i quali i residui della vita si andavano accumulando al fondo insieme con le sostanze inorganiche, fino a che la vita dei microorganismi non divenne nuovamente possibile.

***

Data la presenza costante di un banco di tripoli al disotto degli strati solfiferi, resta ancora da domandarsi: queste due formazioni rappresentano soltanto due successivi stadii biologici che si sono succeduti per le mutate condizioni di vita e per la comparsa di nuovi esseri che si sono sostituiti agli antichi, oppure fra le due formazioni può essere esistito un legame anche più stretto, nel senso che le vegetazioni più antiche, ed i loro resti, possono essere stati la causa determinante dei fenomeni biologici successivi?

Parlando dell'origine della lagonite ([1]), e delle terre gialle e bolari ([2]), ho esposto l'opinione, basata sui fatti osservati, che un substrato algoso sia favorevolissimo allo sviluppo, almeno iniziale, di batteriacee del tipo del *Bacillus ferrigenus*, ed ho fatto osservare come anche nella regione boracifera toscana si trovi quasi sempre un substrato di alghe sotto le incrostazioni di ferro che per lo più sono dovute alla azione di microorganismi ferrigeni. In quella regione, anche le incrostazioni di zolfo sono spesso accompagnate di un substrato algoso: e non è quindi inverosimile che le alghe siano appunto il luogo favorevole, almeno al primo inizio della attività batterica. Ciò che si osserva nella regione boracifera per i piccoli depositi attuali, sarebbe avvenuto nelle cave di terre gialle dell'Amiata e nelle cave di zolfo dell'epoca solfifera.

Del resto, nella regione boracifera, spessissimo, sotto bianche incrostazioni calcaree, miste ad acido borico, si incontra un rigoglioso sviluppo di alghe verdi. Ma su questo punto sono ancora insufficienti i dati che ho potuto raccogliere.

Dunque la vegetazione di diatomee che ha dato origine al tripoli sarebbe stato il substrato adatto allo sviluppo dei microorganismi ossidanti: quali siano i rapporti fra le due vegetazioni microscopiche, è argomento ancora da studiare e che meriterebbe di esserlo. Per ora possiamo ritenere, in via generale, che la vegetazione algosa fornisca a quella batterica sostanze utili al suo sviluppo sia col suo metabolismo in vita, sia con la sua decomposizione dopo la morte.

In alcuni luoghi della formazione solfifera accade, benchè rarissimamente, di riscontrare l'assenza del banco di tripoli, che talvolta è rappresentato da calcare siliceo, altre volte non è rappresentato affatto. Così secondo il Mottura, nella *solfara Trabonella*, all'est di Caltanissetta, si osserva che al disotto dello zolfo non si incontra che calcare siliceo e gessi, mentre manca il vero tripoli: e lo stesso fatto si riscontra anche al monte S. Cataldo,

([1]) *L'origine biologica della lagonite,* loc. cit.
([2]) *Sull'origine biologica della terra di Siena,* loc. cit.

dove il tripoli esiste soltanto mescolato al calcare. In questi casi probabilmente i resti delle diatomee non hanno formato un deposito di pura silice, ma hanno lasciato i loro resti mescolati al calcare che si andava depositando. E del resto non le sole diatomee possono fornire ai batterii un substrato favorevole, ma anche altre alghe verdi non silicee, come è dimostrato da quanto avviene attualmente a Larderello.

Lo zolfo che si è depositato nei casi ora citati non forma dunque una eccezione alla regola.

Se si esamina la sezione, tracciata dallo stesso Mottura, del monte Sabbuccino, attraverso la solfara Giordano all'Iuncio ed il monte Fico d'India sino al monte Fagaria, si osserva che, mentre alla solfara Giordano esiste un forte banco di tripoli sovrapposto alle marne e sottostante al minerale di zolfo, verso il monte Fagaria invece alle stesse marne succede un calcare privo di zolfo, e mancano ugualmente il tripoli e lo zolfo. Probabilmente, in quel punto non si riscontravano le condizioni necessarie allo sviluppo degli esseri microscopici, e manca affatto il prodotto del loro lavoro. Queste due formazioni appaiono sempre più legate fra loro da strettissimi rapporti che molto probabilmente sono di natura biologica.

Della origine dell'idrogeno solforato, che a questi fenomeni avrebbe fornito il materiale, non è mia intenzione di parlare. Che esso provenisse da emanazioni di natura vulcanica, o da riduzione di gessi o da altre cause ancora, non cambia valore alla ipotesi emessa, e non intendo affrontare anche questo problema: solo osservo che non è da escludere che quelle non piccole quantità di sostanze organiche, che dovevano essere contenute nei grandi banchi di tripoli, possano essere state sottoposte ad un processo di fermentazione, probabilmente anaerobia; uno dei prodotti della quale avrebbe potuto essere l'idrogeno solforato, che più in alto sarebbe stato sottoposto ad un nuovo processo biologico, per opera dei microorganismi ossidanti.

Così anche in questo senso la vegetazione di diatomee avrebbe potuto contribuire alla formazione dei depositi di zolfo.

*
* *

Uno sguardo alla carta geologica, annessa alla « Descrizione geologica della Sicilia » di L. Baldacci, è molto istruttiva, perchè da essa si rileva facilmente quale è la posizione delle varie solfare più importanti, di fronte ai diversi terreni geologici che costituiscono l'isola.

I depositi di zolfo sono generalmente presso ai confini fra i terreni miocenici e quelli pliocenici.

Quelli che si trovano nella zona di Caltanissetta, quelli di Riesi, Caltagirone, Aidone, Valguarnera ecc., circondano come una corona la zona pliocenica verso il centro della quale si trova Piazza Armerina. Anche le solfare di Calascibetta, Castrogiovanni, Girgenti, Cattolica ecc., che non fanno

parte di questa corona, si trovavano tutte sui confini di altre aree di terreno pliocenico.

Soltanto alcune solfare sembrano fare eccezione a questa regola. Quella di Lercara Friddi si trova sul confine tra la formazione miocenica e quella eocenica. Ciò può derivare da erosioni avvenute su vasta scala che abbiano asportato in gran parte il terreno pliocenico, come sembra ritenere il Baldacci; ma potrebbe anche derivare da una maggiore antichità del deposito solfifero. Tale possibilità è ammessa dallo stesso autore per un altro deposito, quello di Gibellina, nel quale si osservano le seguenti varianti nella disposizione degli strati:

« Lo strato solfifero, che è a ganga calcarea, riposa su un banco di « veri tripoli, con scaglie di pesci, libellule, ecc.; questo strato, avvicinan- « dosi alla superficie, cambia natura, e passa a tufo nero con banchi are- « nosi. Al disopra dello strato vi è una serie di banchi di argille bitumi- « nose, analoghe a quelle ora descritte, con straterelli venosi, e su questi « riposa un potente strato di tripoli in perfetta concordanza con lo strato sol- « fifero: la serie si termina in alto coi calcari silicei e coi trubi che for- « mano la cima del monte del Sonno. Dall'accurato esame di questo gia- « cimento risulta che si deve rigettare qualunque ipotesi di una faglia che « abbia riportato in alto i tripoli; questi sono indubbiamente superiori allo « strato solfifero, e identici a quelli che ne formano il letto. Questo strato « appartiene, a mio credere, ad un'epoca anteriore a quella solfifera, e forse « è sarmatiano come i tripoli a cui è associato. Già vedemmo, più sopra, che « nei tripoli della galleria della Sinatra si trovano lenti di calcare solfi- « fero intercalato; analoghi fatti si osservano a Contaceto presso Serradifalco « e a Montedoro, e del resto *non vi è nessuna difficoltà a credere che le « manifestazioni endogene, che dettero origine alla formazione di zolfo, « possano in circostanze speciali essere avvenute prima dell'epoca solfifera « propriamente detta* ».

Del resto in alcuni luoghi è stata osservata una vera alternanza fra strati di tripoli e strati solfiferi.

Mettendo tali osservazioni in rapporto con la teoria biologica della formazione dello zolfo, si potrebbe pensare che quei depositi più antichi siano stati i luoghi nei quali per la prima volta si sono manifestati i complessi fenomeni biologici di ossidazione dell'idrogeno solforato e di deposizione dello zolfo in presenza di microorganismi; siano stati cioè, per così dire, i centri di infezione dai quali gli opportuni germi sarebbero poi passati negli altri bacini, lacustri o lagunari, fino ad invadere una gran parte della Sicilia. Nè vi è nulla in contrario a ritenere che in uno stesso bacino si siano alternate più volte le condizioni necessarie per lo sviluppo dei due tipi di vegetazione, quella a diatomee e quella batterica, producendo negli strati una alternativa dei prodotti delle due diverse vegetazioni.

In Toscana, nella provincia di Siena, presso Lornano, esistono cave di zolfo, da non molto tempo sfruttate industrialmente e non ancora studiate in modo esauriente nella loro paleontologia (1). L'escavazione del materiale, relativamente superficiale, non ha ancora condotto al ritrovamento dei tripoli che quasi certamente esistono; lo zolfo si trova talvolta cristallizzato, più spesso in stato amorfo sotto forma di ammassi o di incrostazioni imprigionate nella ganga; abbondano residui vegetali lignitificati.

Si ha l'impressione che questo deposito abbia avuto origine in ambiente paludoso fangoso che rammenterebbe le incrostazioni sulfuree dei fanghi della regione boracifera. La materia organica sarebbe stata fornita dai detriti di vegetali superiori abbondantissimi, anche se mancasse, cosa che non credo, il sottostante tripoli, al quale penso si debba attribuire in generale una grande parte del fenomeno.

Il deposito solfifero di Poggio Orlando (Lornano) è di origine lacustre, al contrario della massima parte dei depositi di zolfo che hanno origine salmastra, e si trova in terreno miocenico (2).

Quanto ai depositi solfiferi della Romagna, essi si trovano in posizione geologica analoga a quelli della Sicilia, e ad essi si possono applicare, senza eccezione, le considerazioni fatte per questi ultimi.

*
* *

Hò più volte detto che durante il periodo di deposizione dello zolfo la vita algosa (specialmente a diatomee) si rallentò e si spense, ma forse non giunse mai nella maggior parte dei casi ad estinguersi del tutto: e infatti lo Spezia (3) e principalmente lo Stella (4) trovarono traccie di diatomee in molti calcari solfiferi della Sicilia e della Romagna, mentre il Manasse non ne trovò nei campioni del Senese da lui esaminati, senza però potere escludere che se ne possano trovare ad un esame più esteso ed accurato (5).

L'importanza di questo fatto è dallo Stella rilevata con le seguenti parole: « Rispetto alla genesi dei giacimenti di zolfo possiamo già affermare « che si debba aggiungere un concetto nuovo, giacchè nelle *roccie a zolfo* « noi non abbiamo soltanto elementi di origine meccanica e altri di depo- « sito chimico, ma anche una porzione di origine organica. Ora, se si pon

(1) Manasse E., *I minerali della cava di zolfo di Poggio Orlando presso Lornano in provincia di Siena.* Atti della Soc. tosc. di sc. nat., vol. XXIII, Pisa 1907. — Pantanelli, *Di alcuni giacimenti solfiferi della provincia di Siena.* Boll. d. Soc. geol. ital. vol. XXII, Roma 1903.

(2) Manasse, loc. cit.

(3) Spezia, *Sull'origine dello zolfo nei giacimenti solfiferi della Sicilia,* Torino 1892.

(4) Stella A., *Sulla presenza di fossili microscopici nelle roccie a zolfo della formazione gessoso-solfifera.* Boll. d. Soc. geol. ital., vol. XIX, Roma 1900.

(5) Manasse, loc. cit.

« mente all'insieme dei fossili macroscopici e microscopici della formazione
« solfifera produttiva siciliana, e se si confrontano da un lato col complesso
« dei fossili del sottostante tripoli e dei sovrastanti trubi, dall'altro coi fos-
« sili delle restanti formazioni gessoso-solfifere in generale, non si può far
« a meno di riflettere che dessa formazione solfifera produttiva, nonostante le
« differenze importanti rispetto alle formazioni che la comprendono, mostra
« una continuità di ambiente ben maggiore di quanto non si sospettasse; e ri-
« spetto alle formazioni collaterali equivalenti, è lungi dal presentare quella
« pronunciata anormalità che si suole generalmente supporre ».

La differenza fondamentale fra la genesi degli strati solfiferi e quella degli strati equivalenti non solfiferi consisterebbe principalmente in questo: che la deposizione dei primi sarebbe avvenuta sotto l'azione di una speciale Flora microscopica, prevalentemente costituita da batteriacee ossidanti, mentre quella dei secondi si sarebbe verificata per opera di sole forze fisicochimiche, o in presenza di una Flora microbica diversa, non dotata delle stesse proprietà biochimiche.

*
* *

Al disopra del minerale di zolfo sta la formazione dei gessi che ricoprono non solo questi depositi, ma anche altri terreni. In questi strati più non si incontrano quelle sostanze che dànno un caratteristico aspetto bituminoso ai gessi che qua e là sono compresi nella formazione solfifera: essi sembrano liberi di sostanza organica (Mottura).

La loro estensione, maggiore di quella dei sedimenti solfiferi, mostra che i gessi costituiscono una formazione indipendente da questi. Non si trova dunque in essi, almeno finora, alcun indizio che possa far pensare ad una azione biologica qualunque.

Il processo biologico deve essersi spento in coincidenza col cominciare della deposizione di questo composto; e qui non è dunque niente altro da notare se non il fatto che nelle soluzioni di solfuro sodico che venivano mantenute, sterili, in condizioni identiche a quelle delle culture di *B. ferrigenus* e che a tali culture servivano di controllo, la trasformazione del solfuro seguì la via normale di ossidazione passando successivamente a solfito e solfato. Siamo dunque, per quanto riguarda la formazione di depositi di solfato di calcio, nel puro campo dei fenomeni chimichi e fisici; e nulla ci autorizza ad invocare un intervento biologico.

Zoologia. — *Alcune osservazioni morfologiche e biologiche sull'Aclerda Berlesei* Buffa. Nota di Lidia La Face, presentata dal Socio B. Grassi.

Riprendendo in esame, per consiglio del prof. Grassi, l'*Aclerda Berlesei* Buffa, cocciniglia vivente sull'*Arundo donax* (1), ho cercato specialmente di chiarire meglio lo sviluppo postembrionale di quest' insetto e la sua biologia ancora poco conosciuta (2).

I. *Osservazioni sullo sviluppo postembrionale.* — Confermo le osservazioni del Buffa rispetto allo sviluppo postembrionale del maschio di questa specie. Esso attraversa quattro stadî, due larvali e due ninfali; dopo una quarta muta, si ha l'immagine.

Nella Memoria in esteso descriverò minutamente i suddetti stadî, dei quali alcuni sono stati appena accennati dal Buffa.

Per la femmina io ho potuto distinguere tre esuviamenti, e quindi essa attraversa tre stadî di sviluppo prima di arrivare alla forma adulta.

Riassumerò brevemente i principali caratteri degli stadî femminili.

1° stadio ♀. — Nel primo stadio i caratteri della larva femminile corrispondono a quelli del primo stadio maschile, e tralascio perciò di farne qui la descrizione. Essa è dapprima mobile, ma, avvicinandosi alla prima muta, entra in un periodo d'immobilità che per la femmina di questa specie dura tutta la vita.

2° stadio ♀. — Compiuta la prima muta, la larva femminile assume dei caratteri che l'avvicinano moltissimo al secondo stadio maschile. Come in quest'ultimo, non sono evidenti i segmenti del corpo. Gli occhi sono atrofici; delle antenne sono visibili, dal lato ventrale, i rudimenti in forma di tubercoli appiattiti, forniti di brevi peli. Le zampe mancano completamente.

L'estremo posteriore del corpo, come nel secondo stadio maschile, è distinto in una porzione mediana liscia e in due porzioni laterali a margini induriti e striati per la presenza di numerose pieghe chitinose dirette dall'orlo del corpo verso la parte mediana di esso, tanto dal lato dorsale quanto dal ventrale. Si può distinguere questo stadio da quello maschile corrispondente, oltre che per altre minute particolarità, anche per il numero e la diversa disposizione delle spine e dei tubercoli ciripari. Queste appendici, mentre

(1) P. Buffa, *Sopra una cocciniglia nuova* (*Acl. Berlesei*). Riv. di pat. veg., vol. VI, 1898, fasc. I.

(2) Ringrazio la signorina dott. Anna Foà che mi ha indirizzato nelle mie ricerche.

nel secondo stadio maschile si limitano all'orlo del corpo e solo al lato ventrale, nel secondo stadio femminile si trovano tanto nel lato ventrale, dove sono più numerose e formano una zona marginale continua, quanto nel lato dorsale dove sono più rare. All'estremo anteriore del corpo, nel lato dorsale, mancano quei tubuli ghiandolari che si osservano nel secondo stadio maschile. Un altro carattere che fa distinguere, ad un primo esame, questa forma dal secondo stadio maschile, è che attorno ad essa non si ha quel particolare follicolo di materia cerosa, consistente, nel quale il maschio di questa specie compie il suo sviluppo. Anche il colore del corpo, rosso più o meno vivo, differisce da quello del secondo stadio maschile, che è giallo ocraceo.

3° stadio ♀. — Mentre nel maschio il terzo stadio presenta una grande modificazione nei caratteri, cominciando un periodo di ninfa, nella femmina invece non si hanno notevoli differenze rispetto al secondo stadio. La forma generale del corpo è ovale, alquanto convessa dorsalmente, appiattita ventralmente. In corrispondenza all'orlo del corpo la chitina è più indurita; e così pure all'estremo posteriore, che, tranne alcune particolarità, non è conformato in modo assai diverso dallo stadio precedente. Mancano le zampe, gli occhi, e si hanno rudimenti di antenne simili a quelli del secondo stadio. L'apparato boccale invece continua ad essere bene sviluppato e l'insetto, a differenza del maschio, seguita a nutrirsi. Gli organi ciripari non subiscono modificazioni nella forma e nella disposizione, ma aumentano considerevolmente di numero.

Femmina adulta. — Dopo la terza muta, le dimensioni della femmina aumentano considerevolmente, raggiungendosi una lunghezza massima di circa 1 cm. ed una larghezza di 3-5 mm. La chitina del dorso diventa ancora più spessa e indurita, mentre al ventre si mantiene più sottile. Persiste la mancanza degli occhi e delle zampe: sono sempre visibili, dal lato ventrale, le traccie delle antenne, e l'apparato boccale non subisce modificazioni. L'estremo posteriore del corpo nella femmina adulta è alquanto modificato ed appare distinto in una piastra mediana, di forma ovale arrotondata, e in due lobi che si prolungano all'indietro di essa. Si conservano gli organi ciripari che si osservano negli stadî precedenti ed appaiono numerosi e corti tubuli ghiandolari, diffusi tanto nella regione dorsale dell'insetto quanto nella ventrale.

Paragonando in questa specie — dal Buffa considerata come un Lecanide, ma la cui posizione sistematica dovrà essere meglio definita — gli stadî di sviluppo del maschio con quelli della femmina, non si può giungere alla stessa conclusione a cui viene Börner per i Diaspini, a proposito dell'*Aulacaspis rosae* [1], che cioè lo sviluppo postembrionale della femmina sia in-

[1] Börner, *Parametabolie und Neotenie bei Cocciden* (Sonderabdruck aus dem « Zoologischen Anzeiger », Bd. XXXV, n. 18 vom 29 März, 1910).

completo, abbreviato, ma corrispondente a quello del maschio. Secondo il Börner, nell'*Aulacaspis rosae* il maschio attraversa tre stadî larvali, e così pure la femmina; ma, mentre il primo passa in seguito per due stadî di ninfa, prima di arrivare all'immagine, la seconda diventa sessualmente matura al terzo stadio larvale: perciò lo sviluppo della femmina è incompleto, abbreviato per la maturazione precoce degli organi sessuali, ma si svolge, per il periodo larvale, in modo simile a quello del maschio. Nell'*Aclerda Berlesei* si può stabilire una corrispondenza tra lo sviluppo postembrionale dei due sessi solo per i due primi stadî, poichè dopo la seconda muta, mentre il maschio passa per due stadî ninfali, la femmina invece attraversa ancora uno stadio larvale e poi arriva alla forma adulta senza che i caratteri larvali subiscano profonde modificazioni e cambi il modo di vita. Quindi lo sviluppo della femmina si svolge in modo differente da quello del maschio: è più breve, compiendosi in tre stadî invece che in quattro, ed è evidentemente *emimetabolo*, mentre a quello del maschio si può applicare il termine di *parametabolia*, stabilito dal Börner per la metamorfosi dei maschi di alcuni Coccidî [1], avvicinandosi essa a quella degli insetti olometaboli.

***

II. *Dimorfismo del maschio*. — Rispetto al maschio della *Aclerda Berlesei*, devo aggiungere che oltre ai maschi forniti di ali allo stadio adulto, già noti, vi è una altra sorta di maschi con ali atrofiche, i quali si possono considerare come individui giunti allo stadio d'insetto perfetto. Infatti, come i maschi alati, essi percorrono, dopo i due stadî larvali, due stadî di ninfa che non differiscono in nulla dalle ninfe dei primi tranne che per la mancanza degli abbozzi delle ali: solo nello stadio d'immagine essi presentano dei rudimenti di ali, visibili all'esame microscopico. Questi maschi con ali atrofiche fecondano essi pure. Probabilmente vi saranno diverse condizioni che determinano l'apparire dell'una o dell'altra forma di maschi: io ho potuto solamente osservare che nei mesi estivi gli individui con ali atrofiche sono alquanto rari, mentre si rinvengono numerosi nei mesi invernali. È da notare inoltre che i maschi con ali sviluppate non volano: in numerose osservazioni fatte in proposito, non ho mai visto che essi si servano delle ali.

***

III. *Osservazioni biologiche*. — Quanto all'*habitat* dell'*Aclerda Berlesei*, è da notare che essa non è solamente epigea, come già è stato affermato, ma vive anche sulla parte ipogea della pianta, cioè sul rizoma: sulle radici non si trovano mai individui di questa specie, e nemmeno sulle

[1] Börner, *Die Verwandlungen der Insekten* (vorl. Mitteilung). Sitzber. nat. Freunde. Berlin, 1909, S. 290-311.

foglie. Sulla porzione superiore del culmo si sviluppano a preferenza i maschi, mentre le femmine sono più numerose sulle porzioni media ed inferiore di esso. Sul rizoma non ho rinvenuto che femmine.

Questa specie presenta una sola generazione all'anno. L'accoppiamento può avvenire tanto nei mesi estivi quanto nell'autunno e nell'inverno, per tutto il periodo cioè in cui si ha lo sviluppo dei maschi, che, a Roma, va dall'agosto a tutto febbraio. Anche le femmine sotterranee vengono fecondate: ho infatti notato in esse, in epoche diverse, la spermoteca piena di spermatozoi.

Perciò i maschi, quantunque si sviluppino e vivano esclusivamente sul culmo, debbono dirigersi sul rizoma per fecondare le suddette femmine, ma io non ho potuto ancora riscontrarli su di esso. È frequente in questa specie un accoppiamento precoce: le femmine, cioè, possono essere fecondate parecchio tempo prima di raggiungere la maturità sessuale.

La femmina, come già è noto, è vivipara: ho potuto osservare che la larva, appena partorita, è racchiusa in un involucro bianco, trasparente, dal quale si libera dopo una mezz'ora o poco più, dalla nascita, rompendolo anteriormente. Essa rimane sotto il corpo della madre per qualche tempo, dopo il quale comincia ad aggirarsi sulla pianta cercando il posto più adatto per fissarsi.

La deposizione delle larve avviene in due epoche successive per le femmine epigee e quelle ipogee.

Dalla fine di aprile sino a tutto il mese di giugno generano le femmine del culmo. Al principio di luglio, quando tutte le femmine epigee sono ormai morte, cominciano a prolificare le femmine sotterranee e così seguitano sino all'autunno. Le neonate epigee possono dirigersi in basso verso il rizoma; quelle ipogee possono andare dal rizoma sulla parte aerea della pianta per compiere il loro sviluppo, e si fissano a preferenza sui giovani culmi dell'anno.

Durante la stagione estiva le larve fissate sulla parte aerea della pianta compiono, dopo quindici, venti giorni dalla nascita, la prima muta. Già in agosto si possono osservare in gran numero, sui culmi, maschi e femmine che hanno compiuto tutte le loro mute: i maschi cominciano ad uscire dai follicoli in cui si sviluppano e dopo aver fecondato le femmine, a quest'epoca ancora immature, muoiono, mentre le ultime rimangono sulla pianta, seguitando sempre a nutrirsi e ad accrescersi, sino alla primavera successiva.

Nell'inverno, oltre gli individui adulti d'ambo i sessi, si rinvengono numerosi sui culmi gli stadî giovanili maschili e femminili provenienti dalle ultime larve nate in autunno e che compiono lentamente il loro sviluppo, impiegando un tempo che non ho potuto ben precisare, ma che certamente è di maggior durata di quello impiegato dall'insetto a compiere tutte le sue mute in estate.

Chimica-fisica. — *Sullo stato dell'acido carbonico nel sangue*: III, *Mobilità dello ione* HCO_3' *alla temperatura* 37° C. Nota di G. QUAGLIARIELLO ed E. D'AGOSTINO, presentata dal Corrisp. FILIPPO BOTTAZZI [1].

Nella nostra Nota precedente abbiamo studiato la mobilità dello ione HCO_3' alla temperatura 18°C.; ora, per le applicazioni dirette ai liquidi dell'organismo, ed in particolar modo al sangue, ci interessava estendere la ricerca anche alla temperatura 37°. Per tale nuova determinazione ci siamo senz'altro serviti di quello, fra i metodi, che la investigazione già fatta ci dimostrava il migliore. Il metodo consiste in ciò: che le misure di conduttività vengono praticate in acqua fortemente carbonica, a cui vengono progressivamente aggiunte quantità note di Na OH. Per tali misure occorre la massima precisione di titolo della soluzione di Na OH adoperata: bastano infatti errori minimi del titolo per causare errori rilevanti della mobilità dello ione. Occorre inoltre acqua distillata purissima, vaso ad elettrodi di grande capacità (circa 1 litro), ed elettrodi, abbastanza grandi, di platino non platinati, abbastanza ravvicinati fra loro per escludere l'uso delle fortissime resistenze.

Per la teoria ed il calcolo della influenza dell'idrolisi rimandiamo al nostro precedente lavoro (Nota II, loc. cit.).

La relazione fra la conduttività ed il contenuto molecolare di una soluzione di acido carbonico a 37° fu calcolata in base ai dati contenuti nella tabella 1.

1. *Conduttività specifiche di soluzioni di acido carbonico a* 37°.
(Conduttività specifica dell'acqua $= 0{,}0_6 75$).

Moli di acido carbonico per litro $= m$	Conduttività specifica trovata	La stessa diminuita della conduttività dell'acqua $= \varkappa$	$1000 \frac{\varkappa}{\sqrt{m}} = \mu_\infty \sqrt{k}$	
0,002668	$0{,}0_4 1697$	$0{,}0_4 1622$	0,314	media
0,005438	$0{,}0_4 2405$	$0{,}0_4 2330$	0,316	
0,01108	$0{,}0_4 3359$	$0{,}0_4 3284$	0,312	0,314
0,02200	$0{,}0_4 4717$	$0{,}0_4 4642$	0,313	

[1] Nota I: cfr. questi Rendic. (5), vol. XXIII, 1° sem., fasc. 10, pag. 844, an. 1914; e Nota II: cfr. questi Rendic. (5), vol. XXIV, 1° sem., fasc. 6°, pag. 638, an. 1915.

Abbiamo in conseguenza la relazione:

$$\varkappa = 0.0_3 314 \sqrt{m}$$

che ci servirà a calcolare la conduttività di una soluzione nota di acido carbonico alla temperatura 37° C.

La formola di correzione della conduttività specifica delle soluzioni H_2CO_3 + Na OH esaminate, chiamando, come nella nostra precedente Nota, m la concentrazione dell'acido carbonico libero, n la concentrazione della soda aggiunta e quindi anche la concentrazione del bicarbonato di sodio che si è formato, $\varkappa$ la conduttività specifica ricavata direttamente dalla misura, $\varkappa_2$ la conduttività specifica corretta, e adottando per k (costante di dissociazione dell'acido carbonico) lo stesso valore adottato per la temp. 18° nella nostra Nota precedente, e cioè $0{,}0_6 36$ [1], — è la seguente:

$$\varkappa_2 = \varkappa - 0{,}0_6 188 \cdot \frac{m}{n}.$$

Nella tabella 2ª riportiamo i valori ottenuti e le relative correzioni.

2. *Conduttività di una soluzione 0,022 15 mol.* H_2CO_3, *dopo aggiunte di quantità variabili di* Na OH. *Temperatura* 37° C.

$\varkappa$ dell'acqua = $0{,}0_6 75$).

NaOH aggiunta moli per litro $= n$	Acido carbonico libero moli per litro $= m$	Conduttività trovata meno la conduttività dell'acqua $= \varkappa$	Conduttività corretta $\varkappa_2 = \varkappa - 0{,}0_6 188 \frac{m}{n}$	Conduttività molecolare del bicarbonato $\mu = 1000 \frac{\varkappa_2}{n}$
$0\ 0_3 694$	0,02146	$0{,}0_4 901$	$0{,}0_4 843$	121,5
$0{,}0_2 1385$	0.02076	$0{,}0_3 1704$	$0{,}0_3 1676$	121.0
$0{,}0_2 2770$	0,01938	$0{,}0_3 3367$	$0{,}0_3 3324$	120,0
$0.0_2 5532$	0,01662	$0{,}0_3 6550$	$0{,}0_3 6544$	118,3 $\mu_\infty = 122{,}0$
$0{,}0_2 8260$	0,01389	$0{,}0_3 9659$	$0{,}0_3 9656$	116.9
0,01099	0,01116	$0{,}0_2 1270$	$0{,}0_2 1270$	115,6

La conduttività molecolare limite del bicarbonato di sodio, mediante l'estrapolazione grafica, vien trovata eguale a **122,0**. Dai dati di Kohlrausch si rileva che la mobilità del sodioione a 37° è eguale a 63,8; perciò, sottraendo questo valore dal precedente

$$122{,}0 - 63{,}8 = 58{,}2,$$

avremo che *la mobilità dello ione* HCO_3' *alla temperatura* 37° *è eguale a 58,2.*

Questo è il valore che ci eravamo proposti di conoscere; la sua importanza circa la valutazione dello stato dell'acido carbonico del sangue sarà apprezzata nelle nostre Note successive.

[1] Le variazioni eventuali, anche assai forti, del valore assoluto di k influenzano solo assai poco il valore assoluto del termine di correzione; per tal motivo non ci siamo preoccupati del fatto che tale valore può essere alquanto diverso dal vero.

Patologia. — *Ricerche sperimentali sulle cause che determinano la refrattarietà nei trapianti. I. Trapianti di tumori e ipotesi atreptica* [1]. Nota di Vittorio Scaffidi, presentata dal Corrispondente Gino Galeotti.

Sono note le ricerche di Ehrlich sui trapianti di tumori tra animali di specie affini, ricerche che hanno dato luogo alla ipotesi della atrepsia.

Ehrlich potè osservare che, se un tumore spontaneo del topo si innesta nel ratto, esso assume, in questo ultimo aninale, un decorso e presenta caratteri di accrescimento, che differiscono profondamente dal decorso e dai caratteri di accrescimento che lo stesso tumore presenta nei trapianti nel topo.

Mentre difatti il carcinoma 5 dell'Istituto di Francoforte, adoperato da Ehrlich nelle sue ricerche, dà, nei trapianti del topo, quasi il 100 per 100 di casi positivi, cioè di attecchimento, e il trapianto si può ripetere per un numero infinito di volte senza che il tumore perda le sue proprietà biologiche e i suoi caratteri istologici, lo stesso tumore trapiantato nei ratti dà luogo, nei primi 5-8 giorni, allo sviluppo e allo accrescimento progressivo di un nodulo in corrispondenza del punto in cui è stata deposta la poltiglia del tumore; ma dopo tale periodo di tempo, esso comincia a regredire, e scompare del tutto nei 10 giorni consecutivi.

Se si prendono frammenti di questi noduli del sottocutaneo del ratto, nei primi 6-8 giorni consecutivi all'innesto, e si trapiantano in altri ratti, il tumore non attecchisce più; invece esso si riproduce se si innestano frammenti nei topi, nella specie animale cioè in cui il tumore si era spontaneamente sviluppato. Questo fatto si potrebbe provocare numerose volte, con successivi innesti del tumore del topo nel ratto, da questo di nuovo nel topo, quindi nel ratto; e così via si potrebbe riprodurre all'infinito questo passaggio del tumore a zig-zag nelle due specie animali: *Mus musculus* e *Mus decumanus*.

Ehrlich ammise che la impossibilità di trapiantare stabilmente nel ratto il tumore del topo dipendesse dalla assenza, nell'organismo del ratto, del materiale necessario, della sostanza indispensabile, che Ehrlich stesso chiama « sostanza X », alla nutrizione e allo sviluppo del tumore, sostanza che sarebbe invece presente nell'organismo del topo.

Questa ipotesi, come è noto, porta il nome di ipotesi della « atrepsia ».

[1] Dall'Istituto di patologia generale della R. Università di Palermo, diretto da V. Scaffidi.

Le ricerche che direttamente sono state compiute su tale questione, e che si possono riferire ad essa, sono numerosissime e non hanno portato ad una soluzione della interessante questione. Io mi limito quindi alla esposizione di ricerche sperimentali da me compiute e che si riferiscono direttamente alla questione della atrepsia.

In queste ricerche (¹) sono stati adoperati un sarcoma e un carcinoma spontanei, del topo che nel laboratorio di Ehrlich si coltivano da molti anni e portano rispettivamente la denominazione di carcinoma 5 e sarcoma 7.

Questi due tumori, nei trapianti successivi nel topo, dànno circa il 100 per 100 di attecchimento, e quando furono iniziate le ricerche, erano stati trapiantati, per la conservazione del ceppo, numerose volte: e precisamente il carcinoma 5 si trovava alla 206ª generazione, e il sarcoma 7 alla 307ª.

Partendo dal concetto di Ehrlich — che l'innesto di un tumore originario di una determinata specie animale per attecchire in una specie animale diversa od affine, ha bisogno della presenza di una determinata « sostanza X » che si trova nella prima specie animale e non nella seconda — ho studiato il comportamento degli innesti dei tumori del topo nel ratto, aggiungendo al materiale di innesto la poltiglia di un organo del topo, cioè la « sostanza X ».

Furono così compiute 5 serie di ricerche, e cioè quattro col sarcoma 7 e una col carcinoma 5, che riassumo brevemente.

Esperimento 1º. — Si trapianta il sarcoma 7 in 8 ratti e in 8 topi. In questi ultimi il tumore si sviluppa benissimo; nei ratti si ha la produzione di un nodulo sottocutaneo, che dopo 7 giorni viene asportato, ridotto in poltiglia e innestato sottocute a 8 topi e a 6 ratti, senza la aggiunta di altri tessuti, e ad altri 6 ratti con l'aggiunta, nella poltiglia di innesto, di poltiglia di embrione di topo. Nei topi si ottiene lo sviluppo del tumore in 7 esemplari su 8; nei ratti si ha la formazione di un nodulo sottocutaneo identico, sia in quelli nei quali era stata inoculata la massa di innesto semplicemente, sia in quelli nei quali era stata trapiantata la massa di innesto con aggiunta di embrione di topo. Nel nodulo sottocutaneo sviluppatosi in questi due ultimi gruppi di ratti, più non esistono cellule del tumore originario, come risulta, sia dall'esame microscopico, sia dai trapianti fatti nel sottocutaneo del topo.

Esperimento 2º. — Il sarcoma 7 viene trapiantato contemporaneamente in 6 ratti e in 6 topi. In questi ultimi si ha lo sviluppc caratteristico del tumore; nei ratti lo sviluppo di noduli sottocutanei, che dopo 7 giorni vengono trapiantati a 8 topi e a 8 ratti. Ad altri 5 ratti si inocula la polti-

(¹) Queste ricerche sono state in gran parte compiute nel R. Istituto di terapia sperimentale di Francoforte.

glia di milza di topo. Nei topi si ha lo sviluppo del tumore originario, in 5 esemplari su 8; nei ratti si ha lo sviluppo dei caratteristici noduli sottocutanei, che risultano privi di elementi neoplastici. In un ulteriore trapianto del tumore, prelevato dai topi di cui sopra, a due lotti di ratti, si hanno gli stessi risultati negativi, benchè nel secondo trapianto da ratto a ratto fosse stata aggiunta alla massa di innesto poltiglia di embrione di topo.

Esperimento 3°. — A 8 topi e a 8 ratti viene innestato contemporaneamente il sarcoma 7, senza l'aggiunta di poltiglia di organi di topo. Ad altri 8 ratti si innesta lo stesso tumore, con l'aggiunta di poltiglia di milza di topo. Nei topi si ha lo sviluppo del tumore in 6 esemplari su 8, nei ratti lo sviluppo dei noduli caratteristici, che dopo 6 giorni di accrescimento vengono trapiantati a 25 topi, in 12 dei quali si ha lo sviluppo del tumore. Contemporaneamente si trapianta lo stesso materiale in 28 ratti, in parte da solo, in parte con l'aggiunta di milza o di embrione di topo. In tutti si ottiene lo sviluppo di un nodulo sottocutaneo, nel quale però, all'esame istologico, non si rinvengono elementi del tumore. I risultati del controllo biologico sono identici a quelli dell'esame istologico, giacchè, su 16 topi innestati con la poltiglia del nodulo sottocutaneo dei ratti, in nessuno si ebbe lo sviluppo del tumore originario.

Esperimento 4°. — Il sarcoma 7 viene innestato a 5 topi, nei quali si ha lo sviluppo del tumore, e a 14 ratti, in 12 dei quali si ottiene lo sviluppo del caratteristico nodulo sottocutaneo. La poltiglia di questi 12 noduli si trapianta in 8 topi, nei quali si ha lo sviluppo del tumore originario. Con la stessa poltiglia, senza la aggiunta di organi di topo, si innestano 8 ratti, nei quali si avvera lo sviluppo dei noduli sottocutanei, in cui più non esistono cellule del tumore. Ad una certa quantità della poltiglia di cui sopra si aggiunge poltiglia di embrione di topo e si innesta a 10 ratti: in alcuni di questi si ha lo sviluppo del nodulo sottocutaneo caratteristico, che, trapiantato in 8 topi, dà luogo allo sviluppo, in uno di essi, del tumore originario.

In questo caso quindi le cellule del sarcoma 7 hanno conservato la capacità di proliferare, dopo un doppio successivo passaggio nell'organismo del ratto.

Esperimento 5°. — Il carcinoma 5 del topo si innesta contemporaneamente in 8 topi, nei quali si ha la riproduzione del tumore; e in 12 ratti, nei quali si sviluppa il catatteristico nodulo sottocutaneo. Dopo 6 giorni, la poltiglia che si ottiene dalla triturazione del nodulo di ciascun ratto si innesta in 8 topi, in sei dei quali si ha lo sviluppo del tumore originario, e a 8 ratti, nei quali si ha la formazione del caratteristico nodulo sottocutaneo. Trasportati questi, dopo ridotti in poltiglia, in 4 topi, si ottiene lo sviluppo del tumore in uno di essi. Questo tumore, trasportato ancora in 10 topi, dà

risultati positivi in 9. L'esame istologico di un frammento del tumore mette in evidenza la struttura caratteristica del tumore originario.

La stessa poltiglia dei noduli del primo lotto di ratti trasportata in altri ratti, con l'aggiunta di poltiglia di embrione di topo, dà risultati negativi, sia all'esame istologico, sia negli ulteriori trapianti nei topi. Dopo il secondo trapianto diretto nel ratto, le cellule del tumore non si riscontrano più.

Questi risultati dimostrano:

1°) È possibile di trapiantare numerose volte un tumore di una determinata specie animale (topo), in una specie animale affine (ratto), e da questa nella prima, e così successivamente per numerosi trapianti a zig-zag, purchè gli innesti si facciano su numerosi esemplari e con materiale preso da individui nei quali si trovi in ottime condizioni di conservazione; giacchè le cellule del tumore, in questi continui passaggi a zig-zag attraverso organismi di specie diversa od affine alla specie portatrice del tumore, perdono parzialmente la capacità di accrescimento, ciò che determina una diminuzione della percentuale di attecchimento.

2°) Operando in tali condizioni ideali, è possibile eccezionalmente che il tumore persista ancora virulento, capace cioè di svilupparsi ancora nella specie animale in cui esso originariamente si è spontaneamente sviluppato e nella quale esistono le migliori condizioni per il suo accrescimento, anche dopo che è stato trasportato per due volte consecutive nell'organismo di una specie animale affine alla precedente, ma naturalmente refrattaria allo attecchimento del tumore stesso.

3°) Questo fatto, la persistenza cioè della capacità proliferativa delle cellule del tumore, dopo questo doppio passaggio in un organismo refrattario, si può avverare, sia che alla massa di innesto del tumore si aggiunga poltiglia di organi appartenenti alla specie animale da cui il tumore proviene (esperimento 4°), cioè la « sostanza X » voluta da Ehrlich, sia che questa sostanza non si aggiunga (esperimento 5°).

4°) Si deve quindi ritenere che, con ogni probabilità, la refrattarietà di una specie animale verso un tumore spontaneamente sviluppatosi in una specie animale diversa od affine non è determinata dalla assenza, nell'organismo, di una « sostanza X » necessaria allo sviluppo delle cellule neoplastiche, ma da altri fattori che determinano lo stato refrattario con un meccanismo affatto diverso da quello voluto dalla ipotesi atreptica.

Mineralogia. — *Cenni su alcuni minerali dei tufi di Isernia* (Campobasso) [1]. Nota di E. Quercigh, presentata dal Corrisp. E. Artini.

Anni or sono, il prof. Ferruccio Zambonini ebbe in dono dal prof. Carlo Viola alcuni campioncini del tufo giallo dei dintorni di Isernia contenenti dei minerali nitidamente cristallizzati.

Distratto da altre ricerche, il prof. Zambonini non potè mai occuparsi, come ne aveva in principio intenzione, del loro studio. Quando, qualche anno fa, cominciai ad iniziarmi nelle ricerche mineralogiche sotto la sua direzione nell' Istituto di mineralogia della R. Università di Palermo, il prof. Zambonini mi affidò quel materiale per istudio, del che lo ringrazio nuovamente nell'accingermi a riassumere i risultati di quelle mie ricerche.

Dal tufo, che si presenta terroso, di color giallo chiaro, potei isolare dei netti cristallini di alcuni minerali; e benchè i dati che ho potuto stabilire, a causa della scarsezza del materiale disponibile, non sieno molti, pure, trattandosi di una regione mineralogicamente pochissimo conosciuta, credo non inutile il pubblicarli, se non altro per richiamare l' attenzione degli studiosi su un giacimento che sembra essere molto interessante.

I minerali rinvenuti sono: *sanidino*, *magnetite*, *olivina*, *augite nera e verde*, *biotite*, *anfibolo*.

Più importante, in questi campioni, appare subito il *sanidino*, che si presenta quasi sempre in frammenti di cristalli rotolati e molto di rado in cristalli più netti.

Le forme che in esso potei osservare sono le seguenti: $\{001\}$, $\{010\}$, $\{110\}$, $\{130\}$, $\{\bar{2}01\}$, $\{\bar{1}11\}$, $\{021\}$.

Molto frequenti sono i geminati di Baveno col loro caratteristico aspetto; in essi, $\{130\}$ è generalmente molto grande, e frequentissima è la $\{021\}$ che si presenta in faccette abbastanza estese; questa forma è invece molto rara nei cristalli unici.

Questi sono, nella maggior parte dei casi, tabulari secondo $\{010\}$; più raramente, invece, sono prismatici ed allungati secondo l'asse c.

Lo sviluppo delle varie forme è il solito: la $\{130\}$ compare però sempre piccolissima, eccetto in alcuni cristalli nei quali presenta una faccia molto sviluppata, mentre le altre sono limitatissime; la $\{\bar{1}11\}$ è sempre assai subordinata.

[1] Istituto di mineralogia della R. Università di Torino, diretto dal prof. Ferruccio Zambonini.

Sarebbe stato assai interessante di poter misurare esattamente alcuni cristalli di questo minerale per poterne determinare le costanti che, com'è noto, variano considerevolmente da località a località; ma ciò non fu possibile, perchè i pochi cristalli semplici un po' completi non dànno esatte misure, essendo assai spesso le immagini o multiple o pallidissime. Ciò è tanto più deplorevole, in quanto le misure che ho potuto prendere dimostrano che le costanti di questo *sanidino* devono essere molto diverse da quelle degli altri giacimenti finora studiati.

Mi limiterò a riportare alcuni valori angolari ottenuti da un cristallino che ha dato le migliori misure:

$$
\begin{aligned}
(001):(010) &= 90^\circ\ 0' \\
(010):(130) &= 29\ 23 \\
(010):(110) &= 59\ 41 \\
(001):(\bar{2}01) &= 80\ 17 \\
(001):(130) &= 77\ 21 \\
(001):(110) &= 67\ 58 \\
(001):(1\bar{1}0) &= 68\ \ 0
\end{aligned}
$$

Confrontando questi valori con quelli ottenuti in generale per il sanidino di altre località, si può osservare come il minerale di Isernia si scosti, specialmente per quanto riguarda gli angoli (010):(110) e (001):(110), dai valori più comunemente trovati.

Nel sanidino del Lazio, ad esempio, lo Strüver [1] trovò in tre cristalli i seguenti valori:

	(010):(110)	(001):(110)
I	59° 23′	—
II	59° 22′ 50″	67° 42′ 20″
III	59° 35′	—

mentre lo Zambonini, che studiò numerosi cristalli del minerale proveniente da varie località [2], trovò i valori seguenti:

	(010):(110)	(001):(110)
Monte Cimino.	59° 28′	47° 46′ (valori medî)
Quartuccio	59 26	67 47 "
Tombe dei Nasoni . .	59° 24′-59° 34′	67° 44′ 1/2-67° 51
Lazio	59 29-59 33	67° 40 -67° 47

(1) G. Struever, *Studî sui minerali del Lazio*. Atti R. Accad. Lincei, Mem. della Classe di sc. fis. mat. e nat., 1876-77, serie III, vol. I, pag. 93.

(2) F. Zambonini, *Sul sanidino del monte Cimino* (*Viterbese*), Rivista di min. e crist. ital., XX (1898), pag. 20; id., *Sul sanidino*, Rivista di min. e crist. ital., XXV, (1900), pag. 33.

Per ciò che riguarda gli angoli (010):(110) e (001):(130), il sanidino del tufo d'Isernia si avvicinerebbe a quello del lago di Laach studiato dal vom Rath [1]; ma per gli altri, invece, si allontana nettamente.

Volendo avere un'idea delle costanti che corrisponderebbero al cristallino di cui riportai le misure, scelsi come base del calcolo gli angoli:

$$(001):(\bar{2}01) = 80^\circ\ 17' \ ; \ (010):(110) = 59^\circ\ 41' \ ; \ (001):(110) = 67^\circ\ 59'$$

ed ottenni:

$$a:b:c = 0.64915:1:0.55154$$
$$\beta = 69^\circ\ 15'\ 42''\ .$$

Questi valori che evidentemente non si possono considerare come definitivi sono caratteristici, come si può vedere dal confronto coi dati trovati per le altre località più importanti:

	a : b : c	β	
Laach	0.649250:1:0.551700	63° 54′	(Strüver)
Viterbese (blocchi)	0.655890:1:0.552868	63 54	(Zambonini)
» (trachiti)	0.656503:1:0.553588	63 57 10″	»
Lazio	0.656801:1:0.552392	63 59 5	»
Vesuvio	0.655046:1:0.552224	63 56	»
»	0.651843:1:0.552734	64 0 32	(Vom Rath)
»	0.6538 :1:0.5526	64 7 30	(Strüver)
»	0.65509 :1:0.55162	63 56	(P. Franco) [2]
»	0.654007:1:0.551682	63 55 55	(Kokscharow) [3]
Tombe dei Nasoni	0.656617:1:0.553223	63 57 30	(Zambonini)

Si può dunque arguire che, almeno per quanto appare dalle poche misure prese, il sanidino d'Isernia costituisca un tipo a sè, per il quale sarà opportuno di calcolare delle costanti speciali, quando si potrà disporre di più abbondante materiale.

Eseguita la prova microchimica per il sodio, ottenni risultato affermativo.

Tutti gli altri minerali rinvenuti in questi tufi sono piuttosto rari:

La *magnetite* è forse più rara di tutti gli altri e forma piccoli granuletti senza netta forma cristallina.

L'*olivina* si presenta in granuli arrotondati o in cristalli ancora abbastanza netti, di color giallo sporco, ora un po' allungati secondo c, ora tabulari secondo (010) con c ed a egualmente estesi.

(1) G. vom Rath, Pogg. Ann., *135* (1868), pp. 462 e 561.

(2) P. Franco, *Sulle costanti geometriche dell'ortoclasio del Vesuvio.* Giornale di min. del dott. F. Sansoni, Pavia, 1894.

(3) Kokscharow, *Materialien zur Mineralogie Russlands,* V, pag. 356.

Le forme osservate sono le solite {010}, {110}, {120}, {021} e, molto raramente, la {101}; quest'ultima si presenta con faccette piccolissime.

Di *augite nera* si trovarono pochi cristallini che raramente raggiungono i 4 mm. nella direzione dell'asse z. Essi presentano le forme {100}, {010}, {110}, $\{\bar{1}11\}$, {021}, $\{\bar{2}21\}$, {111}, delle quali le tre ultime sono rare e presenti soltanto con faccette molto piccole.

Una sezione secondo (010) presenta, al microscopio, debolissimo pleocroismo nel color verde-scuro; l'angolo di estinzione è abbastanza forte:

$$c : \mathrm{c} = 50^\circ\ {}^1/_2 .$$

I cristalli di augite nera sono per lo più corrosi, e le facce di {111} presentano una striatura parallela a [001 : 110].

Ho trovato anche tre cristallini di un'*augite* di color verde cupo, che sono tabulari secondo (010) e presentano la forma {010}, {100}, {110}, $\{\bar{1}11\}$; la {100} è estremamente sottile.

Una sezione secondo (010) presenta pleocroismo debolissimo con sfumature nel verde giallastro; l'angolo di estinzione è molto vicino a quello dell'*augite* nera:

$$c : \mathrm{c} = 50^\circ .$$

L'estinzione di queste augiti si avvicina a quella dei cristalli del monte Somma [1].

La *biotite* si presenta in cristallini tabulari secondo (001), a contorno nettamente esagonale; al microscopio le laminette di sfaldatura secondo (001) si presentano otticamente negative, decisamente biassiche con forte dispersione degli assi ottici $\varrho > v$. Il piano degli assi ottici è parallelo a {010}.

Il più interessante minerale di questi tufi, benchè sia il più raro, è l'*anfibolo nero*.

Esso si presenta in piccoli cristallini sempre allungati secondo l'asse c, i quali raggiungono in questa direzione anche i 5 mm.; sono aghiformi, ovvero maggiormente estesi nella direzione di b.

Essi presentano le seguenti forme: {010}, {100}, {001}, {110}, $\{\bar{1}31\}$, $\{\bar{1}11\}$, {021}, le quali formano le tre combinazioni:

1) {010}, {100}, {001}, {110}, $\{\bar{1}11\}$
2) {010}, {100}, {001}, {110}, $\{\bar{1}11\}$, $\{\bar{1}31\}$
3) {010}, {100}, {001}, {110}, {021}.

In alcuni cristalli, {010} e {100} sono sottilissimi; in altri, invece, più grandi, specialmente {100}; {100} ha quasi sempre le sue facce di dimensioni molto diverse.

[1] F. Zambonini, *Mineralogia vesuviana*. Memorie R. Accad. sc. fis. e mat., Napoli, 1910, pag. 149.

Nei cristalli delle combinazioni 1) e 2), la $\{001\}$ è sempre piccolissima, mentre essa è più estesa nella combinazione 3); la $\{\bar{1}11\}$ ha facce abbastanza grandi, ma quasi sempre disuguali.

Nei cristalli in cui si rinvenne $\{021\}$, questa è abbastanza grande; ma in generale ha a ciascun estremo di *c* una faccia grande ed una piccolissima, quasi ridotta ad un punto.

I cristalli di anfibolo nero dànno in generale misure molto precise.

Le anomalie geometriche, constatate in altre località, sono, in alcuni di questi cristalli, assai più forti di quanto generalmente fu osservato in questo minerale, come risulta dalle misure eseguite su un cristallino terminato a tutte e due le estremità di *c*, e che credo non inutile il riportare qui:

$$
\begin{aligned}
(100):(1\bar{1}0) &= 28^\circ\ 24' \\
(100):(110) &= 27\ \ 15\ {}^1/_2 \\
(\bar{1}00):(\bar{1}10) &= 28\ \ 26 \\
(\bar{1}00):(\bar{1}\bar{1}0) &= 27\ \ 10 \\
(010):(110) &= 62\ \ 21\ {}^1/_2 \\
(010):(\bar{1}10) &= 62\ \ 04 \\
(0\bar{1}0):(1\bar{1}0) &= 62\ \ 09 \\
(0\bar{1}0):(\bar{1}\bar{1}0) &= 62\ \ 10
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\bar{1}11):(\bar{1}\bar{1}1) &= 31\ \ 29\ {}^1/_2 \\
(11\bar{1}):(1\bar{1}\bar{1}) &= 31\ \ 43\ {}^1/_2 \\
(010):(\bar{1}11) &= 74\ \ 23\ {}^1/_2 \\
(0\bar{1}0):(\bar{1}\bar{1}1) &= 74\ \ 11 \\
(010):(11\bar{1}) &= 74\ \ 03\ {}^1/_2 \\
(0\bar{1}0):(1\bar{1}\bar{1}) &= 74\ \ 09
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(11\bar{1}):(110) &= 69\ \ 16 \\
(1\bar{1}0):(1\bar{1}\bar{1}) &= 68\ \ 59\ {}^1/_2
\end{aligned}
$$

Come si vede bene, tutte le zone sono molto disturbate, e più di tutte la zona [001]: gli angoli che dovrebbero essere uguali, differiscono persino di più di un grado. Nelle altre zone le differenze sono minori, ma si hanno sempre differenze considerevoli fra gli angoli omologhi.

In ciò questi cristalli si avvicinano a quelli dei Cappuccini di Albano studiati dallo Zambonini [1], come pure a quelli dei blocchi rigettati dal

[1] F. Zambonini, *Amphibol von Cappuccini di Albano.* Zeitschr. f. Kryst, XXXVII (1903), 369.

Vesuvio nell'eruzione del 1906 (¹) descritti dallo stesso prof. Zambonini anche nella sua *Mineralogia vesuviana.*

Non rari si presentano dei cristalli geminati secondo $\{100\}$: essi hanno generalmente $\{110\}$ dominante, mentre $\{100\}$ e $\{010\}$ sono molto piccoli; $\{\bar{1}11\}$ è abbastanza estesa.

Le misure eseguite su alcuni cristalli sono raccolte nella seguente tabella I:

Tabella I $(a:b:c = 0.5465:1:0.2943)$

Angoli	Numero delle misure	Valori trovati		Valori calcolati	Differenze
		Limiti	Medie		
$(010:110)$	4	62° 4′ — 62° 21′ 1/2	62° 11′	62° 12′ 1/2	— 1′ 1/2
$(100:110)$	6	27 10 — 28 26	27 48 1/2	27 47 1/2	+ 1 0
$*(110:1\bar{1}0)$	4	55 27 1/2 — 55 39 1/2	55 35 10″	—	—
$*(001:110)$	6	76 15 — 76 38 3/4	76 29 10	—	—
$*(010:\bar{1}11)$	4	74 3 1/2 — 74 23 1/2	74 11 40	—	—
$(\bar{1}11:\bar{1}\bar{1}1)$	2	31 29 1/2 — 31 43 1/2	31 36 1/2	31 36 3/4	— 0 1/4
$(010:\bar{1}31)$	2	49 40 1/2 — 49 49	49 45	49 39 3/4	+ 5 1/4
$(\bar{1}31:\bar{1}\bar{3}1)$	1	80 34 1/2	80 34 1/2	80 40 1/2	— 6 0″
$(\bar{1}31:\bar{1}11)$	2	24 29 1/2 — 24 34 1/2	24 32	24 32	0 0
$(001:\bar{1}11)$	2	34 28 1/2 — 34 50	34 39	34 36 1/2	+ 2 1/2
$(11\bar{1}:110)$	3	68 47 — 68 59 1/2	68 54	68 54 1/3	— 0 1/3
$(001:021)$	1	29 34	29 34	29 35	— 1 0

Dai valori ottenuti, dato che essi si allontanano sensibilmente da quelli trovati per altro giacimento, mi sembrò giustificato il calcolare le costanti per questo giacimento.

Esse sarebbero:

$$a:b:c = 0.5465:1:0.2943$$
$$\beta = 74°\ 41'.$$

Di questi valori, l'angolo β, come pure c, si avvicinano a quelli trovati dallo Zambonini in un anfibolo nero dei blocchi rigettati dal Vesuvio nel 1906, mentre a se ne differenzia alquanto; egli calcolò infatti, per quei cristalli,

$$a:b:c = 0.5502:1:0.2942$$
$$\beta = 74°\ 40'$$

Maggiormente si scostano dalle costanti che servono per il minerale d'Isernia, quelle trovate dal prof. Zambonini per i cristalli di Albano e dall'Arzruni per quelli di Ponza (²).

(¹) F. Zambonini, *Notizie mineralogiche sull'eruzione del Vesuvio dell'aprile 1906.* Atti R. Accad. sc. fis. e mat. Napoli [2], 13 (1906), n. 8, pag. 24.

(²) Arzruni, *Krystallographische Untersuchungen an sublimirtem Titanit und Amphibol.* Zeitschr. f. Kryst. VIII (1884), 296.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Millosevich presenta le pubblicazioni giunte in dono, e fa particolare menzione di quelle inviate dal Socio Taramelli e dai Corrispondenti Lustig, Pascal, Silvestri.

Lo stesso Segretario richiama inoltre l'attenzione della Classe su di una serie di importanti pubblicazioni del prof. A. Béguinot, che trattano della vegetazione nelle nostre Colonie e specialmente in Libia; e su due volumi della Specola Vaticana, di cui uno forma il vol. I del *Catalogo astrografico 1900. 0*, e l'altro contiene il *Nuovo Catalogo di stelle colorate* di F. Krüger.

Il Socio Dini presenta alla Classe il II volume delle Opere di Luigi Cremona; il primo è già stato da tempo pubblicato, e presto, si spera, apparirà il III ed ultimo. Il Socio Dini ricorda, fra le 46 Memorie dell'illustre geometra, le più importanti.

Il Socio Grassi offre, a nome del Socio Briosi, due volumi degli *Atti* dell'Istituto botanico della R. Università di Pavia, diretti dal Socio predotto, i quali completano la collezione posseduta dall'Accademia degli *Atti* stessi.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Volterra, a nome anche del Socio Blaserna, legge una Relazione fatta con la collaborazione del prof. Vacca, sulla Memoria del prof. Nicita: *Il metodo aritmetico nel caso irriducibile dell'equazione di terzo grado*. La Relazione conclude col proporre l'invio di un ringraziamento all'autore per la sua comunicazione; e le conclusioni della Commissione, messe ai voti dal Presidente, risultano approvate dalla Classe.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà il triste annunzio della morte del Socio nazionale prof. sen. Emanuele Fergola, mancato ai vivi il 5 aprile 1915; faceva parte il defunto dell'Accademia per l'*Astronomia*, sino dal 6 gennaio 1884.

Il Segretario MILLOSEVICH legge la seguente Commemorazione del Socio straniero ARTURO VON AUWERS.

ARTURO VON AUWERS spegnevasi il 24 gennaio 1915 a Berlino nel suo settantaottesimo anno di vita, poichè era nato a Gottinga il 12 settembre 1838.

L'attività scientifica del nostro socio straniero per la sezione d'astronomia si svolse, nella parte sua culminante, in un tempo nel quale l'astronomia di misura visuale tendeva a raggiungere un alto grado di precisione, sia perchè i classici strumenti dell'astronomia di posizione, cerchi meridiani, eliometri, ecc. ecc., uscivano dalle officine sommamente perfezionati in confronto dei tipi omonimi antiquati, sia perchè i metodi di discussione ricevevano una raffinatezza che in un passato remoto sarebbe parsa soverchia. D'altra parte, quando la fotografia celeste assurse a precisioni dapprima insperate e diventò lo strumento principe non solo dell'astro-fisica, ma anche dell'astronomia classica, Arturo Auwers stava ultimando le squisite sue elaborazioni di astronomia di osservazione visuale e di misura. L'astro-fisica moderna, per gli argomenti che tratta e per gli alti fini che si propone, apre mondi nuovi di disquisizioni filosofiche, alle quali, come osserva Seeliger (*A. N.* 4788), non era inclinato il talento eminentemente tecnico di Arturo Auwers. Questo grande elaboratore di numeri, che erano il risultato di atti di osservazione, seppe da questi offrire risultati di capitale importanza, specialmente in due altissimi problemi astronomici, la direzione del moto del sistema solare nello spazio e i moti proprî angolari delle stelle lucenti. Al tempo della sua piena energia, la parallasse solare — che i passaggi di Venere sul sole, occorsi nel secolo XVIII, avevano lasciata incerta per un quarantacinquesimo circa del suo valore, e sulla quale in ogni modo i risultati di quelli non permettevano una irreprensibile discussione — interessava vivamente, e ciò per l'importanza che ha quella costante, non tanto nella traduzione chilometrica delle dimensioni del sistema, quanto in alte questioni di meccanica celeste.

Auwers s'interessò vivamente dei passaggi del 1874 e del 1882; e del frutto della sua opera, e di organizzatore e di efficacissimo cooperatore, diremo fra breve qualche parola.

Auwers, fino dalla prima età, sentì una decisa vocazione per l'astronomia.

Compiuti gli studî universitarî a Gottinga e a Königsberga, appena ventenne entrò, in qualità d'assistente, nell'Osservatorio di Königsberga. e qui conseguiva la laurea nel 1862.

Dopo essere stato volontario a Gotha, in quel piccolo Osservatorio divenuto celebre nel nome di Hansen, nel 1866 entrava all'Accademia delle scienze di Berlino in qualità di socio e di astronomo; in tale posizione si può dire esser Auwers rimasto l'intera vita.

I mezzi d'osservazione, che a lui occorsero, quando quelli di proprietà dell'Accademia non gli erano bastevoli, utilizzò egli all'Osservatorio universitario, mentre poi, nelle condizioni favorevolissime nelle quali trovavasi, potè, sotto gli auspicii dell'Accademia, organizzare spedizioni scientifiche a scopo astronomico, ed essere ad un tempo l'anima della Società astronomica tedesca, dalla quale emersero imprese collettive, di cui egli fu uno degli ispiratori, quando non ne abbia preso attivissima parte.

E qui spontaneo presentasi il ricordo del Catalogo stellare fra 14°50′ e 20°10′ (1855.0), frutto delle sue assidue osservazioni fra il 1869 e il 1874. Sono quasi 10000 stelle osservate in blocco almeno due volte e ridotte a Catalogo per il 1875.0 con una elaborazione così minuziosa e così coscienziosa da costituire un vero monumento di astronomia stellare, specialmente nella disamina e nella ricerca di moti proprî. Ricordo come ne parlasse con ammirazione il nostro Schiaparelli.

Essendosi esplicata l'attività del nostro collega in alcune imprese scientifiche di eccezionale importanza, di una delle quali facemmo or ora appena un cenno, io non debbo abusare della vostra cortesia elencando le numerosissime osservazioni occasionali da lui compiute, specialmente all'equatoriale, di posizioni di comete e di pianetini, oppure di passaggi di Mercurio, di eclissi luni-solari e di occultazioni, e neppure di qualche conteggio d'orbite; cose tutte che rientrano in linea secondaria di fronte ad alcuni grandi lavori, di cui dobbiamo doverosamente far cenno; del resto, a giudicare dell'attività di lui in questi campi di lavoro abituale, gioverà consultare il periodico *Astronomische Nachrichten* in un ampio intervallo di tempo fra il 1854, quando, di sedici anni, a Gottinga trovava la nebula, che oggi porta il numero 6503 del Catalogo generale di Dreyer, nebula sfuggita ai due grandi esploratori del cielo Guglielmo e Giovanni Herschel, e il 1910 ne' suoi ultimi raffronti fra i Cataloghi della Società astronomica tedesca.

Era noto, fino dalle osservazioni meridiane di Bradley, il grande moto proprio angolare di Sirio, così che dai tempi di Tolomeo a noi l'astro si è spostato a sud di quasi quattro diametri e mezzo solari e di oltre un raggio solare ad ovest. Devesi al grande Bessel la scoperta, intorno al 1844, che Sirio, in un periodo di circa mezzo secolo, descrive un'orbita di carattere ovale, e a Bessel devesi pure la divinazione dell'esistenza del noto satellite oscuro, che Alvan Clark scopriva in America il 31 gennaio 1862 (*A. N.* 1353). Auwers imprese un formidabile lavoro di discussione delle osservazioni meridiane di Sirio, col proposito di porre in luce la legge di variazione del

moto proprio relativo della stella, per pervenire al moto assoluto e di Sirio e del satellite, le osservazioni del quale, sempre difficili e richiedenti notevoli mezzi ottici, hanno periodi di discontinuità quando il satellite percorre gli archi intorno al periastro. L'orbita relativa del satellite intorno a Sirio, e, data la conoscenza della parallasse di questo, le masse dei due astri in funzione della massa del sole, erano il fine ultimo delle reiterate ricerche in un periodo di lavoro su un intervallo di quasi un trentennio. È opportuno di ricordare che la scoperta visuale del satellite di Sirio precedette la pubblicazione delle prime grandi ricerche di Auwers; ma queste erano venute a conchiusioni che l'atto osservativo pienamente confermò.

A Bessel non isfuggirono le irregolarità del moto proprio di Procione, e divinò l'esistenza d'un satellite anche per questa stella. Auwers pubblicava nel n. 1371 del giornale *Astronomiche Nachrichten* la classica sua Nota *Ueber die Eigenbewegung des Procyon*, nella quale discute le osservazioni meridiane di Procione su un periodo d'oltre un secolo e assegna gli elementi orbitali del satellite. Trentaquattro anni dopo il lavoro di Auwers, l'astronomo Schaeberle scopriva il debole satellite di Procione all'Osservatorio di Lick il 14 novembre 1896. I risultati teorici di Auwers collocavano l'astro, per questa data, in angolo di posizione 283°; l'osservazione lo accertò in circa 318° (A. N. 3390).

Lo studio dei moti proprî delle stelle richiede inesorabilmente posizioni stellari a tempi diversi; ed il moto proprio tanto più accuratamente verrà conosciuto quanto più esatte saranno le posizioni, più ampî i frattempi e rigorose le costanti dei piani mobili di riferimento.

Oggidì la fotografia celeste permette misure così rigorose che gl'intervalli di tempo possono essere ridotti con risultati pur sempre soddisfacenti; ma non era così ancor trent'anni or sono; e però Auwers concepì e condusse a termine l'immane lavoro della nuova riduzione delle osservazioni, per la massima parte stellari, che Giacomo Bradley fece fra il 1750 e il 1762 a Greenwich. L'insigne opera è divisa in tre grandi volumi. Il 2° volume, primo uscito in ordine di tempo, contiene l'integra riduzione delle osservazioni di Bradley allo strumento del passaggi e al così detto nuovo quadrante; la discussione deriva dallo studio diretto dei manoscritti di Greenwich. Il 3° volume, che è quello che contiene il finale risultato dello studio, ha il celebre catalogo ridotto a nuovo e riferito al 1755.0 coi moti proprî angolari in α e δ, che sono derivati dai confronti colle recenti osservazioni delle medesime stelle, fatte a Greenwich e a Berlino. Come si sa, le stelle sono circa 3300.

Nessun astronomo trovavasi, 40 anni or sono, nella felice condizione scientifica di elaborare un catalogo fondamentale di stelle lucenti, come trovavasi, per la sua somma competenza, Arturo Auwers. Di qui una serie di

preziose pubblicazioni, che videro la luce in tempi diversi, o sotto gli auspicî della Società astronomica tedesca (Pubbl. XIV-XVII) e nel giornale *Astronomische Nachrichten* (2890-91; 3431-32; 3927-29; 4019-20). Il risultato finale è il così detto « Neuer Fundamentalkatalog des Berliner astronomischen Jahrbuch » che è la pubblicazione n. 33 dell'Ufficio di calcolo di Berlino. Le stelle fondamentali del Catalogo sono 905, coll'aggiunta di 20 polari boreali sopra 80° e 10 polari australi sopra — 80°.

Il passaggio di Venere sul disco del sole nel 1874 non era osservabile in Europa; quello del 1882 era visibile in Europa solo nella prima parte del fenomeno. Una Commissione di astronomi tedeschi, sotto gli auspicî dell'Accademia di Berlino, organizzò le due grandi spedizioni tedesche. Arturo Auwers fu l'anima delle imprese. Ai mezzi economici, all'equipaggiamento di personale e di strumenti, alle istruzioni tecniche nell'uso specialmente dell'eliometro, e, per il passaggio del 1874, ai procedimenti fotografici, ai programmi d'osservazione, alla scelta delle stazioni più opportune, a tutto egli sapientemente provvide; e tutto giustificò pubblicando un'opera colossale in sei grandi volumi, fra il 1874 e il 1898. Cinque furono le missioni scientifiche tedesche nel 1874, con stazione a Tschifu, all'isola Kerguelen, all'isola Auckland, all'isola Mauritius e ad Ispahan. Quattro furono le missioni nel 1882, con stazione ad Hartford, ad Aiken, a Bahia Blanca e a Punta Arenas; in quest'ultima si recò Auwers stesso. Nell'occasione del passaggio del 1874 egli osservò le uscite di Venere dal sole a Luxor in Egitto.

Oggi noi sappiamo che la parallasse orizzontale equatoriale del sole all'unità di distanza è 8″, 80, ed è difficile che questa costante sia in errore per la millesima parte del suo valore. Il risultato conseguito dalla profonda discussione, fatta da Auwers sulle osservazioni e misure riportate dalle missioni tedesche, è intorno a 8″. 88, tutto quanto di meglio il metodo e l'astro potessero dare. Forse Auwers avrà sperato un risultato che dal vero si discostasse di meno; ma nelle scienze sperimentali e di osservazione la verità nei valori delle costanti si raggiunge (e sempre soltanto in alta approssimazione), come direbbesi, a tappe. Nelle arti e nelle lettere, il monumento può riuscire di getto, e il creatore passa immortale attraverso i secoli; nei nostri studî il caso è ben più raro: in essi, collo scorrer del tempo, il nome e l'opera dello scienziato rimangono in quanto la storia analizzi il valore degli strati che si sovrapposero per elevare l'edificio.

Il valore angolare del diametro del sole e la figura del disco, così in istretta ragione colle misure eliometriche durante i passaggi, interessarono naturalmente il nostro astronomo; di qui un profondo studio sul valore di quella costante, il quale studio ci rese certi essere circolare la figura del

disco, o, per lo meno, aberrante dal cerchio di quantità dell'ordine degli errori d'osservazione, mentre ricerche affètte da errori sistematici avevano lasciato pensare che il diametro così detto fotosferico potesse subire variazioni, funzione della innegabile diversa attività fisica del sole in cicli abbastanza bene accertati. Alla media distanza della terra dal sole, la costante fissata da Auwers per il diametro solare, oggi accettata dalla scienza, è 1919″.26, il che importa, per questo, 109,05 diametri equatoriali terrestri, usando il valore di 17″,6 per il doppio della parallasse solare.

Seeliger, nel necrologio di Auwers in *A. N.* n. 4788, ci insegna aver Arturo Auwers intrapreso un viaggio al Capo per osservare col suo amico David Gill il pianetino Vittoria per una determinazione della parallasse solare. L'amicizia che legava questi due insigni astronomi deve aver trovato cemento in simiglianza di attitudini e di gusti scientifici: ambedue tecnici ed organizzatori ammirabili in imprese collettive, alle quali contribuivano con un colossale loro lavoro personale; coscienziosi e pazienti cesellatori su numeri derivati da osservazioni e misure; autorevolissimi nella loro patria e all'estero per plebiscito conforme fra gli astronomi. In questo, forse, si differenziano i nostri due illustri colleghi, oggi entrambi defunti: che ad Auwers le immature condizioni tecniche della fotografia astronomica nel passaggio di Venere del 1874 influirono perchè egli non seguisse (come seguì e ne approfittò a vantaggio della scienza David Gill) i grandi progressi di quella; ma, tirate le somme, sono ambedue veri benefattori dell'astronomia tecnica e pratica dell' ultimo quarantennio.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL' ACCADEMIA
presentate nella seduta dell' 11 aprile 1915.

Annali del Laboratorio chimico centrale delle gabelle; vol. VI e VII. Roma, 1912. 8°.

Atti dell'Istituto botanico dell'Università di Pavia. II. ser., vol. 11, 13. Milano, 1908-1913.

Béguinot A. — Secondo contributo alla flora di Rodi. (Estratto dalle « Memorie della R. Acc. di scienze di Modena », ser. III, vol. XII). Modena, 1914, 8°.

Béguinot A. — Quarto contributo alla flora della Libia. (Estr. dagli « Annali di botanica », vol. XIII). Roma, 1914. 8°.

Béguinot A. — Terzo contributo alla flora della Libia. (Estr. dagli « Annali di botanica », vol. XII). Roma, 1913. 8°.

Béguinot A. — Schedae ad floram Libycam exsiccatam; fasc. I. Padova, 1915. 8°.

Béguinot A. — Contribuzione alla flora di Rodi e di Stampalia. (« Estr. dagli Atti del R. Istituto veneto di scienze », tom. LXXII. p^e^ 2^a^). Venezia, 1912. 8°.

Béguinot A. — Specie nuove o rare per la flora della Libia. Padova, 1912. 8°.

Béguinot A. — Missione scientifica Stefanini-Paoli nella Somalia meridionale (1913). Frutti e semi della formazione delle Mangrovie raccolti lungo la costa somala. (Estr. dal « Boll. della Reale Società geografica », 1915). Roma, 1915. 8°.

Béguinot A. — Le *Romulea* sin qui note per la flora della Tripolitania e Cirenaica. (Estr. dal « Bullettino della Società botanica italiana », 1912). Firenze, 1912. 8°.

Béguinot A. — Intorno ad alcune *Ononis* della Tripolitania e Cirenaica. (Estr. dal « Bull. della Società botanica italiana », 1912). Firenze, 1912. 8°.

Béguinot A. — La flora, il paesaggio botanico e le piante utili della Tripolitania e Cirenaica. Padova, 1912. 8°.

Béguinot A. — La flora e la vita delle piante nella Libia litoranea ed interna. (Estr. dagli « Atti della Società italiana per il progresso delle Scienze », 1912). Roma, 1913. 8°.

Bezzi M. — Ditteri raccolti nella Somalia italiana meridionale. (Estr. dal «Redia» vol. X). Firenze, 1914. 8°.

Brown E. H. — Cholera and ist treatment by preventive inoculation in the Barbhanga Jail. (Repr. from the « Indian Medical Gazette », vol. XXXI). s. l. 1896. 8°.

Catalogo astrografico 1900, 0 - Sezione Vaticana Decl. da + 55° a + 65° sopra fotografie eseguite e misurate all'Osservatorio Vaticano e calcolate all'Osservatorio di Oxford. Vol. I. Coordinate rettilinee e diametri di immagini stellari su lastre il cui centro è in declinazione + 64°. Roma, 1914. 4°.

Cremona L. — Opere matematiche: tomo II. Milano. 1915. 8°.

De Filippi F. — Spedizione asiatica De Filippi. Rendiconto finanziario al 28 febbraio 1915. (Estr. dal « Bollettino della R. Società geografica » 1915). Roma, 1915. 8°.

Effice C. — Dal noto all'ignoto: saggio sui terremoti. Bari, 1915. 8°.

Haffkine W. M. — Note on the methods of mitigating the deathvate from cholera. Simla, 1910, f. v.

Haffkine W. M. — Protective inoculation against cholera. Calcutta, 1913. 8°.

Haffkine W. M. — On prophylactic inoculation against plague and pneumonia. Calcutta, 1914. 8°.

HAFFKINE W. M. — Les inoculations antipesteuses. (Extr. du « Bull. de l'Institut Pasteur, tom. IV). Paris, 1906. 8°.

HAFFKINE W. M. — Les vaccinations anticholériques aux Indes. (Extr. du « Bulletin de l'Institut Pasteur », t. IV). Paris, 1906. 8°.

HAFFKINE W. M. — La vaccination contre le choléra, la peste bubonique et la fiévre typhoide et les experiences de bactério-therapie. Notes bibliographiques. Calcutta, 1909. 8°.

KRÜGER F. — Neuer Katalog farbiger Sterne zwischen dem Nordpol und 23 Grad südlicher Deklination. (Specola Astronomica Vaticana, VII). Wien, 1914. 4°.

LONGO B. — L'Orto e l'Istituto botanico della R. Università di Siena. Siena, 1915. 8°.

MARCHESE DE' LUNA G. — Corpuscoli del pus o nuclei cellulari? (Estr. dalla « Gazzetta medica di Roma », 1915). Trascati, 1915. 8°.

MARCHESE DE' LUNA G. — Per la calcolazione della capacità lavorativa in tema d'infortunio sul lavoro. (Estr. dal « Cesalpino », an. X). Arezzo, 1914. 8°.

MARCHESE DE' LUNA G. — La simulazione in tema d'infortuni sul lavoro. (Estr. dalla « Rivista medica », an. XXIII). Milano, 1915. 8°.

PACCHIONI A. — Il gas acqua carburato. Osservazioni e note statistiche sulla sua fabbricazione. (Estr. dal « Bollettino della Assoc. ital. delle industrie del gas », an. IV). Roma, 1915. 8°

PASCAL A. – L'apparecchio polisettore di Tommaso Ceva e una lettera inedita di Guido Grandi. (Estr. dai « Rendiconti del R. Istituto lomb. di scienze », vol. XLVIII). Pavia, 1915. 8°.

PASCAL E. — Sui determinanti Gobbi e Matrici. (Estr. dai « Rend. della R. Accademia delle scienze di Napoli », vol. XXI). Napoli, 1915. 8°.

PASCAL A. — Sui determinati ottenuti da un altro operando una medesima trasformazione lineale sugli elementi di una o più colonne. (Estr. dal « Giornale di matematica di Battaglini », vol. LIII). Palermo, 1915. 8°.

Ricerche di Biologia dedicate al prof. Alessandro Lustig nel 25° anno d'insegnamento universitario. Firenze, 1915. 8°.

SILVESTRI F. — Contributo alla conoscenza degli insetti dell' olivo dell' Eritrea e dell'Africa meridionale. (Estr. dal « Boll. del Laboratorio di zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore d'agricoltura in Portici », vol. IX). Portici, 1915. 8°.

TARAMELLI T. — Sul significato geologico del canale di Leme nell'Istria. (Estr. dai « Rendiconti del R. Istituto lomb. di scienze », vol. XLVIII). Pavia, 1915. 8°.

VACCARI A. — Specie nuove o rare per la flora della Libia. Padova, 1912. 8°.

VACCARI A. — Contribuzione alla flora di Rodi e di Stampalia. (Estr. dagli « Atti del R. Istituto veneto di scienze », t. LXXII. p^e 2^a).

VACCARI A. — Schedae ad floram Libycam exsiccatam: fasc. I. Padova, 1915. 8°.

VACCARI A. — Terzo contributo alla flora della Libia. (Estr. dagli « Annali di botanica », vol. XII). Roma, 1913. 8°.

VACCARI A. — Quarto contributo alla flora della Libia. (Estr. dagli « Annali di botanica », vol. XIII). Roma, 1914. 8°.

VACCARI A. — Secondo contributo alla flora di Rodi. (Estr. dalle « Memorie della R. Accademia di scienze di Modena », ser. III, vol. XII). Modena, 1914. 8°.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

RELAZIONI DI COMMISSIONI

PERSONALE ACCADEMICO

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta dell'11 aprile 1915.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Segue in terza pagina.

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 13 maggio 1915.* N. 8.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 25 aprile 1915.

Volume XXIV°. — Fascicolo 8°

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 25 aprile 1915.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica matematica. — *Sulla propagazione di onde elettromagnetiche in un conduttore toroidale.* Nota II di A. Signorini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

§ 9. Introducendo le espressioni (14), (17), (18) di e_0, e_1, e_{20} nella (6), e ponendo, in generale

$$I_{lm}^{(n)} = \int_0^1 J_l(x)\, J_m(\overline{x})\, \varrho^n\, d\varrho\,,$$

si trova

$$\text{(19)} \qquad Q^{(m)} = \frac{\pi \sigma b^2 |\delta_{00}|^2}{2} \Big\{ 2I_{00}^{(1)} + \varphi^2 \Big[\frac{3}{2} R_e \left(\frac{I_{01}^{(2)}}{kb} \right) - \frac{3}{4} I_{00}^{(1)} +$$

$$+ \left| \frac{\delta_{11} - K}{\delta_{00}} \right|^2 I_{11}^{(1)} - I_{00}^{(1)} R_e \left(\frac{\delta_{11} - K}{\delta_{00}} \frac{J_2(\overline{k}b)}{J_1(\overline{k}b)} \right) + \sum_2^{\infty}{}_l \left| \frac{\delta_{1l}}{\delta_{00}} \right|^2 I_{ll}^{(1)} \Big] + \cdots \Big\}.$$

Ne risulta che dovremo:

1°) porre

$$\text{(20)} \qquad \delta_{1l} = 0 \qquad (l = 2, 3, \ldots);$$

2°) determinare $R_e\left(\frac{\delta_{11} - K}{\delta_{00}}\right)$ e $I_m\left(\frac{\delta_{11} - K}{\delta_{00}}\right)$ (cioè δ_{11}) in modo da minimizzare l'espressione cui si riduce, in base alle (20), il coefficiente di φ^2.

Invero, se le δ_{1l} ($l = 1, 2, 3 \ldots$) venissero scelte in modo differente, comunque si scegliessero poi le δ_{2l}, δ_{3l} ecc., sarebbe evidentemente impossibile che, almeno per valori comunque piccoli di φ, $Q^{(m)}$ venisse ad avere il minimo valore che è compatibile colle (11) e (12).

In base alla condizione di minimo sopra specificata, posto

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{I_{00}^{(1)}}{I_{11}^{(1)}} \frac{J_2(\bar{k}b)}{J_1(\bar{k}b)},$$

si trova

$$\frac{\delta_{11} - K}{\delta_{00}} = \delta. \tag{21}$$

Dopo questo, risulta completamente determinata la e_{11}, ed anche la stessa $E_n^{(m)}$ tutte le volte che siano trascurabili le quantità dell'ordine di grandezza di φ^2. Precisamente, in base alle (14), (17), (18), (20), (21) — a meno di termini contenenti un fattore del tipo φ^r con $r \geq 3$, o del tipo $\varphi^2 \cos r\vartheta$ con $r \geq 1$ — si ha:

$$E_n^{(m)} = \frac{k J e^{i\nu t}}{\sqrt{2}\, \pi\sigma b J_1(kb)} \left\{ J_0(x) + \varphi \cos\vartheta \left[\delta J_1(x) + \frac{\varrho}{2} J_0(x) \right] + \right. \tag{22}$$
$$\left. + \frac{\varphi^2}{4} \left[- J_0(x) \left(\frac{\delta J_2(kb)}{J_1(kb)} + \frac{3}{4} \right) + \varrho J_1(x) \left(\delta + \frac{3}{2kb} \right) + \frac{3\varrho^2 J_0(x)}{4} \right] \right\}.$$

Se poi poniamo

$$R = \frac{Q}{J_{eff}^2} = \text{resistenza effettiva per unità di lunghezza del conduttore,}$$

dalle (13), (19), (21) segue, a meno di un errore dell'ordine di φ^3:

$$R = \frac{|k|^2}{4\pi\sigma J_1(kb) J_1(\bar{k}b)} \left\{ 2 I_{00}^{(1)} + \varphi^2 \left[\frac{3}{2} R_e \left(\frac{I_{01}^{(2)}}{\bar{k}b} \right) - \frac{3}{4} I_{00}^{(1)} - |\delta|^2 I_{11}^{(1)} \right] \right\}. \tag{23}$$

§ 10. Sarà bene di rilevare che gli integrali $I_{00}^{(1)}$, $I_{11}^{(1)}$, $R_e\left(\frac{I_{01}^{(2)}}{\bar{k}b}\right)$ possono tutti quanti esprimersi per funzioni di Bessel. Infatti [1], qualunque sia l, è:

$$I_{ll}^{(1)} = R_e\left(\frac{\bar{k}}{kb} J_l(kb) J_l'(\bar{k}b) \right). \tag{24}$$

Di più, qualunque siano α, β, P, vale la formola

$$(\alpha^2 - \beta^2) \int_0^P J_0(\alpha\varrho) J_1(\beta\varrho) \varrho^2 d\varrho = \alpha P^2 J_1(\alpha P) J_1(\beta P) +$$
$$+ \beta P^2 J_0(\alpha P) J_0(\beta P) - 2\beta \int_0^P J_0(\alpha\varrho) J_0(\beta\varrho) \varrho\, d\varrho,$$

[1] Ved. loc. cit. [2], a pag. 1 della Nota I, § 8.

onde in particolare è

$$\mathrm{R}_e\left(\frac{\mathrm{I}_{01}^{(2)}}{\bar{k}b}\right)=\frac{1}{2|k|^2 b^2}\mathrm{J}_1(kb)\,\mathrm{J}_1(\bar{k}b)\,. \tag{25}$$

§ 11. Posto

$$\Psi=\Psi'+i\Psi''=\frac{4\pi\sigma\,\mathrm{E}_n^{(m)}(1-\varphi\varrho\cos\vartheta)}{c\,b\,k^2}+\text{cost}\,,$$

dalle $(2)_2$ e $(2)_3$ segue

$$\mathrm{R}_e(\mathrm{H}_\varrho)=\frac{1}{\varrho(1-\varrho\varphi\cos\vartheta)}\frac{\partial\Psi'}{\partial\vartheta}\qquad \mathrm{R}_e(\mathrm{H}_\mathfrak{z})=\frac{-1}{(1-\varrho\varphi\cos\vartheta)}\frac{\partial\Psi'}{\partial\varrho}\,, \tag{26}$$

ciò che prova che nel piano di S le linee $\Psi'=\text{cost}$ sono, istante per istante, le linee di forza magnetica. In base alla (22) tali linee, ed anche $\mathrm{H}_\mathfrak{z}$ ed H_ϱ risultano determinate a meno di un errore dell'ordine di grandezza di φ^2 Senza insistere su ciò, avvertiamo che dalle $(2)_3$ e (22) segue, per $\varrho=1$, l'eguaglianza

$$\mathrm{H}_\mathfrak{z}(1-\varrho\varphi\cos\vartheta)= \tag{27}$$

$$=\frac{4\pi\sigma\delta_{00}e^{i\nu t}}{c\,b\,k^2}\Big\{kb\,\mathrm{J}_1(kb)+\varphi\cos\vartheta\left[\frac{1}{2}\mathrm{J}_0(kb)-\frac{1}{2}kb\,\mathrm{J}_1(kb)-\delta kb\,\mathrm{J}_1'(kb)\right]+$$

$$+\varphi^2\left[\frac{\delta kb}{2}\mathrm{J}_1'(kb)-\frac{1}{4}\mathrm{J}_0(kb)-\frac{kb}{4}\mathrm{J}_1(kb)\right]\Big\}\,,$$

colla stessa specificazione, relativamente all'ordine d'approssimazione, che vale per la (22).

§ 12. Sia $\mathrm{U}^{(m)}$ il vettore complesso di Poynting $\left(=\frac{c}{8\pi}\mathrm{E}^{(m)}\wedge\overline{\mathrm{H}}^{(m)}\right)$ relativo alla $P^{(m)}$, e $\Phi^{(m)}$ il valore (indipendente da t) del flusso entrante di $\mathrm{U}^{(m)}$ attraverso la superficie che racchiude un tratto di conduttore di lunghezza unitaria. Su tale superficie la componente di U secondo la normale interna sarà diversa da zero soltanto in quella sua parte che appartiene anche alla superficie del toro, ed ivi avrà il valore $\frac{c}{8\pi}\mathrm{E}_n^{(m)}\overline{\mathrm{H}}_\mathfrak{z}^{(m)}$.

Avremo dunque

$$\Phi^{(m)}=\frac{cb}{8\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{E}_n^{(m)}\,\overline{\mathrm{H}}_\mathfrak{z}^{(m)}(1-\varphi\varrho\cos\vartheta)\,d\vartheta\,: \tag{28}$$

invero nel sistema di coordinate curvilinee (z,ϱ,ϑ) l'elemento di superficie del toro è espresso da $b\,dz\,d\vartheta\,(1-\varphi\varrho\cos\vartheta)$.

D'altra parte, detto $T^{(m)}$ il valor medio rispetto al tempo dell'energia magnetica per unità di lunghezza del conduttore, si ha, come è ben noto,

$$Q^{(m)} = R_e(\Phi^{(m)}) \qquad T^{(m)} = \frac{1}{2\nu} I_m(\Phi^{(m)}) \; ,$$

onde potremo servirci della (28) [per verificare l'esattezza dell'espressione (23) di R, e] per calcolare $T^{(m)}$, e il coefficiente d'autoinduzione effettiva interna

$$L_i = \frac{2c^2 T^{(m)}}{J^2} \; .$$

Introducendo nella (28) i valori per $\varrho = 1$ di $E_n^{(m)}$ e di $H_{\mathfrak{s}}^{(m)}(1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)$ dati dalle (22) e (27), si ha:

$$(29) \qquad \Phi^{(m)} = \frac{\pi\sigma b^2 \delta_{00} \bar{\delta}_{00}}{2} \Bigg\{ -\frac{2\bar{k}b}{k^2 b^2} J_0(kb) J_1(\bar{k}b) + \\ + \varphi^2 \Bigg[\delta\bar{\delta} \frac{\bar{k}b}{k^2 b^2} J_1(kb) J_1'(\bar{k}b) - \frac{1}{2} \bar{\delta} \frac{kb}{k^2 b^2} J_0(kb) J_1'(\bar{k}b) + \\ + \frac{1}{2} \delta \frac{\bar{k}b}{k^2 b^2} J_0(kb) J_1(\bar{k}b) \frac{J_2(kb)}{J_1(kb)} - \frac{1}{2} \delta \frac{J_1(kb) J_0(\bar{k}b)}{k^2 b^2} + \\ + \frac{3\bar{k}b}{4k^2 b^2} J_0(kb) J_1(\bar{k}b) + \frac{1}{4} \frac{J_0(kb) J_0(\bar{k}b)}{k^2 b^2} - \frac{3}{4} \frac{\bar{k}b}{k^2 b^2} J_1(kb) J_1(\bar{k}b) \Bigg] \Bigg\} \; .$$

Si ha poi

$$(30) \qquad \frac{1}{2} \delta \frac{\bar{k}b}{k^2 b^2} J_0(kb) J_1(\bar{k}b) \frac{J_2(kb)}{J_1(kb)} - \\ - \frac{1}{2} \delta \frac{J_1(kb) J_0(\bar{k}b)}{k^2 b^2} - \frac{1}{2} \bar{\delta} \frac{\bar{k}b}{k^2 b^2} J_0(kb) J_1'(\bar{k}b) = \\ = \frac{1}{2} R_e \Bigg\{ \delta \frac{J_2(kb)}{J_1(kb)} \frac{\bar{k}b}{k^2 b^2} J_0(kb) J_1(\bar{k}b) + \\ + \frac{\delta[J_1(kb) - kb J_1'(kb)]}{J_1(kb)} \frac{J_0(\bar{k}b) J_1(kb)}{\bar{k}^2 b^2} \Bigg\} + \\ + \frac{i}{2} I_m \Bigg\{ \Bigg[\frac{\delta}{kb} \frac{kb J_2(kb)}{J_1(kb)} - \frac{\bar{\delta}}{\bar{k}b} \Bigg] \frac{\bar{k}b}{k^2 b^2} J_0(kb) J_1(\bar{k}b) + \\ + \frac{\delta J_1'(kb)}{J_1(kb)} \frac{kb}{\bar{k}^2 b^2} J_0(\bar{k}b) J_1(kb) \Bigg\} = \\ = R_e\left(\delta \frac{J_2(kb)}{J_1(kb)}\right) R_e\left(\frac{\bar{k}b}{k^2 b^2} J_0(kb) J_1(\bar{k}b)\right) + \\ + i I_m\left(\frac{\delta}{kb}\right) R_e\left(\frac{\bar{k}b}{k^2 b^2} J_0(kb) J_1(\bar{k}b)\right) - \\ - i R_e\left(\frac{\delta J_1'(kb)}{J_1(kb)}\right) I_m\left(\frac{\bar{k}b}{k^2 b^2} J_0(kb) J_1(\bar{k}b)\right) \; .$$

Poniamo, qualunque sia l [1],

$$\overset{\star}{\mathrm{I}}{}^{(1)}_{ll} = \mathrm{I}_m \frac{\bar{k} b\, \mathrm{J}_l(kb)\, \mathrm{J}'_l(\bar{k} b)}{k^2 b^2}.$$

e teniamo presente la (24). Dalle (29) e (30) otterremo allora, senza difficoltà,

$$(31)\quad \mathrm{Q}^{(m)} = \mathrm{R}_e(\Phi^{(m)}) = \frac{\pi\sigma b^2 \delta_{00} \bar{\delta}_{00}}{2} \Big\{ 2\,\mathrm{I}^{(1)}_{00} + \varphi^2 \Big[\delta\bar{\delta}\,\mathrm{I}^{(1)}_{11} - \mathrm{I}^{(1)}_{00}\, \mathrm{R}_e\Big(\frac{\delta \mathrm{J}_2(kb)}{\mathrm{J}_1(kb)}\Big) - \frac{3}{4}\,\mathrm{I}^{(1)}_{00} + \frac{3}{4}\,\frac{\mathrm{J}_1(kb)\,\mathrm{J}_1(\bar{k}b)}{|k|^2 b^2}\Big]\Big\},$$

$$(32)\quad \mathrm{T}^{(m)} = \frac{1}{2}\,\mathrm{I}_m(\Phi^{(m)}) = \frac{\pi\sigma b^2 \delta_{00} \bar{\delta}_{00}}{4\nu} \Big\{ 2\,\overset{\star}{\mathrm{I}}{}^{(1)}_{00} + \varphi^2 \Big[\delta\bar{\delta}\,\overset{\star}{\mathrm{I}}{}^{(1)}_{11} - \mathrm{I}^{(1)}_{00}\, \mathrm{I}_m\Big(\frac{\delta}{kb}\Big) + \overset{\star}{\mathrm{I}}{}^{(1)}_{00}\, \mathrm{R}_e\Big(\frac{\delta \mathrm{J}'_1(kb)}{\mathrm{J}_1(kb)}\Big) - \frac{3}{4}\,\overset{\star}{\mathrm{I}}{}^{(1)}_{00} + \frac{1}{4}\,\frac{\mathrm{J}_0(kb)\,\mathrm{J}_0(\bar{k}b)}{|k|^2 b^2}\Big]\Big\}.$$

La (31) [cfr. anche la (25)] coincide sostanzialmente colla (23); la (32) fornisce come valore di L_i

$$(33)\quad \mathrm{L}_i = \frac{\mu}{\mathrm{J}_1(kb)\,\mathrm{J}_1(\bar{k}b)} \Big\{ 2\,\overset{\star}{\mathrm{I}}{}^{(1)}_{00} + \varphi^2 \Big[\delta\bar{\delta}\,\overset{\star}{\mathrm{I}}{}^{(1)}_{11} - \mathrm{I}^{(1)}_{00}\, \mathrm{I}_m\Big(\frac{\delta}{kb}\Big) + \overset{\star}{\mathrm{I}}{}^{(1)}_{00}\, \mathrm{R}_e\Big(\frac{\delta \mathrm{J}'_1(kb)}{\mathrm{J}_1(kb)}\Big) - \frac{3}{4}\,\overset{\star}{\mathrm{I}}{}^{(1)}_{00} + \frac{1}{4}\,\frac{\mathrm{J}_0(kb)\,\mathrm{J}_0(\bar{k}b)}{|k|^2 b^2}\Big]\Big\}.$$

§ 13. Studiamo il comportamento asintotico della $P^{(m)}$ al crescere indefinito di $|k|$, trascurando, secondo il solito, nel computo degli elementi locali del campo elettromagnetico le quantità dell'ordine di grandezza di φ^2, e nel computo degli elementi globali le quantità dell'ordine di grandezza di φ^3.

Da formole ben note segue:

1°) $$(34)\quad \lim_{|k|=\infty} \frac{\mathrm{J}_0(kb)}{\mathrm{J}_1(kb)} = -\lim_{|k|=\infty} \frac{\mathrm{J}_2(kb)}{\mathrm{J}_1(kb)} = \lim_{|k|=\infty} \frac{\mathrm{J}'_1(kb)}{\mathrm{J}_1(kb)} = i\,;$$

2°) per $\varrho < 1$, qualunque sia r: $$(35)\quad \lim_{|k|=\infty} k^r \frac{\mathrm{J}_0(kb\varrho)}{\mathrm{J}_0(kb)} = 0.$$

Essendo $\bar{k} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\,|k|$, dalle (34) si deduce

$$\left\{\begin{aligned} &\lim_{|k|=\infty}\Big(\frac{|k|}{\mathrm{J}_1(kb)\,\mathrm{J}_1(\bar{k}b)}\cdot\frac{\bar{k}b}{k^2b^2}\,\mathrm{J}_0(kb)\,\mathrm{J}_1(\bar{k}b)\Big) = -\frac{1+i}{\sqrt{2}\,b}\\ &\lim_{|k|=\infty}\Big(\frac{|k|}{\mathrm{J}_1(kb)\,\mathrm{J}_1(\bar{k}b)}\cdot\frac{\bar{k}b}{k^2b^2}\,\mathrm{J}_1(kb)\,\mathrm{J}'_1(\bar{k}b)\Big) = \frac{1+i}{\sqrt{2}\,b}\,,\end{aligned}\right.$$

[1] Con ciò $\overset{\star}{\mathrm{I}}_{ll}$ verrà a rappresentare il valore dell'integrale

$$\frac{1}{|k|^2 b^2}\int_0^1 \varrho\, d\varrho \Big\{ \frac{l^2}{\varrho^2}\,|\mathrm{J}_l(kb\varrho)|^2 + |k|^2\,|\mathrm{J}'_l(kb\varrho)|^2 \Big\}$$

[ved. loc. cit. (2), a pag. 1 della Nota I, § 8].

e, successivamente,

$$\lim_{|k|=\infty}\left(\frac{|k|}{J_1(kb)\,J_1(\bar{k}b)}\cdot I_{ll}^{(1)}\right)=\lim_{|k|=\infty}\left(\frac{|k|}{J_1(kb)\,J_1(\bar{k}b)}\cdot \overset{*}{I}{}_{ll}^{(1)}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}\,b}\quad(l=0,1)$$

$$\lim_{|k|=\infty}\delta=\frac{i}{2}\,.$$

Dopo tutto questo, le (22) e (35) permettono immediatamente di concludere che per $\varrho<1$, cioè nell'interno del conduttore, è $\lim\limits_{|k|=\infty} E_n^{(m)}=0$. Alla stessa conclusione si perverrebbe per $H_\varrho^{(m)}$ ed $H_\vartheta^{(m)}$ ove se ne considerassero le espressioni effettive.

Sempre dalla (22), come espressione asintotica di $E_n^{(m)}$ alla superficie del conduttore ($\varrho=1$) si deduce

$$E_n^{(m)}=\frac{(1+i)\,e^{i\nu t}\,J}{bc\pi}\sqrt{\frac{\pi\mu\nu}{\sigma}}\,(1+\varphi\cos\vartheta)\,;$$

ulteriormente, dalla (27) si ha

$$\lim_{|k|=\infty}[H_\vartheta^{(m)}]_{\varrho=1}=\frac{2e^{i\nu t}\,J\sqrt{2}}{bc}\,(1+\varphi\cos\vartheta)\,,$$

ed è facile il provare che, anche per $\varrho=1$, è

$$\lim_{|k|=\infty}H_\varrho^{(m)}=0\,.$$

Infine, dalle (23) e (33), tenendo conto anche della (25), si ottengono (come estensione di ben note formole di Rayleigh-Stefan) le seguenti espressioni asintotiche di R ed L_i:

$$(36)\qquad\left\{\begin{aligned}R&=\frac{1}{b}\sqrt{\frac{\nu\mu}{2\pi\sigma c^2}}\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)\\ L_i&=\frac{1}{b}\sqrt{\frac{\mu c^2}{2\pi\sigma\nu}}\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right).\end{aligned}\right.$$

§ 14. Nel caso che $|kb|$ sia piccolo rispetto all'unità, il comportamento della $P^{(m)}$ può essere facilmente caratterizzato sostituendo, nelle formole generali già stabilite, le funzioni di Bessel coi loro sviluppi in serie ordinate per le potenze crescenti dell'argomento. Non insisteremo su questo perchè ci riserbiamo di trattare nei prossimi paragrafi il caso di un campo stazionario ($\nu=k=0$), caso che — come dimostreremo e come del resto è da aspettarsi — si riattacca con continuità al caso generale al decrescere indefinito di ν. Ci limiteremo soltanto a scrivere le espressioni di R ed L_i per piccoli valori di $|kb|$ Tali espressioni, quando si trascurino le potenze

di $|kb|$ superiori alla 7ª (e sempre a meno di un errore dell'ordine di φ^3) sono le seguenti:

$$(37)\quad \begin{cases} \mathrm{R} = \dfrac{1}{\pi\sigma b^2}\left\{1 + \dfrac{|k|^4 b^4}{192} - \dfrac{\varphi^2}{4}\left[1 + \dfrac{47\,|k|^4 b^4}{4608}\right]\right\} \\ \mathrm{L}_i = \dfrac{\mu^2}{2}\left\{1 - \dfrac{|k|^4 b^4}{384} - \dfrac{\varphi^2}{144}\left[67 - \dfrac{277\,|k|^4 b^4}{960}\right]\right\}. \end{cases}$$

§ 15. Per $\nu = 0$ le $(2)_2$ e $(2)_3$ dànno

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta}\{\mathrm{E}_n(1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)\} = \frac{\partial}{\partial \varrho}\{\mathrm{E}_n(1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)\} = 0\,,$$

cioè

$$\mathrm{E}_n = \frac{\mathrm{C}}{1 - \varrho\varphi\cos\vartheta}\,,$$

ove C è una quantità (indipendente da ϱ e ϑ) che è legata all'intensità $\mathrm{J}^{(0)}$ della corrente dalla relazione

$$\mathrm{J}^{(0)} = \sigma b^2 \mathrm{C}\int_0^1 \varrho\, d\varrho \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{1 - \varrho\varphi\cos\vartheta} = \frac{2\pi\sigma b^2 \mathrm{C}}{\varphi^2}\left\{1 - \sqrt{1 - \varphi^2}\right\}.$$

In conseguenza (cfr. § 4) fissato il valore di $\mathrm{J}^{(0)}$ la condizione di minimo pel calore di Joule sarà soddisfatta da un campo elettromagnetico stazionario $(\mathbf{E}^{(m,0)}, \mathbf{H}^{(m,0)})$ allora e allora soltanto che sia

$$(38)\quad \mathrm{E}_{\vartheta}^{(m,0)} = \mathrm{E}_{\varrho}^{(m,0)} = 0 \qquad \mathrm{E}_n^{(m,0)} = \frac{\varphi^2\, \mathrm{J}^{(0)}}{2\pi\sigma b^2\left(1 - \sqrt{1 - \varphi^2}\right)(1 - \varphi\varrho\cos\vartheta)}.$$

In base alle equazioni

$$\frac{4\pi\sigma}{c}\,\mathbf{E}^{(m,0)} = \operatorname{rot}\mathbf{H}^{(m,0)} \qquad \operatorname{div}\mathbf{H}^{(m,0)} = 0\,,$$

ciò individua il campo elettromagnetico a meno dell'aggiunta di un campo di forza newtoniano al campo magnetico.

§ 16. L'espressione ora ottenuta per $\mathrm{E}_n^{(m,0)}$ si può anche considerare come individuata per $k = 0$ dalla (4), in base alla condizione che, subordinatamente all'eguaglianza

$$(39)\qquad \mathrm{J}^{(0)} = \sigma\int_{\mathrm{S}} \mathrm{E}_n\, d\mathrm{S}$$

risulti minimo

$$Q^{(0)} = \sigma \int_S E_n^2 (1 - \varrho\varphi \cos\vartheta)\, dS\,.$$

Invero:

1°) la (4), per la sua stessa origine, è soddisfatta, quando sia $k = 0$, da $E_n = E_n^{(m,0)}$;

2°) per una qualunque E_n che soddisfi alla (39) e non coincida con $E_n^{(m,0)}$, si ha:

$$\int_S E_n^2 (1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)\, dS = \int_S \left\{ E_n^{(m,0)} + [E_n - E_n^{(m,0)}] \right\}^2 (1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)\, dS =$$

$$= \int_S [E_n^{(m,0)}]^2 (1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)\, dS + \int_S [E_n - E_n^{(m,0)}]^2 (1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)\, dS +$$

$$+ \frac{\varphi^2 J^{(0)}}{2\pi\sigma b^2 \left(1 - \sqrt{1 - \varphi^2}\right)} \left\{ \int_S E_n\, dS - \int_S E_n^{(m,0)}\, dS \right\} >$$

$$> \int_S [E_n^{(m,0)}]^2 (1 - \varrho\varphi\cos\vartheta)\, dS\,.$$

Questa osservazione prova che al decrescere indefinito di ν la $\mathbf{E}^{(m)}$ si riduce alla $\mathbf{E}^{(m,0)}$, purchè, s'intende, nel passaggio al limite si sostituisca J con $\frac{J^{(0)}}{\sqrt{2}}$; e in conseguenza dà modo di togliere l'indeterminazione già rilevata per la $\mathbf{H}^{(m,0)}$, permettendo di assumere

$$\mathbf{H}^{(m,0)} = \lim_{\nu=0} \mathbf{H}^{(m)}\,. \tag{40}$$

§ 17. Per eseguire in base alla (39) il calcolo di $H_{\mathfrak{S}}^{(m,0)}$, $H_{\rho}^{(m,0)}$, basta, in conformità alle (26) determinare il limite di Ψ per $\nu = 0$. Introducendo in Ψ l'espressione (22) di E_n, ove le funzioni di Bessel siano state sostituite coi loro sviluppi in serie e si sia posto $J\sqrt{2} = J^{(0)}$, si trova senza difficoltà (pur di scegliere convenientemente la costante indeterminata che compare nell'espressione di Ψ):

$$\lim_{\nu=0} \Psi = \frac{4 J^{(0)}}{cb} \left\{ -\frac{\varrho^2}{4} + \frac{\varphi\varrho\cos\vartheta}{16} \left[\varrho^2 - \frac{1}{3} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\varphi^2}{4} \left[\frac{1}{48} + \frac{13}{48}\varrho^2 + \frac{1}{32}\varrho^4 \right] \right\}. \tag{41}$$

Corrispondentemente si ha

$$(42)\quad \begin{cases} H_{\vartheta}^{(m,0)} = \dfrac{4J^{(0)}}{cb}\left\{\dfrac{\varrho}{2}+\dfrac{\varphi\cos\vartheta}{16}\left[5\varrho^2+\dfrac{1}{3}\right]+\dfrac{\varphi^2\varrho}{8}[\varrho^2-1]\right\} \\ H_{\varrho}^{(m,0)} = -\dfrac{4J^{(0)}}{cb}\dfrac{\varphi\,\mathrm{sen}\,\vartheta}{16}\left[\varrho^2-\dfrac{1}{3}\right], \end{cases}$$

ove, come nella (41), per quello che riguarda l'ordine d'approssimazione è da mantenere la specificazione che vale per la (22). In particolare risulta dalle (42) che nel punto C $H^{(m,0)}$, è normale al piano della circonferenza direttrice del toro e in grandezza $=\dfrac{\varphi J^{(0)}}{12cb}$.

Le (42) possono anche servire a determinare per $\nu=0$ l'energia magnetica e l'autoinduzione interna del conduttore. Eseguendo il calcolo si trova

$$L_i=\frac{\mu}{2}\left\{1-\frac{67\varphi^2}{144}\right\},$$

ciò che dà una verifica della $(37)_2$. Una verifica della $(37)_1$ può aversi dalle (38), in quanto, eseguendo in base ad esse il calcolo di R per $\nu=0$, si trova

$$R=\frac{1}{2\pi\sigma b^2}\,\frac{\varphi^2}{1-\sqrt{1-\varphi^2}}=\frac{1}{\pi\sigma b^2}\left\{1-\frac{\varphi^2}{4}-\cdots\right\}$$

Matematica. — *Sulle soluzioni fondamentali delle equazioni integro-differenziali.* Nota II di N. ZEILON, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

6. L'espressione (IV) vale per i due tipi d'equazioni integrali, e evidentemente essa è un integrale che dovrebbe calcolarsi per mezzo del teorema del Cauchy. Il caso di un'equazione del tipo del Fredholm si complica, per la presenza dei poli della D e anche per la difficoltà di sviluppare questa funzione nella prossimità dei punti β_1, β_2, radici dell'equazione

$$(5)\qquad \left(\frac{\beta y+z}{x}\right)^2+\beta^2+1=0.$$

Prendiamo il caso del Volterra; un residuo allora non può provenire che dalle radici β_1, β_2, e la D si sviluppa facilmente. Sia $x>0$, e

$$(6)\qquad \beta_1=-\frac{yz+ir}{x^2+y^2},\quad \frac{\beta_1 y+z}{x}=\frac{xz+iyr}{x^2+y^2},$$
$$r^2=x^2+y^2+z^2;$$

abbiamo:

$$\left(\frac{\beta_1 y + z}{x}\right)^2 + \beta^2 + 1 = \frac{2ir}{x}(\beta - \beta_1) \tag{7}$$

nella prossimità di β_1. Denotiamo con A l'operazione

$$A\chi(t) = \int \left[\left(\frac{\beta y + z}{x}\right)^2 f(t, \xi) + \beta^2 \varphi(t, \xi) + \psi(t, \xi)\right] \chi(\xi)\, d\xi ,$$

e sia R il polinomio (5); facendo uso delle potenze simboliche, troviamo:

$$x(t) = \mu(t) - \frac{A\mu(t)}{R} + \frac{A^2\mu(t)}{R^2} - \cdots ,$$

onde

$$D = \varepsilon(t, \tau) - \frac{\left(\frac{\beta y + z}{x}\right)^2 f(t, \tau) + \beta^2 \varphi(t, \tau) + \psi(t, \tau)}{R} + \frac{A\left[\left(\frac{\beta y + z}{x}\right)^2 f + \beta^2 \varphi + \psi\right]}{R^2} - \cdots , \tag{8}$$

serie uniformemente convergente, i cui termini si integrano separatamente. Nell' integrale (IV) abbiamo prima il termine

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon(t, \tau)\,\alpha\beta}{2ir(\beta - \beta_1)} = -\frac{\varepsilon(t, \tau)}{4\pi r} , \tag{9}$$

integrando attorno al mezzopiano superiore della variabile complessa β.

I termini d'ordine superiore conterranno integrali della forma:

$$J_{h,k,l} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\frac{\beta y + z}{x}\right)^{2h} \beta^{2k}\, d\beta}{R^{h+k+l+1}} ,$$

il cui calcolo non è difficile; si dimostra che:

$$J_{h,k,l} = \frac{1}{(2(h+k+l))!} \frac{\partial^{2(h+k+l)}}{\partial x^{2h}\, \partial y^{2k}\, \partial z^{2l}} r^{2(h+k+l)-1} . \tag{10}$$

Per verificare questa relazione in modo rapido, se non rigoroso, osserviamo che:

$$J_{h,k,l} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha^{2h}\beta^{2k}\gamma^{2l}\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{h+k+l+1}}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma =$$

$$= \frac{\partial^{2(h+k+l)}}{\partial x^{2h}\, \partial y^{2k}\, \partial z^{2l}} \cdot \frac{(-1)^{h+k+l}}{2\pi} \cdot \iiint \frac{e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{h+k+l+1}}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma =$$

$$= \frac{\partial^{2(h+k+l)}}{\partial x^{2h}\, \partial y^{2k}\, \partial z^{2l}} \cdot K ;$$

ove

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^{h+k+l} \mathrm{K}=\frac{1}{2\pi}\iiint \frac{e^{(\alpha x+\beta y+\gamma z)}}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\,d\alpha\, d\beta\, d\gamma=-\frac{4\pi^2}{r}.$$

Risolvendo questa ultima equazione, ritroviamo la (10).

7. Le formule del paragrafo precedente contengono la soluzione fondamentale del Volterra. Abbiamo costruita la serie seguente:

$$\text{(V)}\qquad \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon(t,\tau)}{r}+\sum_1^\infty \frac{(-1)^m}{(2m)!}\sum_{h+k+l=m}\frac{\partial^{2m} r^{2m-1}}{\partial x^{2h}\,\partial y^{2k}\,\partial z^{2l}}\,\mathrm{F}_{h,k,l}(t,\tau)\right),$$

ove le funzioni $\mathrm{F}_{h,k,l}$ sono date dalle relazioni

$$\mathrm{F}_{h,k,l}(t,\tau)=\int[f(t,\xi)\,\mathrm{F}_{h-1,k,l}(\xi,\tau)+\varphi(t,\xi)\,\mathrm{F}_{h,k-1,l}(\xi,\tau)+ \\ +\psi(t,\xi)\,\mathrm{F}_{h,k,l-1}(\xi,\tau)]\,d\xi,$$

$$\mathrm{F}_{1,0,0}=f\quad;\quad \mathrm{F}_{0,1,0}=\varphi\quad;\quad \mathrm{F}_{0,0,1}=\psi.$$

Ora, per l'applicazione alla (I) del metodo del Green, invece di partire dalla definizione del § 2, è naturale di cercare una soluzione che per $f=\varphi=\psi=0$ si riduce alla funzione $\frac{1}{r}$. Sarà essa una soluzione che si deduce dalla (V) integrando rispetto a τ.

Prendiamo l'equazione aggiunta del Volterra, in cui si integra fra t e θ; scrivendo, secondo le notazioni della Memoria citata, $f(\tau,t)$, $\mathrm{F}_{h,k,l}(\tau,t)$, invece di $f(t,\tau)$, $\mathrm{F}_{h,k,l}(t,\tau)$, poniamo:

$$\mathrm{V}(x,y,z\,|\,t,\theta)=-4\pi\int_t^\theta \mathrm{F}(x,y,z\,|\,t,\tau)\,d\tau,$$

e allora ritroviamo la *soluzione fondamentale* del Volterra, cioè la serie

$$\mathrm{V}=\frac{1}{r}\left(1+r\int_t^\theta \frac{(-1)^m}{(2m)!}\sum\frac{\partial^{2m} r^{2m-1}}{\partial x^{2h}\,\partial y^{2k}\,\partial z^{2l}}\cdot \mathrm{F}_{h,k,l}(\tau,t)\,d\tau\right).$$

8. Finiamo col ricordare l'applicazione del metodo dei nn. 2 e 3 a un caso più generale di equazioni integro-differenziali. Sia l'equazione

$$\text{(VI)}\quad f\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)u(t)+\int\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z};t,\tau\right)u(\tau)\,d\tau= \\ =\mathrm{A}u=\varrho(x,y,z;t),$$

ove con f e Φ denotiamo funzioni intere e razionali d'ordine qualunque dei simboli di derivazione, essendo f a coefficienti costanti e Φ a coefficienti che dipendono da t e τ. Ritenendo la definizione del § 2, l'integrale fon-

damentale della (VI) si forma facilmente. Consideriamo l'equazione integrale

$$x(t)+\frac{1}{f(i\alpha\,,i\beta\,,i\gamma)}\int \Phi(i\alpha\,,i\beta\,,i\gamma\,;t\,,\tau)\,x(\tau)\,d\tau=\mu(t)=\frac{\varrho(\lambda\,,\mu\,,\nu\,;t)}{8\pi^3 f(i\alpha\,,i\beta\,,i\gamma)}$$

e sia $D(\alpha\,,\beta\,,\gamma\,|\,t\,,\tau)$ la funzione risolvente analoga alla D dell'equazione (2); l'integrale fondamentale della (VI) sarà

$$\text{(VII)}\qquad F=\frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{D(\alpha\,,\beta\,,\gamma\,|\,t\,,\tau)}{f(i\alpha\,,i\beta\,,i\gamma))}\,e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,,$$

integrale che si saprebbe discutere cogli argomenti sviluppati nei diversi casi di equazioni differenziali.

9. La proprietà fondamentale dell'integrale (VII) può verificarsi più o meno direttamente. Trattandosi della formula del Green, conviene occuparsi delle derivate d'ordine $n-1$. Ricordiamo un teorema della teoria delle equazioni differenziali [1]. Sia

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}\,,\frac{\partial}{\partial y}\,,\frac{\partial}{\partial z}\right)=0$$

un'equazione lineare, omogenea d'ordine n, a coefficienti costanti, a caratteristica imaginaria; e sia

$$F_{n-1}=\psi_{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\,,\frac{\partial}{\partial y}\,,\frac{\partial}{\partial z}\right)F$$

una combinazione lineare delle derivate d'ordine $n-1$ dell'integrale fondamentale F corrispondente. Consideriamo l'integrale

$$J_\sigma=\int_\sigma \varrho(\lambda\,,\mu\,,\nu)\,F_{n-1}(x-\lambda\,,y-\mu\,,z-\nu)\,d\sigma\,,$$

esteso a una superficie σ qualunque. Siano $\xi\,,\eta\,,\zeta$ i coseni direttori della normale (presa in un senso determinato) in un punto $\lambda=\bar{x}\,,\mu=\bar{y}\,,\nu=\bar{z}$ della σ; allora attraversando la σ in modo che il punto $x\,,y\,,z$ passante per $\bar{x}\,,\bar{y}\,,\bar{z}$, vada nella direzione secondo la quale cresce il trinomio

$$\xi x+\eta y+\zeta z\,,$$

si trova che J_σ è discontinua, *i suoi valori alle due faccie di σ presentando la differenza finita*

$$-\frac{\psi_{n-1}(\xi\,,\eta\,,\zeta)}{f(\xi\,,\eta\,,\zeta)}\cdot\varrho(\bar{x}\,,\bar{y}\,,\bar{z})\,.$$

[1] Vedi Zeilon, *Sur les dérivées d'ordre $n-1$ de l'intégrale fondamentale d'une équation différentielle elliptique*. Arkiv f. Matematik ecc., Stocolma 1913.

Nel caso presente, un risultato analogo si deduce cogli stessi ragionamenti della Memoria citata. Supponiamo che F_{n-1} contenga le derivate di ordine $n-1$ rispetto a x, y, z della funzione (VII) nel caso di un'equazione (VI) omogenea; troviamo che l'integrale

$$(11) \qquad J_\sigma = \int_\sigma \int_\tau \varrho(\lambda, \mu, \nu; \tau) F_{n-1}(x-\lambda, y-\mu, z-\nu \mid t, \tau)\, d\sigma\, d\tau$$

presenta fra le due faccie di σ la discontinuità

$$(12) \qquad \varDelta_\psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; t) = \varDelta_\psi(t) =$$

$$= -\frac{\psi_{n-1}(\xi, \eta, \zeta)}{f(\xi, \eta, \zeta)} \int_\tau D(\xi, \eta, \zeta \mid t, \tau)\, \varrho(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; \tau)\, d\tau = -\frac{\psi_{n-1}(\xi, \eta, \zeta)}{f(\xi, \eta, \zeta)} \cdot \varDelta(t),$$

ove $\varDelta(t)$, la quale non dipende dai coefficienti della ψ, si trova, secondo la definizione di D, mediante l'equazione integrale

$$(13) \qquad \varDelta(t) + \frac{1}{f(\xi, \eta, \zeta)} \int \Phi(\xi, \eta, \zeta; t, \tau)\, \varDelta(\tau)\, d\tau = \varrho(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; t),$$

osservando che f e Φ sono adesso omogenee dello stesso ordine.

Abbiamo supposto l'equazione (VI) omogenea e a caratteristica non reale, cioè che la funzione $f(\alpha, \beta, \gamma)$ non si annulli mai nel campo reale; ma si può estendere il risultato in modo da renderlo valido anche in casi più generali.

Come esempio consideriamo la funzione $V(x, y, z \mid t, \theta)$ del Volterra; prendendo $\varrho(x, y, z; t) = -4\pi$, avremo da studiare gli integrali

$$\int_\sigma \frac{\partial V}{\partial x} d\sigma \quad , \quad \int_\sigma \frac{\partial V}{\partial y} d\sigma \quad , \quad \int_\sigma \frac{\partial V}{\partial z} d\sigma;$$

ne troviamo le discontinuità

$$\frac{-\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} \cdot \varDelta \quad , \quad \frac{-\eta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} \cdot \varDelta \quad , \quad \frac{-\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} \cdot \varDelta,$$

ove

$$(14) \qquad \varDelta(t) + \frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} \int_t^\theta [\xi^2 f + \eta^2 \varphi + \zeta^2 \psi]\, \varDelta(\tau)\, d\tau = -4\pi.$$

Nella formula del Green, per l'equazione (I) occorre l'integrale

$$(15) \qquad \int_\sigma \left[\frac{\partial V(t)}{\partial n} + \int_t^\theta d\tau \left(\frac{\partial V(\tau)}{\partial x} \cdot f(\tau, t) \cdot \xi + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial V(\tau)}{\partial y} \varphi(\tau, t) \cdot \eta + \frac{\partial V(\tau)}{\partial z} \psi(\tau, t) \cdot \zeta \right) \right] d\sigma,$$

la cui singolarità si calcola per conseguenza, $= 4\pi$.

Sia la σ una superficie *chiusa*; la direzione che conviene scegliere per il passaggio attraverso σ sarà quella della normale *esterna*. Ora, per un *punto* xyz, *esterno* rispetto a σ, si prova facilmente che l'integrale (15) è zero; se ne conclude che a un *punto interno* corrisponde il valore -4π. Ritroviamo così un risultato fondamentale nella teoria dell'equazione (I) (¹).

Ricordiamo, finalmente, che il metodo precedente si applica alle equazioni integro-differenziali a un numero qualunque di variabili, e che anche il simbolo $\frac{\partial}{\partial t}$ potrebbe intervenire nella f senza gravi complicazioni.

Matematica. — *Il teorema di Eulero per le funzioni di linea omogenee.* Nota della dott.ssa Elena Freda, presentata dal Socio V. Volterra.

Matematica. — *Sopra un teorema d'unicità relativo alla equazione delle onde sferiche.* Nota di S. Zaremba, presentata dal Socio E. Levi-Civita.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulla resistenza elettrica di una lamina in un campo magnetico.* Nota di O. M. Corbino e G. C. Trabacchi, presentata dal Socio P. Blaserna.

In un precedente lavoro fu notato che la presenza di larghi elettrodi di rame, applicati al contorno di una lamina di metallo che rappresenti il fenomeno di Hall, deve dare origine ad un sistema di correnti interne, le quali, sovrapponendosi alla corrente primitiva, aumenteranno l'energia consumata, per l'effetto Joule, nella lamina. Ne risulterà un aumento della resistenza globale della lamina definita come il rapporto tra la differenza dei potenziali degli elettrodi e la corrente totale che traversa il circuito. Questo aumento è indipendente da quello dovuto alla variazione di resistenza specifica, quale si otterrebbe nel caso in cui le linee di corrente conservessero la forma primitiva; indipendente cioè dallo aumento di cui la teoria elettronica di Riecke e di Drude non rende conto, e che viene utilizzato nella spirale di Lenard per la misura dei campi magnetici.

(¹) Vedi Volterra, Memoria precedentemente citata.

Che l'aumento dell'energia consumata per l'effetto Joule, proveniente dalle correnti parassite, non debba essere trascurabile, risulta dal fatto che quelle correnti possono acquistare un'intensità rilevante, così da deprimere notevolmente l'effetto Hall lungo gli orli della lamina. Per ricercare più facilmente le variazioni di resistenza che ne derivano, conviene perciò ricorrere a una lamina di forma tale da accentuare quelle correnti parassite, come avviene, ad esempio, per un rettangolo con lati di lunghezza assai differente e nel quale gli elettrodi di rame siano saldati ai lati di maggiore lunghezza. Ma occorre, insieme, di poter misurare la variazione *normale* di resistenza della medesima lamina, in condizioni tali cioè da eliminare le perturbazioni nella forma della corrente causate dagli elettrodi.

Per realizzare le condizioni sopra esposte abbiamo proceduto nel modo seguente :

In una lamina rettangolare di bismuto, lunga 52, larga 24 e spessa 1,8 millimetri, erano saldate due lamine di rame lungo i lati maggiori. Al rame erano saldati i fili adduttori della corrente, e due fili-sonde per misurare con un galvanometro la differenza di potenziale corrispondente al passaggio di una nota intensità di corrente ; si poteva così dedurre la resistenza globale della lamina.

Indicando con r la resistenza sotto l'azione del campo, e con r_0 quella ottenuta a campo nullo, si ebbero i seguenti risultati:

campo in Gauss	r/r_0
3400	1,09
6600	1,41
10400	1,72

Furono poscia dissaldati gli elettrodi laminari, e applicati sugli orli rimasti liberi due elettrodi adduttori puntiformi, e nelle loro vicinanze due elettrodi-sonde per l'esplorazione dei potenziali, disponendoli in posizione simmetrica rispetto agli elettrodi adduttori, così da rendere trascurabile la differenza di potenziale per effetto Hall. E allo scopo di eliminare completamente l'influenza di quest'ultimo, si prese come valore della differenza di potenziale fra le sonde la media delle due deviazioni, pochissimo differenti fra loro, ottenute con campo diretto e con campo invertito. In queste condizioni la forma delle linee di corrente rimane invariata, e la variazione di resistenza osservata è del tutto dovuta al mutamento delle proprietà specifiche del bismuto sotto l'azione del campo.

Si ottenne così :

campo	r/r_0
3400	1,07
6600	1,38
10400	1,69

L'aver considerato i rapporti fra la resistenza sotto l'azione del campo e quella a campo nullo, rende indipendenti dal mutamento nella forma degli elettrodi i numeri sopra riferiti, e permette di considerarli come rapporti normali fra le resistenze specifiche del metallo con e senza campo. Si può subito riconoscere che la stessa lamina, provvista di elettrodi larghi in rame, presenta una variazione di resistenza maggiore, conformemente alla previsione.

La modificazione è nettamente superiore ai limiti entro cui possono essere garantite le misure; essa venne ritrovata con altre lamine anche di dimensioni diverse.

I risultati di queste misure permettono che si definisca una questione di un certo interesse sulle relazioni che passano fra il decorso delle linee di corrente in una lamina e la sua resistenza elettrica. Supponiamo che una

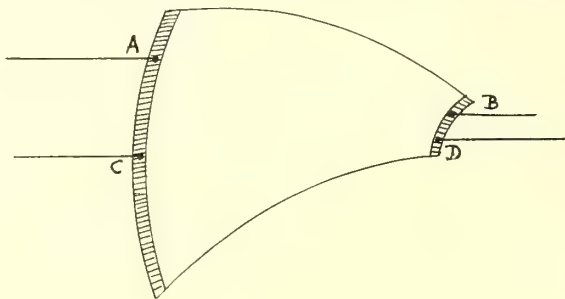



Fig. 1.

corrente traversi un disco circolare fra due elettrodi circolari concentrici: le linee di corrente saranno radiali, ma diventeranno spirali logaritmiche sotto l'azione del campo. Si supponga di tagliare il disco lungo due di queste spirali: nessuna modificazione si produrrà nella distribuzione delle correnti, e si potrà considerare, invece dell'intero disco, il settore ottenuto, a contorni spiraliformi (fig. 1). Se adesso si sopprime il campo, le linee di corrente subiranno una notevole deformazione nel settore medesimo: e se si inverte il campo, la deformazione sarà ancora più accentuata. In conseguenza, il tragitto della corrente a campo diretto e a campo invertito sarà profondamente diverso, mentre la resistenza specifica *propria del metallo* avrà lo stesso valore nei due casi. Ci si può dunque domandare: a questa profonda alterazione nel decorso delle correnti, che si produce alla inversione del campo, corrisponderà una modificazione della resistenza apparente del settore? Se sì, la resistenza globale di esso deve mutarsi allo invertire del campo.

Eseguita l'esperienza, abbiamo ottenuto un risultato assolutamente negativo.

Non è facile di dare del risultato una spiegazione intuitiva; si può solo dimostrare che esso è conseguenza necessaria della teoria generale, e, più

precisamente, che esso deriva immediatamente dal principio di reciprocità enunciato dal prof. Volterra.

Siano infatti, nel settore spiraliforme della figura, A e B i fili addut-tori; C e D gli elettrodi-sonde, applicati a coppie sugli elettrodi larghi di rame. Al sistema dei quattro punti A B C D può essere applicato il principio di reciprocità, che vale anche per elettrodi estesi di resistenza nulla. E allora, quando A e B sono adduttori, e il campo è in un certo senso, si avrà fra C e D una certa differenza di potenziale; ma se si inverte il campo, e si manda la corrente tra C e D, esplorando il potenziale fra A e B si deve avere lo stesso valore di prima. Ma lo scambio degli elettrodi A B con quelli C D non può produrre alcuna differenza nei potenziali, poichè tanto gli uni quanto gli altri hanno il potenziale dei grandi elettrodi a resistenza nulla; dunque la inversione del campo non deve neanche produrre alcuna variazione nei potenziali, ciò che appunto l'esperienza rivela.

Resta così stabilito che in qualunque caso la variazione di resistenza di una lamina dovuta al campo sarà modificata per la presenza di larghi elettrodi; ma la resistenza globale deve risultare immutata, qualora s'inverta il senso del campo. Il principio di reciprocità giustifica un risultato che per via intuitiva appare inesplicabile; poichè l'inversione del campo deve certamente mutare, nel caso realizzato, il percorso nelle correnti, e, ciò non ostante, rimane invariata la resistenza della lamina.

Fisica. — *L'effetto Hall nelle leghe di tellurio e bismuto* [1]. Nota di G. C. Trabacchi, presentata dal Socio P. Blaserna.

Fin dal 1896 Beattie [2], pur riconoscendo essere scarsi i dati delle sue esperienze e senza tentare di dare una legge generale, affermava potersi ritenere che vi sia nei metalli e nelle loro leghe una stretta relazione fra le proprietà termoelettriche e l'effetto Hall. Solo nel 1910 A. Smith [3] riprende la interessante questione studiando le leghe bismuto-antimonio, antimonio-cadmio, antimonio-zinco; e conclude favorevolmente alle idee di Beattie.

Nell'esaminare la curva della forza termoelettrica rispetto al rame, determinata recentemente da W. Haken [4] per le leghe del sistema tellurio-bismuto (a parte la nota interessante relazione, tra questa curva e quella di fusione) [5] fig. 1, si riscontra facilmente che dal punto di vista della forza

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Roma.
(2) Proc. of The Roy. Soc. of Edinbourgh (21) pag. 146.
(3) Phis. Rew. 1910 (1).
(4) Ann. der Ch. und. Phis. (32) pag. 291.
(5) Monkemeyr Zeitschr. F. Anorg. chem. 46, an. 1905.

termo-elettrica il sistema tellurio-bismuto *è il più notevole di quanti si conoscano finora*. .

Come può rilevarsi dalla fig. 2, che ho tratto dal citato lavoro di Haken, la forza termoelettrica del tellurio per aggiunta del bismuto, da principio viene abbassata in misura considerevole. A 82 °/₀ di tellurio la curva raggiunge la linea « neutra » del rame e presenta, da questo punto sino al 58 °/₀ di tellurio, valori negativi sempre crescenti; poi la curva si piega, si avvicina

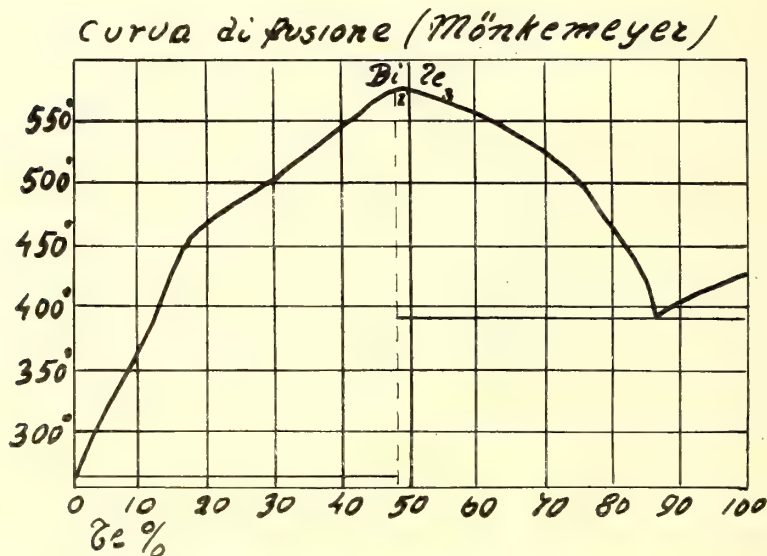



Fig. 1.

di nuovo alla linea del rame, la taglia al 50 °/₀ circa e raggiunge, con una salita oltremodo rapida, un elevato valore positivo in corrispondenza del composto Te_3 Bi_2; al 40 °/₀ corrispondono di nuovo valori negativi, e termina poi al valore corrispondente al bismuto puro.

Ho creduto pertanto utile di prendere in esame dal punto di vista del fenomeno di Hall le leghe del sistema tellurio-bismuto, anche perchè questi due metalli sono quelli che si trovano ai due estremi opposti, sia dalla serie termoelettrica, sia dall'effetto Hall che è per tutti e due, in valore assoluto, assai rilevante. A questo scopo ne ho preparate dodici.

I metalli puri provenivano da C. A. F. Kahlbaum. Dopo pesati, venivano messi in un crogiuolo di porcellana che veniva chiuso in un forno elettrico a resistenza riempito con un gas inerte per impedire la ossidazione. Dopo fusi, i metalli venivano mescolati bene con un opportuno agitatore e lasciati raffreddare. La lega fredda veniva estratta dal forno; e un pezzo di

essa, di grandezza conveniente, si poneva in uno stampo di grafite di forma circolare largo, mm. 22 e profondo mm. 2.

Introdotto lo stampo nel forno (sempre ripieno di gas inerte), si raggiungeva la temperatura di fusione della lega e quindi si lasciava raffreddare il tutto sino alla temperatura dell'ambiente.

In tal modo si otteneva per le diverse leghe una notevole costanza nel regime di raffreddamento.

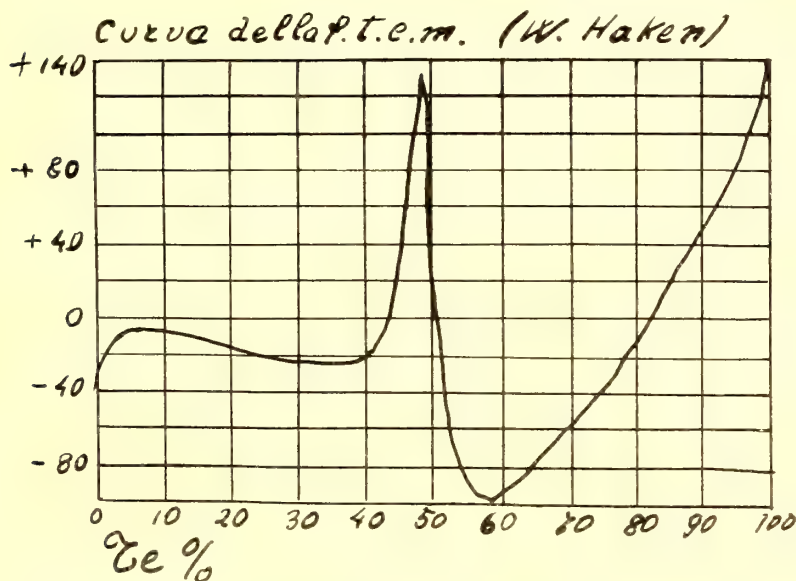



Fig. 2.

Il dischetto di lega omogenea, così ottenuto, veniva con mezzi convenienti portato allo spessore costante di mm. 1,8 e al diametro di mm. 20.

Agli estremi di due diametri ortogonali venivano saldati 4 fili di rame, che si connettevano, nel modo usuale, con una pila, ed un galvanometro per l'esame dell'effetto Hall.

Il campo, nel quale il dischetto veniva introdotto, in modo che le linee di forza lo attraversassero normalmente, era uniforme e corrispondeva a circa 11000 unità C. G. S.

L'uso di contatti puntiformi evita, come è stato recentemente dimostrato dal Volterra, le gravi pertubazioni prodotte dagli elettrodi.

Riportando come ascisse le percentuali di tellurio nella lega e per ordinate gli effetti osservati, ho ottenuta la curva della fig. 3. *È evidente la concordanza di questa curva con quella trovata da Haken per la forza termoelettrica.*

Bisogna tener conto che la curva stessa può essere leggermente modificata, per il fatto che, sebbene si sia lavorato con grande cura, non possono essere certo state evitate quelle cause di errore che rendono incerti i valori dell'effetto Hall nei metalli anche purissimi.

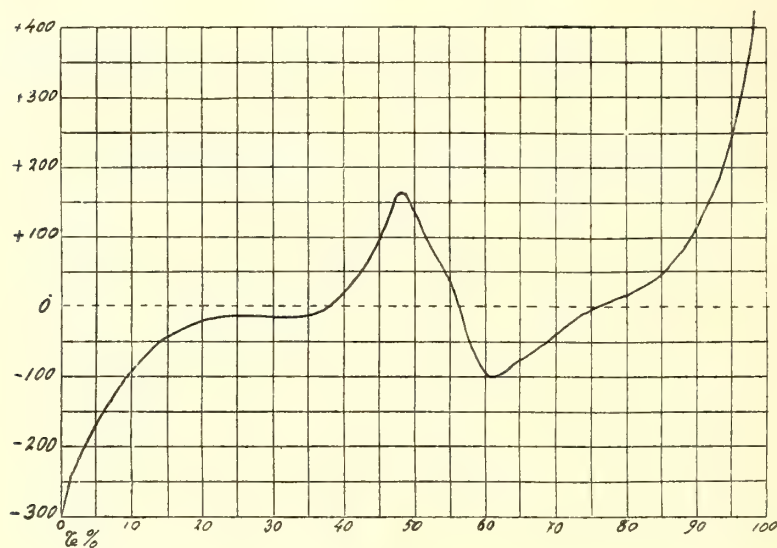



Fig. 3.

Non è lecito dai soli fatti esposti trarre delle conclusioni sulla natura dell'effetto Hall; risulta però assai probabile una strettissima relazione di esso con il potere termoelettrico e con la struttura dei conduttori.

Fisica. — *Rotazione, nel campo magnetico, di un cilindro di grafite e deduzione, per questa sostanza, del prodotto delle costanti caratteristiche di Drude.* Nota di L. Tieri, presentata dal Socio V. Volterra.

1. È noto [1] che un disco di bismuto, sospeso in un campo magnetico a 45° rispetto alle linee di forza di esso, riscaldato al centro con un pennello di luce, o in altro modo, tende a disporsi nella direzione delle linee di forza del campo. Invertendo il campo, l'azione non si inverte; se invece si scalda la periferia del disco, esso tende a disporsi in direzione normale alle linee di forza del campo.

[1] Corbino, Rend. Acc. Lincei, V, 20, ser. 5ª, 1° sem. 1911, pag. 569.

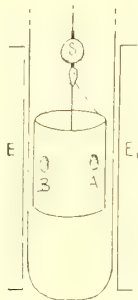
Indicando con α l'angolo che la normale al disco fa con le linee di forza del campo, con Q la quantità di calore che nel disco fluisce dal centro alla periferia, con H l'intensità del campo, con S la superficie totale del disco, come ha dimostrato il prof. Corbino, il momento della coppia agente sul disco è dato da:

$$M = \frac{1}{2\pi} U Q S H^2 \operatorname{sen} 2\alpha$$

in cui U è un coefficiente caratteristico della sostanza di cui il disco è formato.

Per $\alpha = 45^\circ$:

$$M = \frac{1}{2\pi} U Q S H^2 .$$

Cioè la coppia è massima quando il disco è a 45° rispetto alle linee di forza del campo.

Il coefficiente U dipende dal prodotto dello scarto della legge di Wiedemann e Franz, del coefficiente del fenomeno galvano-magnetico di Ettingshausen e della conducibilità σ della sostanza che costituisce il disco.

Ne viene di conseguenza che, per due sostanze diverse, quando siano eguali le quantità di calore che fluiscono dal centro alla periferia, le aree, e il campo, si avrà, indicando con M e M_1 i momenti delle coppie che si esercitano sui dischi, e con U e U_1 i rispettivi coefficienti delle sostanze,

$$\frac{M}{M_1} = \frac{U}{U_1} = \frac{\pi}{\pi_1} ; \tag{1}$$

e perciò, conoscendo per l'una sostanza il prodotto π dello scarto della legge di Wiedemann e Franz, per il coefficiente del fenomeno galvanomagnetico di Ettingshausen (effetto termico) e per la conducibilità elettrica (dal quale prodotto dipende U), e determinando sperimentalmente M e M_1, si potrà dalla (1) ricavare il valore di π_1: e quindi, conoscendo due dei fattori da cui dipende U, si potrà indirettamente ricavare il terzo.

2. In queste ricerche, invece di dare la forma di disco al materiale in esame, ho dato ad esso la forma di cilindro cavo. Il cilindro era sospeso fra le espansioni polari piatte E E_1 della grande elettrocalamita Weiss, per mezzo di un filo di bronzo fosforoso avente all'estremo inferiore una pinzetta con cui venivano afferrati 3 fili di bozzolo che reggevano il cilindro, avendo cura che il prolungamento del filo di sospensione passasse per l'asse del cilindro. Il cilindro e il filo di sospensione erano posti entro un tubo di vetro per preservare la sospensione dalle correnti di aria. L'estremità superiore del filo era fissata ad un tamburo di una bilancia di Coulomb, il quale tamburo serviva per la misura degli angoli di torsione. Le letture di piccoli angoli di torsione venivano fatte per mezzo di un raggio luminoso riflesso da uno specchietto, S rigidamente connesso col cilindro sul prolungamento dell'asse. Un fascio di luce, proveniente da una lampada ad arco, veniva concentrato nel punto medio della generatrice del cilindro, appartenente al piano tangente al cilindro a 45° rispetto alle linee di forza del campo magnetico. La forma cilindrica è certamente quella che più si presta per le mie ricerche: sia perchè, essendo tutto simmetrico, quando si eccita il campo il cilindro non subisce rotazione; sia perchè, quando il cilindro ruota sotto l'azione del flusso di calore, la zona successivamente riscaldata conserva la stessa area e la stessa orientazione rispetto al fascio luminoso.

3. Le sostanze sperimentate furono il bismuto, la grafite artificiale della « Acheson Graphite C. Niagara », l'argento ed il rame. Tali sostanze furono tornite a forma di cilindro cavo delle seguenti dimensioni: diametro esterno cm. 2,93, diametro interno cm. 2,73, altezza cm. 3,3; e vennero ricoperte esternamente di un leggero strato di nerofumo. I cilindri di rame e di argento furono provati con un campo di 6850 gauss e concentrando sul punto medio della generatrice appartenente al piano tangente al cilindro a 45° dalle linee di forza del campo, un fascio di luce proveniente da una lampada ad arco da 20 amp. a corrente continua. Tanto per l'argento quanto per il rame non ottenni alcun effetto. Sostituendo un filo di bozzolo al filo di bronzo fosforoso, ottenni delle piccole e lente rotazioni dovute verosimilmente alla variazione di permeabilità magnetica delle sostanze in esame col variare della temperatura.

Invece per la grafite l'effetto è ben netto; ed è per questa sostanza che ho paragonato l'effetto a quello del bismuto.

Per un campo costante di 3400 gauss e con un pennello di luce proveniente da una lampada ad arco ed avente sempre la stessa intensità, si ottennero per i cilindri di bismuto e di grafite i seguenti risultati:

Rotazioni in gradi del cilindro di bismuto Zona illuminata				Rotazioni in gradi del cilindro di grafite Zona illuminata			
A		B		A		B	
Campo in un senso (1)	Campo in senso contrario (2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
1122°	810°	900°	764°	50′45″	53′34″	56′23″	56′23″
1116°	800°	780°	680°	53′34″	56′23″	59′13″	59′13″

Specialmente pel bismuto, le rotazioni che si ottengono invertendo il campo sono abbastanza diverse: riservandomi di esporre in seguito la causa principale a cui son dovute tali differenze, prenderò come rotazione del cilindro di bismuto la media fra le sei rotazioni ottenute: tale media è di 871° 30′; la media per le sei rotazioni ottenute nelle identiche condizioni per la grafite è di 55′ 41″. E perciò l'effetto nella grafite è 939 volte minore che non nel bismuto.

Indicando con D il valore della deviazione dalla legge di Wiedemann e Franz, con P il coefficiente del fenomeno galvanomagnetico di Ettingshausen e con σ la conducibilità riferita all'argento (dando alla conducibilità di questo metallo il valore 60), si sa che, per il bismuto,

$$D\ 10^3 = 308\ ,\ P\ 10^6 = 50\ ,\ \sigma = 0.8\,.$$

Quindi pel bismuto:

$$\pi = 308 \times 50 \times 0,8 = 12320$$

E indicando con π_1 il prodotto delle stesse costanti per la grafite, sarà:

$$\pi_1 = \frac{12320}{939} = 13\,.$$

E quindi per la grafite:

$$D\,.\,10^3 \times P\,.\,10^6 \times \sigma = 13\,.$$

Ponendo $\sigma = 0,09$ (numero che ci rappresenta la conducibilità della grafite ordinaria), se si potesse suppore che il coefficiente del fenomeno galvanomagnetico di Ettingshausen per la grafite artificiale sia dello stesso ordine di grandezza di quello del carbone (per cui $P \times 10^6 = 5$), si avrebbe:

$$D\,.\,10^3 = \frac{13}{0,09 \times 5} = 29\,.$$

Cioè, per la grafite artificiale, la deviazione dalla legge di Wiedemann e Franz sarebbe eguale a 0,029.

Mi riservo di estendere in seguito il metodo alla determinazione del prodotto delle costanti di Drude per altre sostanze, ed a stabilire quale grado di esattezza il metodo presenta.

4. Secondo la teoria elettronica, la rotazione subìta dal cilindro in un determinato campo magnetico dovrebbe conservarsi la stessa invertendo il campo. Invece, specialmente pel bismuto, le due rotazioni sono alquanto diverse. Questa diversità va ricercata nel fatto che nella massa di bismuto, probabilmente a causa della sua struttura cristallina, nascono delle correnti termoelettriche, le quali favoriscono il moto del cilindro quando il campo ha una certa direzione, e l'ostacolano quando il campo agisce in direzione contraria.

L'esistenza di correnti termoelettriche nel bismuto, quando nella sua massa esiste uno squilibrio di temperatura, può mettersi in evidenza in diversi modi. Se in un disco di bismuto, disposto a 45° rispetto alle linee di forza del campo, si fa cadere un pennello di luce all'estremo posteriore del diametro orizzontale, esso si dispone in direzione normale al campo rotando di 45° nel verso degli indici di un orologio se guardato dall'alto; se invece lo stesso pennello di luce si fa cadere all'altro estremo dello stesso diametro, il disco ruota di 135° in senso contrario al precedente. Invertendo il campo, si invertono le rotazioni: e precisamente, riscaldando l'estremo posteriore del diametro, orizzontale il disco ruota di 135° in senso contrario agli indici di un orologio se guardato dall'alto; se si riscalda l'altro estremo dello stesso diametro, il disco ruota di 45° in senso contrario, disponendosi sempre in direzione normale alle linee di forza del campo. Tali rotazioni sono certamente dovute a correnti termoeletettriche che circolano nella massa di bismuto. Un'altra esperienza, per mettere in evidenza queste correnti termoelettriche, è la seguente:

Un disco di bismuto presenta una piccola fenditura nella regione centrale e un forellino attraversa la massa di bismuto nella direzione del raggio del disco stesso, mettendo in comunicazione la fenditura con l'esterno. Attraverso il forellino radiale passa un filo di vetro al quale sono fissati nello stesso piano e perpendicolarmente due piccoli magnetini, uno dei quali viene a trovarsi nella fenditura, l'altro all'esterno del disco; allo stesso filo di vetro, nella parte che sporge dal disco, è fissato, oltre al magnetino, uno specchietto. Il sistema astatico è sospeso mediante un filo di bozzolo ed è protetto dalle correnti di aria da una canna di vetro chiusa superiormente con un turacciolo che serve anche a sorreggere la sospensione, ed inferiormente è ermeticamente chiuso da un turacciolo nel quale è praticato un taglio in cui s'incastra il disco di bismuto. La fenditura praticata nel bismuto è chiusa anteriormente e posteriormente da due laminette di vetro masticiate sul bismuto. Tutto il sistema è sorretto da un sostegno che poggia su un tavolo con tre viti calanti, manovrando le quali si riesce a disporre il disco verticalmente, con

che il magnetometro viene ad essere completamente libero. Essendo il disco posto nella direzione del meridiano magnetico del luogo, il piano passante per gli aghi è nel piano del disco. Concentrando, per esempio, in un punto del disco posto a destra della fenditura un fascio di luce proveniente da una lampada ad arco da 20 amp. si rivela, per mezzo di un raggio luminoso riflesso su una scala a 10 metri di distanza dallo specchietto del magnetometro, un brusco spostamento di 4 cm. Riscaldando con lo stesso fascio un punto del disco posto a sinistra della fenditura, si ha spostamento in senso contrario.

La deviazione che si ottiene è piccola, ma si può di molto ampliare intercettando periodicamente il fascio luminoso che riscalda il disco; in modo che la zona del disco rimanga illuminata quando l'ago si sposta nel senso in cui tendono a farlo deviare le correnti termoelettriche.

5. Un altro fenomeno, che forse non va trascurato in queste ricerche, è la variazione di permeabilità che i corpi subiscono col variare della temperatura. Così pel bismuto, indicando con χ' la suscettività magnetica riferita alla massa, si ha:

$$10^6 \chi' = -1{,}35 \{1 - 0{,}00115 (t - 20)\} ,$$

formola dovuta al Curie e applicabile per temperature t comprese fra 20° e 273°.

Dunque pel bismuto il diamagnetismo diminuisce con l'aumentare della temperatura; ne viene di conseguenza che, quando del cilindro di bismuto si riscalda la zona A o la zona B, per la diminuzione del diamagnetismo nasce una forza che agisce in senso contrario a quella dovuta al flusso di calore.

Chimica-fisica. — *Sul potere elettromotore delle amalgame di calcio* (¹). Nota II di Livio Cambi, presentata dal Socio R. Nasini.

In una Nota precedente (²) mi sono occupato del potere elettromotore delle amalgame di calcio, verso soluzioni metilalcooliche di cloruro di calcio, a — 80°, soprattutto per un'indagine sulla costituzione di queste leghe concomitante a quella già compiuta con l'analisi termica (³).

Ho notato allora l'interesse ad estendere le ricerche alle amalgame degli altri metalli del gruppo del calcio per stabilire i rapporti esistenti fra le tensioni dei metalli stessi e quelle dei loro composti col mercurio. E ad estendere le misure stesse a solventi che avessero permesso di operare

(¹) Lavoro eseguito nel Laboratorio di elettrochimica del R. Istituto tecnico superiore di Milano.

(²) Questi Rendiconti, 1914, II, 606.

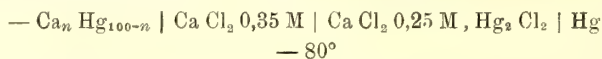
(³) Ibidem., pag. 599.

a temperature diverse per avere un quadro più completo delle variazioni della tensione in rapporto alla costituzione della lega, come pure per un tentativo di determinare in base alle forze elettromotrici le variazioni di energia che accompagnano la formazione dei composti metallici offertici dalle amalgame stesse.

Amalgame di calcio.

I. *Forze elettromotrici in alcool metilico.* — Le misure delle forze elettromotrici riportate in questa Nota vennero compiute con un potenziometro graduato al 0,0001 di Volta e con un galvametro [1] a riflessione Siemens e Halske; usando come campione un elemento a cadmio tarato.

Le misure qui sotto riportate, per le amalgame di calcio in alcool metilico, sono quelle della Nota precedente cui vennero ora aggiunte alcune nuove misure che nella tabella seguente sono segnate con asterisco.

— $Ca_n\,Hg_{100-n}$ | $Ca\,Cl_2$ 0,35 M | $Ca\,Cl_2$ 0,25 M , $Hg_2\,Cl_2$ | Hg
— 80°

N.	Ca % in peso	Ca % in atomi	I		II		ε_H medio
			F. E. M.	ε_H	F. E. M.	ε_H	
1	0,25	1	— 1,373	— 1,158	—	—	—
2	0,51	2,5	— 1,661	— 1,446	—	—	—
3	1,06	5	— 1,702	— 1,485	— 1,674	— 1,459	— 1,473
4	1,60	7,5	—	—	— 1,616	— 1,401	—
5	2,17	10	— 1,672	— 1,457	— 1,708	— 1,493	— 1,475
6	2,77	12,5	— 1,757	— 1,542	— 1,753	— 1,538	— 1,540
7	3,40	15	— 1,820	— 1,605	— 1,812	— 1,597	— 1,601
8	4,06	17,5	— 1,815	— 1,600	— 1,812	— 1,597	— 1,599
9	4,75	20	— 1,796	— 1,581	— 1,804	— 1,589	— 1,585
10	5,48	22,5	—	—	— 1,892 *	— 1,677 *	—
11	6,24	25	— 1,948	— 1,733	— 1,968 *	— 1,753 *	— 1,743
12	7,90	30	— 2,019	— 1,804	—	—	—

Tensione del calcio a — 80°:

— Ca | $Ca\,Cl_2$ 0,25 M | $Ca\,Cl_2$ 0,25 M , $Hg_2\,Cl_2$ | Hg	F. E. M.	ε_H
a) Calcio amalgamato	— 2,194	— 1,979
b) Calcio non amalgamato *	— 2,202	— 1,987

[1] Il galvanometro, data la forte resistenza interna delle coppie che vennero studiate in piridina, venne scelto con resistenza propria e sensibilità sufficenti.

L'elettrodo a calcio della coppia *a*) era costituito da una sbarretta di calcio amalgamata ad una estremità ed immersa, da questo lato, in un blocchetto di mercurio solidificato che recava il contatto di platino. Nella coppia *b*) si aveva invece una sbarretta di calcio su cui era applicato un contatto di ottone, isolato opportunamente dalla soluzione metilalcoolica. Tanto la coppia *a*) quanto la *b*) mantennero la tensione costante, raggiunto il valore massimo riportato, per diverse ore.

I valori ε_H surriportati vennero calcolati in base all'elettrodo a cloruro di potassio e calomelano, studiato da Isgarischew [1] ($\varepsilon_H = + 0{,}288$ V. a 25°) in alcool metilico. Tale elettrodo venne opposto a quello da me usato, a cloruro di calcio:

$-Hg \mid Hg_2Cl_2, CaCl_2$ 0,25 M $\mid$ KCl 0,0269 M, $Hg_2Cl_2 \mid Hg+$			F. E. M.	$+Hg \mid Hg_2Cl_2$, $CaCl_2$ 0,25 M
1)	25°	25°	— 0,0346 V.	ε_H(25°) = + 0,253 V.
2)	— 80°	25°	— 0,0725	» (80°) = + 0,215 »

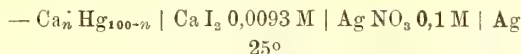
Debbo far qui notare che, per una svista nella trascrizione, nella Nota precedente, vennero invertiti i segni della coppia 2). I potenziali ε_H di quella Nota [2], dedotti in base all'elettrodo a calomelano e cloruro di calcio, vanno quindi sostituiti con gli attuali.

Le coppie 1) e 2) mantennero costante la tensione per un periodo di parecchi giorni: i valori su riportati rappresentano determinazioni nuovamente compiute.

II. *Forze elettromotrici in piridina.* — La piridina usata era quella pura del commercio, che venne mantenuta su potassa fusa per qualche giorno e poi rettificata: la frazione adoperata bolliva a 114°,7-115°. Lo ioduro di di calcio era anidro, fuso; la soluzione piridica (0.0093 M) usata era pressochè satura a 15°, ed il suo titolo venne stabilito con l'analisi.

Gli elettrodi erano costruiti sul tipo di quelli adoperati per le soluzioni metilalcootiche da Isgarischew: le soluzioni piridiche vennero pure mantenute in atmosfera di idrogeno secco e depurato:

$$- Ca_n Hg_{100-n} \mid CaI_2 \; 0{,}0093 \, M \mid AgNO_3 \; 0{,}1 \, M \mid Ag$$

25°

N.	Ca % in atomi	F. E. M.	N.	Ca % in atomi	F. E. M.
1	1	— 1,846	7	15	— 1,840
2	2,5	— 1,842	8	17,5	— 1,758
3	5	— 1,824	9	20	— 1,816
4	7,5	— 1,824	10	22,5	— 2,040
5	10	— 1,836	11	25	— 1,995
6	12,5	— 1,828	—	—	—

(1) Zeitschr. Elektroch. *18* (1912), 569.

(2) loc. cit., pag. 609, tavole I e II.

L'eletrodo a nitrato d'argento usato venne scelto in base alle misure di Abegg e Neustadt, sulle f. e. m. di coppie pure in piridina, dalle quali si rileva la costanza di un tale elettrodo (1). Dalle coppie da me misurate in piridina non è possibile di dedurre, in modo sia pure approssimato, i singoli potenziali ε_H, non possedendosi finora alcun elettrodo a potenziale noto in piridina.

Le amalgame di calcio in piridina mostrarono potenziali quasi costanti: le tensioni si elevarono gradatamente fino al valore massimo riportato, per poi discendere lentamente. Fecero eccezione, mostrandosi assai meno costanti, le amalgame dal n. 8 in poi della tabella su esposta. Maggiore variabilità ebbi nel comportamento delle seguenti coppie a calcio: il valore iniziale come è indicato, si abbassava velocemente:

— Ca | CaI_2 0,0093 M | $AgNO_3$ 0,1 M | Ag	F. E. M. a 25°
Calcio amalgamato	— 2,160 dopo 4 ore — 1,980 V.
» »	— 2,224 » 5 » — 2,020
» non amalgamato	— 2,130 » 5 » — 1 640

È da notarsi che a lungo le amalgame, come il calcio, si ricoprivano di un velo nerastro di una sostanza insolubile in piridina.

La tensione rapidamente decrescente del calcio, come quella incostante delle amalgame a più elevato tenore di calcio, in piridina, richiamano il comportamento analogo già osservato da altri autori per alcuni metalli e alcune amalgame in questo solvente. T. W. Rischards e R. N. J. Thomas (2), ritornando sulle esperienze di Cady (3), sulle tensioni delle amalgame diluite di litio in piridina, notavano l'incostanza delle tensioni stesse. Abegg e Neustadt (4) osservarono una diminuzione rapida della f. e. m. di coppie, in piridina, ad elettrodo di zinco in soluzione di cloruro di zinco, come pure per la tensione del litio nella soluzione del nitrato nello stesso solvente. Infine io ho osservato un fenomeno simile per il sodio, che nella soluzione piridica di ioduro si trasformava però rapidamente nel composto d'addizione $Na(C_5H_5N)_2$ studiato recentemente da B. Emmert (5).

Nel diagramma seguente, la curva I riporta i valori ε_H delle singole amalgame di calcio in alcool metilico a — 80°; la curva II risulta dalle f. e. m. delle varie coppie in piridina a 25°.

(1) Z. phys. Chm. *69* (1910), 492.

(2) Z. phys. Chem. *72* (1910), pag. 182.

(3) Journ. phys. Chm., *2* (1898), 551; *3* (1899), 107. Debbo notare a proposito che H. Cady si occupò in questi lavori anche di pile ad amalgame diluite di calcio a diversa concentrazione, con soluzioni di ioduro di calcio in piridine.

(4) loc. cit.

(5) Berichte 1914, pag. 2598.

Entrambi i diagrammi precedenti pongono in evidenza il composto $CaHg_4$.

Nella curva I osserviamo il fatto, già da me discusso [1], della variazione della tensione a circa 12Ca:88 Hg; che invece non si manifesta nella curva II delle coppie in piridina. La fase solida 1 Ca:7-9Hg si formerebbe quindi a temperatura inferiore e 25°: infatti, a temperatura ambiente, le amalgame rispondenti a quella concentrazione si mantengono anche a lungo semifluide. Dato, però, che l'analisi termica, fino a — 75°, — 80°, non ha mai rivelato alcun altro composto oltre $CaHg_4$, mentre invece accenna alla presenza di fenomeni di miscibilità parziale allo stato solido fra questo com-

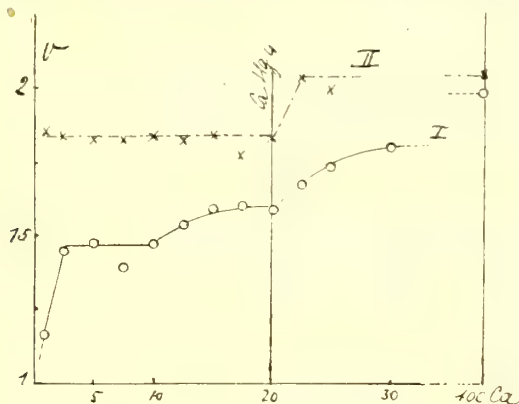



Fig. 1.

posto ed il mercurio [2], si presenta come probabile l'ipotesi che la deviazione su accennata si debba alla presenza di soluzioni solide. A 25° il campo delle concentrazioni, in cui l'amalgama risulterebbe costituita da cristalli misti, sarebbe più ristretto; e l'osservazione del primo flesso potrebbe sfuggire all'osservazione, dato anche il comportamento poco costante degli elettrodi ad amalgame più concentrate in calcio, che si osserva in piridina.

Fenomeno consimile si verifica anche nelle amalgame di sodio: nella curva delle tensioni a — 80° in alcool metilico Haber e Sack [3], Sack [4] osservarono un flesso a circa $NaHg_6$, mentre l'analisi termica presenta il composto $NaHg_4$ [5]. Nel diagramma di Schöller vi è però un indizio della presenza di cristalli misti fra $NaHg_4$ e mercurio, ed è probabile che l'andamento delle tensioni sia dovuto a questo fatto. Si comprende, poi, come queste curve delle f. e. m. possano assumere un andamento poco netto e nella posizione e nella forma dei flessi, a causa dell'incompleto stabilirsi dell'equi-

(1) loc. cit., pag. 160.

(2) Cambi e Speroni, questi Rendiconti, 1914, II, 604-605.

(3) Z. Elektroch. VIII (1902), 245.

(4) Z. anorg. Chem. *34* (1903), 37.

(5) Schöller, Z. anorg. Chem. *23* (1900), 439.

librio nella solidificazione delle amalgame stesse; a parte l'incostanza delle tensioni di fenomeni di passività che spesso si verificano.

Riassumendo, infine, dalla media delle f. e. m. dal 16 °/₀ al 20 °/₀ atomi di calcio abbiamo per il composto $CaHg_4$, e per il calcio, in alcool metilico:

— $CaHg_4$ | $CaCl_2$ 0,25 M | $CaCl_2$ 0,25 M,Hg_2Cl_2 | Hg a — 80° = — 1,810 V., da cui ε_H = — 1,595
— Ca » » » — 2,198 » — 1,983

In piridina:

— $CaHg_4$ | CaI_2 0,0093 M | $AgNO_3$ 0,1 M | Ag a 25° = — 1,825 V.
— Ca » » » = — 2,117

Tenendo conto dei dati in alcool metilico, per l'incostanza della tensione del calcio in piridina, a — 80° abbiamo una differenza, fra il calcio ed il composto $CaHg_4$, di 0,388 Volta.

Chimica. — *Anidridi e amine da acidi α-amidati* [1]. Nota di F. Graziani, presentata dal Corrispondente L. Balbiano.

In una recente Nota [2] il prof. L. Balbiano esponeva i risultati di ulteriori ricerche da lui compiute sull'anidrificazione della glicocolla, a complemento di quelle che già aveva fatte fino dal 1900. A ciò era stato condotto dalla pubblicazione, fatta nel 1913 dal prof. L. C. Maillard, di un volume [3], in cui l'autore espone tutta una sua teoria a spiegazione della formazione di anidridi degli acidi α-amidati quando questi vengano riscaldati con glicerina, e rimprovera al prof. Balbiano di non aver dato all'azione della glicerina quell'importanza che egli vi attribuisce.

Nella sua Nota il prof. Balbiano esponeva i risultati ottenuti con la glicocolla eliminando, nel riscaldamento, la glicerina, ed impiegando invece idrocarburi aromatici. Per questa via egli potè « dimostrare la base poco solida dell'elegante edifizio costruito dal chimico francese », poichè, sia adoperando la naftalina, sia usando il cimene come mezzi moderatori del calore, ottenne sempre l'anidrificazione della glicocolla.

Per consiglio dello stesso prof. Balbiano, io mi sono occupato di studiare il comportamento di altri acidi α-amidati, quando essi vengano riscaldati sia colla glicerina, sia in ambienti da essa differenti: ed in questa Nota espongo i risultati ottenuti coll'alanina, colla leucina, colla tirosina e colla cistina.

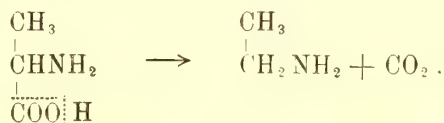
(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica organica del R. Politecnico di Torino.

(2) Rend. Acc. Lincei, 1914, I, 893.

(3) *Genèse des matières protéiques et des matières humiques : action de la glycérine et des sucres sur les acides α-aminés.* Paris, Masson et C., éditeurs, 1913.

Dirò subito che, pur avendo riscontrato come la glicerina faciliti l'anidrificazione, si può concludere che essa non è affatto necessaria alla formazione delle anidridi stesse. Basterebbe del resto il fatto che il prof. Balbiano è riuscito ad ottenere le anidridi della glicocolla col riscaldamento in naftalina e in cimene, e nelle stesse quantità che colla glicerina, per dedurne che tutta la bella ipotesi del Maillard è basata molto sul fantastico. Per conto mio ho potuto ottenere l'anidride dell'alanina riscaldandola con difenilmetano o con acenaftene; dalla leucina, riscaldata con difenilmetano, ho ottenuto in un caso piccole quantità di una sostanza, che dall'aspetto e dal punto di fusione mi sembrò di poter riconoscere per anidride; collo stesso mezzo moderatore del calore non mi è stato invece possibile ottenere le anidridi colla tirosina e colla cistina. Con quest'ultima, del resto, nemmeno riscaldando colla glicerina, sono riuscito ad isolare composti puri e definiti, la decomposizione essendo molto avanzata e profonda.

Più in particolare dirò che, mentre l'alanina riscaldata con glicerina a 170-175° per 7 ore dà la ciclo-alanil-alanina col rendimento del 60 %, riscaldata con difenilmetano alla stessa temperatura anche per 26 ore, non dà affatto anidride, ma si osserva soltanto una lenta decomposizione in etilamina e anidride carbonica:

$$\begin{matrix} CH_3 & & CH_3 \\ | & & | \\ CHNH_2 & \longrightarrow & CH_2NH_2 + CO_2 . \\ | & & \\ COO|H & & \end{matrix}$$

Innalzando la temperatura, aumenta la decomposizione in questo senso, tanto che nei casi più favorevoli il rendimento in etilamina può raggiungere fino l'80 % del teorico: ma in pari tempo si può constatare anche la formazione della ciclo-alanil-alanina. Certo questa è in quantità assai inferiore a quella che si ottiene quando il riscaldamento si faccia con glicerina, non raggiungendo, nelle migliori condizioni, che appena il 9 % del teorico. Ma tutto ciò mi sembra spiegabilissimo, quando si pensi che, nella glicerina, tanto l'alanina quanto l'anidride sono assai più solubili che in difenilmetano: e ciò evidentemente facilita assai la reazione, permettendo di mantenere più bassa la temperatura. Dovendo, col difenilmetano o coll'acenaftene, riscaldare maggiormente, si entra nella zona di temperatura in cui la decomposizione dell'alanina va nel senso della formazione di etilamina con eliminazione di CO_2: e ciò spiega l'alto rendimento in etilamina e il basso in anidride.

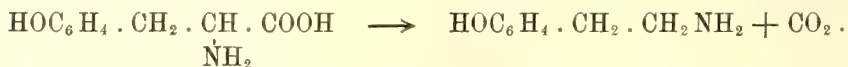
Il caso è, del resto, assai analogo a ciò che avviene per la sarcosina. Il Mylius [1] ha potuto ottenere l'anidride della sarcosina riscaldando quest'acido

[1] Ber. d. d. chem. Gesellsch., *17*, 286 (1884).

alla sua temperatura di fusione, a 220°, senza l'intervento di alcun disidratante, e contemporaneamente ha osservato una parziale decomposizione in dimetilamina e CO_2; il Maillard ha ottenuto la ciclo-sarcosil-sarcosina riscaldando l'acido a soli 170-175° con glicerina, « dont la présence », ammette l'A. a pag. 227 del suo volume, « a pour effet d'abaisser la température d'anhydrisation ». Anche nel riscaldamento colla glicerina, l'A. ha potuto constatare una leggerissima decomposizione in dimetilamina e CO_2: ma la frazione di sarcosina che a 170-175° subisce tale decomposizione è addirittura minima, mentre è più notevole a 220°.

Pel caso della leucina, come già ho accennato, non potei identificare in modo preciso, nel riscaldamento con difenilmetano, la formazione di anidride: ciò forse perchè la temperatura di decomposizione in amina e CO_2 è, per la leucina, più bassa che non per l'alanina. Infatti, mentre per questa, nel riscaldamento con glicerina a 170-175°, non ho potuto riscontrare sviluppo di vapori ammoniacali, ciò invece mi è accaduto colla leucina: oltre l'odore di cacao torrefatto indicato dal Maillard, ho potuto distintamente sentire (e l'ha notato anche il chimico francese) l'odore di isoamilamina, e durante tutto il riscaldamento si sono svolti vapori che reagiscono alcalino: e forse la piccola frazione di sostanza che il Maillard ha potuto raccogliere sulle pareti del tubo quando questo era abbastanza lungo, era carbonato di isoamilamina, che poi nei trattamenti successivi si eliminava, essendo l'amina assai volatile: dico questo, perchè a me non è stato possibile di verificare deposito di anidride fuori della glicerina, come ammetterebbe il chimico francese.

La tirosina si comporta analogamente alla leucina: riscaldata colla glicerina dà in prevalenza l'anidrificazione, e solo in piccola quantità si forma l'amina: mentre però questa è addirittura minima e svelabile solo dall'odore e dalla reazione alcalina dei vapori quando il riscaldamento si fa a 170-180°, aumenta sino a poterne isolare una piccola quantità quando si aumenti la temperatura. Adoperando poi il difenilmetano in luogo della glicerina, si ottiene l'ossifenil-etilamina, nella quantità quasi teorica:

$$HOC_6H_4 . CH_2 . \underset{NH_2}{CH} . COOH \longrightarrow HOC_6H_4 . CH_2 . CH_2NH_2 + CO_2 .$$

Infine, come ho già accennato, alcuni tentativi fatti colla cistina, riscaldandola sia con glicerina, sia con difenilmetano, non mi hanno condotto ad alcun risultato positivo. In ambedue i casi la cistina subisce una profonda decomposizione, per cui si ha sviluppo di H_2S, di NH_3, di CO_2, deposito di solfo, e un residuo carbonioso: ma ogni tentativo per isolare o un'anidride o un'amina solforata, è stato vano. Non posso però escludere assolutamente che si formino piccole quantità di queste sostanze, per quanto non possano essere che minime, dato che la maggior parte dello solfo si riscontra o libero o svolto sotto forma di H_2S: e d'altra parte sarebbe assai difficile l'isolarle,

dato lo stato d'impurezza in cui si trovano alla fine della reazione, e le piccole quantità di sostanza con cui si è lavorato.

Da quanto ho brevemente suesposto, mi sembra di poter confermare che per la formazione delle anidridi degli acidi α-amidati non è necessaria la presenza della glicerina. Essa, come mezzo moderatore di calore, per la sua avidità per l'acqua e pel fatto che un poco scioglie sia gli acidi amidati sia le loro anidridi, facilita maggiormente l'anidrificazione, permettendo di operare a temperature più basse: ma in realtà non si tratta che di temperatura. Per ciascuno di questi acidi amidati esisterà una temperatura (più bassa) alla quale sarà massima l'anidrificazione, ed una (più elevata) alla quale sarà massima invece la formazione dell'amina: ad ogni temperatura intermedia saranno possibili le due reazioni insieme. È evidente che quando intervenga un altro agente a facilitare una delle reazioni, questa prevarrà anche in un intervallo di temperatura fuori della sua zona propria: tale è il caso della glicerina, che, avida di acqua e in parte solvente, facilita la formazione dell'anidride.

Parte sperimentale.

Alanina. — L'α-alanina adoperata era sintetica, della Ditta C. A. F. Kahlbaum: si presentava in belle fogliette bianchissime, di sapore dolce, e fondeva a 283-284° con decomposizione.

Innanzi tutto ho preparato della ciclo-alanil-alanina col procedimento del Maillard: l'ho ottenuta con rendimento presso a poco identico a quello del chimico francese: purificata per cristallizzazione dall'alcool, si presenta in begli aghetti bianchi, P. F. 279-280° (non corr.). Durante il riscaldamento dell'alanina con glicerina a 170-175° non ho constatato sviluppo di vapori ammoniacali.

In seguito mi sono occupato di vedere quale fosse il comportamento dell'alanina, quando essa venga riscaldata con degli idrocarburi: e fra questi il difenilmetano si è mostrato il più conveniente.

Il difenilmetano impiegato era della Ditta Th. Schuchardt: bolliva tra 256° e 262° a 735$^{mm.}$; siccome fonde a 26°, si può facilmente averlo liquido, e così maneggiarlo più comodamente.

Il riscaldamento si faceva in provette lunghe 30-32 cm., del diametro interno di 20-22 mm., e chiuse con tappo pel quale passava un tubo più stretto (circa 6 mm.) e altrettanto lungo, allo scopo di condensare i vapori di difenilmetano od altri prodotti volatili che eventualmente si formassero. Per mezzo poi di un altro tappo forato s'introduceva il tubo più largo nella stufa, per circa metà della sua lunghezza: per un altro foro del tappo stesso passava un termometro che indicava la temperatura di riscaldamento.

Con un saggio preliminare, nel quale gr. 0,5 di alanina vennero riscaldati per 3 ore con cc. 10 di difenilmetano, aumentando lentamente la tem-

peratura fino a 265°, ho potuto stabilire la sublimazione di carbonato di etilamina [1] nella parte fredda del tubo, e la formazione di un poco dell'anidride, che cristallizza in aghetti dal difenilmetano raffreddato: inoltre durante tutto il riscaldamento si è avuto sviluppo di vapori ammoniacali, e nella parte media del tubo si è depositata una piccola quantità di alanina sublimata.

Col variare le condizioni del riscaldamento, si ottengono risultati assai differenti.

Così ad es., mantenendo anche per un tempo complessivo di 26 ore una miscela di gr. 1 di alanina con cc. 15 di difenilmetano ad una temperatura di 170-175°, si nota continuamente un lento sviluppo di etilamina; ma quasi la metà dell'acido rimane inalterato, e non mi è riuscito di isolare nemmeno tracce di anidride.

Risultati assai migliori si ottengono, qualora si riscaldi a temperature più elevate.

Sempre con 1 gr. di alanina riscaldato rapidamente fino a 270° (in meno di 2 ore), si ottenne una soluzione completa; e per raffreddamento si formarono in seno al difenilmetano dei fiocchetti assai leggeri, costituiti da aghetti finissimi, che raccolti su filtro, liberati completamente dall'idrocarburo con ripetuti lavaggi con benzolo bollente, e poi seccati a 100°, ammontavano a gr. 0,07. Si sciolgono in acqua calda, lasciando un piccolissimo residuo (forse una polianidride); e la soluzione acquosa, bollita con ossido di rame precipitato, non dà affatto colorazione azzurra. Per evaporazione del solvente si riottengono degli aghetti bianchi, solubili in alcool bollente: come si vedrà fra breve, sono della ciclo-alanil-alanina.

D'altra parte, sulle pareti della parte superiore del tubo si era depositata una massa cristallina bianca, soffice, di odore pungente: ammontava a gr. 0,64: era solubilissima in acqua, e con HCl dava forte effervescenza con sviluppo di CO_2. La soluzione cloridrica, concentrata e seccata nel vuoto su acido solforico e calce sodata, lascia come residuo dei begli aghi bianchi, che l'analisi ha mostrato essere cloridrato di etilamina.

Durante il riscaldamento, avendo fatto gorgogliare i vapori in una soluzione di acido cloridrico diluita e in acqua di barite, questa ha dato intorbidamento indicandomi lo sviluppo di CO_2, e per evaporazione dell'altra ho potuto isolare gr. 0,02 di cloridrato di etilamina. Infine nella parte media del tubo erano sublimati gr. 0,03 di alanina inalterata.

In altre condizioni di riscaldamento le quantità di anidride ottenuta variarono da gr. 0,015 a gr. 0,06, sempre lavorando con 1 gr. di alanina. Il miglior rendimento in carbonato dell'amina (gr. 0,80), l'ottenni introducendo il tubo nella stufa a 140°, poi riscaldando lentamente (nello spazio

[1] Limpricht u. Schwanert (Lieb. Ann. *102*, 297) ottennero già, colla distillazione secca dell'alanina, la formazione di etilamina: ma non dicono con quale rendimento.

di 1 ora) fino a 260°, e per un'altra ora fra 260° e 267°. In queste condizioni si ebbero soltanto gr. 0.03 di anidride, e gr. 0,03 di alanina rimasero inalterati.

Risultati del tutto analoghi ottenni usando acenaftene in luogo del difenilmetano. Si ha però l'inconveniente che, nel raffreddamento, l'idrocarburo si rapprende in una massa durissima, che poi più difficilmente si riesce ad eliminare coi lavaggi con benzolo.

Tutte le porzioni di ciclo-alanil-alanina ottenute nelle diverse preparazioni, furono riunite e cristallizzate dall'alcool: si ebbe l'anidride pura in aghetti bianchi, che fondevano a 277-278° (non corr.: il Maillard dà come P. F. 282-282°.5 corr).

All'analisi, gr. 0,1850 di sostanza diedero gr. 0,3456 di CO_2 e gr. 0.1186 di H_2O.

	Trovato	Calcolato per $C_6H_{10}O_2N_2$
C %	50,94	50,70
H %	7,12	7,04

D'altra parte si riunirono tutte le porzioni di cloridrato di etilamina ottenuto sciogliendo il carbonato in acido cloridrico: dopo purificazione per cristallizzazione dall'acqua, si trasformò nel cloroplatinato, che si presenta in fogliette giallo-aranciate.

gr. 0,1644, calcinati, lasciarono come residuo gr. 0,0640 di Pt.

gr. 0,1706 diedero cc. 8.4 di N, letti su KOH a 19° e 734^{mm}.

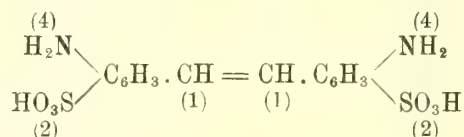
	Trovato	Calcolato per $(C_2H_5 . NH_2 . HCl)^2 PtCl^4$
Pt %	38,93	39,03
N %	5,44	5,60

In una prossima Nota riferirò i risultati sperimentali ottenuti colla leucina, colla tirosina e colla cistina.

Chimica-fisica. — *Sulle velocità delle trasformazioni fototropiche ed i loro coefficienti di temperatura con luci monocromatiche* (¹). Nota di M. PADOA e A. ZAZZARONI, presentata del Socio G. CIAMICIAN.

I. In una Nota precedente (²) si è potuto dimostrare, con sufficiente approssimazione, che i processi di coloramento, alla luce, di due sostanze fototrope, la saliciliden-β-naftilamina ed il fenilidrazone della benzaldeide, seguono la legge di massa come reazioni monomolecolari e che lo scoloramento per opera del calore ha luogo secondo quanto richiede una reazione bimolecolare.

Ben lontani dal voler generalizzare tali conclusioni per altre sostanze fototrope. abbiamo creduto conveniente di esaminare sotto il medesimo punto di vista altri corpi appartenenti ad altro tipo, che nettamente si staccasse da quelli finora considerati. A tale scopo giunsero assai a proposito le osservazioni di Stobbe e Mallison (³) sopra una nuova serie di derivati fototropi provenienti dall'acido p.p.diamido-stilben-o.o.disolfonico:

$$\begin{matrix} \overset{(4)}{H_2N} \diagdown \\ \underset{(2)}{HO_3S} \diagup \end{matrix} C_6H_3 . \underset{(1)}{CH} = \underset{(1)}{CH} . C_6H_3 \begin{matrix} \diagup \overset{(4)}{NH_2} \\ \diagdown \underset{(2)}{SO_3H} \end{matrix}$$

Basta trasformare quest'acido nei suoi derivati acetilici e benzoilici per ottenere composti fototropi, come lo sono i loro sali potassici, sodici ed altri.

Sulla fototropia di queste sostanze ha un'azione determinante, secondo i detti autori, l'ossigeno; ma non si può vedere se trattasi di azione chimica, cioè se questo gas si combini oppure se agisca cataliticamente, perchè bastano delle traccie minime di ossigeno a far comparire la fototropia.

Per le nostre esperienze abbiamo scelto il sale sodico del diacetilderivato, che si colora intensamente in rosso porpora.

Ma prima di render conto delle misure di velocità, vogliamo dire della preparazione di queste sostanze, per la ragione che gli autori citati non hanno dato indicazioni. Siamo partiti dal p.nitrotoluolo, che venne trasformato in

(¹) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale della R. Università di Bologna.

(²) M. Padoa e T. Minganti, questi Rendiconti, 1913, III, 500.

(³) Berichte, 1913, pag. 1226.

acido p.nitrotoluolsolfonico trattandolo con acido solforico fumante, per qualche giorno, a moderato calore. Per averlo puro, si diluisce con acqua, si satura con carbonato di bario, si cristallizza il sale di bario dall'acqua, e si mette in libertà l'acido con acido solforico.

Questa sostanza fonde, anidra, a 130°, e, idratata ($2\,H_2O$), a 133°; essa venne ossidata facilmente ad acido p.p.dinitrostilbendisolfonico con soda e ipoclorito sodico ([1]). Per la riduzione, si sarebbe potuto impiegare il metodo elettrolitico, ma abbiamo pensato di ricorrere al solfato ferroso in presenza di ammoniaca, che si presta bene per l'analoga riduzione dell'acido o.nitrocinnamico ([2]). Questo metodo ci servì egregiamente: in una soluzione acquosa concentrata di ammoniaca sciogliemmo una parte di acido dinitrostilbendisolfonico e versammo tale soluzione in una soluzione bollente di 10 parti di solfato ferroso cristallizzato satura di ammoniaca. Dopo un riscaldamento di mezz'ora, filtrammo, concentrammo e acidificammo con acido cloridrico. Così precipita l'acido p.p.diamidostilbendisolfonico, che può essere purificato sciogliendolo in ammoniaca e riprecipitandolo con acido cloridrico. Venne acetilato facendolo bollire molte ore con anidride acetica in presenza di acetato sodico anidro fuso. Il diacetilderivato si purifica sciogliendolo in carbonato sodico e riprecipitandolo con acido acetico. È una polvere cristallina gialla, insolubile in acqua, solubile negli alcali.

Il sale sodico lo ottenemmo dall'acido salificandolo con carbonato sodico; cristallizza bene dall'acqua calda. Non fonde; puro e seccato a 100°, questo sale aveva il contenuto d'azoto corrispondente alla composizione preveduta, come si vede dall'analisi:

N °/₀ calcolato 5,60.
" trovato 5,76

Il sale sodico, come abbiamo detto, si colora intensamente alla luce; ma durante le nostre misure ci siamo accorti che l'intensità della colorazione e la velocità di coloramento dipendono dallo stato d'idratazione del sale, il quale è notevolmente igroscopico. Quando, dopo averlo cristallizzato dall'acqua, lo si secca su acido solforico, non perde l'acqua di cristallizzazione. Ciò risulta dalle analisi:

N °/₀ calcolato	4,90		Sodio °/₀ calcolato	8,06
" trovato	4,80		" trovato	7,86.

I valori calcolati corrispondono ad un contenuto di $4\,H_2O$ per una mol. del sale. Più che la quantità dell'acqua, a noi interessava di conoscerne l'influenza sulla fototropia; e per fissare la costanza della quantità d'acqua dal

([1]) Suppl. Beilstein, II, 118, Berichte, XXX, 3100.
([2]) Gabriel, Berichte, XV, 2294.

principio alla fine d'ogni misura, abbiamo veduto che il mezzo migliore era quello di chiudere il sale sodico in un tubetto fuso alla lampada.

La scala colorimetrica necessaria per le misure non si potè preparare con la stessa sostanza, data la rapidità dello scoloramento che ha luogo a temperatura ordinaria; ricorremmo perciò a miscele di due polveri preparate in modo da rassomigliare perfettamente, per tono ed intensità di colorazione, al sale sodico illuminato e scolorato.

Queste polveri erano costituite: la gialla, di carbonato di magnesio, e cromato potassico; la rossa, di carbonato di magnesio, rosa bengala A.T., eritrosina e vesuvina. Data la loro densità pressocchè identica, le pesate avevano lo stesso valore come se si fossero potute preparare le miscele col sale sodico illuminato e scolorato.

Le esperienze di coloramento fatte a temperatura ordinaria, colla luce solare, diedero i seguenti risultati:

Grado di trasformazione		tempi in m″	K″I
I	1/4 rosso	8	0,0417
	1/2 "	23	0,0434
	3/4 "	67	0,0447
II	1/4 "	7	0,0477
	1/2 "	20	0 0500
	3/4 "	60	0,0500
III	1/4 "	11	0,0303
	1/2 "	32	0,0312
	3/4 "	98	0,0306
IV	1/4 "	20	0,0166
	1/2 "	60	0,0166
	3/4 "	118	0,0169

Le costanti K″I sono calcolate ammettendo che il coloramento avvenga con la velocità di una reazione bimolecolare; in ogni serie la costanza è soddisfacente: da una serie all'altra si hanno variazioni dovute alla diversa intensità della luce solare.

Per il coefficiente di temperatura trovammo fra —10° e 20° un rapporto, per intervalli di colorazione uguali, di 1,21; per un intervallo di 10° il coefficiente è naturalmente $K = \sqrt[3]{1,21} = 1,07$.

Lo scoloramento segue con la velocità di una reazione monomolecolare, come si vede dalle esperienze seguenti:

Grado di trasformazione			tempo in m″	K
I 85°	1/4	giallo	12	0,01032
	1/2	"	30	0,01004
	3/4	"	60	0,01004
II 95°	1/4	"	8	0,01548
	1/2	"	18	0,01677
	3/4	"	36	0,01677
III 100°	1/4	"	5	0,02477
	1/2	"	12	0,02508
	3/4	"	23	0,02517
IV 90°	1/4	"	7-8	0,01650
	1/2	"	20	0,01505
	3/4	"	40	0,01505
V 76°	1/4	"	20	0,0619
	1/2	"	42-43	0,0706
	3/4	"	94	0,0621

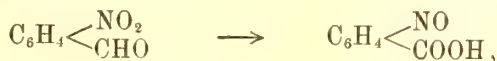
Da queste stesse esperienze si calcola il coefficiente di temperatura, che è circa 1,65; i valori di questi coefficienti, tanto per il coloramente quanto per lo scoloramento, sono simili a quelli ottenuti per altre sostanze fototrope.

In questo caso si potrebbe ammettere che il coloramento fosse dovuto ad una polimerizzazione provocata dalla luce; il calore provocherebbe la depolimerizzazione; e l'equilibrio sarebbe definito dalla

$$K'x = K''I\,(1 - x)^2 .$$

dove I è l'intensità della luce. Con tutto questo non è risolta la questione se si combini ossigeno alla sostanza fototropa: ciò non è rilevabile dalle nostre misure, poichè noi abbiamo operato in presenza di un eccesso di ossigeno, senza tener conto della sua concentrazione.

II. In tal modo avevamo condotto l'esame delle sostanze di Stobbe e Mallison allo stesso punto di quanto si era fatto per altri corpi fototropi. Ma la straordinaria singolarità delle reazioni fotochimiche ci suggerì altre esperienze. Assai recentemente, in una interessante ricerca sulla reazione fotochimica di Ciamician e Silber,

$$C_6H_4{<}^{NO_2}_{CHO} \longrightarrow C_6H_4{<}^{NO}_{COOH} ,$$

Weigert e Kummerer [1] (Berichte, 1913, pag. 1207), trovarono che in soluzione acetonica tale reazione sembra avere un meccanismo diverso a seconda della lunghezza d'onda della luce agente, talchè, se il processo obbedisce, entro certi limiti di concentrazione, alla legge di massa come reazione del primo ordine, con luce violetta, sembra essere dell'ordine zero (velocità indipendente dalla concentrazione) con luce ultravioletta.

Ora noi abbiamo voluto eseguire delle misure di velocità di coloramento con luci monocromatiche, o almeno limitando la luce agente ad un intervallo ristretto di lunghezze d'onda, per vedere se il processo seguiva con le medesime leggi cui obbedisce con la luce bianca.

Ci servimmo di tre filtri [2]:

colore	composizione	zona luminosa (λ)	massimo d'intensità (λ)
verde	$CuCl_2$ K_2CrO_4	540-505	533
bleu	cristalvioletto $CuSO_4$	478-410	448
violetto	metilvioletto	437-394	—

Gli intervalli di lunghezze d'onda segnati nella terza colonna dipendono dalla concentrazione delle soluzioni, e furono da noi determinati per le concentrazioni e gli spessori di liquido impiegati. Adoperando le usuali vaschette a faccie parallele, anche la luce solare era insufficiente per colorare le nostre sostanze; pensammo allora di riempire, coi liquidi filtranti, dei palloni sferici di vetro che ci servivano al doppio scopo di filtrare e di concentrare la luce in fuochi intensissimi. Per le luci verde e bleu, in cui occorrevano due liquidi filtranti, impiegammo due palloni, uno dietro l'altro; con tale dispositivo ci potevamo benissimo servire anche di una comune lampada ad arco a corrente alternata, a regolazione automatica.

Col sale sodico dell'acido diacetildiaminostilbendisolfonico eseguimmo le seguenti misure con luce bleu:

grado di trasformazione		tempo in m″	K_2I
$^1/_4$	rosso	7	0,0476
$^1/_2$	"	20	0,0500
$^3/_4$	"	55	0,0555

I valori di K_2I sono calcolati per una reazione bimolecolare; la loro sufficiente costanza prova che tutto procede come per la luce bianca.

[1] Che l'obbedienza alla legge di massa sia messa in forse per reazioni fotochimiche, è cosa nota per altri casi [vedi ad es. Inther e Forbes, Am Soc. XXXI (1909), pag. 777].

[2] Plotnikow, Photochemische Versuchstechnik (1912), 56.

Assai più numerose sono le seguenti esperienze, eseguite sulla salicilidene-β-naftilamina: ritornammo a questa sostanza (1), per la maggior stabilità della sua forma rossa.

Luce adoperata	Grado di trasform.	Temper.	Coeff. di temper.	Tempo in m″	K″I
I Verde	1/4 rosso	40°		325	0,00230
"	1/2 "	"	1,80	415	0 00252
"	3/4 "	"		1380	0,00261
"	1/4 "	50°		180	—
			... 1,80		
"	1/4 "	60°		100	0.07489
"	1/2 "	"	1,75	230	0,07896
"	3/4 "	"		455	0,07939
"	1/4 "	70°		57	—
II Bleu	1/4 "	14°		120	0,061
"	1/2 "	"		285	0,0633
"	3/4 "	"		570	0,0634
"	3/4 "	40°		92	—
"	3/4 "	50°	....1.45	61	—
"	3/4 "	60°		43,5	—
III Violetta	1/4 "	50°		330	0,02270
"	1/2 "	"		750	0,02408
"	3/4 "	"	1,39	1495	0,02416
"	1/4 "	60°		235	—
"	1/2 "	"		550	—

Da queste misure si rileva che, per ognuna delle tre luci colorate, la colorazione procede come una reazione monomolecolare, essendo i valori K″I calcolati in base all'espressione relativa. Per ciò che riguarda l'azione della luce verde, notammo che, a temperatura ordinaria, essa è estremamente lenta, sicchè credemmo di dover rinunciare alle misure; fortunatamente ci siamo accorti che, elevando la temperatura a 50° e oltre, anche la luce verde agisce bene. Da questo fatto fummo condotti a supporre che il coefficiente di temperatura per la velocità di coloramento con luce verde fosse maggiore di quello già ottenuto per la luce bianca: questo, già determinato più volte in passato, ha, per temperature da 0° a 30°, il valore 1,42.

Ora noi troviamo, con la luce verde, 1,80 da 40° a 70°, e (ciò che è più notevole), pel medesimo intervallo abbiamo 1,45 per la luce bleu, che

(1) Padoa e Minganti, loc. cit.

è quella che agisce più rapidamente, e 1,39 per la luce violetta. Che le nostre esperienze siano affètte da errori tali da alterare sostanzialmente il carattere dei risultati, non è ammissibile, sia perchè questi dati sono confermati da altre misure qui non riportate, sia ancora perchè, con un coefficiente di 1,45, in un intervallo di 30°, il tempo necessario per una data trasformazione risulta *triplicato*, mentre con un coefficiente di 1,8 detto tempo risulta *sestuplicato*: la differenza è così grande da togliere qualsiasi dubbio in proposito. Con questo si comprende perfettamente il valore ottenuto con la luce bianca: infatti, l'incremento della velocità di coloramento colla temperatura assume qui il valore che compete alle lunghezze d'onda più attive. Si noti che i coefficienti di temperatura per le reazioni fotochimiche sono in generale vicini all'unità, e che il valore 1,4 è dei più alti; ma occorre poi mettere in rilievo il fatto che le osservazioni fatte finora si riferiscono (almeno per quanto ci risulta dalla letteratura) alla luce bianca.

Non sarebbe dunque da stupire se un più accurato esame delle reazioni fotochimiche ci rivelasse l'esistenza, per certe lunghezze d'onda, di coefficienti di temperatura piuttosto elevati.

Della questione dei coefficienti di temperatura delle reazioni fotochimiche si è occupato, dal punto di vista teoretico, il Trautz (1); ammettendo, con Wien (2), che, nel senso termodinamico, sia lecito di far corrispondere, ad ogni lunghezza d'onda, una temperatura; e precisamente ammettendo che, per le lunghezze d'onda minori, le molecole reagenti siano portate alle temperature maggiori, e viceversa, Trautz crede di poter prevedere che i processi fotochimici attivati da luci di grande lunghezza d'onda debbono essere caratterizzati da coefficienti di temperatura elevati, mentre le reazioni sensibili alle brevi lunghezze d'onda debbono avere dei coefficienti vicini all'unità.

Questo autore anzi cercò, fra varie reazioni, quelle sensibili alla luce rossa, e trovò che lo sono l'ossidazione del solfuro sodico e quella del pirogallolo in soluzione alcalina. Senonchè, il fatto che queste non sono delle reazioni fotochimiche pure, procedendo esse, sebbene più lentamente, anche al buio, rendeva assai incerti i dati sui coefficienti di temperatura, specialmente prima che Plotnikow (3) riuscisse a distinguere le velocità indipendenti dei due processi che si sovrappongono.

Ciò che ora noi troviamo sarebbe la prima conferma sperimentale delle previsioni di Trautz, ottenuta in un processo puramente fotochimico.

(1) Zeitschrift für Wissenschaftliche Photographie und Photochemie (1906), IV, 351; (1908), VI, 168 e 331.

(2) Wied. Annalen (1894), *52*, 132. Vedi anche Warburg, Verh. der Deutschen Physikal. Gesellschaft (1907), 753; (1909), 654.

(3) Zeitschrift für Physikal. Chemie *64*, 215.

Su questo punto sorge una quantità di interessanti questioni riguardanti i coefficienti di temperatura di reazioni fotochimiche con luci monocromatiche; e noi ci proponiamo di esaminare da questo lato parecchie delle fotoreazioni già note, oltre ai casi di fototropia che si dimostreranno più adatti per questo genere di esperienze.

Chimica-fisica. — *Sull'entropia nei corpi solidi, e sue relazioni con altre grandezze fisiche.* Nota del prof. Stefano Pagliani, presentata dal Corrispondente L. Balbiano.

In un recente studio sulla entropia dei corpi condensati (corpi solidi e liquidi) e sulle sue variazioni nei cambiamenti di stato di aggregazione, sono giunto ad alcuni risultati, relativi ai corpi solidi, che conducono a qualche nuova relazione fra la termodinamica classica e la moderna teoria cinetica dei calori specifici, nonchè a nuove espressioni per calcolare il numero di oscillazioni nel moto vibratorio molecolare dei solidi.

Ho calcolato i valori dell'entropia assoluta alla temperatura di fusione dei corpi solidi, semplici e composti, per i quali ho potuto trovare i dati sperimentali sui calori specifici occorrenti. Il calcolo è stato fatto mediante l'espressione

$$S = \int_0^T \frac{c_p}{T}\, dT$$

data da M. Planck [1] e fondata sul teorema di Nernst, enunciato nella forma che l'entropia di un corpo condensato, chimicamente omogeneo (solido o liquido), tende al valore zero alla temperatura dello zero assoluto.

I valori di S, ottenuti per 26 corpi semplici alla temperatura di fusione, sono indicati nella quarta colonna (S_1) della seguente tabella, mentre nella seconda (m) sono scritti i coefficienti atomici, e nella terza (T_1) le temperature assolute di fusione. In detta tabella gli elementi sono ordinati in gruppi secondo la classificazione di Mendelejeff, colle modificazioni del Branner, e nell'ordine crescente dei coefficienti atomici.

Una relazione generale, che emerge subito dai valori della entropia alla temperatura di fusione, si è che essi, per i diversi elementi, tendono a diminuire col crescere dei coefficienti atomici. La detta relazione si verifica esattamente per i termini dei singoli gruppi del sistema di Mendelejeff, quando si classificano separatamente i metalli dai metalloidi.

Non si ottiene però un prodotto costante moltiplicando i valori dell'entropia per i corrispondenti coefficienti atomici, nemmeno nei singoli gruppi.

[1] *Ueber neuere thermodynamischen Theorien,* Deutsch. Chem. Ges., Berlin 1911.

	m	T_1	S_1	d	n	$\frac{S_1}{n}$	S_0
Li . . .	6.94	453	1.324	0.576*	3.52	0.38	0.869
Na . . .	23.0	371	0.494	0.953*	1.38	0.36	0.399
K . . .	39.1	335	0.290	0.852*	0.82	0.35	0.251
Zn . . .	65.37	688	0.240	6.896	1.53	0.16	0.144
Cd . . .	112.4	594	0.122	8.366*	0.97	0.13	0.077
Hg . . .	200.6	234	0.067	14.193*	0.45	0.15	—
Al . . .	27.1	898	0.507	2.442	2.58	0.19	0.226
Tl . . .	204	563	0.105	11.540	0.64	0.16	0.074
Sn . . .	119	506	0.097	7.184*	0.81	0.12	0.062
Pb . . .	207.1	598	0.094	11.005*	0.60	0.16	0.069
Ph . . .	31.04	317	0.302	1.814*	1.25	0.24	0.267
Sb . . .	120.2	905	0.121	6.490	1.21	0.10	0.036
Bi . . .	208	540	0.058	9.673*	0.58	0.10	0.036
S	32.07	388	0.291	2.046	1.39	0.21	0.228
Cr . . .	52.0	1788	0.389	6.500	2.93	0.13	0.096
Cl . . .	35.46	169.5	0.167	—	—	—	—
Br . . .	79.92	266	0.115	—	—	—	—
I	126.96	386	0.118	4.549	0.57	0.21	0.109
Fe . . .	55.84	1803	0.397	7.373	2.59	0.15	0.124
Ni . . .	58.68	1724	0.375	8.240	2.82	0.13	0.096
Co . . .	58.97	1763	0.382	8.000	2.81	0.13	0.100
Cu . . .	63.57	1358	0.290	8.380	2.35	0.12	0.117
Pd . . .	106.7	1773	0.215	10.877	1.90	0.11	0.078
Ag . . .	107.88	1235	0.191	10.000	1.50	0.13	0.093
Pt . . .	195.2	2052	0.125	20.274	1.52	0.08	0.044
Au . . .	197.2	1335	0.087	18.452	1.18	0.07	0.035

Quindi non è esatto quanto afferma il Tammann ([1]), cioè che l'entropia per atomo-grammo nei metalli prima della fusione sia indipendente dal metallo. Questa conseguenza mi sembra trovi spiegazione nelle seguenti considerazioni:

Le moderne dottrine atomistiche hanno condotto, per diverse vie, alla determinazione del numero di particelle, di molecole, che possono essere monoatomiche o poliatomiche, contenute nella molecola-grammo di un corpo: il numero di Avogadro. D'altra parte, secondo Richarz, A. Magnus e F. Lindemann ([2]), i metalli allo stato solido sarebbero monoatomici. Ora, il numero di tali atomi, esistente nell'unità di massa di un elemento, varia in ragione inversa del coefficiente atomico. Si comprende quindi la diminuzione nel valore della entropia dell'unità di massa nello stesso stato fisico dei diversi corpi semplici, al crescere dei loro coefficienti atomici. Inoltre, secondo

([1]) Zeitschr. f. phys. Chem. *85* (1913).
([2]) Zeitschr. f. Elektrochemie, *16* (1910).

la teoria elettronica, nei corpi solidi gli atomi, benchè occupino delle posizioni presso a poco invariabili, gli uni rispetto agli altri, tuttavia sono dotati della possibilità di vibrare o di orientarsi attorno alle loro posizioni di equilibrio, e della proprietà di emettere dei corpuscoli, elettroni, che circolano negli interstizii esistenti fra atomi neutri e joni positivi. Ora la massa a natura chimica di questi atomi e joni è diversa per i diversi corpi; le forze, che si esercitano fra gli elettroni e gli atomi, variano da un corpo all'altro, ed infine l'energia cinetica media di ciascun corpuscolo varia con la temperatura. Di qui si deduce non potersi presumere che l'entropia della massa, rappresentata dalla molecola-grammo, sia eguale per tutti i corpi semplici, neppure ad una stessa temperatura. Ciò noi possiamo vedere dai numeri della ottava colonna (S_0) della tabella, in cui sono dati i valori dell'entropia alla temperatura di 273°. Inoltre noi vediamo che l'andamento dei valori della entropia S_0, al variare dei coefficienti atomici, risulta meno regolare, ed anzi meno evidente, per la temperatura di 273° che non per quella di fusione. E ciò perchè una stessa temperatura esterna non corrisponde ad uguali condizioni cinetiche interne per i diversi corpi. Invece la temperatura di fusione vi corrisponderebbe per tutti i corpi solidi; sarebbe, secondo Lindemann [1], caratterizzata per tutti dalla condizione che a quella temperatura le ampiezze delle oscillazioni degli atomi intorno alla loro posizione di equilibrio diventano dello stesso ordine di grandezza della distanza media fra gli atomi. Possiamo quindi concludere che in generale, ma specialmente nei metalli, costituenti uno stesso gruppo del sistema periodico o gruppi affini, i valori dell'entropia alla temperatura di fusione diminuiscono col crescere dei coefficienti atomici, cioè col diminuire del numero degli atomi nell'unità di massa.

Possiamo arrivare ad un'espressione comprensiva delle relazioni fra l'entropia ed il coefficiente atomico, la distanza interatomica e le caratteristiche del moto vibratorio degli atomi, se mettiamo i risultati precedenti in rapporto con le deduzioni della teoria di Planck e di Einstein sulla energia di rotazione intramolecolare e di oscillazione dell'atomo. Il Lindemann, partendo dal sopraenunciato concetto della condizione caratteristica della temperatura di fusione, arrivò alla seguente espressione della frequenza del moto vibratorio atomico:

$$\nu = k \sqrt{\frac{T}{m V^{2/3}}},$$

in cui K è un coefficiente determinato empiricamente, T la temperatura assoluta di fusione, m la massa atomica e V il volume atomico. Il detto radicale, indicando con d la densità, si può anche porre sotto la forma

$$\frac{T^{1/2} d^{1/3}}{m^{5/6}}.$$

[1] Berl. Ber. *12*, (1910); *13*, *22*, (1911). Phys. Zeitschr. *11*, (1910); *12*, (1911).

Di qui si vede che i valori della frequenza per i diversi corpi devono anche diminuire col crescere dei coefficienti atomici: ciò che emerge del resto anche dalla definizione della frequenza.

Se si calcolano i valori n del detto termine per i diversi corpi, di cui ho dato sopra i valori dell'entropia, si trova, come si vede dai numeri della sesta colonna della tabella precedente, che essi vanno pure diminuendo secondo l'ordine dei coefficienti atomici crescenti.

Nella quinta colonna (d) sono indicati i pesi specifici, alcuni calcolati mediante i coefficienti di dilatazione noti, per la temperatura di fusione; altri, i segnati con asterisco, sono quelli determinati direttamente a detta temperatura, e tolti dalle tabelle di Landolt e Boernstein, tranne quelli del Li, Na, K, che sono dovuti a Bernini e Cantoni [1].

Nella settima colonna $\left(\frac{S_1}{n}\right)$ sono scritti i rapporti fra i valori di S_1 ed i corrispondenti di n. Essi dimostrano che quel rapporto si può considerare come sufficientemente costante per i corpi costituenti uno stesso gruppo, ed anche gruppi affini, dovendosi fare la solita distinzione fra metalli e metalloidi.

Sotto questo punto di vista i metalli si possono distinguere in tre categorie:

I) categoria costituita dal gruppo dei metalli alcalini, per i quali risulta il valore medio $\frac{S_1}{n} = 0{,}36$;

II) id. costituita dal 2°, 3°, 4°, 6° e 1ª serie dell'8° gruppo del sistema periodico: medio $\frac{S_1}{n} = 0{,}146$;

III) id. costituita dal 5°, e 2ª serie dell' 8° gruppo: medio $\frac{S_1}{n} = 0{,}10$.

I metalloidi formano una categoria a parte: medio $\frac{S_1}{n} = 0{,}22$.

Possiamo quindi conchiudere, da questi risultati e dalla formola di Lindemann, che l'entropia dei corpi solidi semplici alla temperatura di fusione è proporzionale alla frequenza del moto vibratorio atomico. Anche Grüneisen [2] ha dimostrato che l'entropia è una funzione del rapporto fra frequenza e temperatura, $\frac{\nu}{T}$ conseguenza che venne precisata da S. Ratnowsky [3].

Così noi potremo calcolare la frequenza dell'atomo nei diversi corpi moltiplicando l'entropia per un fattore di proporzionalità, che si ottiene di-

(1) Nuovo Cimento VI, *8*, (1914).
(2) Ann. d. Phys., *39*, (1912).
(3) Ber. Deuts. Phys. Gesells. 1914.

videndo il cofficiente della formola di Lindemann per il corrispondente valore medio di $\frac{S_1}{n}$. A quel coefficiente furono invero dati diversi valori; ho assunto il valore $2{,}12 \times 10^{12}$, che è il più generalmente adottato. In tal modo risultano quattro fattori di proporzionalità, corrispondenti alle quattro categorie, in cui abbiamo diviso i corpi semplici studiati: per la I 6,0; per la II 14,5; per la III 21,2; per la IV 9,6.

Nella tabella seguente si paragonano fra loro i diversi valori di $\nu \times 10^{-12}$, per uno stesso corpo, ottenuti con metodi diversi. Nella seconda colonna (E. 1.) sono indicati i valori calcolati da A. Einstein [1] dalla sua prima espressione del calore atomico a volume costante, dedotta applicando agli atomi vibranti di un corpo solido l'ipotesi di Planck sugli oscillatori, considerandoli come oscillatori lineari.

	E		M. L.	N	L	B	G	medio	P
	1	2							
Li . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	7.8
Na . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	2.9
K. . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	1.7
Zn . . .	—	—	3.7	3.6	3.1	—	—	3.5	3.5
Cd . . .	—	—	2.7	—	2.1	—	—	2.4	1.8
Hg . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	1.0
Al . . .	6.8	6.7	6.8	6.0	5.6	—	7.7	6.6	7.3
Tl . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	1.5
Sn . . .	—	2.7	—	—	1.8	—	—	2.2	1.4
Pb . . .	—	—	1.2	1.4	1.4	1.7	2.2	1.6	1.4
Sb . . .	—	—	3.1	—	2.3	—	—	2.7	2.6
Bi . . .	1.2	1.8	piccolo	piccolo	1.2	1.5		1.4	1.2
Cr . . .	—	—	7.2	7.2	5.9	—	—	6.8	5.6
Fe . . .	—	—	—	—	—	—	8.5	—	5.8
Ni . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	5.4
Co . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	5.6
Cu . . .	6.6	5.7	5.3	4.9	4.7	4.4	6.7	5.5	6.1
Pd . . .	—	—	—	—	—	—	5.8	—	4.6
Ag . . .	3.3	4.1	3.3	3.3	3.2	3.4	4.3	3.7	4.0
Pt . . .	—	—	3.1	3.1	3.1	3.1	4.8	3.4	2.7
Au . . .	—	—	—	—	—	4.6	3.7	—	1.8
Ph . .	—	—	—	—	—	—	—	—	2.9
S. . . .	—	—	—	5.5	3.0	—	—	—	2.8
I. . . .	—	—	—	1.5	1.4	—	—	1.4	1.1

Nella terza colonna (E. 2.) sono scritti i valori calcolati pure da Einstein, mediante un'espressione di ν, fondata sulla ipotesi che le forze elastiche, che mantengono gli atomi nella loro posizione di equilibrio, siano

[1] Ann. d. Physik. [4] *22* (1907); *35* (1911). Ved. pure *Rapports et discussions sur la théorie du rayonnement et les « quanta »*, Bruxelles, 1911.

quelle stesse che si oppongono ad una diminuzione di volume del solido compresso, e che siano dovute alle azioni mutue di atomi vicini disposti in una rete cubica (1).

Nella quarta colonna (M. 4.) i valori calcolati da Magnus e Lindemann (2) mediante una loro espressione del calore atomico a pressione costante, che non è altro che un'estensione di quella di Einstein, coll'aggiunta di un termine, proporzionale a $T^{3/2}$, determinato empiricamente.

Nella quinta colonna (N.) i valori calcolati da Nernst (3) colla formola trovata empiricamente da Nernst e Lindemann (4) per il calore atomico a volume costante, la quale completa quella di Einstein, inquantochè è fondata sull'ipotesi che un solido si comporti come un miscuglio di oscillatori, di cui una metà possiede una frequenza ν, e l'altra metà la frequenza $\frac{\nu}{2}$.

Nella sesta colonna (L.) i valori calcolati con la formola originale di Lindemann (5), e col coefficiente $2,06 \times 10^{12}$.

Nella settima colonna (B.) i valori calcolati da Bernouilli (6) mediante la sua espressione del coefficiente di temperatura dello effetto Volta nei metalli in funzione della frequenza ν.

Nella ottava colonna (G.) i valori calcolati da Grüneisen (7), mediante una sua espressione della frequenza, dedotta dal rapporto-limite fra il calore atomico ed il coefficiente di dilatazione. Questi valori sono tutti sensibilmente più alti degli altri per uno stesso corpo, ciò dipendendo dalla grandezza dei fattori numerici introdotti e dalle ipotesi, più o meno conformi alla realtà, fatte sulla costanza di certi coefficienti.

Nella nona colonna (medii) i valori medii calcolati mediante i precedenti; e nell'ultima colonna i valori da me calcolati dall'espressione $\nu \times 10^{-12} = \alpha S_1$, coi valori di α, corrispondenti alle diverse categorie dei corpi semplici, sopraindicati.

Come si vede dalle due ultime colonne, i valori da me calcolati della frequenza mediante l'entropia alla temperatura di fusione, presentano una soddisfacente concordanza coi valori medii, se si considerano le differenze, talora molto grandi, che si riscontrano fra valori singoli per uno stesso corpo.

Due divergenze soltanto sono notevoli: l'una per platino e oro, e l'altra per lo zolfo. Quanto alla differenza fra i valori di Bernouilli e di Grüneisen

(1) Ann. d. Physik. *34* (1911).
(2) Zeitschr. f Elektrochemie *16* (1910.
(3) Ivi, *17* (1911); Ann. d. Physik. *36* (1911).
(4) Sitzungsber. preuss. Akad. d. Wiss. (1911), pag. 494.
(5) Phys. Zeitschr. *11* (1910).
(6) Zeitschr. f. Elektrochemie *17* (1911).
(7) loc. cit.

per Pt e Au ed il mio, faccio notare, che mentre per tutti i gruppi di metalli i valori di ν dei diversi autori confermano quanto ho detto sopra (cioè che le frequenze vanno diminuendo col crescere dei coefficienti atomici), discordano soltanto da tale regola i valori di Bernouilli e di Grüneisen per Pt e Au. Sembra, poi, che dall'espressione di Bernouilli si possa giungere a risultati molto differenti, poichè il valore di ν, da lui dato per l'argento, è il medio dei tre, 4,2-4,3-1,8, di cui il terzo, molto discordante dai due primi. Inoltre, come già si osservò sopra, l'espressione di Grüneisen da valori piuttosto alti. Non è però da escludersi che anche i miei valori per Pt, e Au, siano piuttosto bassi, in causa dei limiti alquanto estesi della estrapolazione, che dovetti fare per dedurre i calori specifici alle temperature più alte.

Quanto alla differenza notevole, per lo zolfo, fra i valori di Lindemann e mio e quello di Nernst, osservo che per conciliare le divergenze, che si osservano fra i risultati sperimentali e quelli della teoria cinetica dei calori specifici, lo zolfo rombico e la grafite si devono considerare come poliatomici, e nelle formole di Einstein e di Nernst e Lindemann si devono introdurre, invece di una sola, due frequenze. Anche per il valore dell'entropia si potrebbe far rientrare lo zolfo nell'ordine degli altri elementi, supponendo che ad esso spetti un coefficiente atomico doppio, cioè 64.14. Se noi dividiamo per metà il valore di Nernst, otteniamo $\nu = 2,75 \times 10^{12}$, valore molto prossimo ai nostri. Questi riceverebbero poi ancora conferma da quelli ottenuti da Lindemann [1] mediante un'espressione fondata su considerazioni dello stesso ordine di quelle, che lo condussero alla formola più volte accennate, ma in cui è introdotta l'espressione della distanza fra le superficie di due atomi vicini in funzione della costante dielettrica. Da due valori di questa dedusse i due valori $1,55 \times 10^{+12}$ e $3,40 \times 10^{12}$, medio $2,27 . 10^{12}$, valori che si avvicinano ai nostri.

Chimica generale. — *Influenza esercitata dai sali neutri sull'equilibrio chimico*. Nota di G. Poma e di G. Albonico, presentata dal Socio G. Ciamician.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

[1] loc. cit.

Chimica fisica. — *Conduttività di miscele di sali solidi* (¹).
Nota di C. Sandonnini, presentata dal Socio G. Ciamician.

C. Fritsch (²) osservò come la conduttività di sali solidi venga enormemente aumentata per aggiunta di piccole quantità di altri sali; in seguito, Le Blanc (³) fece notare come tali risultati non siano da ritenersi decisivi specialmente in causa del dispositivo e dell'igroscopicità dei sali usati, e dimostrò che tracce di umidità possono fare aumentare enormemente la conduttività dei sali solidi.

Le conduttività di sistemi binarî completi di sali allo stato solido venne poi recentemente studiata da Benrath e Wainoff (⁴) e dal Tubandt (⁵). Benrath nelle sue esperienze trovò che, per coppie di sali che dànno tra loro soluzioni solide, si hanno curve di conduttività che presentano un massimo, e generalizzando credette di potere concludere che per le miscele di sali si abbia il fenomeno opposto a quello che si ha per le leghe metaliche formate da soluzioni solide, deducendone così un nuovo carattere di differenziamento tra i conduttori di prima e di seconda specie. Risulta inoltre dalle stesse esperienze che, quando due sali non dànno tra loro nè soluzione nè composti, le conduttività delle loro miscele solide si lasciano all'incirca calcolare additivamente, ma che tuttavia al punto eutettico (p. es., sistema K Cl — Ag Cl) si nota una netta variazione nei valori di conduttività. Inoltre, secondo l'autore, anche nel caso di miscibilità parziale allo stato solido (sistema $KCl - K_2CrO_4$) la curva delle conduttività deve ancora passare per un punto di massimo, anzichè essere calcolabile dai valori ottenuti per le miscele corrispondenti ai limiti di solubilità allo stato solido, per l'intervallo corrispondente alla lacuna di miscibilità.

Considerando queste conclusioni, appare strano dato che non intervengano altri fenomeni, che per miscele solide di sali miscibili in ogni rapporto e aventi uno ione in comune, si abbia il fenomeno precisamente contrario a quanto avviene allo stato fuso, e cioè che i valori delle conduttività, anzichè essere, come sempre nei casi studiati allo stato fuso, inferiori più o meno a quelli calcolati colla regola dei miscugli, siano superiori e tanto da passare per un massimo.

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Padova diretto dal prof. G. Bruni.

(²) Wied. Ann. *60* [5], 30 (1897).

(³) Zeit. f. Elektroch. *18*, 549, (1912).

(⁴) Zeit. f. phys. Chem. *64*, 695, (1908); *77*, 260, (1911).

(⁵) Zeit. f phys Chem. *87*, 513, 543, (1914).

Già Tubandt (loc. cit.) fece notare come, prima di potere generalizzare tale conclusione studiare si debbano, molti altri casi oltre a quelli già studiati. In una Nota precedente [1] ho dato i valori di conduttività, allo stato fuso, di tre sistemi, $PbCl_2 - PbBr_2$; $AgCl - AgBr$; $AgCl - TlCl$; scopo di questa è di esporre i valori di conduttività allo stato solido degli stessi sistemi, che si adattano abbastanza bene per le loro costituzione e perchè i componenti puri hanno, anche a temperature relativamente basse, apprezzabili valori di conduttività.

Mentrechè per la determinazione delle conduttività allo stato fuso trovai molto conveniente il dispositivo usato da Arndt [2], per le conduttività allo stato solido lo trovai molto meno adatto, a causa della difficoltà di un esatto riempimento della cella dopo la solidificazione, e preferii usare un metodo ana logo a quello già impiegato dal Benrath e da Le Blanc. La miscela, preventivamente fusa, veniva aspirata in un tubo di vetro di diametro noto ed il più che possibile riscaldato; ed entro a questo veviva fatta solidificare, come si usa fare per la preparazione di campioni di leghe che non si prestano ad essere trafilate.

I cilindretti venivano ridotti a basi parallele e di lunghezza varia secondochè il materiale era più o meno buon conduttore. Alle basi di questi veniva fatta aderire, mediante compressione, una sottile foglia di argento o di platino per assicurare un buon contatto tra le basi stesse e gli elettrodi.

Questi erano costituiti di lamina d'argento, e venivano tenuti a contatto col cilindretto mediante una pinza di Hoffmann opportunamente isolata con mica e dischi di amianto.

Il riscaldamento si faceva come al solito con un forno elettrico a resistenza: la misura delle temperature si compieva con un termoelemento Pt — PtRh, la cui saldatura era posta senza rivestimento nell'immediata vicinanza dei cilindretti di sali. Siccome tutti i sali usati hanno un fortissimo coefficente di temperatura, si prese ogni cura per essere certi di una buona costanza per un tempo di 20 minuti almeno.

In tutte queste esperienze i sali venivano fusi e riscaldati in atmosfera di azoto.

Dati le temperature di esperienza, la non igroscopicità dei sali usati, ed il modo di preparazione dei campioncini, sono da escludere i dannosi effetti di tracce di umidità.

Ricordo che dai diagrammi di solidificazione dei tre sistemi esperimentati, per il sistema cloruro-blomuro di piombo risulta formazione di cristalli misti del primo tipo; per il sistema cloruro-bromuro d'argento, cristalli misti del secondo tipo; e per il sistema cloruro talloso-cloruro d'argento, la formazione di un composto decomponibile alla fusione della composizione $2\,TlCl.\,AgCl$.

[1] Questi Rendiconti, *23*, 1° sem.
[2] Zeit. f. Elektroch. *12*, 336, (1906).

Cloruro e bromuro di piombo. — I valori di conduttività del cloruro di piombo puro sono in sufficiente buon accordo con quelli dati da Graetz (¹); invece non mi consta che siano già state fatte misure di conduttività del bromuro di piombo nell' intervallo di temperatura, in cui ho eseguito le mie esperienze. Vennero costruite isoterme di conduttività a 200°, 250°, 300°.

Nella tabella I^a sono raccolti i valori relativi a varie miscele di questi due sali.

TABELLA 1^a.

(*Conduttività specifiche*).

Molecole °/₀ $PbBr_2$	$t = 200°$	$t = 250°$	$t = 300°$
0.0	0.000050	0.000140	0.00060
15.0	0.000034	0.000090	0.00040
30.0	0.000022	0.000075	0.00025
40.0	0.000016	0.000054	0.00023
50.0	0.000012	0.000040	0.00021
60.0	0.000017	0.000067	0.00024
70.0	0.000038	0.000102	0.00034
85.0	0.000046	0.000223	0.00058
100.0	0.000081	0.000274	0.00086

Tutte le isoterme mostrano un minimo, corrispondente approssimativamente alla miscela equimolecolare (vedi avanti, fig. 1).

Cloruro e bromuro d'argento. — Le conduttività dei componenti puri sono in accordo con quelle date da Benrath e Tubandt (ll. cc.).

Vennero eseguite misure di parecchie miscele a 200°, 250°, 300°, 350°, 400°. I valori delle conduttività delle miscele comprese tra 0 e 70 mol. °/₀ AgBr sono inferiori a quelli calcolati con la regola dei miscugli; per le altre miscele si hanno valori leggermente superiori, cosicchè specialmente per le isoterme alle temperature più basse si nota un brusco salto nei valori di conduttività alla miscela di 30 mol °/₀ AgCl, in corrispondenza cioè del minimo nelle temperature di cristallizzazione. (vedi avanti, fig. 2).

(¹) Graetz, Wiedemm. Ann. *40,* 18, (1890).

TABELLA 2ª.

(*Conduttività specifiche*).

Molecole % Ag Br	$t = 200°$	$t = 250°$	$t = 300°$	$t = 350°$	$t = 400°$
0.0	0.00005	0.00020	0.00109	0.00520	0.0240
10.0	0.00008	0.00035	0.00168	0.00549	0.0318
30.0	0.00013	0.00066	0.00350	0.0168	0.0570
40.0	0.00016	0.00092	0.00552	0.0220	0.0753
50.0	0.00020	0.00126	0.00701	0.0320	0.120
60.0	0.00023	0.00156	0.00817	0.0370	0.140
70.0	0.00032	0.00210	0.0108	0.0425	0.164
80.0	0.00038	0.00231	0.0119	0.0520	0.235
90.0	0.00042	0.00240	0.0129	0.0585	0.272
100.0	0.00046	0.00260	0.0140	0.0642	0.304

Cloruro d'argento e cloruro talloso. — Venne misurata la conduttività delle miscele dei due sali solamente a 200°, non essendo possibile di far misure a temperature più alte perchè la miscela eutettica a 40 mol. % di Tl Cl fonde a 210°, nè a temperature più basse perchè i valori delle conduttività sono troppo piccoli per ottenere, col metodo usato, risultati attendibili.

Il riscaldamento dei cilindretti venne fatto molto lentamente, e non venne mai oltrepassata la temperatura di 200°, dimodochè dopo l'esperienza non si osservò mai alcun principio di fusione nei cilindretti stessi.

L'isoterma di conduttività passa per un massimo corrispondente alla concentrazione della miscela eutettica (vedi avanti fig. 3).

TABELLA 3ª.

(*Conduttività specifiche*).

Molecole % Tl Cl ⟶	0.0	15.0	30.0	40.0	50.0	60.0	70.0	80.0	100.0
$\varkappa$ $t = 200°$ ⟶	0.000050	0.000065	0.000086	0.000104	0.000092	0.000075	0.000065	0.000032	0.000013

Riesce ora interessante confrontare i risultati ottenuti allo stato solido con quelli ottenuti allo stato fuso: per i valori numerici rispetto a questi ultimi rimando alla prima Nota apparsa in questi Atti. Per rendere più comprensivo questo confronto, nelle fig. 1ª, 2ª, 3ª sono riportati i risultati ottenuti tanto da misure di conduttività allo stato fuso (curve in alto) dall'analisi termica (curve intermedie), quanto da misure di conduttività allo stato solido (in basso).

Consideriamo dapprima il sistema cloruro blomuro di piombo (fig. 1). I punti di solidificazione delle miscele sono intermedî a quelli dei componenti, e l'intervallo di solidificazione ristrettissimo [1], cosicchè si può ritenere che le masse solidificate siano perfettamente omogenee.

La curva di conduttività allo stato solido, riportata nella fig. 1ª, è quella ottenuta alla temperatura di 250°, distante cioè ancora 76° dal minimo punto di fusione del sistema ($PbBr_2$ puro). Da questa curva risulta chiaramente come tutti i valori di conduttività trovati siano inferiori a quelli calcolabili colla regola dei miscugli, tanto che la curva stessa passa per un minimo che giace all'incirca alla miscela equimolecolare. Questo ci dice che, in tale caso allo stato solido si ripetono quei fenomeni già osservati allo stato fuso; le isoterme a 200° e 300° hanno lo stesso andamento, e si può quindi concludere che per soluzioni solide di questo tipo si ha lo stesso andamento che si ha in generale per le soluzioni liquide: che cioè i valori di conduttività sono inferiori a quelli calcolabili additivamente dai componenti, contrariamente a quanto il Benrath aveva creduto di potere concludere.

Nella fig. 3 son riportati i valori riguardanti il sistema cloruro-bromuro d'argento [2]. L'isoterma allo stato solido è quella ottenuta a 250°. Come ho fatto già notare, in corrispondenza del minimo di cristallizzazione si ha una brusca variazione di direzione, che risulta sempre meno spiccata per le isoterme a temperatura più alta. Tale brusca variazione di proprietà in una serie continua di soluzioni solide non è facilmente spiegabile.

Si potrebbe pensare ad una piccola lacuna di miscibilità allo stato solido (tipo V° limite), o ad uno smistamento delle soluzioni solide a temperatura relativamente alta, per cui le soluzioni solide ricche in bromuro d'argento andrebbero rapidamente riducendosi ad un miscuglio meccanico, mentre quelle comprese tra il 30 % e il cloruro d'argento puro rimarrebbero inalterate. Secondo questa ultima supposizione, alle temperature alle quali vennero misurate le conduttività, le miscele più ricche del 70 % di $AgBr$ sarebbero costituite da un miscuglio meccanico, e quindi le loro conduttività dovrebbero essere all'incirca calcolabili colla regola dei miscugli; al contrario, le miscele più ricche in cloruro d'argento rimarebbero ancora formate da soluzioni solide, e quindi per esse si dovrebbero mantenere le regolarità trovate per gli altri casi, e cioè la loro conduttività dovrebbe risultare inferiore alla calcolata. Curve di raffreddamento, eseguite per chiarire questo punto, condussero a stabilire che, all'infuori di un intervallo assai ristretto non si ha nessun altro fenomeno attribuibile o a formazione di lacuna di miscibilità allo stato solido o a smistamento di soluzioni solide. Così pure all'esame micrografico le masse risultarono perfettamente omogenee, cosichè la brusca va-

[1] Monkemeyer, N. Jahrb. f. Min. G. u. P., *30*, Bb. 1. (1906).

[2] Monkemeyer, loc. citato.

Fig. 1.

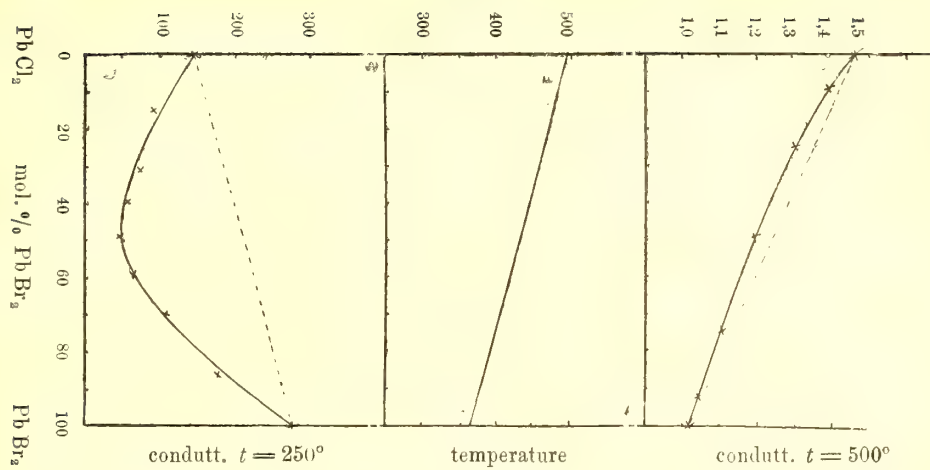



Fig. 2.

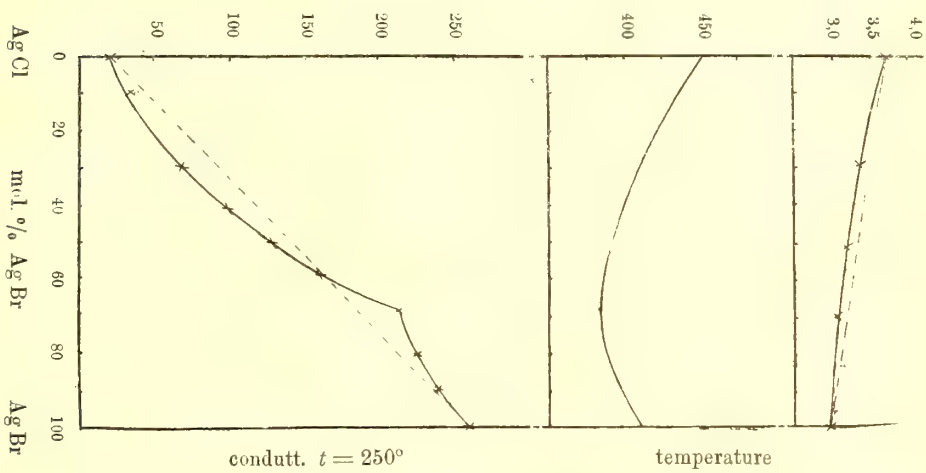
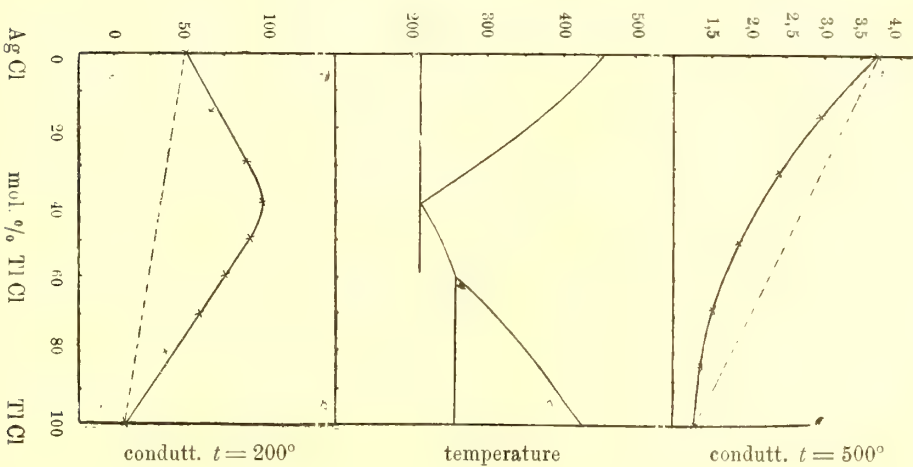



Fig. 3.

riazione di direzione osservata pare attribuibile a variazioni di attrito interno in vicinanza del minimo: variazioni che in questi casi debbono avere un effetto preponderante, come vedremo subito dopo.

Consideriamo ora il sistema cloruro d'argento-cloruro di tallio. Dall'analisi termica risulta un composto decomponibile alla fusione della formula 2 Tl Cl. Ag Cl [1]; la miscela eutettica giace a 210°, e quindi dista dalle singole temperature di fusione dei componenti puri rispettivamente 240° e 220° gradi circa.

La temperatura più alta sperimentabile per questo sistema allo stato solido con sicurezza è quindi 200°.

A questa temperatura le conduttività dei due sali, e specialmente quella del cloruro talloso, è molto piccola, dimodochè non si possono avere valori esattissimi; in ogni modo, è certo, da una numerosa serie di esperienze, che l'andamento delle conduttività delle miscele allo stato solido è quello dato dalla relativa curva a fig. 2.

Come si vede chiaramente, i valori ottenuti sono tutti superiori a quelli calcolati dalla regola dei miscugli, tantochè la curva passa per un massimo che coincide praticamente colla concentrazione eutettica.

Trascuriamo per ora il fatto che nelle masse solidificate si formi un composto; ad ogni modo, in seno alla massa stessa i componenti si trovano uno accanto all'altro in miscuglio meccanico. In questo caso, evidentemente, non si può ricorrere ad una analogia colle miscele di soluzioni acquose o colle stesse miscele di sali fusi; e realmente le conduttività, se nessun altro fenomeno intervenisse, dovrebbero essere calcolabili almeno approssimativamente colla regola dei miscugli. Il fatto che si ha formazione di un composto nelle masse solidificate, dovrebbe in ogni caso produrre una diminuzione, nei valori trovati, rispetto ai calcolati, e mai un aumento. Fra tutte le cause che possono avere una forte influenza sulle conduttività, tali da produrre l'aumento osservato, resta quindi una possibile variazione di mobilità ioniche; e così si può pensare che alla miscela eutettica, come quella più vicina alla temperatura di fusione, l'attrito interno della miscela stessa raggiunga il suo valore più basso, e che quindi in dipendenza di questo gli ioni raggiungano la loro massima mobilità, dimodochè i valori di conduttività vengono per questa causa aumentati molto più che non vengano diminuiti per le altre cause alle quali venne antecedentemente accennato.

Dalle considerazioni esposte sui fatti osservati pare quindi potersi dedurre che, quando le miscele solidificate di sali sono costituite da soluzioni solide che si possano considerare perfettamente omogenee, e i loro punti di solidificazione, come nel caso delle miscele di cloruro e bromuro di piombo, sono

(1) Questi Rendic. *20,* 2° sem., 588 (1911)

intermedii a quelli dei componenti, si ripetono i fenomeni trovati in generale per le miscele di soluzioni o masse fuse di sali con ione in comune: le conduttività sono inferiori a quelle calcolate additivamente.

Quando invece le miscele sono costituite da miscugli meccanici dei componenti, non si può invocare un'analogia colle miscele di soluzioni o di sali fusi e con i fenomeni loro peculiari; e se nessun altro fenomeno intervenisse, le loro conduttività dovrebbero essere calcolabili additivamente. È ora da notarsi che, nelle curve costruite dal Benrath che presentano un massimo, praticamente questo coincide colle miscele che hanno il più basso punto di fusione del sistema (punti eutettici, minimi di cristallizzazione di soluzioni solide). Anche dalle mie esperienze nel sistema cloruro talloso cloruro d'argento risulta una curva a massimo che coincide colla concentrazione eutettica. In questo sistema è assolutamente da escludere la formazione di soluzioni solide; la presenza di un sale doppio nelle masse solide dovrebbe produrre una diminuzione e non un aumento nei valori di conduttività. La causa di questo aumento non può essere ricercata se non in una diminuzione di attrito interno. Queste sarà man mano tanto più piccolo, quanto più la miscela per una data isoterma, è vicina alla temperatura di fusione; e così pure per i sistemi costituiti da soluzioni solide con minimo, le variazioni di conduttività sembrano ancora doversi a variazioni di attrito interno, che avrà il suo più basso valore in corrispondenza del minimo stesso di temperatura di cristallizzazione.

Pare quindi che si possa concludere che le conduttività di miscele di sali solidi, oltre che dalla costituzione, dipendono in principal modo dall'attrito interno delle miscele stesse: il quale sarà tanto minore, quanto più la miscela è vicina alla temperatura di fusione.

Chimica-fisica. — *Analisi termica di miscele di idrati e alogenuri alcalini.* II: *Composti di sodio.* Nota di Giuseppe Scarpa, presentata dal Socio G. Ciamician.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Autossidazioni alla luce nella serie dei terpeni* [1]. Nota di E. Sernagiotto, presentata dal Socio G. Ciamician.

I risultati ottenuti da Ciamician e Silber nello studio dei fenomeni di autossidazione che molte sostanze presentano alla luce, mi invogliarono ad esaminare il comportamento di qualcuno dei composti appartenenti alla serie dei terpeni, sotto l'azione direttva della luce solare, in presenza di ossigeno.

Autossidazione del citronellale.

In 10 palloni, della capacità di 3 litri, pieni di ossigeno, vennero esposti alla luce in ciascuno gr. 5 di citronellale, purificato attraverso al suo derivato bisolfitico, con 100 cc. di acqua, dal giugno all'ottobre. Il citronellale scomparve quasi completamente ed il liquido assunse una colorazione giallognola.

All'apertura dei palloni si nota forte aspirazione; il liquido è fortemente acido (per neutralizzare il contenuto di uno di essi, occorrono 33 cc. di carbonato sodico normale). Tutto il prodotto dell'ossidazione venne distillato in corrente di vapore, fino a reazione debolmente acida del distillato, dividendolo così in due parti.

Parte volatile. Il distillato, che ha reazione acida ed odora di pulegone, viene neutralizzato con carbonato sodico; indi, nuovamente sottoposta a distillazione, per separare gli acidi dalle sostanze neutre.

Il residuo della distillazione, che contiene i sali sodici degli acidi volatili, concentrato a piccolo volume e precipitato frazionatamente con nitrato di argento, dà una serie di sali la cui composizione varia tra quelle dei sali argentici degli *acidi acetico* ed *eptilico.*

Le ultime frazioni contenevano molto formiato sodico, che fu distrutto facendolo bollire fino al cessare dell'annerimento.

Analisi:

Sostanza	4,438	mgr.	danno:	argento	2,001	mgr.
"	5,721	mgr.	"	"	2,714	mgr.
"	4,096	mgr.	"	"	2,169	mgr.
"	3,944	mgr.	"	"	2,368	mgr.
"	4,291	mgr.	"	"	2,783	mgr.

	Trovato					Calcolato per	
	I	II	III	IV	V	$C_7H_{13}O_2Ag$	$C_2H_3O_2Ag$.
Ag.	45,09	47,44	52,94	60,04	64,86	45,09	64,60

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale di Bologna.

La parte acquosa volatile, contenente le sostanze neutre, venne concentrata a piccolo volume per distillazioni successive; alle ultime operazioni si separò, nel liquido condensato, un olio giallognolo, più leggero dell'acqua, di odore fortemente aromatico (gr. 3) che distillò fra 190 e 220°, a pressione ordinaria. Trattato, in soluzione idroalcoolica, con un eccesso di cloridrato di semicarbazide ed acetato potassico, si combinò per la maggior parte in una massa cristallina, bianca, la quale, separata alla pompa e cristallizzata molte volte dall'alcool metilico, si scisse in due corpi, diversi fra loro per solubilità. Il composto predominante, che è il meno solubile, cristallizza in aghi, i quali fondono a 184-85° e corrispondono al semicarbazone del *mentone* (¹).

Analisi:

Sostanza 4,667 mgr.; CO_2 10,49 mgr.; H_2O 4,30;
" 5,964 mgr.; azoto, misurato a 9° e 765 mm. 0,975 cc.

	Trovato	Calcolato per $C_{11}H_{21}N_3O$
C	62,47	62,50
H	10,31	10,02
N	19,84	19,90

In quantità minore si ottiene un semicarbazone, notevolmente più solubile, il quale cristallizza dall'alcool metilico diluito in prismetti, fondenti a 206-07° e che è, per la sua composizione, corrispondente ad un chetone $C_{10}H_{18}O$, isomero quindi del mentone e del citronellale, ma non coincidente, a quanto mi consta, con alcuno dei chetoni di tale formola, conosciuti finora in questa serie.

Analisi:

Sostanza 4,725 mgr.; CO_2 10,85 mgr.; H_2O 4,34 mgr.;
" 3,522 mgr.; azoto, misurato a 10.° e 761 mm. 0,581 cc.

	Trovato	Calcolato per $C_{11}H_{21}N_3O$
C	62,62	62,50
H	10,28	10,02
N	19,95	19,90

Non tutto l'olio, messo a reagire colla semicarbazide, si combinò con questa; rimase inalterata una parte (gr. 0,5) che, ricuperata col vapor d'acqua, non si combinò affatto, rimettendola ancora collo stesso reattivo e lasciandovela per 8 giorni. Nella supposizione che si trattasse dell' *isopulegolo*, il quale può originarsi, per isomerizzazione, dal citronellale (²) l'olio fu, per essere meglio identificato, ossidato con acido cromico, in soluzione acetica (³).

(¹) Wallach. Berichte, *28* (1895), pag. 1963 e Beckmann, Ann. *229* (1896), pag. 366.
(²) Tiemann. Berichte, *29* (1896), pag. 913.
(³) loc. cit.

Il prodotto dell'ossidazione, distillato in corrente di vapore, è l' *isopulegone* e dà un semicarbazone il quale, purificato dall'alcool metilico diluito, fonde, come quello dell' isopulegone, a 173° [1].

Analisi:

Sostanza 4,799 mgr.; CO_2 11,14 mgr.; H_2O 4,08 mgr.;
" 2,920 mgr.; azoto, misurato a 9° e 766 mm. 0,482 cc.

	Trovato	Calcolato per $C_{11}H_{19}N_3O$
C	63,31	63,13
H	9,51	9,15
N	20,14	20,10

L'acqua, distillata con l'olio sopradescritto, dava fortemente la reazione di Lieben, dimostrando la presenza di una notevole quantità di *acetone*; questo fu poi identificato meglio, combinandolo con la *p*-bromofenilidrazina, con cui esso diede il caratteristico *p*-bromofenilidrazone, che si ebbe, dall'etere petrolico, in laminette gialle, lucenti, fondenti a 93-94° [2].

Analisi:

Sostanza 0,1344 gr.; azoto, misurato a 16° e 760 mm.; 14,44 cc.

	Trovato	Calcolato per $C_9H_{11}BrN_2$
N	12,47	12,34.

Parte non volatile. La parte non volatile, residuo della distillazione col vapor d'acqua, del prodotto totale dell'autossidazione, reagiva fortemente acida. Filtrata dalla piccola quantità di resina formatasi e scolorata con nero animale, diede, per evaporazione a bagno-maria, un olio denso, il quale si rapprese, lentamente, in piccola parte, in cristalli, che, separati alla pompa, dopo purificazione dall'acqua, fondevano a 84° ed avevano la composizione dell'*acido β-metiladipico.*

Analisi:

Sostanza 6,676 mgr.; CO_2 12,88 mgr. H_1O 4,52 mgr.

	Trovato	Calcolato per $C_7H_{12}O_4$
C	52,62	52,47
H	7,57	7,55.

La parte rimasta liquida venne ripresa con acqua, in cui non si scioglieva però completamente e la soluzione acida, filtrata dall'olio rimasto indisciolto, fu precipitata, frazionando, con nitrato di argento. Dalla frazione mediana, presumibilmente la più pura, venne messo in libertà, con idrogeno solforato, l'acido, il quale è un olio giallognolo non cristallizzabile, e che

[1] loc. cit., pag. 925.
[2] Neufeld, ann. 248, pag. 95.

dà un sale argentino bianco, poco solubile in acqua, stabile alla luce, corrispondente, per tali proprietà e per la composizione, a quello dell'*acido diossicitronellico* [1].

Analisi:

Sostanza 4,954 mgr.; CO_2 7,05 mgr.; H_2O 2,73 mgr.; Ag 1,725 mgr.

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{19}O_4Ag$.
C	38,81	38,59
H	6,16	6.15
Ag	34,82	34.69

I sali argentici, ottenuti dalle altre frazioni, hanno composizione analoga. L'olio non solubile in acqua bolle tra 122 e 158° alla pressione di 32 mm. e dà intensamente la reaziono di Lieben. Non fu, per la sua piccola quantità, studiato ulteriormente.

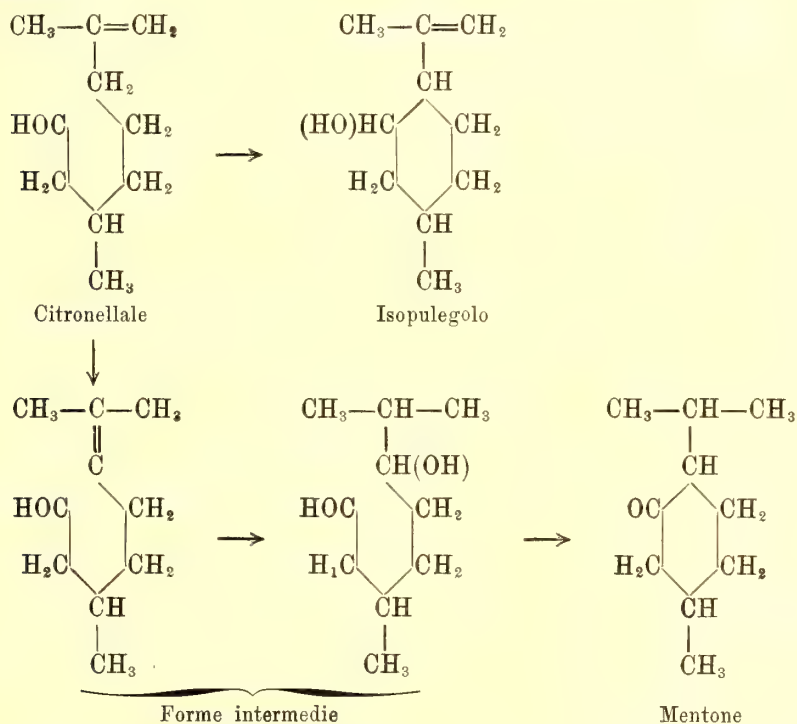
Il comportamento del citronellale nell'autossidazione alla luce è dunque piuttosto complesso. Da una parte si formano prodotti di isomerizzazione, che questa aldeide dà pure o per azione di alcuni acidi e dell'anidride acetica, come l'*isopulegolo* [2], o durante l'ossidazione con acido cromico, come il *mentone* [3].

$CH_3{-}C{=}CH_2$ | CH_2 | HOC, CH_2, H_2C, CH_2, CH | CH_3 → $CH_3{-}C{=}CH_2$ | CH | (HO)HC, CH_2, H_2C, CH_2, CH | CH_3

Citronellale — Isopulegolo

↓

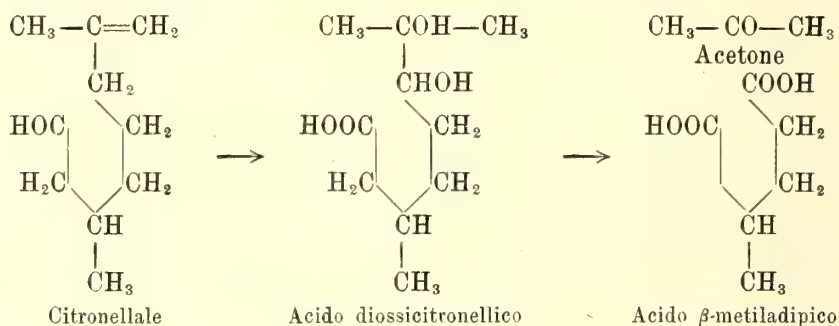
$CH_3{-}C{-}CH_2$ ‖ C | HOC, CH_2, H_2C, CH_2, CH | CH_3 → $CH_3{-}CH{-}CH_3$ | CH(OH) | HOC, CH_2, H_1C, CH_2, CH | CH_3 → $CH_3{-}CH{-}CH_3$ | CH | OC, CH_2, H_2C, CH_2, CH | CH_3

Forme intermedie — Mentone

[1] Semmler, Berichte, *26*, pag. 2257.

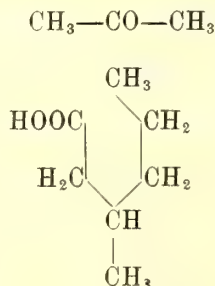
[2] Tiemann e Schmidt. Berichte, *29* (1896), pag. 913.

[3] Gli stessi; Barbier e Bouveault, Compt. Rend., *122*, pag. 737; Bouveault, Bl. III, *23* (1900), pag. 463.

Fra i prodotti di isomerizzazione è pure presente, in piccola quantità, un altro corpo di formula $C_{10}H_{18}O$, non identificato per alcuno di quelli conosciuti. D'altra parte si producono i veri derivati di ossidazione, come l'*acido diossicitronellico*, preparato per la prima volta da Semmler, dall'aldeide, per azione del permanganato diluito e freddo (1), l'*acetone* e l'*acido β-metiladipico*, che furono ottenuti dallo stesso autore per ossidazione dell'ossiacido, col miscuglio cromico in soluzione diluita (2).

```
CH3—C═CH2            CH3—COH—CH3            CH3—CO—CH3
    |                     |                    Acetone
   CH2                   CHOH                   COOH
HOC  \CH2           HOOC   \CH2           HOOC   \CH2
 |     |      —>      |      |      —>      |      |
H2C   CH2           H2C    CH2                    CH2
   \ /                 \ /                     \ /
   CH                  CH                      CH
    |                   |                       |
   CH3                 CH3                     CH3
Citronellale     Acido diossicitronellico   Acido β-metiladipico
```

Per idrolisi ed ossidazione meno spinta del citronellale si origina poi l'*acido eptilico*, che, indubbiamente, è un acido *β-metilesilico*.

```
CH3—CO—CH3

       CH3
HOOC     \CH2
  |        |
H2C       CH2
    \   /
     CH
      |
     CH3
```

e gli altri acidi inferiori, fino all'acido acetico ed al formico, analogamente a quanto osservarono Ciamician e Silber (3) nell'autossidazione dell'acido oleico.

In genere la resa con cui si ottengono alcuni dei corpi sudescritti è molto piccola e tale che, senza il prezioso aiuto della microanalisi del prof. Pregl e della sua tecnica di lavoro, sarebbe stato impossibile di seguire questa autossidazione, senza dover partire da ingenti quantità di materiale.

(1) Semmler. Berichte, *26*, pag. 2257.

(2) Idem.

(3) Accad. Lincei, vol. 23, 1° semestre (1904), pag. 118.

Mineralogia. — *Contributo alla mineralogia sarda: sopra alcuni interessanti cristalli d'argentite e di quarzo* (¹). Nota di E. Grill, presentata dal Corrispondente Federico Millosevich.

Argentite. — È noto che la regione del Sarrabus in Sardegna, giustamente celebre per la ricchezza e varietà dei suoi minerali, ha fornito, talvolta, dell'argentite in grandi ed ottimi cristalli.

Di alcuni di questi splendidi cristalli, G. D'Achiardi (²) ebbe già occasione di fare cenno nella relazione delle sue visite ai musei mineralogici di Cagliari e d'Iglesias. Ma nessuno, finora, fra i numerosi autori che ricordano l'argentite del Sarrabus, ne ha mai dato, per quanto mi consta, una descrizione cristallografica alquanto particolareggiata: credo perciò non affatto privo d'interesse, considerando anche la rarità con cui l'argentite si si trova ben cristallizzata, di fare conoscere una bellissima cristallizzazione di tale minerale, proveniente, secondo le notizie avute, molto probabilmente dalla *miniera Nicola Secci* (Burcei S. Vito, distretto d'Iglesias).

Detta cristallizzazione, per la grandezza e perfezione dei suoi cristalli, costituisce, senza dubbio, un esemplare poco comune. Basta dire che in tutta la ricca collezione Traverso del museo civico di Genova, che pure racchiude, come si sa, tante rare bellezze mineralogiche sarde, non mi fu dato di trovarne una eguale.

Il campione avuto in esame è formato da 24 magnifici cristalli, ben proporzionati, d'abito cubico, assai grandi, i quali riposano sopra una matrice di calcite e fluorite nella cui massa si osserva ancora dell'argentite in lamette.

Il maggiore dei 24 cristalli ha, parallelamente ad uno spigolo del cubo, una massima dimensione lineare di 17 mm. circa; gli altri sono tutti di mole non molto più piccola.

I cristalli sono impiantati sulla ganga per un asse di simmetria ternaria, e rivolgono quindi verso l'alto un vertice triedro. A questa speciale disposizione non si sottrae quasi nessuno dei 24 cristalli, e perciò essa mi è apparsa assai caratteristica.

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto mineralogico di Firenze, diretto dal prof. Federico Millosevich.

(²) *Museo di mineralogia della R. Università di Cagliari*, Boll. soc. geol. ital., XV, pag. 472; *Museo mineralogico d'Iglesias*, ibid., pag. 484.

Esaminando attentamente con la lente i diversi cristalli ho notato in essi le seguenti 5 forme semplici:

$$h \{100\}; \; o \{111\}; \; d \{110\}; \; \{hll\}; \; \{hkl\}$$

le quali si presentano così associate:

$$h \{100\} \quad o \{111\}$$
$$h \{100\} \quad o \{111\} \quad d \{110\}$$
$$h \{100\} \quad o \{111\} \quad d \{110\} \quad \{hll\}$$
$$h \{100\} \quad o \{111\} \quad d \{110\} \quad \{hll\} \quad \{hkl\}.$$

Anche qui, come nella *facies* cristallografica più comune dell'argentite, il cubo è grandemente prevalente sulle altre forme. Le sue facce, nei cristalli maggiori specialmente, sono butterate e quindi rugose; e opache sono ancora negl'individui più piccoli ove, però, si presentano abbastanza lisce. Quelle delle altre forme, sempre poco sviluppate, ad eccezione di *oc* $\{111\}$, ma sono assai piane e lucentissime.

Per non danneggiare il campione in alcuno dei suoi cristalli e a causa della sua grossezza, non fu possibile di prendere le misure goniometriche necessarie alla identificazione dei simboli $\{hll\}$ e $\{hkl\}$. Al primo corrispondono molto probabilmente indici già noti, poichè è stata già osservata sull'argentite dei varî giacimenti una discreta serie di icositetraedri. Invece l'esacisottaedro è sicuramente nuovo per la specie, non risultandomi che sia stato trovato finora questo tipo di forma.

I miei cristalli si presentano dunque anche più interessanti perchè, relativamente, essi sono abbastanza ricchi di forme.

Quarzo. — Dalla miniera Piccalinna, comune Guspini (Iglesias), proviene un campione di quarzo, in cristalli, assai interessanti per il loro aspetto fisico e abito cristallografico molto diversi dal solito.

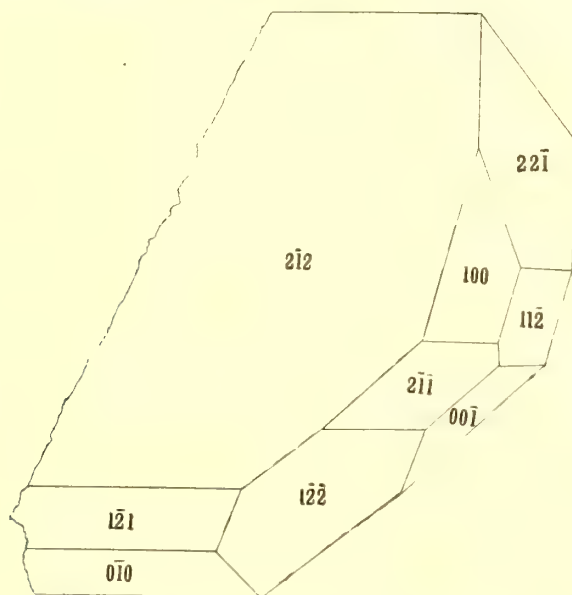
Anzitutto la loro lucentezza, anzichè vitrea, è grassa, quasi sericea, per una leggera increspatura delle facce; il colore è bianco-grigiastro e risulta causato da una speciale nebulosità esistente nell'interno dei cristalli, i quali sono, per questo fatto anche, appena traslucidi.

Le forme cristalline, poi, sono tutte fortemente distorte e addirittura irriconoscibili senza preliminare misura angolare. Neanche l'orientamento cristallografico riesce possibile, mancando qualsiasi traccia di strie sulle facce di $\{2\bar{1}\bar{1}\}$, che, per conseguenza, più non si distinguono da quelle delle altre forme.

L'*habitus*, contrariamente a quel che si verifica nel quarzo, è spiccatamente tabolare, poichè, per dimensioni di 7 × 7 mm., lo spessore è, in alcuni cristalli, di circa 2 mm. Le facce secondo le quali è avvenuto l'appiattimento si mostrano rugose e sono meno piane e meno lucenti delle

altre che limitano le lamine alla periferia. Queste lamine sono sovente sovrapposte le une alle altre, e giammai finite tutt'intorno al loro margine.

Oltre a questi cristalli, d'abito affatto speciale, se ne notano altri di forma tozza, bipiramidata, con esili faccette di prisma assai lucenti, che non presentano niente di notevole all'infuori della mancanza ancora di strie tanto sul prisma quanto sui rombaedri.

All'esame goniometrico si riconosce agevolmente che le facce limitanti i cristalli tabulari sono ancora quelle del prisma $b\,\{2\bar{1}\bar{1}\}$, e dei due rombaedri $r\,\{100\}$, $\varrho\,\{22\bar{1}\}$.

Adattando l'orientazione cristallografica di Goldschmidt ho disegnato, nella figura qui unita, il cristallo che venne staccato per le misure. Come risulta chiaramente, la tabularità è avvenuta secondo una faccia del rombaedro inverso $\varrho\,\{22\bar{1}\}$, e precisamente, nell'orientazione suddetta, parallelamente alla faccia $(2\bar{1}2)$ o alla sua opposta.

A causa della non perfetta specularità delle facce, turbata dalla presenza della già ricordata increspatura, le immagini luminose non sono mai semplici, ma bensì in gruppi più o meno confusi e sbavati. Ciò spiega la notevole divergenza che passa fra i valori angolari misurati e quelli calcolati. La ragione di tale differenza va poi, forse, anche cercata nella speciale condizione genetica in cui si sono prodotti quei caratteristici cristalli.

Le misure fatte per il riconoscimento delle singole facce sono le seguenti, messe a confronto coi valori calcolati dell'angolo $(100):(22\bar{1}) = 46^\circ\,15'\,52''$, dato dal Kuppfer ed accettato dall'Hintze [1].

[1] *Handbuch der Mineralogie*, vol. I, pag. 1266.

$(100):(2\bar{1}2)$ =	mis.	47° 0′ circa;	calc. 46°16′
" $:(22\bar{1})$ =	"	45 42	" "
" $:(11\bar{2})$ =	"	66 30	" 66 52
" $:(2\bar{1}\bar{1})$ =	"	37 50	" 38 13
$(2\bar{1}2)$: " =	"	66 20	" 66 52
$(11\bar{2})$: " =	"	60 30	" 60 0
$(00\bar{1})$: " =	"	67 30	" 66 52
$(1\bar{2}\bar{2})$: " =	"	37 42	" 38 13
" $:(1\bar{2}1)$ =	"	65 0 circa;	" 66 52
" $:(0\bar{1}0)$ =	"	45 30	" 46 16
$(00\bar{1}):(\bar{2}1\bar{2})$ =	"	47 0 circa;	" "
$(22\bar{1}):(010)$ =	"	45 30	" "
$(1\bar{2}1):(0\bar{1}0)$ =	"	37 58	" 38 13

Ho riportato questo quadro per far vedere che la maggior parte degli angoli misurati ha realmente un valore inferiore a quello voluto dal calcolo; e quindi rimane dimostrato che, durante la cristallogenesi, vi è stata una perturbazione anche rispetto alla posizione delle facce.

Chimica fisica. — *Sullo stato dell'acido carbonico nel sangue.* Nota IV: *Sulla dissociazione elettrolitica del bicarbonato di sodio*, di E. D'Agostino e G. Quagliariello, presentata dal Corrispondente Filippo Bottazzi.

Nelle nostre Note precedenti, II e III, mediante misure di conduttività di soluzioni assai diluite di bicarbonati alcalini, abbiamo determinato la mobilità dello ione HCO_3' per la temperatura 18° ($\mu_{\infty\, HCO_3'} = 39,3$) e per la temperatura 37° ($\mu_{\infty\, HCO_3'} = 58,2$). Profittando di questi valori, abbiamo voluto studiare la dissociazione del bicarbonato di sodio, eseguendo misure di conduttività su soluzioni più concentrate delle precedenti. I risultati delle nostre misure sono riportati nelle due tabelle seguenti (tab. 1ª: soluzioni di bicarbonato di sodio a 18° C; tab. 2ª: soluzioni di bicarbonato di sodio a 37° C): dai valori della nostra seconda Nota si è ricavata la conduttività limite a 18° (= 82,9) ed a 37° (= 122,0), e, d'altro lato, profittando del fatto, riconosciuto in questo nostro precedente lavoro, che, per soluzioni abbastanza concentrate (e cioè per concentrazioni maggiori di 0,01 mol.), si può fare a meno di qualsiasi correzione della conduttività trovata, purchè la solu-

zione e le diluizioni del bicarbonato siano fatte in acqua che contenga una discreta quantità di acido carbonico, abbiamo preparato le nostre soluzioni adoperando acqua che conteneva sciolte circa 0,02 moli di acido carbonico.

1. — *Dissociazione del bicarbonato di sodio a 18° C.*

Moli $NaHCO_3$ per litro $= n$	Conduttività specifica trovata, meno la condutt. propria dell'acqua $= \varkappa$	Conduttività molecolare $\mu = 1000 \frac{\varkappa}{n}$	Grado di dissociazione $\alpha = \frac{\mu}{\mu_\infty}$
0	—	$82,9 = \mu_\infty$	1,0000
0,009387	$0,0_3 7278$	77,54	0,9354
0,02347	$0,0_2 1735$	73,93	0,8918
0,04694	$0,0_2 3324$	70,81	0,8542
0,09387	$0,0_2 6383$	68,00	0,8203
0,1877	0,0 1188	63,27	0,7632

2. — *Dissociazione del bicarbonato di sodio a 37° C.*

0	—	$122,0 = \mu_\infty$	1,0000
0,009387	0,001093	116,4	0,9541
0,02347	0,002593	110,5	0,9057
0,04694	0,004985	106,2	0,8705
0,09387	0,009454	100,7	0,8254
0,1877	0,01756	93,56	0,7669

Siccome nelle Note consecutive avremo spesso bisogno dei gradi di dissociazione di soluzioni determinate di bicarbonato di sodio, facciamo seguire una tabella completa dei gradi di dissociazione del bicarbonato, ottenuta a mezzo di interpolazioni dalle due tabelle precedenti.

3. — *Gradi di dissociazione del bicarbonato di sodio a 18° e a 37° C.*

Moli $NaHCO_3$ per litro	Temperatura 18° C.		Temperatura 37° C.	
	Grado di dissociazione	Differenze	Grado di dissociazione	Differenze
0,005	0,957	24	0,972	20
0,010	0,933	18	0,952	19
0,015	0,915	15	0,933	15
0,020	0,900	11	0,918	14
0,025	0,889	10	0,904	11
0,030	0,879	9	0,893	8
0,035	0,870	8	0,885	7
0,040	0,862	6	0,878	6
0,045	0,856	5	0,872	6
0,050	0,851	4	0,866	6
0,055	0,847	4	0,860	6
0,060	0,843	4	0,854	5
0,065	0,839	3	0,849	4
0,070	0,836	3	0,845	4
0,075	0,833	4	0,841	4
0,080	0,829	3	0,837	4
0,085	0,826	3	0,833	4
0,090	0,823	3	0,829	4
0,095	0,820	3	0,825	3
0,100	0,817	7	0,822	6
0,110	0,810	6	0,816	7
0,120	0,804	6	0,809	6
0,130	0,798	6	0,803	7
0,140	0,792	6	0,796	6
0,150	0,786	6	0,790	6
0,160	0,780	6	0,784	6
0,170	0,774	6	0,778	6
0,180	0,768	6	0,772	6
0,190	0,762	5	0,766	6
0,200	0,757		0,760	

Ora ci interessa molto di profittare dei dati precedenti per determinare il grado di dissociazione del bicarbonato di sodio del sangue; questo valore ci è indispensabile per le considerazioni che faremo nelle Note consecutive.

Per ricavare il grado di dissociazione del bicarbonato di sodio del sangue, dobbiamo considerare specialmente le variazioni di tale valore per la presenza di quantità discrete di cloruro sodico, che può essere considerato, in via approssimativa, come l'unico elettrolita del plasma al di fuori dello stesso bicar-

bonato: infatti la somma dei gr. equiv. di tutti gli altri sali del sangue è, generalmente, appena l'8 % delle somme dei gr. equival. $NaCl + NaHCO_3$. Abbiamo calcolato innanzi tutto una tabella delle soluzioni di Na Cl e di $NaHCO_3$ rispettivamente isoidriche alla temperatura 37°; per il calcolo dei gradi di dissociazione del Na Cl a 37° ci siamo serviti dei dati di Kohbraush a 18° e dei coefficienti di temperatura di Arrhenius (1), che abbiamo prescelti in mezzo a molti altri dati, per il fatto che tali coefficienti sono stati misurati fra le temperat. 18° e 52°, e sono quindi assai adatti per le correzioni alla temp. 37° C. Dai nostri calcoli risulta che il cloruro sodico è meno dissociato alla temperatura 37° che non alla temp. 18°; questo fatto può dedursi anche dalle ricerche di Noyes e Coolidge (2), i quali autori hanno dimostrato chiaramente l'influenza depressiva esercitata dalla temperatura sulla dissociazione elettrolitica del cloruro sodico. Segue la tabella delle soluzioni isoidriche di Na Cl e di $NaHCO_3$.

4. *Soluzioni isoidriche di cloruro e bicarbonato sodico.*

Alla temperatura 18° C.			Alla temperatura 37° C.		
Grado di dissociazione $= \alpha$	Mol NaCl per litro $= N_i$	Mol $NaHCO_3$ per litro $= n_i$	Grado di dissociazione $= \alpha$	Mol NaCl per litro $= N_i$	Mol $NaHCO_3$ per litro $= n_i$
0,933	0,011	0,010	0,952	0,010	0,010
0,900	0,030	0,020	0,918	0,020	0,020
0,879	0,049	0,030	0,893	0,032	0,030
0,862	0,071	0,040	0,878	0,045	0,040
0,851	0,088	0,050	0,866	0,057	0,050
0,843	0,103	0.060	0,854	0,071	0,060
0,836	0,117	0,070	0,845	0,083	0,070
0,829	0,132	0,080	0,837	0,097	0,080
0,823	0,147	0,090	0,829	0,110	0,090
0,817	0,163	0,100	0,822	0,125	0,100
0,810	0,182	0,110	0,816	0,140	0,110
0,804	0,203	0,120	0,809	0,156	0,120
0,798	0,227	0,130	0,803	0,173	0,130
0,792	0,250	0,140	0,796	0,195	0,140
0,786	0.277	0,150	0,790	0,216	0,150
0,780	0.300	0,160	0,784	0,238	0,160
0,774	0.329	0,170	0,778	0,261	0,170
0,768	0,356	0,180	0,772	0,287	0,180
0,762	0,386	0,190	0,766	0,315	0,190
0,757	0,414	0,200	0,760	0,340	0,200

(1) Zeitschr. f. physik. Ch., Bd. 9, S. 339 [1892].
(2) Zeitschr. f. physik. Ch., Bd. 46, S. 375 [1903].

Per calcolare il grado di dissociazione α di una soluzione, che contenga n moli Na HCO_3 e N moli Na Cl in un litro, è necessario di costruire una curva in base alla tabella precedente (tab. IV), segnando sulle ascisse i valori n_i, e sulle ordinate i valori N_i; chiamando allora v_i il volume in litri occupato dalla soluzione isoidrica Na HCO_3, si dovrà calcolare una serie di valori $\frac{n}{v_i}$ ed $\frac{N}{1-v_i}$, assumendo dei valori v_i arbitrarii. Con i valori così ottenuti si costruirà una seconda curva sovrapposta alla prima, segnando sulle ascisse i valori $\frac{n}{v_i}$, e sulle ordinate i valori $\frac{N}{1-v_i}$. Il punto d'incrocio delle due curve darà le concentrazioni isoidriche desiderate, e dalle tabelle su riferite sarà possibile di ricavare senz'altro il grado di dissociazione che si voleva conoscere.

In un dato plasma sanguigno siano ad esempio contenute 0,14 moli Na Cl per litro (N = 0,14) ed 0,015 moli Na HCO_3 per litro ($n = 0,015$) alla temperatura 37° C. Per $v_i = 0,13$, si ha $\frac{n}{v_i} = 0,1153$ ed $\frac{N}{1-v_i} = 0,161$; per $v_i = 0,12$ si ha $\frac{n}{v_i} = 0,125$ ed $\frac{N}{1-v_i} = 0,159$; per $v_i = 0,11$ si ha $\frac{n}{v_i} = 0,1363$ e $\frac{N}{1-v_i} = 0,1573$. La curva ottenuta con questi valori incrocia l'altra curva in corrispondenza dell'ordinata 0,159 e dell'ascissa 0,122 Dalla tabella 4ª o 3ª si ricava che il grado di dissociazione di una soluzione contenente 0,122 moli Na HCO_3 per litro è eguale a 0,808. In conseguenza di ciò il plasma sanguigno considerato contiene $0,808 \times 0,015 = 0,0121$ HCO_3'-grammoioni, $0,808 \times 0,14 = 0,113$ Cl′-grammoioni, $0,0150 - 0,0121 = 0,0029$ moli NaHCO_3 indissociato, e $0,140 - 0,113 = 0,027$ moli Na Cl indissociato.

I dati precedenti possono dunque servire per il calcolo della dissociazione del bicarbonato del sangue; di essi faremo molteplici applicazioni nelle Note successive.

Chimica-fisiologica. — *Sul metabolismo degli aminoacidi nell'organismo.* VI: *Sul destino degli aminoacidi contenuti nel lume o nella mucosa dell'intestino.* Nota del dott. Ugo Lombroso e Camillo Artom, presentata dal Socio L. Luciani.

Uno di noi studiando il comportamento degli aminoacidi circolanti col sangue nel tessuto intestinale, osservò che generalmente si ha un più o meno notevole aumento degli aminoacidi nel tessuto (inferiore però a quello che si era in altri tessuti riscontrato); in un caso invece constatò il fenomeno opposto ([1]). È da avvertirsi che quest'ultima esperienza era stata eseguita, a differenza delle altre, con intestino di cane alimentato: ed in queste condizioni si ritrovò nella mucosa intestinale una notevolissima quantità di aminoacidi.

Varie ipotesi si potevano formulare per spiegare il differente comportamento degli aminoacidi nel summenzionato caso: anzitutto si poteva pensare ad una loro diversa distribuzione nei varî tratti dell'intestino; di modo che il contenuto del campione prelevato non corrispondesse esattamente allo esperimentato. Non avendo mai prima di allora osservato un simile fenomeno, non era stata adottata la precauzione di prendere per campione un segmento orale ed uno aborale prossimi al segmento esperimentato; ciò che in seguito fu fatto.

Le altre ipotesi che si potevano ancora formulare per interpretare il risultato ottenuto, corrispondono alle ipotesi che sono in discussione sul destino degli aminoacidi sviluppatisi durante la digestione: e cioè che essi vengano assorbiti come tali ed immessi inalterati nel torrente sanguigno, come tende ad ammettere la scuola di Van Slyke ([2]), Bottazzi ecc.; o che subiscano prima di penetrare nel circolo sanguigno, un processo sintetico, come affermano Abderhalden e la sua scuola; o che finalmente gli aminoacidi vengano disaminati per opera di enzimi endo-cellulari dell'epitelio intestinale, come ritengono Pavlow, Nencki ([3]), ed altri autori, in base alle indagini sul contenuto in NH_3 del sangue portale.

([1]) Lombroso, Rend. R. Accad. Lincei, vol. XXIV, pag. 475, an. 1915.

([2]) Journ. of Biol. Chem., vol. XII, pag. 399, an. 1912.

([3]) Zeitschrift f. Physiol. Chem., vol. XXV, pag. 449, 1898; vol. XXXV, pag. 246, an. 1902.

A quest'ultima ipotesi fornirebbero argomento favorevole le indagini di G. Bostock ([1]), dalle quali risulta che, per azioni di estratti enterici, si possono distruggere *in vitro* gli aminoacidi con formazione di NH_3.

Sarebbero invece contrarie a tale dottrina le ricerche di Folin e Denis ([2]), i quali, adottando un più delicato metodo di determinazione del l'NH_3, affermarono che il sangue delle vene mesenteriche non varia sensibilmente nel suo contenuto ammoniacale a digiuno o durante l'assorbimento di sostanze proteiche.

Dato il grande interesse del problema, abbiamo ritenuto fosse opportuno di estendere le indagini già iniziate nella Nota precedente sul comportamento degli aminoacidi sciolti nel liquido (sangue o Ringer) usato per la circolazione artificiale di segmenti intestinali.

E cioè abbiamo allargato le ricerche ai fenomeni che si svolgono quando gli aminoacidi si trovano non nel liquido circolante, ma nell'epitelio o nel lume intestinale.

Per lo studio del comportamento degli aminoacidi già immedesimati nella mucosa intestinale, abbiamo adoperato intestino di cani in digestione. Si procedeva ad un rapido lavaggio dell'intestino che veniva quindi diviso in sei segmenti diversi. Di questi, alternativamente, uno veniva reso inadatto alla circolazione con la legatura dei suoi vasi; e l'altro, immediatamente confinante, veniva lasciato intatto. E così via, di modo che si avevano tre segmenti che servivano di campione per desumere con buona approssimazione il contenuto in aminoacidi del complessivo intestino, eludendo il pericolo di incorrere in una inesatta valutazione di essi per una loro ineguale distribuzione.

Queste esperienze sarebbero state, per la loro disposizione sperimentale, quelle che più corrispondevano alle condizioni normali in cui si trovano gli aminoacidi durante il loro assorbimento, sia rispetto alla qualità, sia rispetto alla mescolanza dei varî aminoacidi.

Non sempre però abbiamo potuto, nelle nostre ricerche, esperimentare con intestini ricchi di aminoacidi in maniera tale da permetterci di ottenere un risultato ben netto. Abbiamo quindi anche eseguite le nostre indagini introducendo in un segmento intestinale di un cane digiunante una quantità nota di aminoacidi sciolti in liquido di Ringer.

I.

Cane maschio: peso kg. 12. — Peso dell'intestino (diviso in sei sezioni, alternativamente irrorate e non irrorate) = gr. 350. Dopo circolazione = gr. 380, liberato dal mesenterio gr. 280, di cui non circolati gr. 120. Sangue (leggermente diluito con Rin-

([1]) Biochemical Journ. vol. VI, pag. 48, an. 1911.

([2]) Journ. of Biol. Chem., vol. XI, pp. 87 e 162, a 1912.

ger) = cm.^{3} 500. Pressione media Hg. mm. 110-150. Velocità media di circolazione al minuto cm.^{3} 20. Durata della circolazione ore 1 e un quarto.

Per 100 cm.^{3} sangue la formoltitolazione richiede .	1,75	cm.^{3} Na OH $^1/_{10}$ *n*
» » » dopo circolazione la formoltitolazione richiede	7,5	» » »
Per 120 gr. intestino la formoltitolazione richiede	21,6	» » »
» » » dopo circolazione la formoltitolazione richiede	16,3	» » »
NH_3 per 100 cm.^{3} sangue corrisponde a	3,5	cm.^{3} H_2 SO_4 $^1/_{50}$ *n*
» » » » dopo circolaz. corrisp. a	7	» » »
» per 120 gr. intestino corrisponde a	40	» » »
» » » » dopo circolaz. corrisp. a	35	» » »

Complessivamente si ritrovano in più nel sangue circolato tante sostanze titolabili al formolo da richiedere = 23,75 cm.^{3} Na OH $^1/_{10}$ *n*. Se ne trovano in meno nell'intestino da richiedere = 7,1 cm.^{3} Na NH $/_{10}$ *n*. Aumento assoluto: 21,6 cm.^{3} Na OH $^1/_{10}$ *n*.

II.

Cane maschio: peso kg. 6,7. — Peso dell'intestino = gr. 290. Dopo circolazione = gr. 350; liberato dal mesenterio = gr. 290, di cui 130 non circolati. Sangue cm.^{3} 400. Pressione media Hg. mm. = 80-120. Velocità media al minuto = cm.^{3} 11. Durata della circolazione ore 2 e mezzo.

Per 100 cm.^{3} sangue la formoltitolazione richiede .	2,2	cm.^{3} Na OH $^1/_{10}$ *n*
» » » dopo circolazione la formoltitolazione richiede	3,75	» » »
Per 80 gr. intestino la formoltitolazione richiede .	41,25	» » »
» » » dopo circolazione la formoltitolazione richiede	20,25	» » »
NH_3 per 100 cm.^{3} sangue corrisponde a	3,5	cm.^{3} H_2 SO_4 $^1/_{50}$ *n*
» » » » dopo circolaz. corrisp. a	3,8	» » »
» per 80 gr. intestino corrisponde a	26,1	» » »
» » » » dopo circolaz. corrisp. a	24,8	» » »
Acetone per 100 cm.^{3} sangue circolato		traccie

Complessivamente si trovano in più nel sangue circolato tante sostanze titolabili al formolo da richiedere 4 cm.^{3} Na OH $^1/_{10}$ *n*. Se ne trovano in meno nell'intestino da richiedere 42 cm.^{3} Na OH $^1/_{10}$ *n*. *Deficit* assoluto = 38 cm.^{3} Na OH $^1/_{10}$ *n*.

III.

Cane femmina: peso kg. 4. — Si introducono direttamente nel duodeno cm.^{3} 70 di una soluzione di peptone all'8 % circa, e dopo ore 1 e mezza si inizia l'esperienza come le precedenti. Peso dell'intestino = gr. 160. Dopo circolazione = gr. 178; liberato dal mesenterio = gr. 135, di cui gr. 47 non circolati. Sangue (diluito con soluzione di Ringer) = cm.^{3} 400. Pressione Hg. mm. 120-160. Velocità media al minuto cm.^{3} 12. Durata della circolazione ore 1 e mezza.

Per 100 cm.^{3} sangue la formoltitolazione rivela solo		traccie
» » » dopo circolazione la formoltitolazione richiede	3	cm.^{3} Na OH $^1/_{10}$ *n*.
Per 44 gr. intestino la formoltitolazione richiede	7,9	» » »
» » » dopo circolazione la formoltitolazione richiede	4,6	» » »

NH_3 per 100 cm.³ sangue dopo circolaz. corrisp. a	4,5	cm.³ H_2 SO_4 $^1/_{50}$ n
» » 44 gr. intestino	20	» » »
» » 44 gr. » dopo circolazione . . .	21	» » »

Complessivamente si trovano in più nel sangue circolato tante sostanze titolabili al formolo da richiedere circa 11,5 cm.³ Na OH $^1/_{10}$ n. Se ne ritrovano in meno nel tessuto da richiedere 6,7 cm.³ Na OH $^1/_{10}$ n. Aumento assoluto = 4,8 cm.³ Na NH $^1/_{10}$ n.

IV.

Cane maschio: peso kg. 8. — Sacrificato 8 ore dopo abbondante pasto di carne. Peso dell'intestino = gr. 270. Dopo circolazione = gr. 300; liberato dal mesenterio = gr. 233, di cui non circolati gr. 94. Sangue cm.³ 400. Pressione media Hg. mm. 120-180. Velocità circolatoria per minuto = cm.³ 4-6. Durata della circolazione ore 1 e un quarto.

Per 100 cm.³ sangue la formoltitolazione richiede .	2	cm.³ Na OH $^1/_{10}$ n.
» » » dopo circolazione la formoltitolazione richiede	6,9	» » »
Per 50 gr. intestino la formoltitolazione richiede .	14	» » »
» » » dopo circolazione la formoltitolazione richiede	10	» » »
NH_3 per 100 cm.³ sangue circolato corrisponde a .	3	cm.³ H_2 SO_4 $^1/_{50}$ n

Complessivamente si ritrovano in più nel sangue circolato tante sostanze titolabili al formolo da richiedere 17,5 cm.³ Na OH $^1/_{10}$ n. Se ne trovano in meno nell'intestino da richiedere 11,1 cm.³ Na OH $^1/_{10}$ n. Aumento assoluto = 6,4 Na OH $^1/_{10}$ n.

V.

Cane maschio: peso kg. 10. — Digiuno da 24 ore. Peso dell'intestino posto a circolare gr. 95. Dopo circolazione gr. 100; liberato dal mesenterio gr. 65. Si introducono nel lume intestinale gr. 2 di α-alanina in liquido Ringer cm.³ 40. Sangue cm.³ 400. Pressione Hg. mm. 80-120. Velocità media al minuto cm.³ 10. Durata della circolazione ore 3.

Per 100 cm.³ sangue la formoltitolazione richiede .	2	cm.³ Na OH $^1/_{10}$ n
» » » dopo circolazione la formoltitolazione richiede	10,6	» » »
Per 65 gr. intestino la formoltitolazione richiede .	38.2	» » »
» » » dopo circolazione la formoltitolazione richiede	37,2	» » »
NH_3 per 100 cm.³ sangue corrisponde a	2,5	cm.³ H_2 SO_4 $^1/_{50}$ n
» » » » dopo circolaz. corrisp. a	14	» » »
» per 65 gr. intestino corrisponde a	5	» » »
» » » » dopo circolaz. corrisp. a	11	» » »
Introdotta nel lume intestinale α-alanina pari a . .	230	cm.³ Na OH $^1/_{10}$ n
Ritrovansi » » dopo circolazione . .	107,2	» » »
NH_3 » » » » . .	13	cm.³ H_2 SO_4 $^1/_{10}$ n

Complessivamente si trovano in più nel sangue circolato tante sostanze titolabili al formolo da richiedere 34 cm.³ Na OH $^1/_{10}$ n. Nella parete intestinale dopo circolazione

se ne ritrovano in più da richiedere 1 cm.^{3} Na OH $^1/_{10}$ *n*. Nell'interno del lume intestinale ne sono scomparse durante la circolazione da richiedere 122,8 cm.^{3} Na OH $^1/_{10}$ *n*. Il *deficit* assoluto è dunque pari a 87,8 cm.^{3} Na OH $^1/_{10}$ *n*.

VI.

Cane maschio: peso kg. 28. — Digiuno da 48 ore. Peso dell'intestino posto a circolare gr. 155. Dopo circolazione gr. 170: liberato dal mesenterio, grasso ecc.; gr. 66. Si introducono nel lume intestinale α-alanina gr. 2 in Ringer = cm.^{3} 80. Sangue = cm.^{3} 500. Pressione Hg. mm. 60-120. Velocità media per minuto cm.^{3} 35. Durata della circolazione = ore 1 e mezza.

Per 100 cm.^{3} sangue la formoltitolazione richiede .	5,1 cm.^{3} Na OH $^1/_{10}$ *n*
» » » dopo circolazione la formoltitolazione richiede	15,7 » » »
Per 66 gr. intestino la formoltitolazione richiede	14,3 » » »
» » » dopo circolazione la formoltitolazione richiede	41,2 » » »
NH_3 per 100 cm.^{3} sangue corrisponde a	1,5 cm.^{3} H_2 SO_4 $^1/_{50}$ *n*
» » » » dopo circolaz. corrisp. a	4 » » »
» per 66 gr. intestino corrisponde a	16 » » »
» » » » dopo circolaz. corrisp. a	13,3 » » »
Acetone per 100 cm.^{3} sangue circolato corrisp. a .	3,2 » I $^1/_{10}$ *n*
Introdotti nel lume intestinale 2 gr. di α-alanina che alla formoltitolazione richiedono . . .	230 cm.^{3} Na OH $^1/_{10}$ *n*
Ritrovansi nel lume intestinale tante sostanze titolabili al formolo da richiedere	97 » » »

Complessivamente si ritrovano in più nel sangue tante sostanze titolabili al formolo da richiedere 49,1 cm.^{3} Na OH $^1/_{10}$ *n*. Se ne trovano in più nella parete intestinale da richiedere 26,9 cm.^{3} Na OH $^1/_{10}$ *n*. Nell'interno del lume intestinale ne sono scomparse durante la circolazione tante da richiedere 133 cm.^{3} Na OH $^1/_{10}$ *n*. *Deficit* assoluto, 57 cm.^{3} Na OH $^1/_{10}$ *n*.

VII.

Cane maschio: peso kg. 19. — Digiuno da 48 ore. Peso dell'intestino posto a circolare gr. 120. Dopo circolazione gr. 130; liberato dal mesenterio gr. 90. Si introducono nel lume intestinale gr. 2 glicocolla in liquido Ringer cm.^{3} 50. Sangue cm.^{3} 500. Pressione Hg. mm. 40-60. Velocità per minuto cm.^{3} 18. Durata ore 1 e un quarto.

Per 100 cm.^{3} sangue la formoltitolazione richiede .	4,3 cm.^{3} Na OH $^1/_{10}$ *n*
» » » dopo circolazione la formoltitolazione richiede	7,2 » » »
Per 90 gr. intestino la formoltitolazione richiede	23,4 » » »
» » » dopo circolazione la formoltitolazione richiede	53,2 » » »
NH_3 per 100 cm.^{3} sangue corrisponde a	1,5 cm.^{3} H_2 SO_4 $^1/_{50}$ *n*
» » » » dopo circolaz. corrisp. a	3,5 » » »
» per 90 gr. intestino corrisponde a	12 » » »
» » » » dopo circolaz. corrisp. a	18 » » »
Acetone per 100 cm.^{3} sangue circolato	6,8 » I $^1/_{10}$ *n*

2 gr. glicocolla introdotti nel lume intestinale alla formoltitolazione richiedono	250	cm.^{3} Na OH $^1/_{10}$ *n*.
Dopo circolazione il liquido nel lume intestinale alla formoltitolazione richiede	175	» » »
NH_3 del liquido nel lume intestinale corrisp. a .	15	» H_2 SO_4 $^1/_{50}$ *n*

Complessivamente si ritrovano in più nel sangue circolato tante sostanze titolabili al formolo da richiedere 13,8 cm.^{3} Na OH $^1/_{10}$ *n*. Nella parete intestinale se ne ritrovano in più da richiedere 29,8 cm.^{3} Na OH $^1/_{10}$ *n*. Nell'interno del lume intestinale durante la circolazione ne sono scomparse da richiedere 75 cm.^{3} Na OH $^1/_{10}$ *n*. *Deficit* assoluto 31,4 cm.^{3} Na OH $^1/_{10}$ *n*.

VIII.

Cane maschio: peso kg. 10. — Digiuno da 24 ore. Peso dell'intestino prima di circolare = gr. 105. Dopo circolazione = gr. 110; liberato dal mesenterio = gr. 62. Si introducono nel lume intestinale glicocolla gr. 2. Sangue (molto diluito con soluzione di Ringer) = cm.^{3} 450. Pressione Hg. mm. 60-80. Velocità media per minuto cm.^{3} 18. Durata della circolazione ore 1 e un quarto.

Per 100 cm.^{3} sangue la formoltitolazione richiede .	2,3	cm.^{3} Na OH $^1/_{10}$ *n*
» » » dopo circolazione la formoltitolazione richiede	14,4	» » »
Per 62 gr. intestino la formoltitolazione richiede	14,6	» » »
» » » dopo circolazione la formoltitolazione richiede	39	» » »
NH_3 per 100 cm.^{3} sangue dopo circolaz. corrisp. a	4,5	» H_2 SO_4 $^1/_{50}$ *n*
» per 62 gr. intestino corrisponde a	16,2	» » »
» » » » dopo circolaz. corrisp. a	17,4	» » »
2 gr. glicocolla introdotti nell'intestino alla formoltitolazione richiedono	250	» Na OH $^1/_{1^0}$ *n*
Dopo circolazione il liquido nel lume intestinale alla formoltitolazione richiede	120	» » »

Complessivamente si ritrovano in più nel sangue circolato tante sostanze titolabili al formolo da richiedere 54,5 cm.^{3} Na OH $^1/_{10}$ *n*. Nella parete intestinale se ne ritrovano in più da richiedere 24,4 cm.^{3} Na OH $^1/_{10}$ *n*. Nell'interno del lume intestinale durante la circolazione ne sono scomparse tante da richiedere 130 cm^3 Na OH $^1/_{10}$ *n*. *Deficit* assoluto 51,1 cm.^{3} Na OH $^1/_{10}$ *n*.

Dalle nostre ricerche risulta che:

I) La quantità di aminoacidi che si trovano nel sangue che ha servito alla circolazione di un segmento intestinale è costantemente aumentata;

II) Nelle esperienze eseguite senza l'introduzione di aminoacidi dall'esterno, si osservò quasi sempre che l'aumento di essi nel sangue è superiore alla quantità di aminoacidi scomparsi nella mucosa intestinale. Questo inatteso risultato ci dimostra che nelle nostre ricerche più fenomeni dovevano fra di loro interferire in modo da non permettere una facile disamina

di essi. Anzitutto deve essersi certamente formata una notevole quantità di aminoacidi per opera di altre sostanze preesistenti nella mucosa intestinale: sulla natura e sull'origine delle quali non ci è facile ora formulare ipotesi, in difetto di indagini appropriate che in avvenire ci proponiamo di eseguire.

Noi ci troviamo probabilmente di fronte a reazioni enzimatiche di carattere antagonista che si accavallano e si susseguono in forme complesse e svariate, e di esse non possiamo che constatare l'azione prevalente.

Si svolge forse, per opera della mucosa intestinale, qualche cosa di simile a quello che già uno di noi aveva osservato in ricerche sulla reversibilità degli enzimi lipasici [1]; nelle quali si dimostra che il secreto pancreatico è capace di compiere alternativamente le due opposte funzioni, idrolisi e sintesi del grasso, a seconda dell'ambiente in cui agisce e delle manipolazioni a cui è stato sottoposto.

III) Nelle esperienze in cui erasi introdotta nell'intestino una quantità notevole di aminoacidi puri, si osservò che l'aumento del contenuto in aminoacidi del sangue, pur essendo molto notevole, fu sempre assai inferiore alla diminuzione avvertita, dopo la circolazione, nel contenuto in aminoacidi dell'intestino (nel suo complesso, tessuto e soluzione introdotta). Ed il *deficit* assoluto superò persino in queste ricerche il 30 %.

In tutte le esperienze eseguite nelle varie disposizioni sperimentali si osservò che mai il contenuto di corpi acetonici veniva sensibilmente modificato.

Il contenuto in NH_3 si elevò sempre, ma in misura limitata.

Ma siccome si è pure costantemente notata una diminuzione nel contenuto in NH_3 nel tessuto intestinale dopo la circolazione, così ci sembra molto attendibile il sospetto che qui si tratti, più che altro, di un semplice riversarsi nel sangue (nel quale il contenuto in NH_3 è lievissimo) dei sali ammoniacali che si trovano in assai cospicua misura nel tessuto intestinale.

In ciò i nostri risultati coincidono con l'opinione del Folin, il quale sosteneva che gli aminoacidi vengano assorbiti senza che si svolga nell'intestino una loro disamidazione durante l'assorbimento.

Per tutti gli argomenti accennati riteniamo che la maggior parte degli aminoacidi scomparsi in queste ultime esperienze, siano stati utilizzati per la sintesi di complessi più o meno elevati.

Non ci paiono quindi accettabili, rispetto alle ipotesi che si dibattono sulla forma nella quale le sostanze proteiche penetrano nella crasi sanguigna, quelle dottrine che vogliono limitarla ad una sola forma, ad esclusione di tutte le altre.

[1] Lombroso, Arch. farm. e scienze affini, vol. XIV, pag. 429 (1912).

Fisiologia. — *Sul metabolismo degli aminoacidi nell'organismo. V: Sul metabolismo degli aminoacidi circolanti nel muscolo in funzione.* Nota del dott. Ugo Lombroso e Ludovico Paterni, presentata dal Socio Luigi Luciani.

In una precedente serie di ricerche uno di noi (¹) ha osservato che, facendo circolare nel tessuto muscolare di cane varî aminoacidi sciolti in liquido di Ringer, si avverte una più o meno notevole diminuzione del contenuto di aminoacidi del liquido circolante. Gli aminoacidi scomparsi venivano però ritrovati nella loro totalità, o quasi, depositati nel tessuto muscolare: e non potevasi quindi affermare che essi avessero preso una qualsiasi parte nel metabolismo del muscolo esperimentato.

Se, invece che nel liquido di Ringer, gli aminoacidi si scioglievano nel sangue dell'animale, allora si avvertiva una loro diminuzione anche maggiore; e soltanto una parte degli aminoacidi scomparsi si trovava depositata nel muscolo.

Tali esperienze erano state eseguite su tessuto muscolare in riposo. Abbiamo creduto meritasse il prezzo dell'opera il ripetere queste esperienze su tessuto muscolare mantenuto in attività funzionale: e ciò abbiamo fatto, sia per estendere le nostre conoscenze sull'argomento, sia per tentare di chiarire alcuni problemi che si erano affacciati nelle indagini precedenti.

Poco ci è noto del ricambio delle sostanze proteiche nel tessuto muscolare funzionante, e per lo più le indagini sono state limitate al comportamento delle proteine del plasma. Interessanti a questo proposito sono i risultati ottenuti dal Pugliese (²); facendo circolare sangue nei muscoli tetanizzati, egli vide che si eleva notevolmente il quoziente delle sieroproteine non coagulabili al calore, le quali però si possono spontaneamente ripristinare, dimostrando quindi che il processo è di natura reversibile.

Sul comportamento degli aminoacidi circolanti in muscolo funzionante non esistono che le osservazioni del Buglia (³) su cuore di coniglio, con esito totalmente negativo: e ciò probabilmente, come già si è detto nella Nota precedente, perchè le ricerche del Buglia erano state eseguite con aminoacidi sciolti in liquido di Ringer. Dato che a noi invece, nelle esperienze con sangue, risultò una effettiva scomparsa di aminoacidi circolanti, si presentava interessante l'indagare se tale scomparsa veniva ad elevarsi, ed in quale misura, per effetto del lavoro muscolare.

(¹) Rendiconti R. Accad. Lincei, vol. XXIV, pp. 57-149 (1915).

(²) Archives Italiennes de Biologie, vol. LV, pag. 359 (1901).

(³) Arch. di Farm. sper. e scienze affini, vol. XVII, pag. 227 (1914).

Inoltre, nelle esperienze di cui è riferito nella Nota sopracitata, non avevamo potuto determinare l'esatto destino di una parte degli aminoacidi scomparsi: e precisamente di quella che non poteva essere giustificata dall'aumento di NH_3 nel sangue. Sorgeva il dubbio che questa parte non fosse stata distrutta, ma utilizzata invece per processi sintetici con formazioni di più o meno elevati complessi di aminoacidi. Ovvero si affacciava l'ipotesi che gli aminoacidi scomparsi fossero stati realmente bruciati: ma che l'NH_3 liberatasi venisse in parte utilizzata alla formazione di altri corpi azotati. Sulla possibilità di utilizzare l'NH_3 per costituire sostanze azotate più complesse, testimoniano le ricerche di Embden ed allievi [1], dalle quali risulta che, facendo circolare NH_3 nel fegato, si può ottenere la formazione di aminoacidi. Inoltre, da Abderhalden ed allievi [2] è stato affermato che con soli sali diNH_3 si può mantenere l'equilibrio azotato, ed anche aver ritenzione di N.

Nelle presenti esperienze abbiamo sistematicamente determinato il quantitativo di acetone che si rinveniva nel sangue, prima e dopo la circolazione nel muscolo funzionante. In quantochè, secondo le importanti ricerche del Flatow [3], l'acetone si forma costantemente nella disaminazione dei varî aminoacidi.

* * *

Per l'esperimento si procedeva nel seguente modo:

Ucciso l'animale per dissanguamento, si disarticolava l'arto destro, isolando un tratto del nervo sciatico: si applicava un peso di gr. 200 all'estremità dell'arto, e lo si innestava nell'apparecchio di circolazione Lind.

Durante la circolazione si faceva contrarre l'arto ogni 3-5 secondi, con colpi di corrente indotta sullo sciatico; e quando questo appariva incapace di trasmettere l'eccitamento (dopo 20-30 minuti), si stimolava direttamente il tessuto muscolare.

I.

Cane maschio, kg. 7,100. — Circolazione con 410 cc. sangue e Ringer. Alanina gr. 3. Durata della circolazione 1 ora. Velocità tra 15 e 2 (1). Pressione 80-130 mm. Hg. Eccitabilità notevole. Si mantiene sino alla fine. Peso dell'arto prima della circolazione, gr. 415. Dopo gr. 440. Tessuto osseo gr. 115.

Sangue	Amcidi (2) in 15 cc.	p. (3) cc. 7,9 NaOH $^1/_{10}\,n$ d. (4) » 6,7 » »	NH_3 in 100 cc.	d. cc. 2,5 H_2SO_4 $^1/_{50}\,n$	Corpi acet.ci in 100 cc.	p. cc. 0,8 I $^1/_{10}\,n$ d. » 30 »
Organo	Amcidi in gr. 50	p. » 16,7 » » d. » 17 » »	NH_3 in gr. 50	p. » 5,5 » » d. » 7,5 » »		

(1) Il numero di cc. di sangue che circolarono in m'. (2) abbr.: aminoacidi. (3) abbr.: prima della circolazione. (4) abr.: dopo la circolazione.

[1] Biochemische Zeitschrift, vol. XXXVIII, pag. 393 (1912).
[2] Zeitschrift f. Physiol. Chem., vol. LXXVIII, pag. 1 (1912).
[3] Zeitschrift f. Physiol. Chem., vol. LXIV, pag. 367 (1910).

Scompaiono nel sangue aminoacidi per cc. 44 NaOH $^1/_{10}$ *n*. Aumentano nel muscolo aminoacidi per cc. 10,3. Risulta un *deficit* per cc. 34,3 NaOH $^1/_{10}$ *n*.

II.

Cane maschio, kg. 6,500. — Circolazione con 500 cc. sangue e Ringer senza aggiunta di aminoacidi. Durata della circolazione ore 1 e mezza. Velocità tra 15 e 3. Pressione 70-110 mm. Hg. Eccitabilità discreta. Peso dell'arto prima della circolazione gr. 360. Dopo, gr. 385. Tessuto osseo gr. 90.

Sangue	Amcidi in 100 gr.	p. cc. 2,2 NaOH $^1/_{10}$ *n* d. » 1,7 » »	NH_3 in 100 cc.	d. cc. 3,5 H_2SO_4 $^1/_{50}$ *n*	Corpi acet.ci in 100 cc.	d. cc. 1,8 I $^1/_{10}$ *n*
Organo	Amcidi in gr. 50	p. » 7,5 » » d. » 9 » »	NH_3 in gr. 50	p. » 17 » » d. » 15 » »		

Scompaiono nel sangue aminoacidi per cc. 3 NaOH $^1/_{10}$ *n*. Aumentano nel muscolo aminoacidi per cc. 12,5 NaOH $^1/_{10}$ *n*.

III.

Cane maschio, kg. 4,100. — Circolazione con 500 cc. sangue e Ringer. Alanina gr. 4. Durata della circolazione 2 ore. Velocità tra 16 e 3. Pressione 70-100 mm. Hg. Eccitabilità notevole. Si mantiene sino alla fine. Peso dell'arto prima della circolazione gr. 390. Dopo, gr. 425. Tessuto osseo gr. 115.

Sangue	Amcidi in 15 cc.	p. cc. 11,6 NaOH $^1/_{10}$ *n* d. » 7,7 » »	NH_3 in 100 cc.	d. (perduta)	Corpi acet.ci in 100 cc.	p. (perduti) d. »
Organo	Amcidi in gr. 50	p. » 18,5 » » d. » 17,2 » »	NH_3 in gr. 50	p. cc. 7 H_2SO_4 $^1/_0$ *n* d. » 4 » »		

Scompaiono nel sangue aminoacidi per cc. 147,9 NaOH $^1/_{10}$ *n*. Diminuiscono nell'organo per cc. 7,4 NaOH $^1/_{10}$ *n*. Risulta un *deficit* per cc. 155,3 NaOH $^1/_{10}$ *n*.

IV.

Cane femmina, kg. 4. — Circolazione con 420 cc. di sangue e Ringer. Alanina gr. 3. Durata della circolazione 20 minuti. Velocità tra 18 e 5. Pressione 80-110 mm. Hg. Eccitabilità notevolissima. Si mantiene fino alla fine. Peso dell'arto prima della circolazione gr. 270. Dopo gr. 275. Tessuto osseo gr. 70.

Sangue	Amcidi in 10 cc.	p. cc. 6,5 NaOH $^1/_{10}$ *n* d. » 5,4 » »	NH_3 in 100 cc.	d. cc. 7,5 H_2SO_4 $^1/_{50}$ *n*	Corpi acet.ci in 100 cc.	p. cc. 3,2 I $^1/_{10}$ *n* d. » 44 »
Organo	Amcidi in gr. 50	p. » 6,2 » » d. » 7,4 » »	NH_3 in gr. 50	p. » 13 » » d. » 9,4 » »		

Scompaiono aminoacidi nel sangue per cc. 49 NaOH $^1/_{10}$ *n*. Aumentano nel muscolo aminoacidi per cc. 5,7 NaOH $^1/_{10}$ *n*. Risulta un *deficit* per cc. 41,5 NaOH $^1/_{10}$ *n*.

V.

Cane maschio, kg. 4,800. — Circolazione con 400 cc. di sangue e Ringer senza aggiunta di aminoacidi. Durata della circolazione 50 minuti. Velocità tra 16 e 2. Pres-

sione 70-120 mm. Hg. Eccitabilità notevole. Si mantiene fino alla fine. Peso dell'arto prima della circolazione gr. 320. Dopo gr. 335. Tessuto osseo gr. 90.

Sangue	Amcidi in 100 cc.	p. cc. 3,6 NaOH $^1/_{10}\,n$	NH_3 in 100 cc.	d. cc. 9,5 H_2SO_4 $^1/_{50}\,n$	Corpi acet.ci in 100 cc.	p. cc. 0,1 I $^1/_{10}\,n$
		d. » 4 » »				d. » 4,4 »
Organo	Amcidi in gr. 50	p. » 11 » »	NH_3 in gr. 50	p. » 6,2 » »		
		d. » 8 » »		d. » 11,3 » »		

Aumentano nel sangue aminoacidi per cc. 1 NaOH $^1/_{10}\,n$. Diminuiscono nel muscolo aminoacidi per cc. 11,4 NaOH $^1/_{10}\,n$. Risulta un *deficit* per cc. 10,4 NaOH $^1/_{10}\,n$.

VI.

Cane maschio, kg. 5,500. — Circolazione con 525 cc. sangue e Ringer. Glicocolla gr. 4. Durata della circolazione 2 ore. Velocità tra 15 e 2. Pressione 80-110 mm. Hg. Eccitabilità notevole. Si mantiene fino alla fine. Peso dell'arto prima della circolazione gr. 465. Dopo, gr. 500. Tessuto osseo gr. 120.

Sangue	Amcidi in 15 cc.	p. cc. 13,3 NaOH $^1/_{10}\,n$	NH_3 in 100 cc.	d. cc. 45 H_2SO_4 $^1/_{50}\,n$	Corpi acet.ci in 100 cc.	p. (perduti)
		d. » 10,9 » »				d. »
Organo	Amcidi in gr. 50	p. » 23,2 » »	NH_3 in gr. 50	p. » 37,5 » »		
		d. » 22 » »		d. » 18,5 » »		

Scompaiono nel sangue aminoacidi per cc. 105,8 NaOH $^1/_{10}\,n$. Diminuiscono nell'organo aminoacidi per cc. 5,1 NaOH $^1/_{10}\,n$. Risulta un *deficit* per cc. 110,9 NaOH $^1/_{10}\,n$.

VII.

Cane femmina, kg. 4,500. — Circolazione con 420 cc. di sangue e Ringer. Alanina gr. 3. Durata della circolazione 55 minuti. Velocità tra 16 e 6. Pressione 70-110 mm. Hg. Eccitabilità notevole in principio; alla fine è nulla. Peso dell'arto prima della circolazione gr. 450. Dopo, gr. 470. Tessuto osseo gr. 105.

Sangue	Amcidi in 15 cc.	p. cc. 8,1 NaOH $^1/_{10}\,n$	NH_3 in 100 cc.	d. cc. 2,5 H_2SO_4 $^1/_{50}\,n$	Corpi acet.ci in 100 cc.	p. cc. 3,6 I $^1/_{10}\,n$
		d. » 7,5 » »				d. » 14,6 »
Organo	Amcidi in 50 gr.	p. » 13,3 » »	NH_3 in 100 cc.	p. » 6,5 » »		
		d. » 14,1 » »		d. » 17,5 » »		

Scompaiono nel sangue aminoacidi per cc. 26,8 NaOH $^1/_{10}\,n$. Aumentano nel muscolo aminoacidi per cc. 12,9 NaOH $^1/_{10}\,n$. Risulta un *deficit* per cc. 13,9 NaOH $^1/_{10}\,n$.

VIII.

Cane maschio, kg. 4,200. — Circolazione con 350 cc. di sangue e Ringer senza aggiunta di aminoacidi. Durata della circolazione 40 minuti. Velocità tra 16 e 2. Pressione 90-120 mm. Hg. Eccitabilità discreta; alla fine è minima. Peso dell'arto prima della circolazione gr. 260. Dopo, gr. 275. Tessuto osseo gr. 92.

Sangue	Amcidi in 100 cc.	p. cc. 4,2 NaOH $^1/_{10}\,n$	NH_3 in 100 cc.	d. cc. 3,5 H_2SO_4 $^1/_{50}\,n$	Corpi acet.ci in 100 cc.	p. cc. 0,4 I $^1/_{10}\,n$
		d. » 4 » »				d. » 1,1 »
Organo	Amcidi in gr. 50	p. » 9,7 » »	NH_3 in gr. 50	p. » 6 » »		
		d. » 8,2 » »		d. » 9,5 » »		

Scompaiono nel sangue aminoacidi per cc. 1,3 NaOH 1/10. Diminuiscono nel muscolo aminoacidi per cc. 2,5 NaOH 1/10 *n*. Risulta un *deficit* per cc. 3,8 NaOH 1/10 *n*.

IX.

Cane femmina, kg. 5,100. — Circolazione con 400 di sangue e Ringer. Alanina gr. 3. Durata della circolazione 55 minuti. Velocità tra 15 e 2. Pressione 70-190 mm. Hg. Eccitabilità notevole in principio; in fine è spenta. Peso dell'arto prima della circolazione gr. 490. Dopo gr. 515. Tessuto osseo gr. 140.

		Amcidi	NH_3	Corpi acet.ci
Sangue (Amcidi in 15 cc.; NH_3 in 100 cc.; Corpi acet.ci in 100 cc.)	p.	cc. 8,4 NaOH 1/10 *n*	d. cc. 6,2 H_2SO_4 1/50 *n*	cc. 0,2 I 1/10 *n*
	d.	» 7,5 » »		» 2,4 »
Organo (in gr. 50)	p.	» 9,8 » »	» 6,2 » »	
	d.	» 12 » »	» 12 » »	

Scompaiono nel sangue aminoacidi per cc. 37,5 NaOH 1/10 *n*. Aumentano nell'organo aminoacidi per cc. 9,8. Risulta un *deficit* per cc. 27,7 NaOH 1/10 *n*.

X.

Cane maschio, kg. 7,500. — Circolazione con 500 cc. di sangue e Ringer. Asparagina (neutralizzata) gr. 4. Durata della circolazione 2 ore e mezza. Velocità tra 16 e 4. Pressione 70-100 mm. Hg. Eccitabilità notevole; in fine è nulla. Peso dell'arto prima della circolazione gr. 425. Dopo, gr. 465. Tessuto osseo gr. 150.

		Amcidi	NH_3	Corpi acet.ci
Sangue (Amcidi in 15 cc.; NH_3 in 100 cc.; Corpi acet.ci in 100 cc.)	p.	cc. 5 NaOH 1/10 *n*	d. cc. 32,5 H_2SO_4 1/50 *n*	cc. 1,6 I 1/10 *n*
	d.	» 4,1 » »		» 1,8 »
Organo (in gr. 50)	p.	» 10,5 » »	» 15 » »	
	d.	» 12 » »	» 14 » »	

Scompaiono nel sangue aminoacidi per cc. 40,9 NaOH 1/10 *n*. Aumentano nel muscolo aminoacidi per cc. 13,9 NaOH 1/10 *n*. Risulta un *deficit* per cc. 27 NaOH 1/10 *n*.

XI.

Cane femmina, kg. 4,700. — Circolazione con 500 cc. sangue e Ringer. Glicocolla gr. 3. Durata della circolazione 1 ora e mezza. Velocità tra 12 e 3. Pressione 90-120 mm. Hg. Eccitabilità notevole in principio, nulla nella fine. Peso dell'arto prima della circolazione gr. 270. Dopo, gr. 310. Tessuto osseo gr. 70.

		Amcidi	NH_3
Sangue (Amcidi in 15 cc.; NH_3 in 100 cc.)	p.	cc. 10,3 NaOH 1/10 *n*	d. cc. 19 H_2SO_4 1/50 *n*
	d.	» 9,1 » »	
Organo (in gr. 50)	p.	» 14,7 » »	» 9 » »
	d.	» 16,1 » »	» 10 » »

Scompaiono nel sangue aminoacidi per cc. 55,3 NaOH 1/10 *n*. Aumentano nell'organo aminoacidi per cc. 18,4 NaOH 1/10 *n*. Risulta un *deficit* per cc. 36,9 NaOH 1/10 *n*.

XII.

Cane maschio, kg. 5,200. — Circolazione con 450 cc. sangue e Ringer. Alanina gr. 3. Durata della circolazione 1 ora e 45 minuti. Velocità tra 14 e 2. Pressione 80-

120 mm. Hg. Eccitabilità notevole in principio; in fine è nulla. Peso dell'arto prima della circolazione gr. 270. Dopo gr. 300. Tessuto osseo gr. 95.

Sangue	Amcidi in 15 cc.	p. cc. 10 NaOH $^1/_{10}\,n$ d. » 8,2 » »	NH_3 in 100 cc.	d. cc. 3 H_2SO_4 $^1/_{50}\,n$	Corpi acet.ci in 100 cc.	d. cc. 14 I $^1/_{10}\,n$
Organo	Amcidi in gr. 50	p. » 16,4 » » d. » 15,1 » »	NH_3 in gr. 50	p. » 8,7 » » d. » 6,2 » »		

Scompaiono nel sangue aminoacidi per cc. 70,4 NaOH $^1/_{10}\,n$. Diminuiscono nel muscolo per cc. 4,5 NaOH $^1/_{10}\,n$. Risulta un *deficit* per cc. 74,9 NaOH $^1/_{10}\,n$.

*
* *

Dalle riferite esperienze risulta che:

I) facendo circolare aminoacidi sciolti in sangue nel tessuto muscolare funzionante, si avverte una loro diminuzione nel sangue in misura notevolmente superiore a quella osservata nelle analoghe esperienze eseguite sul muscolo in riposo;

II) il fenomeno dell'accumulo di aminoacidi nel tessuto muscolare, che, nelle esperienze con muscolo in riposo, era causa principale della scomparsa degli aminoacidi del sangue, non si presenta nelle esperienze con muscolo funzionante: in alcuni casi, al contrario, si ottenne persino una diminuzione nel contenuto di aminoacidi preesistenti nel tessuto;

III) nelle esperienze eseguite facendo circolare sangue senza aggiunta di aminoacidi in muscolo funzionante, si avvertì spesso una scomparsa percentuale (scarsa in misura assoluta, data la loro quantità limitata) degli aminoacidi contenuti nel sangue e di quelli del tessuto muscolare;

IV) la quantità di NH_3 che si rinviene nel sangue dopo la circolazione, è assai variabile nelle diverse esperienze, senza che però si possano tali oscillazioni mettere in rapporto con un corrispondente comportamento degli aminoacidi: nel senso che ad una maggiore scomparsa di aminoacidi corrisponda sempre, ed in eguale misura, una maggiore quantità di NH_3;

V) ancor più variabile è il risultato ottenuto nelle nostre ricerche sulla formazione di corpi acetonici: nelle esperienze con aminoacidi circolanti essa si mantenne fra limiti assai larghi: nelle esperienze con solo sangue fu sempre scarsissima.

Questo risultato merita una speciale menzione, perchè anzitutto ci dimostra che anche il tessuto muscolare, contrariamente all'affermazione dell'Embden, è capace di formare corpi acetonici ed in notevolissima misura. Ed ancora dimostra che anche l'alanina, la quale, secondo alcune ricerche dell'Embden sul fegato, sarebbe inibitrice della produzione di acetone, può essere invece origine di tale sostanza.

Rispetto poi a quei casi nei quali, pur avendosi una notevole scomparsa di aminoacidi nel sangue, non si ritrova una corrispondente quantità di acetone, una spiegazione può essere data dal fatto che il tessuto muscolare distrugge l'acetone stesso, come fu dimostrato dalle ricerche dell'Embden.

Comparando le cifre dell'NH_3 e quelle dell'acetone allo scopo di determinare il meccanesimo della scomparsa degli aminoacidi, si osserva, in qualche caso, che, di fronte ad una notevole quantità di acetone, la quantità rinvenuta di NH_3 è piuttosto scarsa, inferiore a quella che teoricamente era da attendersi, ammettendo che NH_3 ed acetone abbiano esclusivamente origine della scomposizione degli aminoacidi mancanti.

Tanto più saliente appare il *deficit* sull'NH_3 attesa, in quantochè la quantità di acetone, che abbiamo pur trovata superiore a quella dell'NH_3, era suscettibile, come già si è detto, di essere diminuita per processi di ossidazione.

Ma il quesito è assai più complesso di quanto non appaia a prima vista: altri fattori possono intervenire a complicare la disamina del fenomeno. Come ad esempio la possibilità che l'acetone abbia avuto origine da altre sostanze preesistenti nel muscolo (glicogeno - acidi grassi), e che l'aminoacido agevoli la formazione dell'acetone per un'azione simile a quella dei catalizzatori.

Lasciando che ulteriori ricerche chiariscano se effettivamente, come appare più probabile dai nostri risultati, la scomparsa degli aminoacidi sia dovuta, almeno per la maggior parte, ad un processo di combustione, e non a processi sintetici, un fenomeno molto importante emerge dalle presenti ricerche. Ed è, che, con l'attività funzionale il tessuto muscolare esalta profondamente la capacità di sottrarre gli aminoacidi circolanti nel sangue, allo scopo non di saturarsene, ma di utilizzarli per i processi del proprio metabolismo.

Fenomeno questo, la cui importanza appare tanto più manifesta, allo stato in cui presentemente si trova lo studio del ricambio delle sostanze proteiche in rapporto alla funzione del tessuto muscolare.

E. M.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 25 aprile 1915.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 26 maggio 1915.* **N. 9.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 maggio 1915.

Volume XXIV°. — Fascicolo 9°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 maggio 1915.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla classificazione delle curve algebriche e sul teorema d'esistenza di Riemann.* Nota I del Corrispondente Francesco Severi.

Nel 1901 l'Accademia danese delle Scienze, per iniziativa dello Zeuthen, pose a concorso la questione di ricercare se in ogni famiglia di curve algebriche gobbe, possano esistere forme limiti composte da rette. L'Accademia, nel proporre il tema, aveva di mira soprattutto i problemi numerativi, inerenti alle curve algebriche. Si trattava di dare una base sicura e rigorosa alle formole che erano state ottenute da varî Autori, con spezzamenti delle curve algebriche in curve di ordini inferiori o in rette.

Ma la risoluzione del problema proposto — come del resto accennava l'Accademia danese — avrebbe avuto una portata ben maggiore, giacchè, una volta ottenuta una risposta affermativa alla questione, si sarebbe potuto tentare di ricavarne una classificazione grandemente suggestiva delle curve gobbe, assegnando, come rappresentante tipico di ciascuna famiglia, un sistema *connesso* di rette.

La questione rimase però sinora senza risposta [1]. Di essa io intendo occuparmi nel presente lavoro, ove considero il problema anche in relazione

[1] Tranne che per le curve di genere $p \leq 2$. Vedasi Brill, *Ueber algebraische Raumkurven* (Math. Annalen, 64, 1907), pag. 322.

alle curve iperspaziali. In questa Nota e nella successiva, riassumo i risultati da me ottenuti in proposito, riserbandomi di tornarvi in seguito, con una Memoria più ampia. Tuttavia do fin d'ora notizia non soltanto dei risultati, ma anche dei procedimenti dimostrativi, per ciascun dei quali indico le argomentazioni essenziali.

Dimostro anzitutto che, per $n \geq p + r$, le C_p^n (d'ordine n e genere p) di S_r, formano *una sola famiglia* (varietà algebrica irriducibile) *di dimensione regolare* $v = n(r+1) - (p-1)(r-3)$ ([2]). La curva generica di questa famiglia, è non speciale, e la famiglia stessa dicesi perciò *non speciale.* Anche per $p > n - r \geq \frac{r}{r+1} p$, le C_p^n formano in S_r una sola famiglia regolare, ma la curva generica è in tal caso speciale e normale.

Questi teoremi son fondati essenzialmente sul fatto che la varietà algebrica delle curve piane irriducibili d'ordine n e genere p, è irriducibile ([3]).

Definito poi che cosa deve intendersi per *n-latero (connesso) di genere virtuale (o effettivo)* $p (\geq 0)$, ne deduco, mediante semplici considerazioni proiettive, che, dato in $S_r (r \geq 2)$ un n-latero L di genere effettivo $p \geq 0$, esistono sempre curve razionali (irriducibili) d'ordine n, infinitamente vicine ad L.

Ciò mi permette di concludere che alla varietà V delle curve piane irriducibili C_p^n, appartiene ogni n-latero piano; e da questo, mediante una delicata analisi topologica, *deduco quali sono tutti i possibili spezzamenti delle curve di* V.

Una conseguenza notevolissima delle considerazioni svolte è *il teorema d'esistenza delle funzioni algebriche d'una variabile, che viene così stabilito con mezzi semplici e luminosi, di carattere algebrico-geometrico, i quali son di certo più appropriati alla natura algebrica della questione, di quanto non lo sieno gli strumenti finora usati per la dimostrazione classica del teorema di Riemann* (funzioni armoniche e problema di Dirichlet) ([4]). E quando parlo del teorema di esistenza, intendo alludere non soltanto all'arbitrarietà nella scelta dei $2n + 2p - 2$ punti di diramazione della funzione algebrica ad n rami, di genere p, che si vuol costruire, ma anche alla possibilità di assegnare ad arbitrio le sostituzioni fra gli n rami, attorno ai singoli punti di diramazione.

([2]) Per $r = 3$ il risultato trovasi in Halphen, *Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques* (premiata col premio Steiner 1882) (Journal de l'École polyt., 52, 1882). Ma l'A., non avendo precisato sufficientemente il concetto di « famiglia di curve gobbe », non si ferma a dimostrare che le C_p^n di S_3, per $n \geq p + 3$, costituiscono una sola varietà algebrica *irriducibile.*

([3]) Cfr. Enriques, *Sui moduli d'una classe di superficie algebriche*, ecc. (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, 47, 1912), n. 1.

([4]) Ved. ad es. Picard, *Traité d'analyse* (Paris, Gauthier-Villars, 1905, 2ème éd.), tom. II, chap. XVI.

Continuando (Nota II) lo studio delle curve di $S_r (r \geq 3)$, distinguo i punti doppî che possono acquistare particolari curve *di una data famiglia* V, in *proprî* ed *improprî*, secondo che abbassano o no il genere delle curve della famiglia che li acquistano ([5]). I primi importano lo spezzamento della sviluppabile osculatrice alla curva che li acquista, ma non lo spezzamento della congruenza delle corde; mentre per gli altri accade il contrario.

Nel n. 6 (Nota II) sono finalmente in grado di dimostrare che *ogni famiglia non speciale di* C_p^n $(n \geq p + r)$ *possiede curve limiti così costituite: un* $(n - p)$*-latero connesso attraverso ad* $n - p - 1$ *nodi, insieme a* p *corde generiche di questo.*

Stabilisco quindi, nel n. 8, *l'esistenza di infiniti* n*-lateri di genere* p*, in ogni famiglia, anche speciale, di curve irriducibili* C_p^n *di* S_r, rispondendo così alla questione posta dall'Accademia danese.

Cammin facendo, mi si offre il destro di contare in modo rigoroso l'infinità delle g_n^r speciali, esistenti sopra una curva di dato genere p, a moduli generali (n. 3). Questo computo veniva fatto, con Brill e Noether ([6]), ammettendo implicitamente un postulato.

Alla questione di decidere se un dato n-latero connesso di genere effettivo p, appartenente ad S_r, si possa sempre considerare come il rappresentante tipico d'una famiglia di curve irriducibili di S_r, rispondo in modo affermativo nel n. 9. Ma il risultato non è ancora così espressivo come avrei desiderato, perchè può darsi che la famiglia definita sia di genere $q < p$. A proposito delle condizioni complementari cui deve sottoporsi un n-latero di genere effettivo p, perchè esso definisca una famiglia di curve, senza punti doppî, di genere esattamente uguale a p, mi sono limitato a riferire le mie induzioni e ad indicare i mezzi per giungere al risultato definitivo, che spero di poter dimostrare in seguito ([7]).

([5]) Questa distinzione mi è già stata molto utile nella Nota, *Trasformazione birazionale di una superficie algebrica qualunque, in una priva di punti multipli* (Questi Rendiconti, 23, 1914), pag. 527.

([6]) Brill Noether, *Ueber die algebraischen Funktionen*, ecc. (Math. Annalen, 7, 1873), §§ 9-12; Noether, *Zur Graudlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven* (premiata col premio Steiner 1882) (Berlin. Abh. 1882), pag. 18. Ved. pure Picard, op. cit., pag. 570.

([7]) Avrei potuto rinviare a più tardi la pubblicazione del presente lavoro, in modo da inserirvi anche la dimostrazione di questo risultato, se non avessi creduto che la situazione politica che si va maturando pel nostro Paese, non consentirà fra breve a molti di noi di poter attendere con tranquillità alla ricerca scientifica. Avendo comunicato al sig. Zeuthen, nel marzo scorso, i risultati delle mie ricerche, ne ebbi l'incitamento a pubblicarle subito. Lo Zeuthen anzi, in risposta alla mia comunicazione, mi scriveva in data 29 marzo 1915: « Je crois avoir aussi de mon côté trouvé le moyen de démontrer l'existence des courbes dégénérées... mais mes recherches sont encore loin d'être achevées ».

Termino la Nota II indicando i varî problemi a cui portan nuova luce i risultati precedenti (questioni di postulazione, problemi numerativi, questioni di realità delle curve algebriche). Quanto ai problemi numerativi, la conclusione è, come si prevedeva, che le formole ottenute mediante gli spezzamenti delle curve, non soffrono eccezioni o limitazioni.

1. Preliminari. — Parlando di *famiglia* di curve di dato ordine n in S_r, intendiamo di alludere, con Noether, ad una varietà algebrica V di curve, *irriducibile*, come insieme de' suoi elementi (curve) e *completa*, cioè che non sia contenuta in una più ampia di curve dello stesso ordine. Una *sottofamiglia* è una varietà irriducibile V' di curve d'ordine n, *completa relativamente* ad un'assegnata proprietà delle sue curve.

Due famiglie di curve dello stesso ordine hanno generalmente in comune una o più sottofamiglie.

Dalla definizione di famiglia di curve, segue subito che *ogni sistema continuo, cui appartenga una curva scelta genericamente entro una famiglia* V, *giace interamente in* V.

2. Irriducibilità della varietà di tutte le curve irriducibili di dato genere p e della varietà di tutte le curve piane irriducibili di ordine n con $d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$ punti doppî. — Le curve piane di ordine n, con d punti doppî, formano una varietà Σ di dimensione $3n+p-1$, alla quale appartiene la varietà V delle curve *irriducibili* di ordine n e genere p. Oltre a questa, vi sono d'ordinario in Σ altre varietà ∞^{3n+p-1}, di curve spezzate, con d punti doppî; ma quel che importa di osservare è che *la varietà* V, *di dimensione* $3n+p-1$, *è irriducibile*. Questo fatto, come ho detto, è già stato segnalato da Enriques, il quale, trattando incidentalmente la questione, si è limitato ad esporre le linee essenziali del procedimento dimostrativo, che io mi propongo di sviluppare più ampiamente nella Memoria cui queste Note preludono.

La semplice dimostrazione di Enriques, è strettamente geometrica. Da essa segue subito che *le curve di dato genere* p, *formano una varietà algebrica* H *irriducibile* (avente per elementi le classi di curve di genere p birazionalmente identiche).

A questo medesimo risultato si perviene d'altronde facilmente poggiandosi sul teorema d'esistenza di Riemann ([8]). Basta all'uopo osservare: che ogni curva di genere p, può rappresentarsi sulla retta (sfera complessa) n-pla, con $2n+2p-2$ punti di diramazione *semplici*, sempre che sia p. es. $n > 2p$; che ordinati i cappî (o le sostituzioni) inerenti ai singoli

([8]) La cosa trovasi già accennata in Klein, *Ueber Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen* (Leipzig, 1882), pag. 66; oppure, *Riemannsche Flächen* (Autogr. Vorlesungen, Göttingen, 1894), I, pag. 117.

punti di diramazione, alla maniera di Lüroth-Clebsch, ne segue subito la possibilità di far circolare il gruppo di diramazione, a partire da una posizione iniziale e ritornandovi, per guisa da scambiare tra loro due diverse distribuzioni delle sostituzioni stesse. Le superficie di Riemann, birazionalmente distinte, costruite a partire da un dato gruppo di diramazione, si possono quindi, per una conveniente circolazione del gruppo, scambiare fra loro. E da ciò segue l'asserita irriducibilità di H.

Ritengo probabile che la varietà H sia razionale o quanto meno che sia riferibile ad un'involuzione di gruppi di punti in uno spazio lineare S_{3p-3}; o, in altri termini, che *nell'equazione di una curva piana di genere* p (*e p. es. dell'ordine* $p+1$) *i moduli si possano far comparire razionalmente.* La considerazione delle curve piane minime di dato genere p, mostra agevolmente che questo fatto è vero per $p \leq 11$ (per $p=0, 1$ si vede anzi subito che la varietà H è addirittura razionale); la considerazione delle curve sghembe minime di genere p, definite come intersezioni parziali di superficie, permette di salire ad ulteriori valori di p; ecc.

3. Curve canoniche. Valutazione rigorosa dell'infinità delle serie lineari g_n^r sopra una curva di dato genere, a moduli generali. — La valutazione dell'infinità d delle g_n^r non speciali, sopra una curva di genere p, si fa notoriamente, in modo completo, colla massima facilità (⁹), e si trova:

$$d = (r+1)(n-r) - rp. \tag{1}$$

Si vede anche subito che, sopra una data curva di genere p, le g_n^r *non speciali formano una varietà irriducibile* (che è l'insieme delle coppie di elementi d'una varietà di Jacobi del genere p e della varietà degli S_r, appartenenti ad un S_{n-p}).

Quanto alla valutazione dell'infinità d delle g_n^r speciali, la cosa è assai più delicata. Brill e Noether ragionano in un modo che è sostanzialmente equivalente a questo: Sopra la curva canonica Γ di S_{p-1}, i gruppi G_n speciali, individuanti serie complete di dimensione r, sono staccati su Γ da spazî S_{n-r-1}. Ora, poichè per un S_{n-r-1} di S_{p-1} l'appoggiarsi ad una data curva è condizione $(p-n+r-1)$-pla, gli S_{n-r-1} n-secanti di Γ, dipenderanno *generalmente* da

$$(n-r)(p-n+r) - n(p-n+r-1) = n - r(p-n+r) \tag{2}$$

parametri; e siccome gli spazî stessi si distribuiscono in sistemi ∞^r, cor-

(⁹) Ved. per es. le mie *Lezioni di geometria algebrica* (Padova, Draghi, 1908), pag. 197. Di queste *Lezioni* era quasi pronta una traduzione tedesca ampliata (edita da Teubner), quando scoppiò la guerra europea. Ora è tutto sospeso.

rispondenti ciascuno ad una g_n^r completa, d risulterà anche in tal caso espresso da (1) [10].

Ma tutto ciò è subordinato all'ipotesi che le condizioni contate siano fra di loro indipendenti; e quest'indipendenza non può affatto *a priori* giustificarsi colla *generalità* dei moduli di Γ. Per completare in questo punto delicato la valutazione dell'infinità d, io procedo così: Le curve canoniche Γ, in virtù di quanto s'è detto al n. 2, formano nello S_{p-1} una sola famiglia, dipendente da $k=(p-1)(p+4)$ parametri. Entro questa famiglia vi sono ∞^{k-1} curve irriducibili Γ_0, di genere $p-1$, con un punto doppio, costituenti una sola sottofamiglia, giacchè ognuna delle Γ_0 è imagine proiettiva della serie staccata sopra una curva piana d'ordine $p+1$, con $\frac{1}{2}p(p-3)+1$ punti doppî, dalle curve d'ordine $p-2$ passanti per $\frac{1}{2}p(p-3)$ di questi punti. Una Γ_0 si proietta dal suo punto doppio, sopra un S_{p-2}, secondo una curva canonica del genere $p-1$. Viceversa, ogni tal curva canonica può considerarsi come proiezione di una (anzi di infinite) Γ_0.

Supposto dimostrata la formola (1) pel genere $p-1$, si assuma una Γ_0 a moduli generali, col punto doppio O, e si contino i suoi spazî plurisecanti, desumendoli da quelli di una curva canonica del genere $p-1$, e tenendo conto che, quando una Γ va in Γ_0, la varietà delle corde di Γ ha per limite la varietà delle corde di Γ_0 (perchè O è un punto doppio proprio, ved. n. 5), e che inoltre le sole corde improprie di Γ_0, sono le sue tangenti e le rette del fascio individuato dalle due tangenti in O.

Così ad es. la curva canonica Γ^8 del genere 5 (in S_4) non può avere alcuna trisecante, perchè il gruppo G_3 relativo, individuerebbe una g_3^1, cioè Γ possiederebbe infinite trisecanti, e quando Γ tendesse verso una Γ_0 generica col punto doppio O, si avrebbero, come limiti delle ∞^1 trisecanti di Γ, ∞^1 trisecanti *effettive* di Γ_0 e per un punto generico M di Γ_0 ne passerebbe un numero finito. Facendo avvicinare M ad O, se ne trarrebbe che la più generale curva canonica del genere 4 (in S_3) possiede punti doppî. Similmente Γ non può possedere più che ∞^2 piani quadrisecanti, perchè altrimenti la curva canonica del genere 4 possiederebbe più che ∞^1 trisecanti, ecc. [11].

[10] Se i moduli son generali, l'ordine e la dimensione di una g_n^r speciale completa, soddisfaranno quindi alla $d \geqq 0$, la quale, introducendo l'indice di specialità $i=p-n+r$ della g_n^r, può scriversi sotto la forma $n \geqq (i+1)r$. Si ha così *un'estensione del teorema di Clifford, valida sulle curve a moduli generali.* A quali condizioni particolari deve soddisfare la curva, perchè una g_n^r speciale completa abbia $n<(i+1)r$? Per $i=2$, $n<p-1$, il Comessatti ha trovato che la g_n^r deve essere composta con una γ_2^1.

[11] Naturalmente, nel caso speciale della Γ_5^8, tutto ciò deriva anche dal fatto ch'essa è completa intersezione di 3 quadriche.

In tal modo dunque si verificherà, in generale, che Γ_0 non possiede più spazî n-secanti di quanti son dati dalla (2), e ne seguirà la validità della (1) per qualunque p.

Quanto alle g_n^r speciali incomplete, la loro infinità è minore di (1); cosicchè la loro aggiunta non altera l'infinità d delle g_n^r contenute in Γ. Se ne trae subito, come hanno fatto Brill e Noether per $r=3$, che *le curve irriducibili* C_p^n *dello* S_r, *quando* $n \geq \frac{r}{r+1} p + r$, *dipendono da*

$$(3) \qquad \nu = n(r+1) - (p-1)(r-3),$$

costanti.

Per $n \geq p + r$ $(r \geq 2)$ un generico gruppo di n punti sopra una Γ_p (a moduli anche particolari) è non speciale, e individua pertanto una g_n^{n-p} di dimensione $n - p \geq r$, cosicchè le C_p^n di S_r, birazionalmente identiche a Γ_p, formano una varietà irriducibile di curve generalmente non speciali. Se ne deduce (n. 2) che:

Per $n \geq p + r$, *le curve* C_p^n *di* S_r $(r \geq 2)$ *formano una sola famiglia di dimensione* (3), *la cui curva generica è non speciale* (*e normale in* S_{n-p}).

Una tale famiglia si chiamerà una *famiglia non speciale* di curve di S_r.

Per $r + \frac{r}{r+1} p \leq n < p + r$ $(r \geq 2)$, sopra Γ_p ogni g_n^r è speciale ed è generalmente completa. In tal caso però la varietà delle g_n^r su Γ_p *non è sempre irriducibile* ([12]). Comunque, un procedimento analogo a quello già accennato (passaggio dal genere $p-1$ al genere p), mostra che, facendo circolare Γ_p nella propria famiglia, si riesce a scambiare fra loro le diverse parti della suddetta varietà. Si può dunque anche in tal caso affermare che:

Per $p > n - r \geq \frac{r}{r+1} p$ *le* C_p^n *di* S_r *formano una sola famiglia, di dimensione* (3), *la cui curva generica è speciale e normale.*

4. Sistemi connessi di rette. Dimostrazione geometrica del teorema di esistenza di Riemann. — Un sistema *connesso* di n rette con $n + p - 1$ $(p \geq 0)$ intersezioni *semplici* (nodi), si chiamerà brevemente un *n-latero di genere effettivo* p. Gli $n + p - 1$ nodi si considerano come punti in cui si può passare da un lato (ramo) all'altro; si riguardano cioè piuttosto come « punti di diramazione » che come punti doppî. Si dice perciò che essi si considerano come *virtualmente inesistenti*, rispetto alle loro qualità di punti doppî, che non permetterebbe il salto da un ramo all'altro.

Se dei suddetti nodi effettivi, se ne possono considerare come inesistenti soltanto $n + q - 1$ $(q < p)$, *senza che per questo lo n-latero divenga*

([12]) Si pensi p. es. alle due g_3^1 distinte esistenti sopra la curva canonica del genere 4.

sconnesso, si dirà che q è il *genere virtuale* dello n-latero, in quanto si considerino come *assegnati* i $p-q$ nodi rimanenti.

Abbiasi un n-latero di genere effettivo o virtuale $p>0$. Se assegnando uno de' suoi nodi, che prima si consideravano inesistenti, si rompe la connessione, lo n-latero non potrà scindersi che in *due* soli pezzi connessi. Se ne deduce facilmente che « si posson sempre scegliere p nodi convenienti, « fra quelli che prima stabilivano la connessione, per guisa da ottenere, « assegnandoli, un n-latero (si sottintende connesso) di genere virtuale zero ».

Ciò posto, mediante elementari considerazioni geometriche, si prova, col processo d'induzione, che « un n-latero di genere effettivo $p \geqq 0$, appar- « tenente ad S_r ($r \geqq 2$), è sempre proiezione di un n-latero di genere « effettivo zero, appartenente ad S_n ».

La generazione proiettiva delle curve razionali normali mediante stelle omografiche, permette inoltre di provare agevolmente, sempre per induzione, che « esistono curve razionali (irriducibili) di ordine n, infinitamente vicine « ad un n-latero di genere effettivo zero, dato in S_n ». Donde poi, a cagione della proposizione precedente, segue che *esiste sempre qualche curva razionale (irriducibile) d'ordine n, infinitamente vicina ad un n-latero* L, *di genere effettivo* $p \geqq 0$, *dato in* S_r.

Un nodo P di L può essere di tre specie, rispetto ad una curva razionale C, infinitamente vicina ad L:

a) P può essere un « punto di diramazione », per guisa che i due lati incrociantisi in P, sieno sostituiti in C da *un sol ramo*. Di tali punti ne esistono $n-1$ e possono essere scelti *a priori*, purchè sufficienti a stabilire la connessione;

b) oppure P può essere infinitamente vicino ad un nodo di C;

c) o infine i due rami incrociantisi in P possono essere sostituiti in C da *due* rami, colle origini distinte, ma infinitamente prossime a P.

I punti di *una* delle ultime due specie possono anche mancare; mancano simultaneamente solo quando $p=0$.

Consideriamo, in particolare, il caso di $r=2$. Assegnando allora $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ degli $\frac{n(n-1)}{2}$ nodi dello n-latero piano L (sempre però in modo che gli $n-1$ punti residui bastino a stabilire la connessione), si avranno curve razionali infinitamente vicine ad L e cogli $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punti doppî infinitamente prossimi ai prefissati. Vuol dire che alla varietà (irriducibile, n. 2) delle curve piane razionali d'ordine n, appartengono tutti i possibili n-lateri piani: il che si sarebbe potuto stabilire anche usufruendo della rappresentazione parametrica. E poichè la varietà di tutte le curve piane irriducibili d'ordine n con d punti doppî, contiene la varietà delle curve con $d+1$, $d+2$, ..., punti doppî, così si conclude che:

La varietà delle curve piane irriducibili d'ordine n con

$$d \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

punti doppî, contiene tutti i possibili n-lateri piani.

Un'altra conseguenza notevole, la quale del resto potrebbe dimostrarsi anche profittando del teorema riemanniano d'esistenza, è la seguente:

Avendosi un n-latero piano L, si assegnino $d \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ dei suoi punti doppî, per modo che coi rimanenti $\frac{n(n-1)}{2} - d$ nodi si possa stabilire la connessione fra gli n lati. Esiste allora sempre qualche curva irriducibile d'ordine n, infinitamente vicina ad L, la quale possiede d, e soltanto d, nodi, infinitamente vicini agli assegnati.

Ecco la semplice dimostrazione geometrica di questo teorema.

Posto $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$, fra gli $n+p-1$ nodi, che si vogliono considerare inesistenti, se ne potranno assegnare p, in modo che lo n-latero resti connesso (e di genere virtuale zero). Dopo ciò si potrà costruire una curva razionale D, infinitamente vicina ad L, e con $p+d$ nodi infinitamente vicini ad altrettanti vertici di L, tra i quali vi sono i d primitivamente assegnati.

Nella varieta V delle curve piane irriducibili C_p^n esistono dunque curve infinitamente vicine ad L, e coi d nodi infinitamente vicini agli assegnati: p. es. la curva D. Queste curve non possono tutte in conseguenza avere $d+1$ (o più) punti doppî, perchè entro V gli elementi (curve), infinitamente vicini ad un elemento dato (L), son più numerosi che gli elementi infinitamente vicini ad L, entro una varietà subordinata a V, qual'è quella delle curve irriducibili d'ordine n con $d+1$ nodi.

Dal teorema precedente segue quest'altro:

Alla famiglia V delle curve piane irriducibili d'ordine n e genere p, appartiene ogni curva composta da una curva irriducibile di ordine $n-1$ e genere $p-1$ e da una retta.

Prese infatti n rette generiche $a_1, a_2, \dots, a_n$ del piano, si « assegnino » $d - n + 3 \left(d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p\right)$ vertici dello $(n-1)$-latero $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$, per guisa che esso resti connesso, e si chiami K la curva d'ordine $n-1$ e genere virtuale $p-1$, così ottenuta. Aggiungendo a K la retta a_n, se si assegnano gli $n-1$ punti ove a_n sega K, si ottiene una curva *sconnessa* D_0, d'ordine n e di genere virtuale $p-2$; se invece si assegnano soltanto $n-3$ delle suddette intersezioni, e si considerano come inesistenti le altre due P, Q, si ottiene una curva *connessa* C_0 d'ordine n e di genere

virtuale p. Ora, pel teorema precedente, vi sono curve irriducibili di V, infinitamente vicine a C_0 e *coi d nodi infinitamente prossimi agli assegnati*; e poichè esistono ∞^h $(h = 3n + p - 3)$ curve di V passanti per P, Q, e tra esse v'è C_0, così esisteranno ∞^{h-1} curve di V, passanti per P, Q, infinitamente prossime a C_0 e coi d nodi infinitamente vicini agli assegnati. Ciascuna di queste curve, in quanto passa per P, Q ed è infinitamente vicina a C_0, ha un nodo infinitamente prossimo a ciascuno dei punti P, Q ([13]), sicchè è una curva infinitamente prossima alla D_0, coi suoi $d + 2$ punti doppî assegnati. Ne consegue che D_0 appartiene a V, e precisamente alla totalità Σ delle curve di V con $d + 2$ nodi, la qual totalità ha dimensione non inferiore ad h. La Σ potrà ben essere riducibile (anzi, come vedremo, lo è effettivamente); ma comunque D_0 giacerà in una *parte* irriducibile W di Σ, di dimensione almeno uguale ad h. Poichè una particolare curva, D_0, di W, è sconnessa, lo saranno tutte ([14]): la curva generica D di W risulterà cioè composta da una parte E, d'ordine $n - 1$ e genere virtuale $p - 1$ e da una retta a. Dico che E è irriducibile. Invero, se E fosse spezzata in λ curve $E_1, E_2, \ldots, E_\lambda$ di ordini $n_1, n_2, \ldots, n_\lambda$ e di generi $p_1, p_2, \ldots, p_\lambda$ con t punti d'intersezione da considerarsi come inesistenti, sarebbe $p - 1 = \Sigma p_i + t - \lambda + 1$, e poichè E è connessa, dovrebbe essere $t > 0$. Ora, una curva irriducibile, d'ordine n_i e genere p_i, dipende da $3n_i + p_i - 1$ costanti; sicchè E dipenderebbe al più da $3\Sigma n_i + \Sigma p_i - \lambda$ costanti, e quindi $D = E + a$, al più da $3n + p - 3 - t$ parametri, mentre prima abbiamo trovato che la dimensione di W è almeno $3n + p - 3$. Si conclude che la generica E è irriducibile. D'altra parte la varietà W' di *tutte* le curve spezzate in una curva irriducibile d'ordine $n - 1$ e genere $p - 1$ ed in una retta, è irriducibile e dipende precisamente da $3n + p - 3$ costanti: dunque W coincide con W' e resta così stabilito il teorema enunciato.

Più in generale si prova in modo analogo, col processo d'induzione, che *la condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva spezzata* C *d'ordine n, appartenga alla varietà delle curve irriducibili d'ordine n e genere p, è che si possano scegliere alcuni nodi di* C, *in tal numero ed in tal posizione, che considerandoli come virtualmente inesistenti, si ottenga da* C *una curva connessa di genere virtuale p.*

Così p. es. alla varietà delle quartiche ellittiche irriducibili appartengono tutte le curve spezzate in una cubica ellittica ed in una retta, mentre

([13]) Cfr. Severi, *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari*, ecc. (Rend. del Circolo mat. di Palermo, 20, 1905), n. 1, 2°).

([14]) Questa considerazione equivale in sostanza ad un ben noto principio di Enriques, che cioè una curva variabile con continuità, non può spezzarsi senza acquistare nuovi punti doppî. Ved. Enriques, *Sulla proprietà caratteristica delle superficie irregolari* (Rend. della R. Accad. delle Scienze di Bologna, dicembre 1904).

queste curve non appartengono alla varietà delle quartiche razionali irriducibili, perchè non possono considerarsi in alcun modo come curve connesse di genere virtuale zero.

Da quanto precede risulta che, se in una generica $D = E + a$ di W, si assegnano i $d - n + 3$ nodi di E ed $n - 3$ soltanto delle intersezioni di E con a, considerando come inesistenti le altre due P, Q, si ottiene una curva « totale » di V ed alla D sono pertanto infinitamente vicine curve irriducibili di V, che hanno i loro d nodi infinitamente vicini agli assegnati.

Queste considerazioni sono importanti, perchè, come ho già detto, da esse si trae una *dimostrazione algebrico-geometrica del teorema di esistenza di Riemann.* Si prova, infatti, anzitutto geometricamente, premettendo il computo del numero dei moduli di una curva di genere p ([15]), che il gruppo di diramazione $G_{2n+2p-2}$ di una funzione algebrica ad n rami, u_1, $u_2, \ldots, u_n$, di genere p, può assumersi ad arbitrio sulla retta n-pla (sfera complessa) u ([16]).

Ciò posto, per dimostrare che si possono scegliere arbitrariamente anche le sostituzioni in G (purchè beninteso mediante esse la costruenda funzione risulti connessa), si distribuiscano i punti di G in $\sigma = n + p - 1$ coppie A_i, B_i $(i = 1, \ldots, \sigma)$ permutanti ciascuna gli stessi due rami. Avendo dimostrato la possibilità dell'arbitraria scelta di G, è chiaro che basterà stabilir l'esistenza della funzione algebrica richiesta, quando i punti di due coppie, per es. A_1, B_1 ; A_2, B_2, tendono rispettivamente alle medesime posizioni limiti H_1, H_2, trascinandosi dietro le relative sostituzioni. Nè a cagione dei risultati topologici di Lüroth-Clebsch, i quali sono indipendenti da ogni questione di esistenza, è restrittivo il supporre, finchè $p > 0$, che le coppie A_1, B_1 ed A_2, B_2 permutino entrambe gli stessi rami u_1, u_2, e che questi quattro punti di diramazione sieno anzi i soli operanti su u_1. Astraendo allora da questi punti, i rami $u_2, \ldots, u_n$ restano connessi, e, ammesso dimostrato il teorema per le funzioni di genere $p - 1$ ad $n - 1$ rami, appena sia $n \geq p + 2$, si potrà costruire, in un piano per u, una curva E d'ordine $n - 1$, la quale si proietti da un centro O, sulla retta $(n - 1)$-pla $u \equiv$ $\equiv (u_2, u_3, \ldots, u_n)$, diramata nel modo assegnato nei punti $A_3, B_3, \ldots, A_\sigma, B_\sigma$.

Conducasi la retta OH_1, e fra gli $n - 1$ punti ov'essa taglia E, scelgasi quello, P, che si proietta sul ramo u_2; e similmente su OH_2 si scelga quel punto Q di E, che corrisponde ad u_2.

Posto $a \equiv PQ$, la curva composta $E + a$ proiettasi da O su u secondo la retta n-pla $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ — ove u_1 è la proiezione di a — ed è dira-

([15]) Cfr. ad es. le mie citate *Lezioni*, pag. 196. Nell'edizione tedesca ho colmato una lacuna esistente in questo punto e che nelle *Lezioni* non avevo mancato di segnalare in modo esplicito.

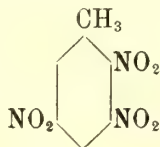
([16]) Cfr. Enriques, *Sui moduli d'una classe* ecc. (citata), n. 1.

mata secondo il convenuto nei punti $H_1, H_2, A_3, B_3, \dots, A_\sigma, B_\sigma$. Una curva irriducibile C, d'ordine n e genere p, infinitamente prossima alla $E + a$ (nella quale i nodi P, Q si riguardino come inesistenti), proiettata da O su u, risolve la proposta questione di esistenza.

Si ha così un processo di riduzione da p a $p-1$, mediante il quale, avendo supposto che sia $n \geq p + 2$, ci si riduce a dimostrare il teorema per le curve razionali. E per queste poi lo si stabilisce usufruendo del fatto che, assegnati su u $n-1$ punti di diramazione doppî $H_1, H_2, \dots, H_{n-1}$, e le sostituzioni permutanti in essi i rami $u_1, u_2, \dots, u_n$, esiste sempre, in un piano per u, un n-latero $L \equiv a_1 a_2 \dots a_n$, che si proietta dal centro O su u secondo la retta n-pla $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ diramata nel modo prefissato. Una curva razionale irriducibile, d'ordine n, infinitamente vicina ad L, ove si riguardino come inesistenti i nodi di L, che dànno per proiezioni i punti H, risponde allora alla questione di esistenza.

Chimica. — *Il quinto trinitrotoluene, (ε), e prodotti dinitro-alogeno-sostituiti corrispondenti.* Nota del Socio G. Körner e del dott. A. Contardi.

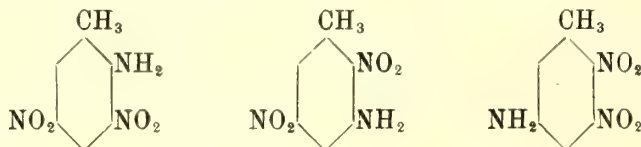
Continuando le nostre ricerche intorno ai trinitrotolueni isomeri, per giungere alla preparazione dei due termini ancora ignoti, abbiamo voluto applicare ancora la reazione di sostituzione del gruppo nitrosilico a quello amidico in binitrotoluidine, convenientemente scelte, collo stesso procedimento da noi precedentemente usato [1]. Oggetto di questa Nota è lo studio del nuovo trinitrotoluene:

CH_3; NO_2 (2); NO_2 (3); NO_2 (5)

e di alcuni dinitroalogenotolueni corrispondenti.

Le dinitrotoluidine che per sostituzione del gruppo amidico col nitrosile possono dare il trinitrotoluene cercato, sono le seguenti:

CH_3; NH_2 (2); NO_2 (3); NO_2 (5)

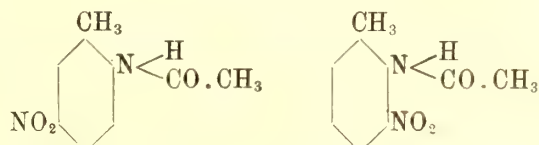
CH_3; NO_2 (2); NH_2 (3); NO_2 (5)

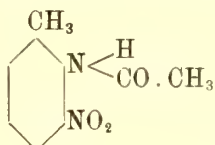
CH_3; NO_2 (2); NO_2 (3); NH_2 (5)

[1] Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXIII, ser. 5ª, 1° sem., fasc. 5°; fasc. 9°; 2° sem. fasc. 10°.

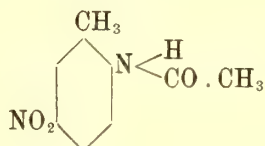
epperò le nostre precedenti esperienze ci hanno dimostrato che la sostituzione di un amido-gruppo con un nitrosile in un'amina aromatica nitrosostituita avviene assai facilmente quando il nitro-gruppo od i gruppi nitrici si trovano in posizione orto- o para- rispetto al gruppo amidico; difficilmente e con rese basse quando i nitro-gruppi si trovano nella posizione meta: era quindi naturale che si scegliesse come prodotto di partenza la prima di queste dinitro-toluidine; e ciò anche perchè già nota e facilmente ottenibile.

La binitrotoluidina 1.2.3.5 (CH_3 in 1, NH_2 in 2) era stata preparata da tempo [1] trattando l'etere etilico del dinitro-orto-cresolo con ammoniaca alcoolica. Allo scopo di poter disporre di quantità piuttosto grandi di questa binitrotoluidina, ne abbiamo studiati altri modi di preparazione.

Era noto, dai lavori del Lellmann e del Würthner [2], che, se si tratta l'acetil-derivato dell'ortotoluidina con una miscela di acido nitrico ed acetico, si ottengono le due mononitroacetotoluididi isomere:

CH_3 — $N<^{H}_{CO.CH_3}$ — NO_2 (formula di struttura) CH_3 — $N<^{H}_{CO.CH_3}$ — NO_2 (formula di struttura)

La miscela di queste due toluididi veniva fino ad ora lavorata, saponificando parzialmente con potassa caustica in soluzione alcoolica la miscela stessa, di modo che rimaneva inalterata, come più stabile, la nitrotoluidide:

CH_3 — $N<^{H}_{CO.CH_3}$ — NO_2 (formula di struttura)

che si separava dall'altra toluidina formatasi, per cristallizzazione dall'alcool, in granelli duri. Noi abbiamo seguìto lo stesso processo di nitrazione, ma abbiamo separato le due toluididi per cristallizzazione frazionata dall'alcool. Le porzioni meno solubili in questo solvente, ripetutamente ricristallizzate, dànno la toluidide

CH_3 — $N<^{H}_{CO.CH_3}$ — NO_2 (formula di struttura)

[1] Städel, Liebigs Annalen, *217*, pp. 183-184.
[2] Liebigs Annalen, *228*, pag. 240.

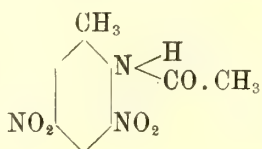
in brevi aghi bianchi, solubili a caldo in 15 parti di alcool e fusibili a 201°,6 gradi.

Dalle acque madri, per ripetute cristallizzazioni da soluzioni assai diluite, si ottiene la seconda nitroacetotoluidide cristallizzata in grossi prismi a tavole splendenti fusibili a 158°.

Se queste due acetotoluididi separatamente, o la loro miscela, si trattano con sei volte il loro peso di acido nitrico della densità 1,52 alla temperatura di 0°, versando dopo qualche ora il prodotto della reazione in ghiaccio finamente diviso, si ottiene la binitrotoluidide nuova:

CH_3

$N<{H \atop CO.CH_3}$

NO_2 NO_2

Cristallizzata dall'alcool, si presenta in sottilissimi e brevi aghetti bianchi fusibili a 205°,2. La determinazione quantitativa dell'azoto ha dato:

Sostanza impiegata gr. 0,364.

Azoto cc. 55 a $t = 5°$ $h = 735^{mm}$.

Azoto trovato 17,86 %

" calcolato per $C_9H_9O_5N_3$ 17,69 %.

Dalla dinitroacetotoluidide si può facilmente ottenere la corrispondente toluidina, riscaldando per 10 minuti a 105° con acido solforico concentrato preso nella proporzione di circa 6 volte il peso, e versando in acqua. La binitrotoluidina così preparata è purissima e fonde a 213°. È da notarsi che con anidride acetica non si era potuta trasformare mai la binitrotoluidina nel corrispondente acetilderivato.

Si può giungere anche direttamente alla dinitroacetotoluidide sopra descritta partendo dalla ortoacetotoluidina, introducendola, in piccole porzioni, in sei volte il suo peso di acido nitrico della densità 1,52, mantenendo costantemente a 0° la miscela.

Il prodotto della reazione, dopo qualche ora, viene versato in ghiaccio, e il precipitato vien raccolto su filtro; si purifica cristallizzando dall'alcool. La resa è però assai scarsa.

Molto più convenientemente si arriva alla dinitrotoluidina cercata nitrando l'etere metilico od etilico dell'ortocresolo, e riscaldando questi eteri con ammoniaca alcoolica.

In un bicchiere di ferro smaltato, raffreddato con una miscela frigorifera, venivano introdotti 500 grammi di acido nitrico della densità 1,5. Il liquido era violentissimamente agitato mediante un'elica di vetro mossa da un motorino elettrico, e, goccia a goccia, veniva aggiunto l'etere etilico dell'orto-

cresolo, purissimo, bollente a 184°-184°,5; ogni goccia fa, in contatto collo acido nitrico, una piccola esplosione.

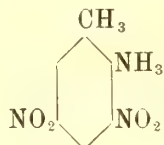
A reazione finita, versato in acqua il prodotto e lavatolo, lo si cristallizzava da alcool. Si ottennero, così, piccoli aghetti bianchi fusibili a 58°,4, estremamente sensibili alla luce, che li rende subito brunicci.

In modo perfettamente analogo, sostituendo l'etere metilico dell'ortocresolo a quello etilico, si preparò il dinitro-ortocresolato metilico, affatto simile nell'aspetto al precedente, meno sensibile alla luce e fusibile a 66°,5.

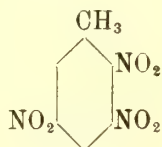
Preparammo ancora i due eteri del dinitro-cresolo sopra descritti, trattando con lo ioduro metilico od etilico il sale di argento del dinitro-ortocresolo; anche così si ottengono i due eteri, identici nelle proprietà a quelli avuti per nitrazione diretta.

In questa preparazione ultima si deve però notare che la reazione tra lo ioduro alcoolico ed il sale di argento può diventare così violenta da produrre l'esplosione della massa; nè si può diluire lo ioduro alcoolico con un solvente inerte (alcool metilico assoluto, etere o benzolo), perchè in tal caso la reazione non si effettua più a temperatura ordinaria ed il riscaldamento produce profonda alterazione delle sostanze. Per raggiungere lo scopo, bisogna impiegare un grande eccesso di ioduro metilico, tanto, cioè, quanto basta per bagnare tutta la massa del sale di argento, trasformandola in una molle poltiglia.

Comunque ottenuti, i due eteri del dinitroortocresolo, per trattamento con ammoniaca alcoolica a freddo, dopo qualche giorno, o a 100° dopo qualche ora, dànno quantitativamente la dinitrotoluidina

CH_3
NH_3
NO_2 NO_2

Essa si presenta, se cristallizzata dall'alcool in cui è pochissimo solubile, in piccoli aghi piatti di color giallo-limone chiaro, fusibili a 213°; è poco solubile in tutti i solventi organici generalmente usati.

Trinitrotoluene (ε)

CH_3
NO_2
NO_2 NO_2

Si sospesero gr. 19 della dinitrotoluidina sopra descritta, finamente polverizzata, in gr. 35 di acido nitrico della densità 1,40, raffreddato il tutto

a 0°; la poltiglia ottenuta si fece attraversare da una corrente di vapori nitrosi, fino a che tutto si sciolse nel liquido verde formatosi. Fatta attraversare indi la soluzione da una rapida corrente d'aria, si scacciò l'eccesso dei vapori nitrosi; la soluzione di nuovo si intorbida, e precipita il nitrato del diazodinitrotoluene. La poltiglia si versò allora sopra ghiaccio pestato (3-4 chilogrammi) e si trattò con una soluzione di nitrito sodico (gr. 60 di nitrito sodico in gr. 500 di acqua). Immediatamente si svolgeva azoto e precipitava il trinitrotoluene formatosi. Dopo circa dodici ore di riposo in ambiente tiepido, si raccoglie il precipitato su filtro, lo si lava con acqua e si tratta il prodotto greggio con quattro volte il suo peso di acido nitrico della densità 1,40 a bagnomaria per qualche tempo, e cioè fino a quando non più si svolgono vapori rossi. Per raffreddamento della soluzione nitrica, si ottengono bellissimi cristalli quasi bianchi; aspirati, lavati con acqua, ricristallizzati due volte dall'alcool, sono chimicamente puri e fondono costantemente a 97°,2. La resa è del 90 %.

Sottoposti alla determinazione dell'azoto gr. 0,123 di sostanza diedero:

Azoto cc. 19 a $t = 8°$ $h = 758^{mm}$.

Azoto trovato = 18,53 %

" calcolato per $C_7H_5N_3O_6$ = 18,50 %.

Da una miscela di etere ed alcool il nuovo trinitrotoluene cristallizza in grossi prismi ben sviluppati, leggiermente giallognoli.

Le costanti cristallografiche forniteci dal prof. Artini sono le seguenti:

Sistema rombico classe bipiramidale

$$a:b:c = 0,6363:1:0,3725 .$$

Forme osservate

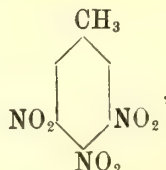
[100], {001}, {110}, {101}, {201}, {121}, {241}

100 . 110 = 32°,28′

001 . 101 = 30°,21′.

Piano degli assi ottici {010}. Bisettrice acuta positiva normale a {001}. Dispersione degli assi ottici appena sensibile: $\varrho < v$.

Per il trinitrotoluene (δ) da noi descritto nella Nota precedente (1), avente la costituzione

CH_3 (anello benzenico con NO_2, NO_2, NO_2),

i dati cristallografici ottenuti dal prof. Artini sono i seguenti:

(1) Körner e Contardi, loc. cit.

Sistema monoclino classe prismatica

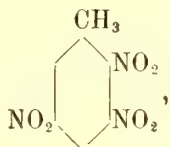
$$a:b:c = 1{,}4275:1:0{,}9176$$
$$\beta = 58°{,}36'\,.$$

Forme osservate:

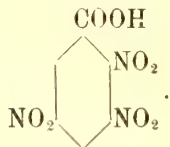
$$\{100\}, \{110\}, \{001\}, \{\bar{1}11\},$$
$$100\,.\,110 = 50°{,}37'\,,$$
$$100\,.\,001 = 58°{,}36'\,,$$
$$\bar{1}11\,.\,\bar{1}10 = 54°{,}7'\,.$$

Sfaldatura perfetta, abbastanza facile, secondo $\{001\}$. Piani degli assi ottici normali al piano di simmetria. Dalla faccia di sfaldatura escono, alquanto obliquamente, le bisettrici acute negative. Dispersione orizzontale percettibile ma debole. Dispersione degli assi ottici piuttosto forte: $\varrho > v$.

Il *trinitrotoluene*

CH_3 / NO_2 / NO_2 / NO_2 ,

sciolto in acetone, per aggiunta di qualche goccia di ammoniaca, dà una colorazione rosea da prima, poi rossa, poi bruna fino al nero. Reagisce colla massima facilità cogli alcali.

Coll'ammoniaca alcoolica a freddo elimina un nitrosile sostituendola con un gruppo amidico e rigenerando così la dinitrotoluidina dalla quale si era partiti. Sottoposto all'ossidazione, dà l'acido trinitrobenzoico corrispondente:

$COOH$ / NO_2 / NO_2 / NO_2 .

Si sospesero gr. 10 di trinitrotoluene in gr. 500 di acido solforico della densità 1,8; indi, scaldando la massa a 50°, si aggiunsero a poco a poco gr. 14 di acido cromico e si mantenne il tutto caldo a questa temperatura fino a scomparsa dei cristalli dell'ossidante. Si versò indi in ghiaccio evitando ogni riscaldamento e la soluzione acquosa risultante si estrasse con etere. Il liquido etereo, lavato con poca acqua ed evaporato, dà un residuo oleoso che in breve solidifica in una massa cristallina e quasi bianca. Cristallizzato dall'acqua a 65°-70°, si separa sotto forma di lamine rombe splendenti, larghissime, che all'aria sfioriscono perdendo acqua di cristallizzazione.

I cristalli laminari fondono a 82° e contengono due molecole di acqua di cristallizzazione. Disidratato completamente riscaldando da principio a 60° in una corrente di aria secca, poi a 100°, l'acido fonde a 171°.

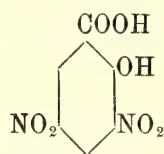
Sottoposti gr. 0,198 di sostanza alla determinazione dell'azoto, si ebbe:

Azoto cc. 28 a $t = 17°$ $h = 753^{mm}$.

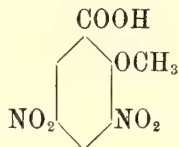
Azoto trovato 16.28 %;

» calcolato per $C_7H_3N_3O_3 = 16,3$ %.

Bollito con acqua, l'acido trinitrobenzoico si altera sostituendo con un ossidrile, il nitro- gruppo in posizione orto rispetto al carbossile e si ottiene così l'acido dinitrosalicilico

COOH
OH
NO_2 NO_2

identificato per il punto di fusione, trovato a 166° (Salkowski dà 165°), la colorazione rossa che fornisce coi sali ferrici, e le proprietà dei sali di Bario.

L'acido trinitrobenzoico scaldato con alcool metilico assoluto in tubi chiusi per alcune ore a 125° perde un gruppo NO_2 sostituendolo con OCH_3 in modo da trasformarsi nell'acido

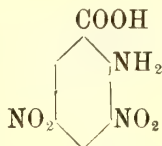
COOH
OCH_3
NO_2 NO_2

non ancor descritto che si ottiene in splendentissimi cristalli tabulari che fondono a 132°.

L'acido trinitrobenzoico trattato con ammoniaca alcoolica genera il sale ammonico dell'acido binitro antranilico, sale che cristallizza anidro dalla soluzione alcoolica sotto forma di cristalli aghiformi arranciati, mentre dall'acqua lo si ottiene di color più chiaro con una molecola di acqua di cristallizzazione.

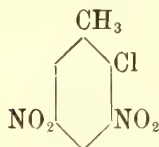
Gr. 1,361 di sostanza perdettero a 100° gr. 0,091 di acqua corrispondente a 6,7 % di acqua, mentre per 1 mol. si calcolano 6,86 %.

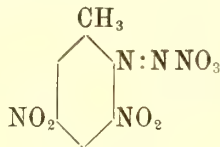
Se in questa reazione invece dell'ammoniaca alcoolica si impiega quella acquosa si ottiene lo stesso sale misto a molto dinitro salicilato ammonico.

Dal primo, facilmente si può acidificando con un acido minerale giungere all'acido metadinitroortoacidobenzoico

$COOH$
NH_2
NO_2 NO_2

fusibile a 256°.

Clorodinitrotoluene.

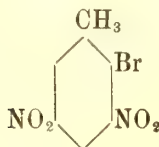
CH_3
Cl
NO_2 NO_2

Si ottenne trattando il nitrato del diazodinitrotoluene

CH_3
$N:NNO_3$
NO_2 NO_2

preparato nel modo sopra descritto con cloruro RAMICO in soluzione acquosa in presenza di molto ghiaccio. Dopo cessato lo sviluppo dell'azoto, si raccoglie su filtro il precipitato, si lava, si distilla in corrente di vapore, indi il prodotto ottenuto si cristallizza dall'alcool (3 di sostanza in 10 di alcool). Per raffreddamento da questo solvente si hanno sottili aghetti leggiermente paglierini; per evaporazione lenta di miscela di alcool ed etere, si hanno grossi prismi fusibili a 65°.

Sottoposti gr. 0,1804 alla determinazione dell'azoto, diedero:

Azoto cc. 20,6 a $t = 17°$ $h = 755^{mm}$.
Azoto trovato 12,99 %.
» calcolato per $C_7H_5N_2O_4Cl$ 12,90 %.

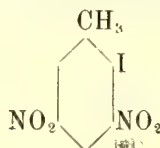
Bromodinitrotoluene.

CH_3
Br
NO_2 NO_2

Si ottiene in modo analogo al precedente, sostituendo il cloruro col *bromuro ramico.*

Distilla facilmente in corrente di vapore e si scioglie nell'alcool soltanto nelle proporzioni di 1 a 4. Puro, si presenta, se cristallizzato da etere ed alcool, in grossi prismi giallo-chiari fusibili a 95°.

Sottoposti alla determinazione dell'azoto gr. 0,227 di sostanza, diedero:

Azoto cc. 21 a $t = 12°$ $h = 752$.
Azoto trovato 10,88 %.
" calcolato per $C_7H_5N_2O_4Br$ 10,72 %.

Iododinitrotoluene.

Si preparò in modo analogo ai precedenti; solo, in questo caso occorre separare per filtrazione il nitrato del diazodinitrotoluene dall'eccesso di acido nitrico.

Il sale, sospeso in acqua e ghiaccio, venne trattato con ioduro di potassio in soluzione acquosa. Il precipitato formatosi, raccolto su filtro e lavato, fu distillato in corrente di vapore e cristallizzato da alcool. Dall'alcool ed etere si ottengono piccole tavole raggruppate, di color giallo-limone arico; se nella miscela solvente prevale l'etere, allora si separa in prismi isolati, lunghi, fusibili a 119°,5.

Sottoposti alla determinazione di azoto, si ebbe:

Sostanza impiegata gr. 0,378.
Azoto cc. 28,2 a $t = 5°$ $h = 753$.
Azoto trovato $= 9,10$ %.
" calcolato per $C_7H_5N_2O_4I = 9,12$ %.

Questi tre binitroalogenotolueni, e quelli da noi già descritti e corrispondenti al trinitrotoluene 1.3.4.5 (CH_3 in 1), sono studiati cristallograficamente dal prof. Artini, e dettagliatamente saranno quanto prima da lui descritti.

Un'altra nostra Nota tratterà del sesto trinitrotoluene, che abbiamo ottenuto in modo analogo partendo da altri materiali convenientemente scelti.

Botanica. — *Un caso interessante di variazione nel fiore di una* Iris. Nota del Socio R. Pirotta.

Da molti anni seguo il modo di comportarsi di alcune forme di *Iris* a fiore bianco allo scopo di trovarne l'origine, che è molto discussa.

Le osservazioni hanno dato modo di rilevare non pochi fatti interessanti, tra i quali la comparsa più o meno frequente di striature, macchioline, e macchie più o meno vistose di color più o meno violacco sui tepali e sugli stili [1]. Dalle osservazioni continuate fino ad oggi colla massima cura ho potuto stabilire:

1°) che i medesimi individui producono ora fiori di color bianco puro, ora fiori con macchioline, lineette, linee o macchie più grandi e anche vistose;

2°) che le piante che in un dato anno portarono fiori macchiati, li produssero di color bianco puro nel successivo o nei successivi periodi vegetativi;

3°) che la forma, l'ampiezza, la posizione e il numero delle macchie varia anche nella medesima infiorescenza e nei successivi periodi vegetativi.

Quest'anno però ho potuto osservare nelle mie *Iris* un caso di variazione del colore dei fiori molto differente da tutti gli altri fino ad ora osservati, il quale per questo suo interesse merita di essere particolarmente fatto conoscere.

Una piccola ceppaia proveniente da un pezzo unico di rizoma che lo scorso anno aveva portati fiori tutti uniformemente colorati, cioè bianchi, ha prodotto quest'anno nel mese di aprile due germogli fiorali, dei quali uno portò quattro fiori uniformemente colorati come quelli dello scorso anno, l'altro portò pure quattro fiori, ma colorati di bianco e di violetto. Di questi quattro fiori, due, fioriti per i primi e cioè, il terminale e quello mediano per posizione fra i tre laterali, si mostravano divisi da un piano parallelo all'asse fiorale in due metà simmetriche, una bianca, l'altra violacea. E precisamente la metà bianca comprendeva metà di un tepalo barbato e metà del corrispondente stilo, un tepalo eretto, un tepalo barbato e il corrispondente stilo, e metà di un tepalo eretto; la metà violacea comprendeva metà di questo tepalo eretto, un tepalo barbato col corrispondente stilo e metà di un tepalo eretto. Cosicchè, considerato l'intero fiore nella posizione normale delle sue parti, dei cicli trimeri fiorali, quello costi-

[1] Di questo fatto è data notizia fin dal 1909, nella Nota inserita in questi stessi Rendiconti, vol. XVIII, ser. 5ª, pag. 481.

tuito dai tepali barbati, ne presentava successivamente uno bianco, un altro viola e il terzo per metà bianco, e per metà viola; lo stesso, ma in senso opposto, offriva il ciclo fatto dai tepali eretti; e così ma disposti come le parti del giro esterno, il ciclo fatto dagli stili, colle relative appendici. Lo stesso modo di distribuzione della colorazione, offre il ciclo dei tre stami, benchè meno marcatamente.

La barba è però simile in tutti e tre i tepali; mentre la reticolatura della parte inferiore dei tepali è violacea su fondo bianchiccio nei tepali o parti violacee, verde, giallognola nei tepali o parti bianche.

Gli altri due fiori deviano più o meno dal tipo dei due precedenti. Uno infatti, quello più vicino al terminale, ha un tepalo eretto bianco, un altro violaceo, il terzo per metà bianco, per l'altra metà soltanto in parte e leggermente violaceo, con una striscia cioè che da un lato va verso la base del disco e per tutta l'unghia; degli stili uno è bianco, l'altro violaceo, il terzo metà bianco e metà violaceo. Dei tepali barbati uno è bianco, l'altro violaceo, il terzo metà bianco, metà violaceo. Il quarto fiore, il più basso di tutti, presenta due dei tepali barbati bianchi ed uno violaceo, e degli eretti uno è bianco, l'altro quasi metà bianco e metà violaceo, prolungandosi il colore violaceo sulla estremità superiore dell'altra metà del disco, l'ultimo bianco per circa due terzi violaceo nel resto. Dei tre stili, due sono bianchi, il terzo violaceo.

Diverse sono le spiegazioni che si possono proporre del caso or ora illustrato, secondochè si voglia considerare una variazione individuale o una variazione da incrocio. Ma poichè la questione è legata ad altri fatti osservati, mi riservo di discutere il significato ed il valore di questo caso di variazione del colore del fiore in un lavoro di prossima pubblicazione intorno alle diverse sorta di variazioni osservate in queste *Iris*.

Fisica. — *Sul processo per rendere stabile il funzionamento dei tubi Röntgen mediante l'assorbimento dell'anidride carbonica* [1]. Nota del Corrispondente P. Cardani.

Nella mia ultima Nota [2], nella quale ho reso conto dei fenomeni che si osservano nei tubi Röntgen quali provengono dalle fabbriche, quando, dopo averli aperti e collegati subito con un manometro ed una pompa, si sottopongono al riscaldamento e al passaggio delle correnti di un rocchetto di induzione, ho dimostrato come dagli elettrodi si svolga una notevolissima quantità di gas, che, col proseguire del processo, va da prima diminuendo con sufficiente rapidità fino a ridursi, dopo parecchi giorni, sensibilmente nulla;

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di fisica della R. Università di Parma.

[2] Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXIV, 1° semestre, fascicolo II. Seduta del 17 gennaio 1915.

ma ho altresì fatto notare che, anche quando gli elettrodi sembrano esauriti, col riposo l'emissione del gas per il passaggio delle scariche riprende, così che la pressione aumenta e conseguentemente cessa anche l'emissione dei raggi X. D'altra parte ho dimostrato che il gas che veniva emesso dagli elettrodi non era costituito nè dall'aria, nè dalle combinazioni dei gas che si trovano nell'aria.

Sebbene mi sembrasse molto strano che i tubi provenienti dalle migliori fabbriche, e che presentano così notevole stabilità di funzionamento, dovessero dar luogo ad una così considerevole emissione di gas da parte degli elettrodi, qualora fossero stati precedentemente esauriti, per il solo fatto di esser questi rimasti per qualche tempo in presenza dell'aria atmosferica, tuttavia ho creduto conveniente di procedere fino in fondo e vedere se col processo finora seguìto mi riusciva di riottenere la loro perfetta stabilità di funzionamento.

Per questo ho portato la temperatura del tubo col quale avevo fatto le precedenti esperienze fino a 400°, ed ho cercato di accelerare l'emissione del gas residuo, sia col passaggio delle scariche, sia col funzionamento della pompa Gaede spingendo la rarefazione al massimo limite. Ma dopo parecchi giorni di lavoro mi accorsi che pochissimo si era guadagnato: lasciando il tubo in riposo per alcune ore, riprendeva sempre l'emissione del gas da parte degli elettrodi e presso a poco nella stessa misura. Siccome questo gas non veniva riassorbito, gli aumenti di pressione si andavano sommando: così, non ostante il lunghissimo processo di esaurimento fatto subire agli elettrodi, mandando per alcuni minuti le scariche del rocchetto ad intervalli di alcune ore, la pressione in quattro giorni era salita dal valore di 625 (pari a 0,052 mm. di mercurio) al valore di 2714 (pari a 0,226 mm. di mercurio), nè l'aumento accennava ad arrestarsi.

Tuttavia l'aspetto, che presentava ora il tubo al passaggio delle scariche, era assolutamente diverso da quello che presentava all'inizio del processo al quale lo aveva sottoposto. Mentre, da principio, a questa stessa pressione di 0,226 mm. di mercurio, la luce che invadeva tutto il tubo era di un colore bianco-azzurrognolo ed il fiocco sul catodo quasi bianco, ora la luce diffusa nel tubo era di un magnifico colore verde-mare ed il fiocco sul catodo era di un colore rosso vivo.

L'analisi spettroscopica mi dimostrò che parecchie di quelle righe, che avevo riferite nella mia precedente Nota, erano scomparse, ed erano rimaste tre sole righe, quelle precisamente appartenenti all'idrogeno. Dunque gli elettrodi, da principio, emettono un altro gas che poi col riscaldamento, con le scariche e col funzionamento della pompa, si va eliminando; e alla fine il gas che viene emesso è soltanto idrogeno.

Tutti questi fatti mi convinsero che il processo seguìto nella costruzione dei tubi Röntgen per ottenerne la stabilità non era quello che gene-

ralmente si ritiene [1]: non era possibile che per costruire un tubo Röntgen si dovesse seguire un processo di esaurimento degli elettrodi di alluminio così lungo e penoso. Ho quindi pensato che questo processo potesse esser molto diverso e potesse consistere nel saturare gli elettrodi con qualche altro gas che impedisse la emissione dell'idrogeno. Questa idea veniva avvalorata dai risultati che io aveva ottenuti, e di cui renderò prossimamente conto, sull'autorarefazione che si produce nei tubi per l'assorbimento di varî gas da parte degli elettrodi di alluminio per il passaggio delle scariche, autorarefazione che può raggiungere vuoti molto spinti, da oltrepassare anche quella pressione per la quale avviene il massimo di emissione dei raggi X. Tra questi gas, uno di quelli maggiormente assorbiti era l'anidride carbonica, la quale si dissocia rapidamente per il passaggio delle scariche, come vedremo in seguito, in ossigeno ed ossido di carbonio: di questi due gas, l'ossigeno viene assorbito per primo, poi l'ossido di carbonio: e l'aspetto del tubo al passaggio delle scariche, quando conteneva l'ossido di carbonio, era del tutto simile a quello che si aveva col gas emesso dagli elettrodi nei primi giorni del processo da me seguìto per ottenerne l'esaurimento dai gas occlusi.

L'analisi spettroscopica avrebbe potuto assicurarmi se realmente la stabilità di funzionamento dei tubi Röntgen fosse dovuta all'assorbimento dell'anidride carbonica o, meglio, dell'ossido di carbonio: infatti, se nella costruzione dei tubi Röntgen l'emissione dell'idrogeno da parte degli elettrodi di alluminio venisse eliminata saturando gli elettrodi stessi con l'ossido di carbonio, è chiaro che sottoponendo i tubi, che così fossero stati preparati, al riscaldamento e al passaggio delle scariche a temperature elevate, il gas, che da prima doveva svolgersi, doveva esser evidentemente l'ossido di carbonio, e quindi esser visibili allo spettroscopio le sole righe di questo gas; in seguito, proseguendo l'esaurimento degli elettrodi dall'ossido di carbonio, doveva cominciare anche l'emissione dell'idrogeno ed aversi nello spettroscopio lo spettro sovrapposto dell'ossido di carbonio e dell'idrogeno; infine, quando tutto l'ossido di carbonio fosse stato eliminato, il gas emesso dagli elettrodi doveva ridursi soltanto all'idrogeno, e allo spettroscopio doveva osservarsi il solo spettro di questo gas. A quest'ultimo risultato, come già dissi, ero pervenuto: si trattava dunque di seguire con l'analisi spettroscopica le modificazioni dello spettro del gas emesso dagli elettrodi prima di arrivare alla sola emissione dell'idrogeno.

Ho cominciato col mandare nel tubo, col quale aveva fatte le precedenti esperienze dell'anidride carbonica. Dopo aver ottenuto la dissociazione per il passaggio delle scariche e l'assorbimento dell'ossigeno, ho esaminato con cura lo spettro del gas rimasto, cioè dell'ossido di carbonio: esso era costituito da sei righe, delle quali quattro molto brillanti e due più larghe e più

[1] Vedi, per esempio, J. Stark, *Die Elektrizität in Gasen*, 1902, pag. 17.

deboli verso il violetto, e di uno spettro a colonnato nella regione meno rifrangibile; delle sei righe fissai la posizione.

Indi ho staccato il tubo finora adoperato; ne apersi un nuovo, saldandolo subito al manometro ed alla pompa, ed ho ricominciato il processo già descritto nella precedente Nota, riscaldandolo successivamente, progressivamente e per diversi giorni di seguito, alle temperature di 100°, 200°, 300° e 400° ed aiutando colle scariche l'emissione del gas.

I risultati dell'analisi spettroscopica furono quelli che avevo preveduti; e, cioè, da principio, eliminata l'aria che era rimasta aderente alle superfici degli elettrodi, il gas emesso presentava il solo spettro dell'ossido di carbonio; in seguito si aggiunsero allo spettro dell'ossido di carbonio le righe dell'idrogeno; alla fine scomparve lo spettro dell'ossido di carbonio e rimase solo quello dell'idrogeno.

Come prova definitiva, ho collocato un ottimo tubo Röntgen in una scatola di amianto, e lo portai a 200° per fare uscire col semplice riscaldamento un po' del gas contenuto negli elettrodi; dopo un'ora di riscaldamento, lo lasciai raffreddare e vi mandai la corrente del rocchetto. La luce, che invadeva tutto il tubo, presentava il solito aspetto bianco-azzurrognolo; e l'analisi spettroscopica mi confermò che il gas emesso era ossido di carbonio.

Da tutto quanto precede, risulta dunque manifesto che la stabilità nel funzionamento dei tubi Röntgen per l'emissione dei raggi X si doveva ottenere facendo assorbire dagli elettrodi una sufficiente quantità di ossido di carbonio: non mi restava quindi che sottoporre queste conclusioni al controllo dell'esperienza.

Ho fatto la massima rarefazione possibile nel tubo; indi, escluso il tubo e il manometro, ho mandato per diverse volte, nella pompa, dell'anidride carbonica ben secca; finalmente, ridotta convenientemente la pressione, ho ristabilito la comunicazione tra la pompa e il rimanente dell'apparecchio. Preparate così le cose, ho di nuovo esclusa la pompa ed ho mandato le scariche nel tubo, avendo sempre cura, mentre funzionava il rocchetto, di tener chiuso il rubinetto di comunicazione tra il tubo ed il manometro per evitare che la scarica potesse qualche volta propagarsi, non ostante le precauzioni prese e riferite nella precedente Nota, al mercurio del manometro,

Nel seguente prospetto sono riportati: nella prima colonna, indicata con la lettera T, la durata, in minuti primi, di funzionamento del rocchetto; nella seconda, indicata con ΔT, il numero dei minuti primi trascorsi tra due letture consecutive della pressione: nella terza il numero w delle divisioni lette nella provetta di Mach-Leod (ricorderò che il livello del mercurio veniva sempre condotto nel ramo esterno sul piano orizzontale passante per lo zero della graduazione); nella quarta colonna i valori di w^2 proporzionali alla pressione P, il cui vero valore in mm. di mercurio si otterrebbe dividendo w^2 per 12,000, come è indicato nella mia Nota precedente; nella

quinta colonna le differenze ΔP della pressione tra due letture consecutive; nella sesta il valore del rapporto $\frac{\Delta P}{\Delta T}$, per vedere l'andamento dell'assorbimento.

T	ΔT	w	P	ΔP	$\frac{\Delta P}{\Delta T}$
0		85,5	7310		
1	1	100,0	10000	+ 2690	+ 2690
2	1	104,0	10816	+ 816	+ 816
3	1	106,0	11236	+ 420	+ 420
4	1	107,0	11449	+ 213	+ 213
6	2	107,0	11449	0	0
11	5	106,0	11236	— 213	— 42
21	10	104,0	10816	— 420	— 42
31	10	102,8	10567	— 249	— 25
41	10	102,8	10567	0	0
51	10	101,3	10267	— 300	— 30
61	10	100,0	10000	— 267	— 27
71	10	99,0	9801	— 199	— 20
91	20	96,2	9254	— 547	— 27
111	20	93,2	8686	— 568	— 28
131	20	90,0	8100	— 586	— 29
151	20	87,4	7639	— 461	— 23
171	20	83,8	7022	— 617	— 31
191	20	80,0	6400	— 622	— 31

T	ΔT	w	P	ΔP	$\frac{\Delta P}{\Delta T}$
211	20	76,0	5776	— 624	— 31
231	20	72,0	5184	— 592	— 30
251	20	67,0	4489	— 695	— 35
271	20	63,0	3969	— 520	— 26
291	20	59,0	3481	— 488	— 24
311	20	54,0	2916	— 565	— 28
331	20	50,0	2500	— 416	— 21
351	20	45,5	2070	— 430	— 22
371	20	41,2	1697	— 373	— 19
391	20	38,0	1444	— 253	— 13
411	20	35,8	1282	— 162	— 8
431	20	33,8	1142	— 140	— 7
451	20	32,0	1024	— 118	— 6
491	40	29,5	870	— 154	— 4
551	60	26,2	686	— 184	— 3
596	45	24,8	615	— 71	— 1,6
616	20	24,0	576	— 39	— 1,9
736	120	21,5	462	— 114	— 0,9
756	20	21,0	441	— 21	— 1,0

Dallo specchio si vede che la pressione nei primi minuti è aumentata nel rapporto di $\frac{11449}{7310} = 1,5$, indicando che l'anidride carbonica si è dissociata in ossigeno ed ossido di carbonio. L'assorbimento, da prima più rapido per la presenza dell'ossigeno, si mantiene poi sensibilmente proporzionale al tempo, quando il gas che viene assorbito è quasi del tutto costituito dall'ossido di carbonio, e soltanto a pressioni relativamente basse esso diminuisce, finchè cessa del tutto e la pressione diventa costante.

Dopo questo primo assorbimento di anidride carbonica, il tubo appariva già molto più stabile di prima: lasciati, cioè, gli elettrodi in riposo per molte ore, riprese bensì l'emissione dell'idrogeno (la cui presenza si rivelava per una leggera colorazione rosea del fiocco aderente al catodo), ma in quantità molto minore di quella che si aveva precedentemente. Ciò dimostrava che la quantità di ossido di carbonio assorbita dagli elettrodi non era ancora sufficiente per impedire del tutto l'emissione dell'idrogeno: ho quindi proseguito per parecchie volte di seguito a mandare, con lo stesso procedimento prima descritto, anidride carbonica nel tubo provocandone poi l'assorbimento col passaggio delle scariche: ho così potuto ottenere finalmente il tubo stabile per molte ore a quella pressione per la quale era anche massima la emissione dei raggi X.

Trovato in tal modo il processo per ottenere la stabilità di funzionamento dei tubi Röntgen, ho creduto opportuno di esaminare se fosse proprio

necessario, per avere l'assorbimento dell'anidride carbonica, di riscaldare preventivamente i tubi ed esaurirne gli elettrodi, ovvero se il processo avvenisse egualmente anche senza alcun preventivo trattamento. Ho per ciò staccato il tubo, col quale avevo fatto tutte le esperienze prima riportate, e ne ho saldato un altro nuovo di 12 cm. di diametro, che non aveva mai subìto alcun trattamento speciale e nel quale per ciò gli elettrodi erano sempre rimasti in contatto con l'aria atmosferica.

Fatta la massima rarefazione possibile, ho mandato nel tubo anidride carbonica a pressione piuttosto elevata; ed ho quindi fatto funzionare il rocchetto, mantenendo, al solito, l'anticatodo isolato. I fenomeni si presentarono in modo analogo a quelli osservati nel tubo precedente, dove gli elettrodi erano stati così lungamente esauriti: soltanto l'aumento iniziale della pressione fu molto superiore di quello che si avrebbe dovuto avere per la dissociazione dell'anidride carbonica, indicando che per il passaggio delle correnti del rocchetto si sprigionavano da principio quei gas che erano rimasti aderenti agli elettrodi per la loro lunga permanenza in contatto con l'aria atmosferica. Dopo cominciò il solito assorbimento che si protrasse fino al principio dei raggi X. Siccome però il tubo non si presenta del tutto stabile, ho mandato una seconda volta l'anidride carbonica. Nel seguente prospetto è riportata intera questa seconda serie: le lettere poste in testa alle varie colonne hanno lo stesso significato che nei quadri precedenti.

T	ΔT	w	P	ΔP	$\frac{\Delta P}{\Delta T}$
0		82,8	6856		
50	50	101,0	10201	+ 3345	+ 669
100	50	100,5	10100	— 101	— 2,0
200	100	98,0	9604	— 496	— 4,9
300	100	95,5	9120	— 484	— 4,8
400	100	92,9	8630	— 490	— 4,9
500	100	90,1	8118	— 512	— 5,1
600	100	87,2	7604	— 514	— 5,1
700	100	83,9	7039	— 565	— 5 6
800	100	80,7	6512	— 527	— 5,3
900	100	77,5	6006	— 506	— 5,1
1000	100	74,2	5506	— 500	— 5,0
1100	100	70,6	4984	— 522	— 5,2
1200	100	66,6	4436	— 548	— 5,5
1300	100	62 4	3894	— 542	— 5,4
1400	100	57,5	3306	— 488	— 4,9
1500	100	50,5	2550	— 756	— 7,6
1600	100	43,5	1892	— 658	— 6,6
1700	100	37,3	1391	— 501	— 5,0
1800	100	31,2	973	— 418	— 4,2
1900	100	26,6	708	— 465	— 2,6
2000	100	24,2	586	— 122	— 1,2
2100	100	22,9	524	— 62	— 0,6
2200	100	21,8	475	— 49	— 0,5
2300	100	21,3	454	— 21	— 0,2
2400	100	20,5	420	— 34	— 0,3
2500	100	20,0	400	— 20	— 0,2
2600	100	19,3	372	— 28	— 0,3
2700	100	18,7	350	— 22	— 0,2
2800	100	18,3	335	— 15	— 0,15
2900	100	17,9	320	— 15	— 0,15
3000	100	17,3	299	— 21	— 0,2
3100	100	16,8	282	— 17	— 0,17
3200	100	16,5	272	— 10	— 0,1
3400	200	16,0	256	— 16	— 0,08

Dopo altre 5 ore di funzionamento del rocchetto, la pressione da 256 (pari a 0,011 mm. di mercurio), è discesa, a 246 (pari a 0,020 mm. di mercurio); e a questo valore rimase stazionaria nei due giorni successivi, non ostante che le scariche avessero attraversato il tubo per oltre 12 ore.

Il tubo presentava l'aspetto dei soliti tubi Röntgen: l'emissione dei raggi X cominciò a rivelarsi, all'elettrometro, alla pressione di 392, pari a 0,033 mm. di mercurio, e alla pressione di 246 (pari a 0,020 mm. di mercurio) era già molto abbondante, così che, lasciando l'ago dell'elettrometro isolato per 5 secondi mentre le correnti del rocchetto passavano nel tubo, si aveva una deviazione di 80 divisioni per la carica portata dagli ioni prodotti dalla radiazione X. Anche coi tubi provenienti dalle fabbriche si ottennero, nelle stesse condizioni di corrente, deviazioni dello stesso ordine di grandezza: ma per quanto riguarda la relazione tra l'emissione dei raggi X e la pressione, riferirò in un'altra Nota, influendo molte circostanze sulla pressione corrispondente alla massima emissione dei raggi X.

Come ho già detto, altri gas vengono rapidamente assorbiti dagli elettrodi, oltre l'anidride carbonica; ma se con questi altri gas si possa ottenere la stabilità di funzionamento dei tubi Röntgen, è argomento di cui mi occuperò in seguito.

Matematica. — *Sopra un teorema d'unicità relativo alla equazione delle onde sferiche.* Nota di S. Zaremba, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. Allargando un po' il significato d'un termine comunemente usato, chiameremo *equazione delle onde sferiche* l'equazione alle derivate parziali seguente:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 . \tag{1}$$

Ci proponiamo di dimostrare un teorema fondamentale nella teoria di quegli integrali della (1), i quali si presentano nella fisica-matematica.

Considereremo le variabili

$$x_1 , x_2 , \dots x_n , t \tag{2}$$

come le coordinate cartesiane ortogonali d'un punto in uno spazio euclideo (E) di $n+1$ dimensioni.

2. Siano

$$A_1 , A_2 , \dots A_n , B \tag{3}$$

$n+1$ funzioni delle variabili (2), ben definite nell'interno e sul contorno (S) di un campo limitato (D), situato nello spazio (E).

Quando il contorno (S) di (D) e le funzioni (3) soddisfano a certe condizioni di regolarità, che sembra superfluo di enunciare, si ha, secondo un teorema noto, la relazione:

$$(4)\qquad \int_{(D)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} + \frac{\partial B}{\partial t} \right\} d\tau = - \int_{(S)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i + \beta B \right\} ds ,$$

designando con $d\tau$ l'elemento di volume dello spazio (E), con ds l'elemento di superficie del contorno (S) e con

$$(5)\qquad \alpha_1 , \alpha_2 , \dots \alpha_n , \beta$$

i coseni-direttori della normale a (S), diretta verso l'interno del campo (D). Le funzioni (5) sono legate fra loro dalla nota equazione:

$$(6)\qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + \beta^2 = 1 .$$

Sia u una funzione continua, ben definita nell'interno e sul contorno (S) del campo (D), avendo, nell'interno del campo (D), delle derivate continue dei due primi ordini.

Supponiamo inoltre che le derivate del primo ordine della funzione u siano limitate e godano della proprietà seguente: quando un punto $(x_1 , x_2 , \dots x_n , t)$, situato nell'interno del campo (D), tende verso un punto M del contorno (S) di codesto campo, le derivate

$$(7)\qquad \frac{\partial u}{\partial x_1} , \frac{\partial u}{\partial x_2} , \dots \frac{\partial u}{\partial x_n} , \frac{\partial u}{\partial t}$$

tendono verso limiti determinati, eccettuato al più, per M, un certo insieme di misura superficiale eguale a zero. Ciò posto, è lecito di convenire che, per un punto M situato in (S), i simboli (7) rappresentano i limiti delle derivate corrispondenti quando il punto $(x_1 , x_2 , \dots x_n , t)$ tende verso il punto M, rimanendo nell'interno del campo (D).

Posto

$$(8)\qquad \begin{cases} A_i = \dfrac{\partial u}{\partial t} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} & (i = 1 , 2 , \dots n) \\ B = -\dfrac{1}{2} \left\{ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right\} , \end{cases}$$

si avrà:

$$(9)\qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} + \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\} .$$

Ora ammettiamo che la funzione u, pur soddisfacendo alle suddette ipotesi, verifichi inoltre l'equazione (1) nell'interno del campo (D). Dalle (4), (8) e (9) si avrà

$$(10) \qquad \int_{(s)} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \beta \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right\} \right] ds = 0 .$$

3. Consideriamo il caso particolare in cui una parte (S_1) di (S) è una caratteristica [1] della (1) e designamo con (S') il resto del contorno del campo (D). Per la proprietà specifica delle caratteristiche della (1), si avrà

$$(11) \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 - \beta^2 = 0$$

in ogni punto regolare della parte (S_1) di (S); quindi, in ciascuno di tali punti, si avrà dalla (6):

$$(12) \qquad \beta^2 = \frac{1}{2} .$$

Tenendo conto delle (11) e (12) si vede subito che sia:

$$(13) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \beta \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right\} = \\ = - \beta \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 .$$

Non è forse inutile di far notare che dalla (12) *non* segue che su (S_1) la funzione β sia necessariamente costante: in fatti può darsi che su una parte di S_1 si abbia

$$\beta = \frac{+1}{\sqrt{2}}$$

e sul resto

$$\beta = \frac{-1}{\sqrt{2}} ,$$

ma noi considereremo soltanto il caso nel quale la funzione β ammette su (S_1) un solo dei due valori precedenti. Ciò posto, basta tener conto della (13) per ricavare dalla (10) la seguente:

$$(14) \qquad \beta \int_{(S_1)} \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 ds = \\ = \int_{(s')} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \beta \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right\} \right] ds .$$

[1] Per la teoria delle caratteristiche si può consultare l'opera di J. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique* (Paris, 1903, A. Hermann).

Ecco perchè codesta equazione è interessante: *se l' integrale esteso alla parte* (S′) *di* (S) *è eguale a zero, ne segue che, su* (S_1), *si ha*

$$\alpha_i \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots n), \tag{15}$$

donde risulta che, su (S_1), *la funzione u è costante.*

4. Dal risultato testè ottenuto si possono dedurre varie importanti conseguenze, ma, per ora, considereremo soltanto il caso particolare che la (S′) si componga di due parti (S_0) e (S_2) tali, che su (S_0) la funzione β sia sempre eguale al numero $+1$, o sempre al numero -1, e che su (S_2) si abbia $\beta = 0$.

Designando allora con ε un numero reale in valore assoluto eguale alla unità e di segno convenientemente scelto, si potrà scrivere la (14) nel modo seguente:

$$\beta \int_{(S_1)} \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 ds = \tag{16}$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon \int_{(S_0)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right\} ds + \int_{(S_2)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\} ds .$$

Da cotesta equazione si può dedurre il teorema seguente, che forma l'oggetto principale di questa nota:

Esiste al più una sola funzione continua u, che soddisfi nell'interno del campo (D) *alla* (1) *e che goda delle proprietà seguenti*:

1) *Su* (S_0) *la funzione u stessa e la sua derivata normale si riducono a delle funzioni date.*

2) *Su* (S_2) *la funzione stessa u o la sua derivata normale si riduce ad una funzione data.*

In fatti, basta dimostrare che la funzione u è eguale a zero in tutto il campo (D) nel caso particolare in cui le funzioni date, considerate nel teorema, sono nulle. Ma in tal caso il secondo membro della (16) si riduce a zero. Quindi, su (S_1) si verificheranno le (15). Ciò posto, sia ($\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n, \tau$) un punto qualsiasi dell' interno del campo (D) e (D′) la parte del campo (D) separata mediante il piano

$$t = \tau \tag{17}$$

dalla parte (S_0) del contorno del campo (D).

Il teorema espresso dalla (16) è applicabile al campo (D′). Quindi, tenendo conto delle (15), si ricava

$$\int \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right\} ds = 0,$$

dove l'integrazione deve essere estesa alla parte del piano (17) che contribuisce a limitare il campo (D'). Ne segue che in ogni punto $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \tau)$ dell'interno del campo (D) le derivate parziali del primo ordine della funzione u sono eguali a zero.

Quindi, la funzione u è costante nel campo (D). Ma questa funzione, essendo eguale a zero su (S_0), non può essere che nulla in tutto il campo (D), come avevamo annunziato.

In un altra Nota spero di mettere in rilievo l'importanza del teerema che è stato dimostrato.

Fisica matematica. — *Sulla distribuzione della massa nell'interno d'un corpo in corrispondenza a un'assegnata azione esterna.* Nota di Corradino Mineo, presentata dal Socio P. Pizzetti.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Persistenza delle correnti fotoelettriche nelle cellule di Elster e Geitel dopo la soppressione della luce eccitatrice.* Nota I di O. M. Corbino e G. C. Trabacchi, presentata dal Socio P. Blaserna.

Le correnti fotoelettriche, dovute a forti illuminazioni, possono raggiungere una notevole intensità qualora si ricorra alle cellule di Elster e Geitel, nelle quali l'elettrodo negativo, di potassio o di sodio, è ricoperto da uno strato sottile costituito da una modificazione allotropica del metallo medesimo. Nella cellula è presente un gas inerte, argon o elio, alla pressione di circa 1 millimetro di mercurio; facendo agire fra gli elettrodi un campo acceleratore di sufficiente intensità, gli elettroni strappati dalla luce al catodo vengono lanciati con velocità grande verso l'anodo, determinando una abbondante ionizzazione per urto nel gas. I nuovi ioni creati dall'urto divengono alla loro volta produttori di altri ioni; alla produzione di questi partecipano, con campi intensi, anche gli ioni positivi creati dagli urti, pur non raggiungendosi, se il campo non è troppo intenso, le condizioni che determinano la scarica permanente al cessare della luce.

Con illuminazioni molto intense, e con differenze di potenziale agli elettrodi solo di poco inferiori a quelle cui corrisponde la scarica permanente, le correnti ottenute con una cellula di Elster e Geitel possono raggiungere l'intensità di quasi un milliampere, prestandosi così a diverse e notevoli applicazioni.

In vista delle applicazioni medesime, e per illustrare ancor meglio il meccanismo di funzionamento di un apparecchio così interessante, ci è sembrato opportuno istituire delle esperienze destinate a stabilire se e quale parte della corrente normale sussiste ancora dopo la soppressione della luce eccitatrice, e precisamente dopo intervalli di tempo assai brevi dalla sua brusca soppressione. E avendoci l'esperienza rivelato che la corrente sussiste in realtà, decrescendo rapidamente, dopo aver interrotto la illuminazione, abbiamo voluto ricercare se questo effetto di ritardo sia dovuto ad una postuma emissione di elettroni da parte del catodo, o ad altre cause.

Non era infatti da escludere, senza prove, l'ipotesi che alla eccitazione della luce seguisse nel metallo anche dopo l'estinzione una ulteriore emissione di elettroni per un brevissimo tempo e in numero anche assai tenue, ma sufficienti (a causa della esaltazione degli effetti dovuta alla ionizzazione per urto) per produrre le correnti postume osservate.

Forma oggetto di queste Note l'esporre i risultati delle nostre ricerche, le quali permettono di risolvere, in modo che crediamo soddisfacente, le questioni che ci eravamo proposte.

***

Sarà bene anzitutto discutere un lavoro di E. Marx e K. Lichtenecker che, pur avendo un obbiettivo diverso, può sembrare che si riferisca anche al problema di cui noi ci siamo occupati.

I due autori citati, in una Memoria molto ampia e dettagliata [1], si proposero di esaminare se inviando su una cellula una certa quantità di luce costante, e poi la stessa quantità *media* di luce, ma costituita da un fascio periodicamente interrotto, si ottenesse la stessa corrente fotoelettrica nei due casi.

Più esattamente diremo che sulla cellula veniva rinviato per mezzo di uno specchio rotante un fascio di luce, e si faceva variare dentro larghissimi limiti la velocità di rotazione dello specchio, con che la stessa quantità media di luce cadente sulla cella veniva frazionata in un insieme di brusche illuminazioni, delle quali variava in senso inverso la durata di ciascuna e l'intervallo fra due luci successive.

La ricerca aveva uno scopo teorico di importanza notevole, e condusse al risultato che la corrente fotoelettrica rimaneva invariata riducendo la durata delle illuminazioni fino a $1{,}46 \times 10^{-7}$ secondi. Questa conclusione potrebbe far credere a prima vista che la corrente segua istantaneamente le vicissitudini della intensità della luce eccitatrice.

Ma chi volesse trarre dalle esperienze citate questa conseguenza, che gli Autori del resto non ebbero motivo di esaminare, poichè si proponevano

[1] E. Marx e K. Lichtenecker, Ann. d. phys., *41*, pag. 124 (1913).

altro e più elevato obbiettivo, cadrebbe in errore, così come a torto conclusero Bellati e Romanese che l'effetto della luce sul selenio sia istantaneo, deducendo ciò dal fatto osservato che la variazione di resistenza del selenio illuminato dalla luce interrotta con un disco forato rotante non mutava al variare della velocità del disco.

La costanza della corrente fotoelettrica constatata da Marx e Lichtenecker, può invero essere spiegata anche se sussiste un effetto di ritardo fra l'azione della luce e la corrente che ne deriva, così come la deviazione di un galvanometro balistico per una corrente istantanea che trasporti una *determinata* quantità totale di elettricità è sempre la stessa, qualunque sia la legge di variazione della corrente, senza che perciò si possa dedurne che il galvanometro segue istantaneamente con le sue deviazioni le vicissitudini della corrente variabile.

Noteremo infine che con il fenomeno da noi preso in esame non hanno nulla da fare le cosiddette « Nachwirkungen » constatate da alcuni con le cellule fotoelettriche, che si manifestano come effetti di assai lunga persistenza di lievi residui nell'impiego delle cellule con la disposizione elettrometrica, e che hanno per origine la distribuzione di lievi cariche statiche sul vetro della cellula, cosicchè sono quasi del tutto evitate con opportuni accorgimenti nelle cellule messe in commercio negli ultimi tempi. Effetti simili non hanno nulla da fare con le correnti residue, misurate galvanometricamente, che noi abbiamo potuto osservare.

*
* *

La cellula da noi adoperata in queste esperienze fa parte di un fotometro di Elster e Geitel fornitoci da Gunther e Tegetmeyer di Braunschweig.

Cominciammo con la ricerca della sua curva caratteristica (curva delle correnti per tensioni crescenti) sotto l'azione di forti intensità luminose: o quella di un fascio di luce solare, o quella di un fascio proveniente da una lampada ad arco per correnti continue, reso parallelo con opportuni dispositivi ottici, atti a conservare quanto più fosse possibile la tinta bianca, senza ridurne di troppo l'intensità. Con luce non troppo intensa si ottengono le note forme della curva caratteristica, le quali presentano un flesso corrispondente, secondo la teoria di Townsend, all'inizio della ionizzazione per urto da parte degli ioni negativi.

Quando si aumenti l'intensità della luce eccitatrice, si osserva però un andamento singolare della curva nella vicinanza del flesso, andamento che per quanto ci risulta non è stato finora reso noto da altri.

Come si vede dalla fig. 1 la curva delle correnti presenta un brusco salto a 19,6 volt, poichè per il minimo aumento in questo valore della tensione applicata agli elettrodi, la corrente aumenta bruscamente fino oltre al doppio dell'intensità primitiva.

In un'altra esperienza fatta in una giornata di febbraio con un cielo di magnifica trasparenza, si ebbero per diversi valori della tensione le seguenti intensità di corrente:

tensione in volt	corrente (unità arbitraie)
19,3	35
19.4	39
19.6	42
19,8	120
25	130

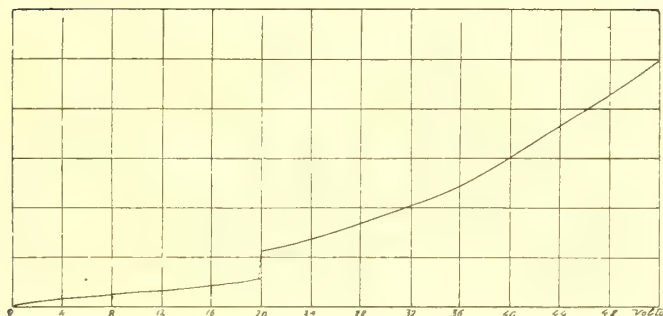



Fig. 1.

Il salto della corrente si produsse perciò entro il campo di variazione di qualche decimo di volt, dando luogo quasi a una triplicazione della corrente primitiva; mentre ad ulteriori aumenti della tensione, anche notevoli, corrisposero lievi aumenti della corrente.

Questa esperienza sembra a noi che fornisca come una dimostrazione tangibile, e della maggiore efficacia, circa la giustezza dell'interpretazione data dal Townsend al flesso delle curve caratteristiche normali; poichè si è potuto in certa guisa sorprendere l'inizio improvviso e tumultuoso della fase di ionizzazione per urto da parte degli elettroni provenienti dal catodo, i quali per tensioni inferiori costituiscono l'unico veicolo al passaggio della corrente.

*
* *

La tensione minima capace di produrre la scarica autonoma permanente, e perciò la tensione minima cui si può sottoporre la cella senza timore di danneggiarla, dipende anch'essa dalla intensità della luce eccitatrice. Nelle nostre esperienze cercammo di non superare questo valore critico del campo, e ci limitammo perciò all'impiego di tensioni non superiori a 75 volt.

*
* *

La prima disposizione da noi adoperata per constatare eventuali fenomeni di ritardo, ci fu suggerita dalla necessità che l'apparecchio rivelatore

della corrente fornisse indicazioni assolutamente istantanee; solo così poteva sicuramente esser riconosciuto se al cessare brusco della luce eccitatrice si annullasse istantaneamente la corrente fotoelettrica. Si pensò quindi, anzitutto, alla deviabilità istantanea del fascio catodico nel tubo di Braun. Ma la corrente era troppo piccola per dare effetti sensibili di deviazione sul fascio ricorrendo all'azione magnetica di un rocchetto ordinario; nè poteva accrescersi l'azione ricorrendo a un rocchetto con grandissimo numero di spire e con nucleo di ferro, poichè l'autoinduzione del rocchetto avrebbe perturbato la fase di cessazione della corrente, e l'isteresi del ferro avrebbe potuto da sè produrre effetti analoghi a quello ricercato.

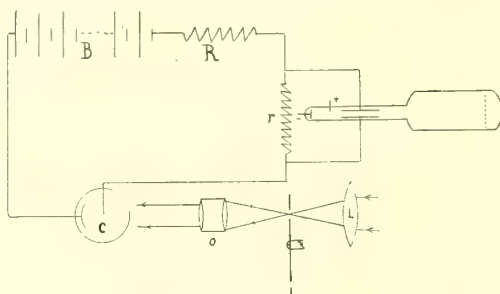



Fig. 2.

Tenendo presente la elevatissima resistenza elettrica equivalente alla cella, e la tensione elevata agente nel circuito parve perciò preferibile ricorrere alla deviazione elettrostatica del fascio catodico, secondo la disposizione rappresentata nella fig. 2. In questa C denota la cella, B la batteria di accumulatori, ed r una elevatissima resistenza, capace di assorbire sotto la corrente di regime che corrisponde a una grande illuminazione costante, circa metà della tensione della batteria. Agli estremi di r erano connesse le due laminette di un tubo di Braun atto alla misura delle tensioni. La deviazione elettrostatica, proporzionale alla differenza di potenziale fra le laminette e quindi alla corrente fotoelettrica i, avrebbe dovuto seguire istantaneamente le variazioni di i, e permettere così di riconoscere, con illuminazioni intermittenti, se nelle pause brevissime della illuminazione la corrente assumesse bruscamente il valore zero.

Per rendere rapidamente intermittente la illuminazione fu proiettato su un disco rotante, provvisto di una serie fitta di piccolissimi fori, una immagine molto piccola e luminosa del cratere d'un arco voltaico; la luce emergente dai fori, resa parallela con un buon obbiettivo, cadeva sulla cella. In queste condizioni, lasciando permanentemente libero il passaggio alla luce, il cerchietto luminoso del fascio catodico si spostava di un paio di centimetri sul disco fluorescente del tubo di Braun. Questo era alimentato da una macchina elettrostatica a 36 dischi, e il fascio catodico era concentrato

in modo da dare un cerchietto piccolissimo, servendosi del solito artificio e cioè di far agire sul fascio una bobina percorsa da corrente continua e coassiale col tubo.

Facendo rotare il disco molto lentamente, il cerchietto di fluorescenza si spostava periodicamente fra la posizione di riposo e la posizione di massima deviazione, corrispondente al passaggio continuo della luce. Ma facendo crescere progressivamente la velocità di rotazione del disco, l'escursione del cerchietto si andava limitando sempre più fra i due estremi, in modo da non toccare nè la posizione di zero, nè quella di massima deviazione. Pareva cioè che la corrente oscillasse periodicamente fra due limiti diversi da zero e dal valore massimo, come se la cella manifestasse un vero effetto di inerzia.

Un esame più attento della disposizione sperimentale rivelò, d'altra parte, che il risultato ottenuto non era esente da dubbî, poichè consentiva una interpretazione diversa, senza che fosse possibile procedere a prove discriminative.

Supponiamo trascurabile la corrente derivata *per conduzione ionica* fra le laminette sottoposte alla differenza di potenziale variabile fra 0 e $r\,i$.

Bisognerà sempre tener presente la corrente di capacità destinata a fornire e dissipare le cariche che occorrono per portare le laminette a quella differenza di potenziale.

Ora se pure la corrente fotoelettrica si annullasse istantaneamente al cessare della luce, potrebbe ancora sopravvivere per qualche tempo una differenza di potenziale fra le lamine, che richiederanno un tempo diverso da zero per scaricarsi nell'unica via consentita: la resistenza r. Questa resistenza era molto elevata per le ragioni sopra indicate. Ciò non ostante il tempo di scarica delle laminette potrebbe essere considerato come trascurabile, data la piccolezza estrema della capacità elettrostatica *geometrica* del condensatore da loro formato. Ma alcune prove ci convinsero, invece, che quella capacità non è così piccola come apparirebbe a prima vista, data la piccola superficie e la notevole distanza (circa 1 centimetro) delle lamine. Per giustificare il valore assai più elevato che misura la capacità vera delle laminette, basta pensare al gas ionizzato dalla scarica che è fra loro interposto; e invero il funzionamento del tubo, per le sue particolarità costruttive, era regolare solo quando la pressione nell'interno non era estremamente bassa; poichè, a pressioni bassissime, si creava nell'interno del vetro una distribuzione abbondante e mutevole di cariche elettrostatiche, che impediva la proiezione di un cerchietto ben luminoso e fisso sullo schermo. Occorreva adunque tenere il tubo a una pressione non troppo piccola e allora la presenza di ioni numerosi nello spazio fra le lamine, doveva appunto equivalere a un aumento notevole della loro capacità.

Nell'impossibilità di sceverare in modo sicuro fra l'effetto dovuto alla capacità delle lamine e quello eventualmente prodotto dal ritardo della cella, credemmo opportuno abbandonare il tubo di Braun, e ricorrere a una disposizione completamente diversa, della quale esponiamo adesso il principio.

Nel circuito della cella C e della batteria B (fig. 3) è permanentemente inserita una resistenza $R + r$; e sulla parte r di questa è derivato, a traverso un contatto periodicamente intermittente, un galvanometro G. La luce che cade sulla cella è periodicamente interrotta per virtù di un disco rotante munito di settori vuoti e pieni; la interruzione è assolutamente istantanea, poichè l'orlo tagliente del settore vuoto incontra un fascio di luce di forma rettangolare a contorni nettissimi e paralleli all'orlo. Disco e con-

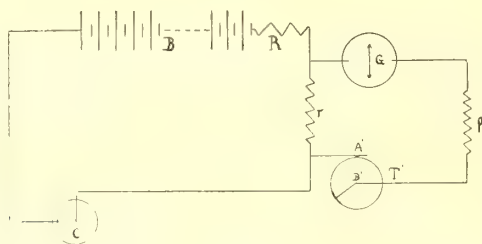



Fig. 3.

tatto intermittente sono meccanicamente solidali, in modo che il contatto può essere stabilito dopo l'interruzione della luce e con un ritardo regolabile a volontà; il contatto dura anch'esso per un tempo regolabile, ma cessa in ogni caso prima che la luce sia ristabilita. In tal modo il circuito batteria-cella è permanentemente chiuso; finchè passa la luce il circuito del galvanometro è interrotto in T, ma se la corrente fotoelettrica sussiste anche dopo un certo tempo dalla soppressione della luce, poichè viene allora stabilito il contatto T, una frazione della corrente residua viene a traversare il galvanometro. Poichè il processo si ripete identicamente a ogni giro del disco e del contatto, il galvanometro assumerà una deviazione costante e si potrà dedurne il valore della corrente residua dopo diversi intervalli di tempo dalla cessazione della luce.

Volendo constatare la possibile permanenza della corrente anche dopo intervalli di tempo assai brevi, era necessario che la parte meccanica del dispositivo funzionasse con la maggiore precisione. Il nostro compito è stato grandemente facilitato dal fatto che ci siam potuti servire dell'interruttore differenziale del prof. Blaserna, ideato e costruito in modo da rispondere mirabilmente alle esigenze sovraindicate.

Sui particolari della disposizione sperimentale, sui risultati e sulla interpretazione di questi riferiremo in una Nota successiva.

Fisica. — *Sull'irraggiamento nero; risposta alle osservazioni del prof. Corbino.* Nota di Cino Poli, presentata dal Socio C. Somigliana.

Il prof. Corbino fa ad una mia recente Nota alcune critiche che, se esatte, la svaluterebbero completamente. Ora io mi ero proposto di dimostrare la compatibilità della formula di Planck colla dinamica classica; e, per far ciò, ho costruito un sistema di risonatori tale che per esso vale la detta formula. Siccome nessuna delle ipotesi che fo nella costruzione di quei risonatori è in contradizione colla dinamica classica, mi pare di aver raggiunto lo scopo prefissomi.

Il prof. Corbino invece osserva che ammettere l'ipotesi $a^2\varrho =$ cost senza giustificazione equivale ad introdurre il concetto essenziale dei *quanta*, e quindi gli pare che la mia deduzione della formula di Planck « faccia capo implicitamente allo stesso concetto incomprensibile della teoria dei *quanta* ».

Anzitutto l'ipotesi $a^2\varrho =$ cost non ha bisogno di giustificazione. Siccome a comparisce come costante arbitraria nell'integrazione dell'equazione differenziale del moto di un'ione, posso ad essa attribuire per ogni ione un valore tale da soddisfare alla condizione posta.

In secondo luogo, il mio metodo conduce sì al concetto di *quantum*, ma non più « incomprensibile » come afferma il Corbino, perchè il *quantum* è spiegato appunto dalla particolare costituzione del sistema di risonatori nel quale esso si presenta. Precisamente è chiaro che se in questo sistema l'energia di due risonatori diversi non può differire che per multipli interi di un *quantum*, ciò è esclusivamente conseguenza:

dell'aver determinato le ampiezze delle oscillazioni dei singoli ioni nel modo detto;

del fatto che ciascun ione oscillante è un gruppo di elettroni;

del fatto che per ipotesi l'energia di ogni ione resta costante.

Concludendo: il Planck pone *a priori* la variazione dell'energia per *quanta* in qualunque risonatore; io invece la trovo in un particolare insieme di risonatori come conseguenza di certe ipotesi nella sua costituzione: e quindi il concetto di *quantum*, che nella teoria di Planck resta incomprensibile, nel mio modello ideale è spiegato e reso compatibile coi principî classici.

Chimica. — *Nuove ricerche sulle metalli-uree* [1]. Nota di G. A. Barbieri, presentata dal Socio G. Ciamician.

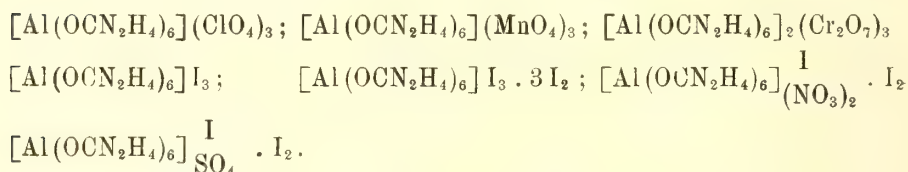
In due Note [2] precedenti ho descritto i composti di ferri- e di vanadi-urea che corrispondono alle formule generali $[Fe(OCN_2H_4)_6]X_3$ e $[V'''(OCN_2H_4)_6]X_3$ e, come i composti di cromi-urea $[Cr(OCN_2H_4)_6]X_3$, scoperti da Sell [3] e studiati da A. Werner [4], sono da considerarsi quali derivati dagli aquosali $[Me'''(OH_2)_6]X_3$ per sostituzione delle molecole di acqua con molecole di urea.

Altri elementi, capaci di dare sali esaidrati analoghi a quelli del cromo, del ferro e del vanadio trivalente, sono l'alluminio e il titanio trivalente. Ciò mi ha indotto a ricercare se, anche questi elementi, potevano formare complessi con l'urea.

Con l'alluminio ho ottenuto i seguenti composti:

$$[Al(OCN_2H_4)_6](ClO_4)_3 ; \; [Al(OCN_2H_4)_6](MnO_4)_3 ; \; [Al(OCN_2H_4)_6]_2(Cr_2O_7)_3$$

$$[Al(OCN_2H_4)_6]I_3 ; \; [Al(OCN_2H_4)_6]I_3 . 3I_2 ; \; [Al(OCN_2H_4)_6]\genfrac{}{}{0pt}{}{I}{(NO_3)_2} . I_2$$

$$[Al(OCN_2H_4)_6]\genfrac{}{}{0pt}{}{I}{SO_4} . I_2 .$$

Non sono riuscito a preparare il cloruro, il bromuro e il nitrato per la loro eccessiva solubilità.

Come risulta dalle formule su riportate, i sali di alluminio-urea hanno composizione del tutto analoga a quella dei corrispondenti sali di cromi-, ferri- e vanadi-urea. Molto probabilmente l'analogia chimica è accompagnata da isomorfismo. Effettivamente ho constatato che il perclorato di alluminio-urea forma cristalli misti col perclorato di vanadi-urea.

Col titanio trivalente, in causa della grande instabilità e solubilità dei suoi sali, le ricerche furono meno facili che con l'alluminio. Il solo composto che potei isolare allo stato di purezza fu il perclorato di titani-urea che ha la formula $[Ti'''(OCN_2H_4)_6](ClO_4)_3$ e si presenta in cristalli prismatici di color lilla, stabili all'aria. Il fatto abbastanza singolare che il residuo dell'acido perclorico, che è un forte ossidante, possa coesistere in un

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della Università di Ferrara.

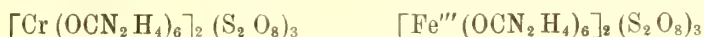
[2] Rendiconti Accad. Lincei, vol. XXII, 1° sem., pag. 867 (1913); vol. XXIV, 1° semestre, pag. 435 (1915).

[3] Proc. Roy. Soc., 33_{267} (1882); 45_{321} (1889).

[4] Ann. 322_{296} (1902).

composto col titanio trivalente, che è un riducente energico, è una novella prova che, nelle metalli-uree, l'atomo metallico forma un complesso colle molecole di urea: da esse viene circondato e, per così dire, protetto.

Nella presente Nota sono anche descritti il persolfato di cromi-urea e il persolfato di ferri-urea. Da ricerche precedenti (1) venne mostrato che i persolfati idrati di magnesio, manganese, cobalto e nickel, che non è possibile ottenere allo stato solido, perchè eccessivamente solubili e instabili, si ottengono facilmente e ben cristallizzati in combinazione con l'esametilentetrammina. Questa base non può servire all'isolamento di sali idrati di cromo e di ferro, perchè reagisce con essi formando sali basici. Io ho pensato di preparare i composti dell'acido persolforico col cromo e col ferro trivalente, sostituendo all'acqua l'urea, e ho ottenuto i seguenti composti:

$$[Cr(OCN_2H_4)_6]_2(S_2O_8)_3 \qquad [Fe'''(OCN_2H_4)_6]_2(S_2O_8)_3$$

che si presentano in bei cristalli prismatici, abbastanza stabili allo stato di secchezza.

Non mi fu possibile di isolare il persolfato di alluminio-urea.

Parte sperimentale.

Perclorato di alluminio-urea.

$$[Al(OCN_2H_4)_6](ClO_4)_3$$

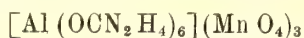
A una soluzione concentrata di perclorato di alluminio (2) si aggiunge urea in sostanza fino quasi a saturazione; si separa tosto il perclorato di alluminio-urea sotto forma di una polvere bianca, cristallina, non igroscopica, che, esaminata al microscopio, risulta costituita da prismi trasparenti. È poco solubile in alcool, solubilissima in acqua: la sua solubilità diminuisce in presenza di un eccesso di urea e di perclorato di sodio.

	Calcolato	Trovato
Al	3,95	3,79
N	24,52	24,47
Cl	15,52	15,30

Aggiungendo urea e perclorato sodico ad una soluzione contenente solfato di alluminio e solfato di vanadio trivalente, si ottiene una sostanza cristallina, omogenea, colorata in azzurro pallido, che è la soluzione solida del perclorato di alluminio-urea col perclorato di vanadi-urea.

(1) G. A. Barbieri, F. Calzolari, Z. anorg. Chem. 71_{353} (1911).
(2) R. F. Weinland, Fr. Ensgraber, Z. anorg. Chem., 84_{368} (1913).

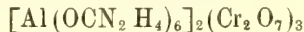
Permanganato di alluminio-urea.

$[Al(OCN_2H_4)_6](MnO_4)_3$

Si ottiene facendo reagire, in soluzione concentrata, nitrato di alluminio, urea e un permanganato molto solubile; per esempio, quello di magnesio. Cristalli neri, solubili in acqua con colorazione violetta.

	Calcolato	Trovato
Mn	22,15	22,39
N	22,60	22,21

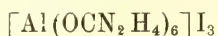
Il permanganato di alluminio-urea è solubile allo stato solido in ogni rapporto nel perclorato di alluminio-urea. Infatti, facendo reagire una soluzione concentrata di perclorato sodico, resa violetta per aggiunta di un po' di permanganato sodico, con una soluzione concentrata di urea e nitrato di alluminio, si forma un precipitato cristallino omogeneo tanto più colorato in violetto, quanto più forte è stata l'aggiunta di permanganato sodico.

Bicromato di alluminio-urea.

$[Al(OCN_2H_4)_6]_2(Cr_2O_7)_3$

Da una soluzione concentrata di urea, nitrato di alluminio e bicromato sodico si separa sotto forme di cristalli aranciati.

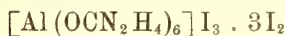
	Calcolato	Trovato
$Al_2O_3 + Cr_2O_3$	39,25	39 47
N	23,66	23 31

Joduro di alluminio-urea.

$[Al(OCN_2H_4)_6]I_3$

Si ottiene aggiungendo joduro sodico in eccesso ad una soluzione di urea e nitrato di alluminio. Polvere cristallina bianca, molto solubile.

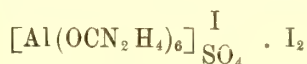
	Calcolato	Trovato
Al	3,53	3,71
N	21,90	21,45
I	49,60	48,90

Perjoduro di alluminio-urea.

$[Al(OCN_2H_4)_6]I_3 . 3I_2$

Si ha dal eomposto precedente sciogliendolo in una soluzione concentrara di joduro sodico saturata con jodio. Cristalli color grafite, solubili in acqua e in alcool.

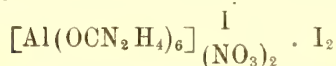
	Calcolato	Trovato
I totale	74,70	74.25
I addizionato	49,80	49,54

Perjoduro-solfato di alluminio-urea.

$$[Al(OCN_2H_4)_6]\genfrac{}{}{0pt}{}{I}{SO_4} . I_2$$

Da una soluzione contenente solfato di alluminio, urea (in eccesso) joduro sodico e jodo si separa sotto forma di cristalli rosso-aranciati, poco solubili.

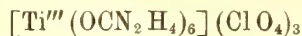
	Calcolato	Trovato
Al	3,14	3,22
N	19,46	18.94
S	3,71	3,92
I totale	44,07	43,76
I addizionato	29,39	28,96

Perjoduro-nitrato di alluminio-urea.

$$[Al(OCN_2H_4)_6]\genfrac{}{}{0pt}{}{I}{(NO_3)_2} . I_2$$

Si prepara come il composto precedente impiegando nitrato di alluminio. Polvere cristallina rossastra poco solubile.

	Calcolato	Trovato
Al	3,03	3;09
I totale	42,69	42,20

Perclorato di titani-urea.

$[Ti'''(OCN_2H_4)_6](ClO_4)_3$

5 gr. di solfato acido di titanio trivalente $3Ti_2(SO_4)_3 . H_2SO_4 . 25H_2O$ preparato secondo A. Stähler [1] mediante riduzione elettrolitica di una so-

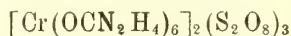
[1] Ber. 39_{2681} (1905).

luzione di acido titanico in acido solforico concentrato, vennero mescolati con gr. 20 di urea, e poi si aggiunse acqua goccia a goccia, e agitando finchè la poltiglia si trasformò in un liquido turchino-violetto. Da questo, per aggiunta di perclorato sodico (gr. 30) in soluzione concentrata, si ottenne il perclorato di titani-urea, polvere cristallina violetta costituita da prismi trasparenti. Il liquido soprastante diventa incoloro. La sostanza venne spremuta alla pompa, lavata con alcool, e seccata all'aria su carta da filtro. Si dosò il titanio come $Ti\,O_2$ per calcinazione, previo trattamento della sostanza con acido solforico concentrato; l'acido perclorico col metodo indiretto già descritto [1]; l'azoto come ammoniaca.

	Calcolato	Trovato
Ti	6,71	6,80
Cl	15,06	14,88
N	23,70	23,50

Il perclorato di titani-urea allo stato di secchezza è una polvere color lilla, stabile all'aria. Nell'acqua si scioglie con colorazione violetta che presto scompare, Trattando la soluzione concentrata di urea e solfato acido di titanio trivalente con un eccesso di joduro sodico, precipita una sostanza in cristalli violetti che contiene titanio, urea e jodio e che probabilmente è il joduro di titani-urea. Non sono riuscito a ottenerlo allo stato di purezza, cioè esente da solfato e joduro di sodio in causa della sua grande solubilità.

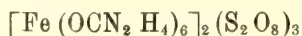
Persolfato di cromi-urea.

$$[Cr(OCN_2H_4)_6]_2(S_2O_8)_3$$

Il persolfato di ammonio precipita, dalle soluzioni concentrate di cloruro di cromi-urea, una polvere cristallina bianco-verdognola che, dopo alcun tempo, si trasforma in cristalli verdi ben formati.

Per l'analisi la sostanza venne trattata in soluzione con cloridrato di idrossilammina a caldo, poi il cromo venne precipitato con ammoniaca e nel filtrato si determinò lo zolfo come solfato di bario.

	Calcolato	Trovato
Cr	7,43	7,51
S	13,75	13,59

Persolfato di ferri-urea.

$$[Fe(OCN_2H_4)_6]_2(S_2O_8)_3$$

A una soluzione concentrata di cloruro ferrico, si aggiunge tanta urea in sostanza finchè il colore della soluzione comincia a diventar verde, poi,

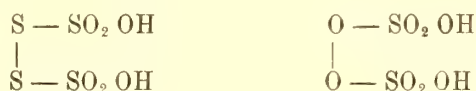
[1] G. A. Barbieri, Rendiconti Accad. Lincei, vol. XXIV, 1° sem., pag. 437 (1915).

una soluzione concentrata di persolfato di ammonio: si forma tosto il persolfato di ferri-urea che è una polvere cristallina verde-azzurrognola. In acqua si scioglie con colorazione gialla.

	Calcolato	Trovato
Fe	7,95	7,84
S	13,70	13,82
N	23,95	23,56

Chimica. — *Contributo alla conoscenza dei tetrationati* [1]. Nota di F. Calzolari, presentata dal Socio G. Ciamician.

Se si confronta la formula dell'acido persolforico $H_2 S_2 O_8$ con la formula dell'acido tetrationico $H_2 S_4 O_6$ si vede che quest'ultima si può far derivare dalla prima per sostituzione di due atomi di ossigeno con due atomi di zolfo. E se all'acido tetrationico si attribuisce la costituzione proposta da Blomstrand e da Mendeleeff, la sua analogia con l'acido persolforico apparisce evidente: una coppia bivalente di zolfo —S—S— tiene il posto di una coppia bivalente di ossigeno —O—O—.

$$\begin{matrix} S - SO_2\,OH \\ | \\ S - SO_2\,OH \end{matrix} \qquad \begin{matrix} O - SO_2\,OH \\ | \\ O - SO_2\,OH \end{matrix}$$

Effettivamente fra i tetrationati e i persolfati si riscontrano alcune analogie. Il tetrationato di potassio cristallizza anidro ed è poco solubile come il persolfato di potassio. Il tetrationato di sodio e il persolfato di sodio sono anidri e molto solubili. Il tetrationato di bario cristallizza con tre molecole di acqua ed è solubile: il persolfato di bario è pure molto solubile e la sua idratazione sta fra tre e quattro molecole di acqua. Bisogna notare che è quasi impossibile ottenere il persolfato di bario allo stato di purezza. Lo stesso va ripetuto per il persolfato di piombo che è stato descritto con tre molecole di acqua ed è molto solubile come il tetrationato di piombo che cristallizza con due molecole di acqua.

Il confronto non si può estendere più oltre perchè le conoscenze che si hanno sui tetrationati sono scarse.

G. A. Barbieri e F. Calzolari [2] hanno descritto numerosi persolfati di metalli bivalenti in combinazione con l'ammoniaca, con la piridina e

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto chimico dell'Università di Ferrara diretto dal prof. G. A. Barbieri.

[2] Z. anorg. Chem. 71, 353 (1911).

con l'esametilentetrammina. Io ho tentato la preparazione dei composti corrispondenti dell'acido tetrationico, per verificare se l'analogia tra persolfati e tetrationati potesse rivelarsi in tali composti d'ordine superiore. I risultati hanno confermato pienamente le mie previsioni. Riferisco qui sotto le formule dei tetrationati da me ottenuti, mettendo di fronte ad esse quelle dei corrispondenti persolfati.

Tetrationati	Persolfati
$ZnS_4O_6 . 4NH_3$	$ZnS_2O_8 . 4NH_3$
$NiS_4O_6 . 6NH_3$	$NiS_2O_8 . 6NH_3$
$ZnS_4O_6 . 4C_5H_5N$	$ZnS_2O_8 . 4C_5H_5N$
$CdS_4O_6 . 4C_5H_5N$	$CdS_2O_8 . 4C_5H_5N$
$CuS_4O_6 . 4C_5H_5N$	$CuS_2O_8 . 4C_5H_5N$
$NiS_4O_6 . 4C_5H_5N$	$NiS_2O_8 . 4C_5H_5N$
$CoS_4O_6 . 4C_5H_5N$	— —
$MgS_4O_6 . 8H_2O . 2C_6N_4H_{12}$	$MgS_2O_8 . 8H_2O . 2C_6N_4H_{12}$
$CoS_4O_6 . 8H_2O . 2C_6N_4H_{12}$	$CoS_2O_8 . 8H_2O . 2C_6N_4H_{12}$
$NiS_4O_6 . 8H_2O . 2C_6N_4H_{12}$	$NiS_2O_8 . 8H_2O . 2C_6N_4H_{12}$

L'analogia tra i tetrationati e i persolfati è notevole specialmente nei composti con l'esametilentetrammina che hanno lo stesso grado d'idratazione. Anche nell'aspetto esterno e nella solubilità v'è somiglianza tra i composti di addizione dei persolfati e quelli dei tetrationati. Non posso affermare che tra questi composti esista anche somiglianza cristallografica perchè non ho ancora potuto ottenere i composti di addizione dei persolfati in cristalli misurabili.

Parte sperimentale.

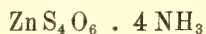
Ho preparato, dapprima, per doppio scambio tra iposolfito di sodio e cloruro di bario, l'iposolfito di bario che, essendo poco solubile, si separa allo stato cristallino dalla miscela delle due soluzioni sature a caldo.

L'iposolfito di bario, sospeso in poca acqua, venne trattato colla quantità calcolata di jodio e dalla soluzione limpida così ottenuta, e che conteneva joduro e tetrationato di bario, venne precipitato quest'ultimo mediante aggiunta di alcool assoluto.

Le soluzioni dei tetrationati di magnesio, zinco, calmio, cobalto, nikel, rame vennero preparate facendo reagire il tetrationato di bario, in quantità calcolata, sui rispettivi solfati.

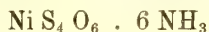
Prodotti di addizione con l'ammoniaca.

Tetrationato di zinco ammoniaca.

$ZnS_4O_6 . 4NH_3$

Si ottiene dalle soluzioni fortemente ammoniacali di tetrationato di zinco, in cristalli trasparenti, incolori. Lo zolfo in questo composto e nei seguenti venne determinato come solfato di bario, previa ossidazione della sostanza con ipobromito.

	Calcolato	Trovato
Zn	18.27	18,19
S	35,85	35,21
N	15,66	15,46

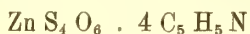
Tetrationato di nickel-ammoniaca.

$NiS_4O_6 . 6NH_3$

Cristallizza in prismi microscopici di color lilla da una soluzione di tetrationato di nickel saturata a freddo con ammoniaca gazosa.

	Calcolato	Trovato
Ni	15,24	15,10
S	33,32	33,02
N	21,84	21,53

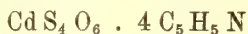
Prodotti di addizione con la piridina.

Tetrationato di zinco-piridina.

$ZnS_4O_6 . 4C_5H_5N$

Si separa aggiungendo piridina in eccesso a una soluzione al 10 % di tetrationato di zinco. Cristallini prismatici incolori.

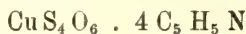
	Calcolato	Trovato
Zn	10,79	10,65
S	21,17	20,92
N	9,25	9,02

Tetrationato di cadmio-piridina.

$CdS_4O_6 . 4C_5H_5N$

Si separa come il composto precedente al quale rassomiglia anche nell'aspetto.

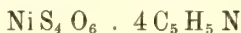
	Calcolato	Trovato
Cd	17,21	17,15
S	19,65	19,43
N	8,58	8,39

Tetrationato di rame-piridina.

$CuS_4O_6 . 4C_5H_5N$

Questo prodotto si separa, dalle soluzioni concentrate di tetrationato di rame per aggiunta di piridina, sotto forma di un precipitato microcristallino. Per ottenerlo in cristalli ben formati, bisogna impiegare soluzioni di tetrationato di rame di concentrazione non superiore all'1 % e aggiungere la piridina in soluzione acquosa e non in forte eccesso. In tali condizioni il prodotto si separa lentamente in cristalli aghiformi di color bleu-cupo che sono abbastanza stabili all'aria e quasi insolubili in acqua a freddo, mentre a caldo si decompongono perdendo piridina.

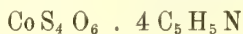
	Calcolato	Trovato
Cu	10,52	10,57
S	21,23	21,45
N	9,27	9,22

Tetrationato di nickel-piridina.

$NiS_4O_6 . 4C_5H_5N$

Cristalli aghiformi azzurri.

	Calcolato	Trovato
Ni	9,79	9,85
N	9,35	9,17

Tetrationato di cobalto-piridina.

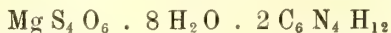
$CoS_4O_6 . 4C_5H_5N$

Cristallini microscopici aghiformi di color rosso-violaceo.

	Calcolato	Trovato
Co	9,84	9,87
N	9,34	9,04

Prodotti di addizione con l'esametilentetrammina.

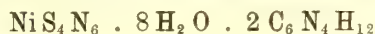
Si ottengono facendo reagire, in soluzione, l'esametilentetrammina sui tetrationati. Sono composti ben cristallizzati, inalterabili all'aria, solubili nell'acqua a freddo.

Tetrationato idrato di magnesio-esametilentetrammina.

$MgS_4O_6 . 8H_2O . 2C_6N_4H_{12}$

Prismi trasparenti incolori.

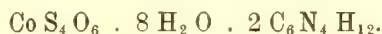
	Calcolato	Trovato
Mg	3,61	3,69
S	19,06	18,92
N	16,65	16,86

Tetrationato idrato di nickel-esametilentetrammina.

$NiS_4N_6 . 8H_2O . 2C_6N_4H_{12}$

Prismi trasparenti di color verde-chiaro.

	Calcolato	Trovato
Ni	8,30	8,22
S	18,14	18,24
N	15,85	15,70

Tetrationato idrato di cobalto-esametilentetrammina.

$CoS_4O_6 . 8H_2O . 2C_6N_4H_{12}$.

Prismi rosei. Questo composto è solubile allo stato solido nei due composti precedenti.

	Calcolato	Trovato
Co	8,33	8,31
S	18,12	18,45
N	15,84	15,71

Chimica. — *Sugli alogenomercurati* [1]. Nota di F. Calzolari e U. Tagliavini, presentata dal Socio G. Ciamician.

Lo studio dei complessi che il mercurio bivalente forma in soluzione con gli ioni-alogeni fu oggetto di numerose ricerche fisico-chimiche. Si eseguirono, a tal uopo, determinazioni crioscopiche ed ebullioscopiche, misure di conducibilità, di forza elettromotrice, di solubilità ecc.

I risultati ottenuti da tali ricerche non sono ancora decisivi, nè del tutto concordanti. In base ad essi si può soltanto affermare che i tipi degli alogenomercurati esistenti in soluzione sono in generale molto semplici. Sembra che su di essi abbia influenza la natura dell'alogenuro alcalino sciolto con l'alogenuro mercurico. Le Blanc e Noyes [2] riconobbero che nelle soluzioni di NaCl e $HgCl_2$ esiste il composto $[HgCl_4]Na_2$, mentre nelle soluzioni

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica dell'Università di Ferrara diretto dal prof. G. A. Barbieri.

[2] Z. Physik. Chem., *6* (1890), 390.

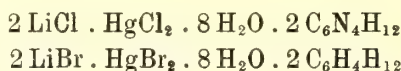
corrispondenti di KCl e $HgCl_2$ sarebbero legati al mercurio più di quattro atomi di cloro. Secondo Benrath [1] si formerebbe il composto $[HgCl_6]K_4$. Iander [2] ammette nelle soluzioni degli alogenomercurati l'esistenza di anioni HgX_3 e Sherrill [3] ritiene probabile, nelle soluzioni concentrate, l'esistenza di alogenomercurati contenenti più molecole di alogenuro mercurico.

Noi abbiamo pensato che qualche indicazione, sullo stato in soluzione degli alogenomercurati, si sarebbe potuto avere, isolando alcuni di questi sali, dalle loro soluzioni, sotto forma di composti di addizione con l'esametilentetrammina, cioè applicando ad essi il metodo trovato da G. A. Barbieri [4] per i polisolfuri di calcio.

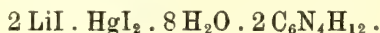
Abbiamo eseguito in proposito alcune esperienze orientatrici, e i risultati che abbiamo ottenuto e che esponiamo in questa Nota ci sembrano non senza interesse.

Gli alogenomercurati che si prestarono per le nostre ricerche furono quelli di litio, di magnesio, di manganese, di cobalto e di nickel. I loro composti di addizione con l'esametilentetrammina si ottengono con grande facilità; sono poco solubili, magnificamente cristallizzati, stabili all'aria. Essi differiscono quindi notevolmente dai sali idrati corrispondenti, i quali sono tutti di preparazione difficile, perchè estremamente solubili ed igroscopici.

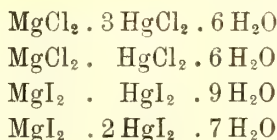
Dalle soluzioni di cloruro mercurico e cloruro di litio, e da quelle di bromuro mercurico e bromuro di litio non è possibile ottenere, per evaporazione, composti cristallizzati, mentre da esse, con l'esametilentetrammina, si ottengono facilmente i seguenti composti di addizione:

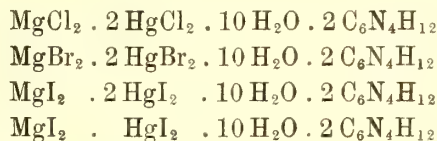
$$2\,LiCl \,.\, HgCl_2 \,.\, 8\,H_2O \,.\, 2\,C_6N_4H_{12}$$
$$2\,LiBr \,.\, HgBr_2 \,.\, 8\,H_2O \,.\, 2\,C_6H_4H_{12}$$

Da una soluzione contenente joduro mercurico e joduro di litio e avente la densità 3,28, Duboin [5] ha ottenuto, dopo tre mesi, una sostanza cristallina fortemente igroscopica avente la formula $2\,LiI \,.\, HgI_2 \,.\, 8\,H_2O$.

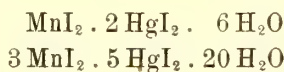
Noi abbiamo trovato che il composto di addizione del jodomercurato di litio con l'esametilentetrammina corrisponde perfettamente a quello del cloro- e a quello del bromo-mercurato, perchè ha la formula

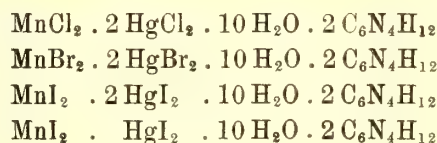
$$2\,LiI \,.\, HgI_2 \,.\, 8\,H_2O \,.\, 2\,C_6N_4H_{12} \,.$$

(1) Z. Anorg. Chem., *58* (1908), 258.
(2) Z. Elektrochem., *8* (1902), 688.
(3) Z. Physik. Chem., *43* (1903), 705.
(4) Rendiconti Accad. Lincei, 1914, II, 8 (1914).
(5) Ann. Chim. Phys., *16* (1909), pag. 258.

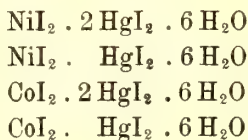
Nella letteratura sono descritti i seguenti alogenomercurati di magnesio:

$$MgCl_2 . 3\,HgCl_2 . 6\,H_2O$$
$$MgCl_2 . HgCl_2 . 6\,H_2O$$
$$MgI_2 . HgI_2 . 9\,H_2O$$
$$MgI_2 . 2\,HgI_2 . 7\,H_2O$$

Con l'esametilentetrammina gli alogenomercurati di magnesio dànno i seguenti composti

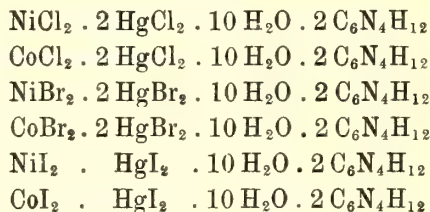
$$MgCl_2 . 2\,HgCl_2 . 10\,H_2O . 2\,C_6N_4H_{12}$$
$$MgBr_2 . 2\,HgBr_2 . 10\,H_2O . 2\,C_6N_4H_{12}$$
$$MgI_2 . 2\,HgI_2 . 10\,H_2O . 2\,C_6N_4H_{12}$$
$$MgI_2 . HgI_2 . 10\,H_2O . 2\,C_6N_4H_{12}$$

Secondo Bonsdorff [1] il cloruro mercurico si combina col cloruro di manganese, e il bromuro mercurico col bromuro di manganese, ma non si conoscono le formule di tali composti. Dal Duboin [2] sono stati preparati i seguenti jodomercurati di manganese

$$MnI_2 . 2\,HgI_2 . 6\,H_2O$$
$$3\,MnI_2 . 5\,HgI_2 . 20\,H_2O$$

Noi abbiamo trovato che i composti di addizione degli alogenomercurati di manganese con l'esametilentetrammina corrispondono perfettamente a quelli di magnesio, come risulta dalle formule

$$MnCl_2 . 2\,HgCl_2 . 10\,H_2O . 2\,C_6N_4H_{12}$$
$$MnBr_2 . 2\,HgBr_2 . 10\,H_2O . 2\,C_6N_4H_{12}$$
$$MnI_2 . 2\,HgI_2 . 10\,H_2O . 2\,C_6N_4H_{12}$$
$$MnI_2 . HgI_2 . 10\,H_2O . 2\,C_6N_4H_{12}$$

Degli alogenomercurati di nickel e di cobalto si conoscono con sicurezza soltanto i seguenti jodomercurati descritti da Dobrosserdoff [3]

$$NiI_2 . 2\,HgI_2 . 6\,H_2O$$
$$NiI_2 . HgI_2 . 6\,H_2O$$
$$CoI_2 . 2\,HgI_2 . 6\,H_2O$$
$$CoI_2 . HgI_2 . 6\,H_2O$$

(1) Pogg. Ann. *17* (1829), 133.
(2) Comptes rendus, *142* (1906), 1339.
(3) Z. russ. phys. Ges. *33*, pag. 303. — C. Blatt (1901), II, 332.

L'esametilentetrammina dà cogli alogenomercurati di nickel e di cobalto i seguenti composti di addizione:

$$NiCl_2 . 2\,HgCl_2 . 10\,H_2O . 2\,C_6N_4H_{12}$$
$$CoCl_2 . 2\,HgCl_2 . 10\,H_2O . 2\,C_6N_4H_{12}$$
$$NiBr_2 . 2\,HgBr_2 . 10\,H_2O . 2\,C_6N_4H_{12}$$
$$CoBr_2 . 2\,HgBr_2 . 10\,H_2O . 2\,C_6N_4H_{12}$$
$$NiI_2 . HgI_2 . 10\,H_2O . 2\,C_6N_4H_{12}$$
$$CoI_2 . HgI_2 . 10\,H_2O . 2\,C_6N_4H_{12}$$

Nei composti di addizione da noi finora ottenuti ci sembra degno di rilievo:

1° la loro regolarità di composizione; tutti contengono due molecole di esametilentetrammina e dieci molecole di acqua, ad eccezione dei composti dal litio che ne contengono otto.

2° gli alogenomercurati isolati sotto forma di composti di addizione appartengono ai tipi più semplici

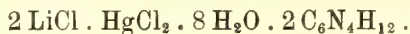
$$[HgX_3]Me^{I} \qquad [HgX_4]Me^{I}_2$$

Nei cloro- e nei bromo-mercurati di magnesio, manganese, cobalto e nickel si riscontra, con l'esametilentetrammina, soltanto il primo tipo: negli iodomercurati di nickel e cobalto e negli alogenomercurati di litio soltanto il secondo: negli iodomercurati di magnesio e manganese tanto il primo che il secondo tipo.

Parte sperimentale.

Alogenomercurati di litio-esametilentetrammina.

Cloromercurato di litio-esametilentetrammina.

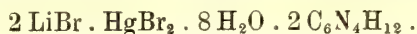
$$2\,LiCl . HgCl_2 . 8\,H_2O . 2\,C_6N_4H_{12} .$$

A una soluzione molto concentrata di cloruro di litio (8 mol.) e cloruro mercurico (1 mol.) venne aggiunta una soluzione pure concentratissima di esametilentetrammina (4 mol.). Dopo alcune ore cominciarono a depositarsi cristalli incolori, trasparenti, inalterabili all'aria. Dall'acqua vengono decomposti con formazione del composto di addizione insolubile $2\,HgCl_2 . C_6N_4H_{12} . H_2O$ [1].

Calcolato	Li	1,77	Cl [2]	18,17	N	14,36
Trovato	»	1,81	»	17,90	»	14,47

[1] Grutzner, Archiv. d. Pharm., *236*, 370.

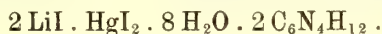
[2] In tutti gli alogenomercurati gli alogeni vennero determinati col metodo Volhard, previa eliminazione del mercurio, con alluminio, in soluzione alcalina per potassa caustica.

Bromomercurato di litio-esametilentetrammina.

$2\,LiBr . HgBr_2 . 8\,H_2O . 2\,C_6N_4H_{12}$.

Si ottennero cristalli ben formati lasciando evaporare lentamente una soluzione contenente $HgBr_2$ (1 mol.), LiBr (4 mol.), $C_6N_4H_{12}$ (4 mol.). Grossi cristalli prismatici incolori, inalterabili all'aria. Dall'acqua vengono decomposti.

Calcolato	Li	1,44	Br	33,35	N	11,68
Trovato	»	1'46	»	33,60	»	11,60

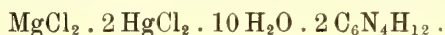
Iodomercurato di litio-esametilentetrammina.

$2\,LiI . HgI_2 . 8\,H_2O . 2\,C_6N_4H_{12}$.

Venne preparato come il precedente composto di bromo. Cristalli trasparenti, lievissimamente giallognoli, inalterabili all'aria, non deliquescenti. Con acqua si comportano come i precedenti composti di bromo e cloro.

Calcolato	Li	1,21	I	44.28	N	9,76
Trovato	»	1,20	»	43,84	»	9,73

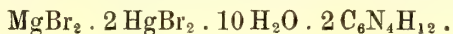
ALOGENOMERCURATI DI MAGNESIO-ESAMETILENTETRAMMINA.

Cloromercurato di magnesio-esametilentetrammina.

$MgCl_2 . 2\,HgCl_2 . 10\,H_2O . 2\,C_6N_4H_{12}$.

Si deposita da una soluzione concentrata contenente $MgCl_2$ (1 mol.), KCl (8 mol.), $HgCl_2$ (2 mol.), $C_6N_4H_{12}$ (2 mol.) in forma di cristalli prismatici incolori, trasparenti, stabili all'aria. È solubile senza alterazione nelle soluzioni concentrate dei cloruri alcalini; dall'acqua pura viene decomposto.

Calcolato	Mg	2,21	Cl	19,38	N	10,21
Trovato	»	2,23	»	19,32	»	9,91

Bromomercurato di magnesio-esametilentetrammina.

$MgBr_2 . 2\,HgBr_2 . 10\,H_2O . 2\,C_6N_4H_{12}$.

Si ottenne da una soluzione concentrata di $MgSO_4$ (1 mol.), NaBr (8 mol.), $HgBr_2$ (2 mol.) alla quale si aggiunse $C_6N_4H_{12}$ (2 mol.) pure in soluzione concentrata. Cristalli prismatici incolori del tutto simili a quelli del composto precedente.

Calcolato	Mg	1,78	Br	35,15	N	8,21
Trovato	»	1,96	»	35,09	»	7,94

Iodomercurati di magnesio-esametilentetrammina.

In 140 cc. di acqua si sciolsero 5 gr. di $MgSO_4 . 7 H_2O$, gr. 9,0 di HgI_2 e gr. 12 di NaI; poi si aggiunsero gr. 5,6 di $C_6N_4H_{12}$ sciolti in 60 cc. di acqua; si depositò subito una polvere cristallina lievissimamente gialla che venne tosto separata per filtrazione e seccata tra carta da filtro. All'analisi diede risultati concordanti colla formula $MgI_2 . HgI_2 . 10 H_2O . 2C_6N_4H_{12}$.

Calcolato	Mg	2,03	I	42,55	N	9,38
Trovato	»	1,96	»	42,95	»	9,37

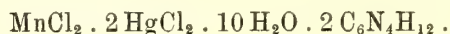
Dall'acqua madre per lenta evaporazione si depositò in cristalli prismatici, incolori, splendenti il composto $MgI_2 . 2 HgI_2 . 10 H_2O . 2 C_6N_4H_{12}$ analogo al cloro- e bromo-mercurato su descritti.

Calcolato	Mg	1,47	I	45,94	N	6,76
Trovato	»	1,48	»	45,80	»	6,79

Alogenomercurati di manganese-esametilentetrammina.

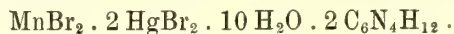
Vennero ottenuti in modo perfettamente analogo a quello descritto per i composti di magnesio ai quali rassomigliano nell'aspetto e nelle proprietà.

Cloromercurato di manganese-esametilentetrammina.

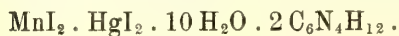
$MnCl_2 . 2 HgCl_2 . 10 H_2O . 2 C_6N_4H_{12}$.

Cristalli prismatici incolori trasparenti.

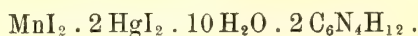
Calcolato	Mn	4,87	Cl	18,88	N	9,93
Trovato	»	4,91	»	19,13	»	9,69

Bromomercurato di manganese-esametilentetrammina.

$MnBr_2 . 2 HgBr_2 . 10 H_2O . 2 C_6N_4H_{12}$.

Calcolato	Mn	3,94	Br	34,40	N	8,03
Trovato	»	3,90	»	34,64	»	7,95

Iodomercurati di manganese-esametilentetrammina.

$MnI_2 . HgI_2 . 10 H_2O . 2 C_6N_4H_{12}$.

Calcolato	Mn	4,49	I	41,51	N	9,15
Trovato	»	4,38	»	41,71	»	9,20

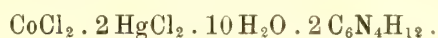
$MnI_2 . 2 HgI_2 . 10 H_2O . 2 C_6N_4H_{12}$.

Prismi incolori trasparenti, che però si alterano lentamente all'aria diventando bruni.

Calcolato	Mn	3,27	I	45,38	N	6,68
Trovato	"	3,30	"	45,16	"	6,57

ALOGENOMERCURATI DI COBALTO-ESAMETILENTETRAMMINA.

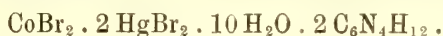
Anche questi composti vennero preparati come quelli di magnesio. Mentre tanto col magnesio che col manganese si ottennero due jodomercurati, col cobalto se ne ottenne sempre uno solo anche variando molto le condizioni di preparazione.

Cloromercurato di cobalto-esametilentetrammina.

$CoCl_2 . 2 HgCl_2 . 10 H_2O . 2 C_6N_4H_{12}$.

Prismi rosei che si possono ottenere della lunghezza di qualche centimetro.

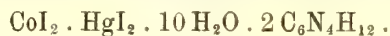
Calcolato	Co	5,20	Cl	18,79	N	9,90
Trovato	"	5,23	"	18,43	"	9,74

Bromomercurato di cobalto-esametilentetrammina.

$CoBr_2 . 2 HgBr_2 . 10 H_2O . 2 C_6N_4H_{12}$.

Cristalli simili a quelli del composto precedente.

Calcolato	Co	4,21	Br	34,26	N	8,01
Trovato	"	4,15	"	34,14	"	7,99

Iodomercurato di cobalto-esametilentetrammina.

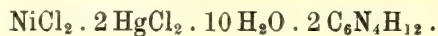
$CoI_2 . HgI_2 . 10 H_2O . 2 C_6N_4H_{12}$.

Cristalli rossi, stabili all'aria.

Calcolato	Co	4,80	I	41,38	N	9,13
Trovato	"	4,88	"	41,40	"	9,04

ALOGENO MERCURATI DI NICKEL-ESAMETILENTETRAMMINA.

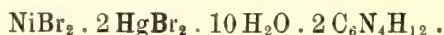
Le condizioni di preparazione, le proprietà di questi composti sono analoghe a quelle dei composti di cobalto dai quali non ne differiscono che nel colore.

Cloromercurato di nickel-esametilentetrammina.

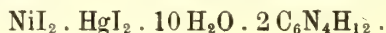
$NiCl_2 . 2 HgCl_2 . 10 H_2O . 2 C_6N_4H_{12}$.

Prismi verdi.

Calcolato	Ni	5,18	Cl	18,78	N	9,89
Trovato	"	5,26	"	18,50	"	9,72

Bromomercurato di nickel-esametilentetrammina.

$NiBr_2 . 2 HgBr_2 . 10 H_2O . 2 C_6N_4H_{12}$.

Calcolato	Ni	4,19	Br	34,27	N	8,01
Trovato	"	4,19	"	34,53	"	7,88

Iodomercurato di nickel-esametilentetrammina.

$NiI_2 . HgI_2 . 10 H_2O . 2 C_6N_4H_{12}$.

Cristallini verdi, trasparenti, inalterabili all'aria.

Calcolato	Ni	4,78	I	41,38	N	9,12
Trovato	"	4,92	"	41,47	"	9,06

Chimica-fisica. — *Sul potere elettromotore delle amalgame di magnesio* [1]. Nota di Livio Cambi, presentata dal Socio R. Nasini.

Per le amalgame di magnesio ho compiuto ricerche analoghe a quelle descritte precedentemente per il calcio.

I solventi adoperati erano gli stessi delle coppie ad amalgame di calcio. Il cloruro di magnesio anidro venne preparato col metodo di Hempel [2]. Ottenni lo ioduro anidro dal composto con l'etere, preparato seguendo B.N. Meuschutkin [3]. I dispositivi usati per le misure in questo caso erano in tutto simili a quelli descritti per le amalgame di calcio.

Le amalgame di magnesio vennero preparate e trattate, prima della misura, nel modo già esposto a proposito delle ricerche termiche [4].

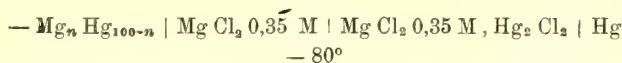
[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrochimica del R. Istituto tecnico superiore di Milano.

[2] Berichte, 1888, pag. 260.

[3] Zeit. anorg. Chemie, *49* (1906), 207.

[4] Cambi e Speroni, questi Rendiconti, 1915, I, 734.

III. *Forze elettromotrici in alcool metilico.*

$-$ $Mg_n\,Hg_{100-n}$ | $Mg\,Cl_2$ 0,35 M | $Mg\,Cl_2$ 0,35 M, $Hg_2\,Cl_2$ | Hg
— 80°

N.	Mg °/₀ in peso	Mg °/₀ in atomi	F. E. M.	ε_H	N.	Mg °/₀ in peso	Mg °/₀ in atomi	F. E. M.	ε_H
1	0,12	1	— 1,224	— 1,007	10	4,71	29	— 1,895	— 1,678
2	0,64	5	— 1,722	— 1,505	11	4,94	30	— 1,898	— 1,681
3	1,32	10	— 1,774	— 1,557	12	5,37	32	— 1,939	— 1,722
4	1,93	14	— 1,782	— 1,565	13	5,87	34	— 1,938	— 1,721
5	2,58	18	— 1,864	— 1,647	14	6,36	36	— 1,910	— 1,693
6	3,11	21	— 1,825	— 1,608	15	6,86	38	— 1,930	— 1,713
7	3,48	23	— 1,826	— 1,609	16	7,40	40	— 1,932	— 1,715
8	3,88	25	— 1,860	— 1,643	17	9,02	45	— 1,950	— 1,733
9	4,27	27	— 1,825	— 1,608	—	—	—	—	—

Tensione del magnesio:

— Mg | $Mg\,Cl_2$ 0,35 M | $Mg\,Cl_2$ 0,35 M, $Hg_2\,Cl_2$ | Hg	temp.	F. E. M.	ε_H
Magnesio in lastra, non amalgamato	— 80°	— 1,702	—
» » amalgamato	»	— 2,048	— 1 831
» in cilindro »	»	— 2,023	— 1 806
» » »	+ 15°	— 2,056	— 1,802

I valori ε_H vennero calcolati analogamente a quelli delle amalgame di calcio, in base alle determinazioni seguenti:

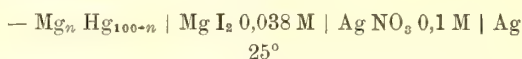
— Hg | $Hg_2\,Cl_2$, $Mg\,Cl_2$ 0,35 M | KCl 0,0269 M, $Hg_2\,Cl_2$ | Hg +		F. E. M.	+ Hg | $Hg_2\,Cl_2$, $Mg\,Cl_2$ 0,35 M
25°	25°	0,0335 V.	ε_H (25°) = + 0,254
— 80°	25°	0,0710 »	ε_H (— 80) = + 0,217

Le amalgame dal n. 5 in avanti della tabella III mostrarono un comportamento fra loro consimile. Durante le misure della tensione, questa si elevava gradatamente fino a raggiungere il massimo valore riportato, che in generale si mantenne costante per 6-10 ore.

Andamento analogo si ebbe per il magnesio: il valore riportato si mantenne quasi costante per 4-5 ore. Nella coppia a magnesio misurata a 15°, si notava un rapido sviluppo di idrogeno e formazione di alcoolato. I valori

massimi e più costanti li ottenni con magnesio amalgamato, preparato riscaldando al rosso il metallo in presenza di vapori di mercurio. Il magnesio amalgamato è assai più attivo a reagire, a temperatura ambiente, del magnesio non amalgamato; ed è probabile che la tensione più bassa, presentata da quest'ultimo, si debba ad un fenomeno di passività.

IV. *Forze elettromotrici in piridina.*

— $Mg_n\ Hg_{100-n}$ | $Mg\ I_2$ 0,038 M | $Ag\ NO_3$ 0,1 M | Ag
25°

N.	Mg °/₀ in atomi	F. E. M.	N.	Mg °/₀ in atomi	F. E. M.
1	5	— 1,684	7	25	— 1,848
2	10	— 1,672	8	27	— 1,858
3	14	— 1.690	9	29	— 1,826
4	18	— 1,720	10	32	— 1,753
5	21	— 1,704	11	34	— 1,578
6	23	— 1,845	12	38	— 1,584

Tensione del magnesio:

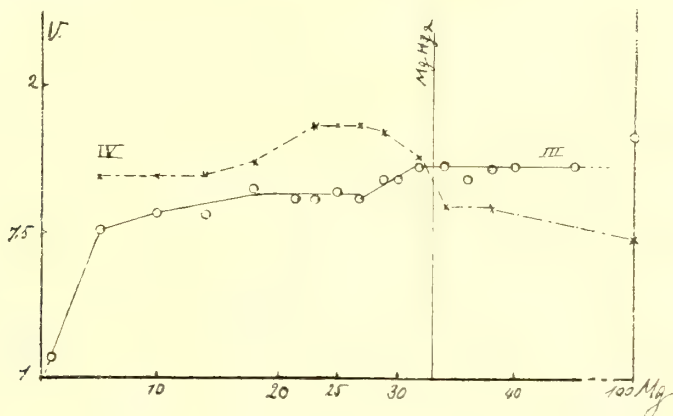
— Mg | $Mg\ I_2$ 0,038 M | $Ag\ NO_3$ 0,1 M | Ag a 25°:
Magnesio non amalgamato F. E. M. = — 1,474 dopo 3 ore 1,320
» amalgamato » = — 1,440

Il contegno delle amalgame di magnesio nella soluzione piridica di ioduro di magnesio si mostrò assai anormale. Le amalgame fino a circa 30 atomi si mostrarono simili, nel comportamento, a quelle di calcio; le tensioni variarono soltanto lentamente. Invece le amalgame oltre questa concentrazione, contrariamente a quanto doveva osservarsi, mostrarono una tensione inferiore ed incostante al massimo grado, fenomeno che si accentua nel magnesio che mi fornì in molteplici prove sempre tensioni inferiori a quelle delle amalgame.

Questo fenomeno sembra dovuto ad una passività del magnesio in piridina. È da notarsi che, come le amalgame di calcio, le amalgame di magnesio si ricoprivano, a lungo, di uno strato bruno di sostanza insolubile in piridina.

Nel seguente diagramma la curva III è data dai valori ε_H a — 80° delle amalgame di magnesio in alcool metilico; la curva IV segue le f. e. m. delle coppie in piridina.

La curva III mostra un gomito a circa 30 °/₀ atomi di magnesio; ciò si accorda con l'analisi termica che ha condotto al solo composto $MgHg_2$. Lo spostamento da 33 °/₀ a 30 °/₀ atomi del flesso è forse dovuto ad una incompleta formazione del composto $MgHg_2$ (a 169°).

Nella curva delle tensioni in piridina si rende nuovamente manifesta l'influenza dei fenomeni di passività cui ho più sopra accennato; dal suo andamento appare come questi fenomeni siano in relazione con la costituzione della lega.

Riassumendo, dalla media delle f. e. m. delle coppie ad amalgame di magnesio dai 18 °/₀ ai 30 °/₀ atomi di magnesio, per il composto $MgHg_2$ e per il magnesio abbiamo, in alcool metilico a — 80°,

— $MgHg_2$ | $MgCl_2$ 0,35 M | $MgCl_2$ 0,35 M, Hg_2Cl_2 | Hg = — 1,851 V.; da cui ε_H = — 1,634
— Mg » » » = — 2,035 » — 1,818

In piridina a 25°:

$MgHg_2$ | MgI_2 0,038 M | $AgNO_3$ 0,1 M | Ag = — 1,844 V.

Fra magnesio ed $MgHg_2$ sussisterebbe quindi, a — 80°, una differenza di 0,184 Volta.

Debbo osservare, a proposito della tensione del magnesio in alcool metilico, quale risulta dalle mie esperienze, — 1,82 (ε_H), che questo valore è assai superiore a quello finora adottato, — 1,59 (¹). Quest'ultimo dato, del resto, appariva assai basso rispetto al calore di formazione dei composti alogenati del magnesio. E giova tener presente poi che nell'acqua e nei solventi ossidrilati si hanno fenomeni di depolarizzazione con i metalli fortemente elettroaffini, dovuta alla decomposizione, operata da essi, del solvente.

Conclusioni.

1) Dalle ricerche su esposte risulta l'influenza del solvente sulla tensione dei metalli puri non solo, ma anche delle loro amalgame. Specialmente nel magnesio e per le sue amalgame in piridina si presentano fenomeni di

(¹) Kistiakowsky, Z. Elektr. *19* (1908). Tensione in soluzione acquosa di solfato di magnesio : — Mg | $MgSO_4$ 0,5 M; ε_H = — 1,59 (18°). Ricordo che a 15° in alcool metilico ho determinato il potenziale (ε_H) dell'elettrodo — Mg | $MgCl_2$ 0,35 M = — 1,802.

passività che non si manifestano, o si manifestano in grado minore, nell'alcool metilico.

2) Dal confronto delle tensioni delle amalgame di magnesio con quelle di calcio, e dei due metalli, risulta:

Mg — 1,82 V ; Ca — 1,98 (ε_H a — 80° in alcool metilico: $MgCl_2$ 0,35 M ; $CaCl_2$ 0,25 M)
$MgHg_2$ — 1,63 ; $CaHg_4$ — 1,60 » »
$MgHg_2$ — 1,84 ; $CaHg_4$ — 1,82 (ε 25° in piridina: MgI_2 0,038 M ; CaI_2 0,0093 M.
Rispetto all'elettrodo, in piridina, Ag | $AgNO_3$ 0,1 M).

La tensione del composto di magnesio è superiore, per quanto in piccolo grado, a quella del composto del calcio, pure essendo le due soluzioni dei sali di magnesio più concentrate delle due corrispondenti di calcio. Vi sarebbe quindi un'inversione nell'ordine delle tensioni, passando dai due metalli ai loro composti che l'analisi termica ci indica come i più ricchi in mercurio che ci presentano rispettivamente i due metalli. Questo fatto richiama quanto altri autori avevano osservato sulla tensione di alcune amalgame in rapporto alle tensioni dei metalli corrispondenti [1].

Da quanto precede si giustificano le ricerche che sto compiendo, sia sul calore di formazione delle amalgame di cui mi sono occupato, sia sulle tensioni dei composti presentati da altre leghe dei metalli alcalini ed alcalino-terrosi.

Chimica. — *Anidridi e amine da acidi α-amidati* [2]. Nota II di F. Graziani, presentata dal Corrispondente L. Balbiano.

In una Nota precedente [3] ho riferito i risultati ottenuti dallo studio del comportamento di alcuni acidi α-amidati, riscaldati con glicerina o con idrocarburi: ed ho dimostrato come sia valida la tesi del prof. Balbiano, che cioè per l'anidrificazione non è necessario l'intervento della glicerina. Espongo qui i dati sperimentali ottenuti colla leucina, colla tirosina e colla cistina, dati che mi hanno permesso di trarre le conclusioni già esposte.

Leucina. — La leucina usata per queste ricerche era un prodotto sintetico della Ditta C. A. F. Kahlbaum: ben cristallizzata in fogliette bianche, fondeva a 287°.

Avendo fatto, come il Maillard, il riscaldamento colla glicerina, osservai durante tutta la reazione sviluppo di vapori ammoniacali. Dalla massa glicerica

[1] Cohen e Kettemteil, Z. anorg. Ch. *38* (1904), 198; Kettemteil, ibidem. 213.

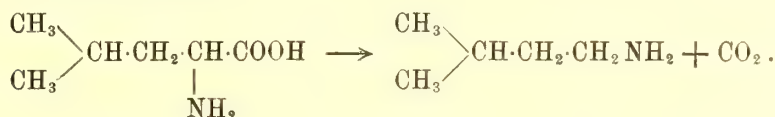
[2] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica organica del R. Politecnico di Torino.

[3] Questi Rendiconti, 1915, I, pag. 822.

raffreddata si possono raccogliere degli aghetti colorati in bruniccio. nella quantità di gr. 0,34 (invece di gr. 0 86, quale sarebbe il calcolato per la ciclo-leucil-leucina: si ha cioè un rendimento, in prodotto greggio, di solo il 39 % del teorico, assai inferiore quindi a quello ottenuto coll'alanina. Il Maillard non porta alcun dato in proposito). Cristallizzati dall'alcool, si hanno dei begli aghetti bianchi, lucenti, che fondono a 268° (non corr.; il Maillard dà come P. F. 271° corr.).

In una prima prova di riscaldamento con difenilmetano, gr. 1 di leucina e cc. 15 dell'idrocarburo vennero portati alla temperatura di 172° in mezz'ora, e tra 172° e 180° mantenuti per 8 ore: dopo questo tempo il liquido è giallo carico, e contiene ancora circa la metà (gr. 0,44) di leucina inalterata, che si libera dal difenilmetano lavando con benzolo bollente. Avendo però estratto 3 volte questo residuo solido con piccole quantità di alcool perfettamente anidro, per evaporazione del solvente ho avuto un residuo di aghetti bianchi, finissimi, all'aspetto identici a quelli dell'anidride, e fondenti a 262°-263°: la quantità però è minima (gr. 0,01), e nelle prove successive non sono più riuscito ad ottenerne nemmeno tracce: non ho potuto perciò accertare la formazione di ciclo-leucil-leucina.

Durante il riscaldamento, nella parte del tubo esterna alla stufa si è andato formando un deposito bianco cristallino, in gr. 0,52: è solubilissimo nell'acqua, e dà forte effervescenza con acido cloridrico; non è altro che carbonato di isoamilamina: [1]

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}\!\!>\!CH\cdot CH_2\cdot \underset{\displaystyle NH_2}{\underset{|}{CH}}\cdot COOH \longrightarrow \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}\!\!>\!CH\cdot CH_2\cdot CH_2\, NH_2 + CO_2 .$$

Avendo in un'altra prova introdotto il tubo nella stufa già portata a 100°, e poi riscaldato per 40 minuti fino a raggiungere i 245°, la rendita in carbonato dell'amina fu di gr. 0,85. In altre prove successive ho sperimentato a temperature meno elevate, per vedere se ciò eventualmente favorisse la formazione dell'anidride: ma il risultato fu negativo, e non ho ottenuto che un minore rendimento in amina: e ciò pel fatto che, prolungandosi assai il tempo di reazione, il carbonato di isoamilamina si decompone, ed essa volatilizza. Così ad es. avendo riscaldato per circa 9 ore senza oltrepassare i 190°, si ottennero gr. 0,70 di carbonato di isoamilamina; questo si ridusse a gr. 0,36 in un'altra prova, in cui avevo mantenuto il tubo per 14 ore a 160°-165°; e infine in un riscaldamento complessivo di 45 ore a 150°-160°, non si ha affatto deposito di carbonato dell'amina, che man mano che si forma si decompone e volatilizza: alla fine della reazione vi sono ancora gr. 0,13 di leucina indecomposta.

[1] Quest'amina fu ottenuta dallo Schwanert (Lieb. Ann. *102*, 225) per distillazione secca della leucina: ma l'Autore non dà il rendimento della reazione.

Tutte le porzioni di carbonato di isoamilamina vengono trasformate in cloridrato, e questo purificato per cristallizzazione dall'acqua: si presenta in mammelloncini bianchi, costituiti da minutissimi aghi. Viene poi trasformato nel cloroplatinato, che cristallizza in fogliette giallo-oro.

gr. 0,1700 del cloroplatinato, calcinati, diedero gr. 0,0570 di Pt.
gr. 0,3060 » » diedero cc. 12,9 di N, letti su KOH a 18° e 732^{mm}.

	Trovato	Calcolato per $(C_5H_{11}.NH_2.HCl)^2PtCl^4$
Pt °/₀	33,53	33,41
N °/₀	4,67	4,79

Tirosina. [1] — La tirosina adoperata proveniva dall' idrolisi dello scudo della tartaruga: il prodotto era ben cristallizzato, e all'analisi s'era dimostrato assai puro.

Per mezzo del riscaldamento colla glicerina mi è stato possibile isolare e identificare un'anidride della tirosina: e l' intervallo di temperatura a ciò più favorevole è quello fra 180° e 185°.

Gr. 1 di tirosina sospesi in cc. 15 di glicerina, furono riscaldati per 8 ore a 170°-180°. Il liquido è assai imbrunito, ma perfettamente limpido: anche mantenuto per 24 ore a 0°, non si separa nulla di solido: si diluisce allora con 3-4 volumi di acqua, si lascia in riposo per 24 ore, poi si raccoglie su filtro il precipitato bruno formatosi: lavato ripetutamente con acqua fredda e seccato a 100°, il residuo è di gr. 0,43.

In una seconda prova il riscaldamento si fece per 4 ore a 175°-185°; il prodotto secco, ottenuto collo stesso trattamento del precedente, è di gr. 0,51.

I prodotti delle due preparazioni (totale gr. 0,94) vengono riuniti ed esauriti per ebollizione con alcool assoluto: rimane indisciolto un residuo polverulento, dell'aspetto dell'anidride cornea della glicocolla, costituito forse da un'anidride complessa della tirosina; ammonta a gr. 0,27 (circa il 29 °/₀ del prodotto totale di anidrificazione); nell'alcool si sono sciolti gr. 0,67 (circa il 71 °/₀), che ripetutamente cristallizzati dall'alcool si presentano in

[1] Prendo occasione di questa pubblicazione del dott. Graziani per comunicare che da tre anni in questo laboratorio si stanno facendo colla sua collaborazione studî d'idrolisi di tessuti animali organizzati, mediante acidi diluiti. Abbiamo intrapreso lo studio dello scudo della tartaruga, della lana e delle scaglie di alcune varietà di pesci. Dalla tartaruga si è avuto notevoli quantità di tirosina, di glicocolla, di valina e di altri acidi amidati. Dalla lana il prodotto principale finora isolato è la cistina in quantità notevole (7,2 °/₀). Speriamo di potere nel prossimo anno pubblicare nelle Memorie di questa Accademia i risultati dettagliati delle nostre ricerche.

L. Balbiano.

begli aghi bianchi disposti a rosette: sono costituiti da un'anidride della tirosina [1], $(C_9H_{11}O_3N - H_2O)x$.

Durante il riscaldamento della tirosina colla glicerina i vapori reagivano costantemente alcalino, ed era distintissimo l'odore ammoniacale e fenicale proprio dell'ossifenil-etilamina: aumentando la temperatura di riscaldamento aumenta la loro formazione. Avendo riscaldato gr. 2 di tirosina con cc. 20 di glicerina per 2 ore a 185°-195°, si svolsero abbondanti vapori di amina: e per distillazione a pressione ridotta (16-18 mm.) a circa 210° del prodotto solido separato, si ottenne nel tubo adduttore un lieve deposito solido dell'amina.

Questa aumentò ancora introducendo il tubo nella stufa a 200°, e mantenendovelo per mezz'ora fino a raggiungere i 230°; il prodotto solido fu di soli gr. 0,35, ma maggiore fu la quantità di ossifenil-etilamina.

Le diverse porzioni di anidride, riunite e ricristallizzate dall'alcool, si presentano in aghetti bianchi disposti a rosette, di lucentezza sericea: il prodotto fonde a 278°-279° (non corr.) senza decomposizione, con leggero imbrunimento che incomincia già verso i 260°.

gr. 0,1858 diedero gr. 0,4506 di CO_2 e gr. 0,0937 di H_2O.

	Trovato	Calcolato per $(C_9H_9O_2N)x$
C °/₀	66,14	66,22
H °/₀	5,60	5,56

Se come mezzo moderatore del calore si adopera difenilmetano invece di glicerina, la reazione va nel senso della formazione di ossifenil-etilamina: ma per ottenere un buon rendimento occorre che la temperatura sia superiore ai 210°. Infatti in una prima prova, in cui si riscaldò per più di 40 ore raggiungendo solo i 210°, si ebbe decomposizione della tirosina con abbondante residuo carbonioso, e non si potè raccogliere che pochissima amina.

In prove successive, riscaldando a temperature più elevate, si è sempre formato nella parte fredda del tubo un piccolo deposito cristallino, solubile in acqua, che sviluppa CO_2 se trattato con acido cloridrico, e che l'analisi dimostrò essere carbonato di ossifenil-etilamina. Ma questa cristallizza in grande quantità, dal difenilmetano, nel raffreddamento: si presenta in fogliette lucenti, di aspetto micaceo, assai soffici. Il miglior rendimento in amina (gr. 0,72, cioè il 96 °/₀ del teorico, che col poco sublimato come car-

[1] Anidridi della tirosina non sono finora note. Soltanto il Löw (Ber. d. d. chem. Gesell. *15*, 1483), da un latte conservato per 8 anni, ottenne un deposito solido, in globetti duri, insolubili in acqua bollente e in alcool, e che bolliti con potassa caustica davano tirosina: l'autore suppone si tratti di un'anidride della tirosina. Per l'aspetto e pel comportamento è diverso dal composto da me ottenuto puro: se mai potrà essere lo stesso prodotto che ho constatato formarsi accanto a quello analizzato, e che è precisamente insolubile in alcool e in acqua.

bonato sale al 97 %) l'ottenni introducendo il tubo nella stufa già riscaldata a 245°, e a questa temperatura mantenendovelo per 2 ore e 1/2. A temperature più basse la rendita è assai minore: riscaldato per 10 ore a 215°-225° si ebbero solo gr. 0,45 di amina.

L'ossifenil-etilamina non si riesce a purificarla per cristallizzazione dall'alcool: anche dopo 5 operazioni, sempre con ebollizione con carbone animale, era leggermente colorata e fondeva a 158°-159°. Si purifica invece bene per distillazione a pressione ridotta: a 55^{mm} bolle a 210°-212°, e il distillato perfettamente incoloro si rapprende nel tubo collettore in una massa cristallina bianchissima.

Avendo dovuto di nuovo fonderlo per raccoglierlo, è leggermente imbrunito: è tuttavia abbastanza puro, e fonde senza decomposizione a 161° [1].

gr. 0,2062 di sostanza, diedero gr. 0,5312 di CO_2 e gr. 0,1474 di H_2O.
gr. 0,1848 " , " cc. 16,2 di N, letti su KOH a 17° e 743^{mm}.

	Trovato	Calcolato per $HOC_6H_4.CH_2.CH_2NH_2$
C %	70,25	70,02
H %	7,94	8,08
N %	9,90	10,21

I piccoli errori di analisi sono da attribuirsi alla leggera decomposizione avvenuta nella fusione del composto.

Come ho detto, in tutte le preparazioni si aveva un piccolo sublimato di carbonato dell'amina: si sciolse in acido cloridrico, e si fece il cloroplatinato che cristallizza in fogliette giallo aranciate.

gr. 0,1536, calcinati, lasciarono un residuo di gr. 0,0443 di Pt.

	Trovato	Calcolato per $(HOC_6H_4.CH_2.CH_2NH_2.HCl)^2PtCl^4$
Pt %	28,84	28,53

Cistina. — La cistina adoperata, prodotto dell'idrolisi della lana, si presentava in polvere cristallina bianca, che a 250°-255° imbrunisce senza fondere: all'analisi si mostrava assai pura: il potere rotatorio è di $[\alpha]_D^{23°} = -213°, 62$.

Gr. 0,5 di cistina, sospesi in cc. 10 di glicerina, vengono riscaldati lentamente: a 130° incomincia già la decomposizione con sviluppo di idrogeno solforato: a 165° è intensamente colorato in bruno; mantenuto mezz'ora a 165°-170°, si lascia poi raffreddare.

[1] L'ossifenil-etilamina fu ottenuta da Schmitt u. Nasse (Lieb. Ann. *133*, 214), riscaldando la tirosina, in piccolissime quantità (pochi cgr.) a 270°: la base sublimava sulle pareti fredde del tubo in una crosta bianca cristallina: P. F. 161°-163°.

Sulle pareti fredde del tubo si è formato un deposito cristallino non molto abbondante, bianco-giallastro, solubile in parte nell'acqua, con residuo giallo che ho potuto identificare per solfo (è solubile in solfuro di carbonio; brucia con fiamma azzurrognola e formazione di SO_2): la parte sciolta dà con acido cloridrico sviluppo di CO_2 e formazione di cloruro di ammonio, nella quantità di gr. 0,06.

La parte glicerica, liberata per filtrazione dal residuo carbonioso, fu sottoposta a diversissimi trattamenti: ma ogni tentativo per isolare qualche composto definito è riuscito vano.

In altre prove, variando qualche poco le condizioni di temperatura, si ottennero sempre risultati analoghi.

Adoperando il difenilmetano, occorre una temperatura più elevata (sopra i 180°) e un maggior tempo di riscaldamento, perchè avvenga la decomposizione: ma in queste condizioni essa è assai completa. Come colla glicerina, nelle parti fredde del tubo si ha sempre deposito di solfo e di carbonato di ammonio (fino a gr. 0,11 da gr. 0,5 di cistina). Inoltre si ha abbondante sviluppo di acido solfidrico: avendo fatto gorgogliare i vapori in una soluzione di acetato di piombo, ho potuto verificare che fino il 42 °/₀ dello solfo totale della cistina si elimina sotto forma di H_2S. Dal difenilmetano si è sempre separata una polvere nero-bruna, nella quantità di gr. 0,06-0,07 da gr. 0,5 di cistina, che in parte si scioglie in ammoniaca riprecipitando con acido acetico: è una piccola quantità di cistina inalterata. Il residuo, ripetutamente lavato con ammoniaca, contiene ancora in grande quantità azoto e solfo: ma in alcun modo mi è riuscito di purificarlo, pure essendo in parte solubile in alcool.

Il cloruro d'ammonio, ottenuto per soluzione in acido cloridrico del carbonato sublimato, viene purificato per cristallizzazione dall'acqua: determinato il cloro col metodo di Volhard, gr. 0,1436 di sostanza richiesero cc. 26,5 di soluzione $N/_{10}$ di $AgNO_3$.

	Trovato	Calcolato per NH_4Cl
Cl °/₀	65,39	66,28

L'errore piuttosto rimarchevole è dovuto probabilmente a piccole quantità di un'amina che si trova mescolata al cloruro d'ammonio: il composto ha infatti permanentemente un odore caratteristico, e trattato con potassa caustica dà un lievissimo precipitato: ma per la poca sostanza a disposizione non mi è stato possibile isolarla.

Chimica. — *Azione della luce su benzofenone ed acido butirrico* [1]. Nota di R. de Fazi, presentata dal Socio E. Paternò.

Il prof. Paternò, come ha accennato in questi Rendiconti [2], ha dato a me l'incarico di studiare i prodotti che si formano, per azione della luce, su una mescolanza di benzofenone ed acido butirrico normale.

Il 10 febbraio 1915, fu aperto un tubo che era stato esposto alla luce dal 28 giugno 1909 al 10 aprile 1910, contenente 80 gr. di acido butirrico normale e 50 gr. di benzofenone.

Nell'aprire il tubo si è notato svolgimento di gas, che ha continuato per qualche minuto, e che si è riconosciuto per anidride carbonica.

Il liquido è di colore giallo arancio intenso; la sostanza solida depositatasi al fondo del tubo è di colore giallo sporco; filtrata alla pompa e disseccata, pesa gr. 19, e così impura fonde a 170-176°. Dall'alcool bollente si deposita cristallizzata in prismi, che fondono a 184-186°: si tratta quindi di benzopinacone.

Il liquido, dopo aggiunta di una soluzione di carbonato di potassio, fino a reazione alcalina (si è inteso un forte odore di frutta) si è estratto con etere. Distillato il solvente rimane un olio leggero, di odore caratteristico, che il prof. Paternò ha riconosciuto per butirrato di propile [3].

Le acque, dopo estratte con etere, si acidificano con HCl diluito. In fondo al recipiente si deposita una sostanza rossa vischiosa (gr. 11). Le acque madri, dopo un giorno, sono ancora lattiginose, ma estratte con etere lasciano poche gocce di residuo oleoso.

Con una piccola porzione di questo acido così impuro, si fa il sale d'argento, e si analizza:

sostanza gr. 0,0473 Ag gr. 0,0133 Ag °/₀ 28,11.

Per il butirrato d'argento ($C_4H_7O_2Ag$) si calcola Ag °/₀ 55,38.

Per un composto di 1 mol. di butirrato d'argento + 1 molec. di benzofenone ($C_{17}H_{17}O_3Ag$) si calcola Ag °/₀ 28,65.

Circa 5 gr. di questo acido, così oleoso, si fa bollire con acqua di barite, ma non si discioglie che una piccolissima porzione.

La soluzione acidificata con HCl. diluito, deposita poche gocce oleose, che hanno odore di acido butirrico.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Roma.
[2] Paternò, questi Rendiconti. *24* (1), 674 (1915).
[3] Paternò, loc. cit.

La parte indisciolta si fa bollire con pochissimo alcool, ma soltanto una piccola parte si discioglie. La porzione indisciolta in acqua di barite e in alcool, si tratta con carbonato sodico. La soluzione filtrata si acidifica con HCl diluito. Precipita una sostanza di colore giallo mattone, che si raccoglie su filtro e si lava molto bene con acqua. Dopo averla disseccata in essiccatore per due giorni, se ne determina il punto di fusione: a 120° incomincia a diventare rossa e a 130° circa si fonde in una goccia oleosa rossa.

Questo acido si analizza:

Sostanza gr. 0,2044 , CO_2 gr. 0,5531 , H_2O gr. 0,1196

Donde %:

	Trovato	Calcolato per 1 molec. di ac. butirrico + 1 molec. di benzofenone ($C_{17}H_{18}O_3$)
C	73,44	75,6
H	6,66	6,51

Con una porzione dell'acido così purificato si fa il sale d'argento; si fa disseccare e si analizza:

sostanza gr. 0,0955 Ag gr. 0,0276.

Donde %:

	Trovato	Calcolato per $C_{17}H_{17}O_3Ag$
Ag	28,90	28,65

Il rimanente degli 11 gr. di acido greggio si discioglie in acqua con qualche goccia d'ammoniaca. Quindi si aggiunge nitrato d'argento. Precipita così il sale d'argento in fiocchi gelatinosi di colore giallo bruno. Si lascia in essiccatore, nel vuoto, per 5 giorni.

Una determinazione d'argento, non avendo dato buoni risultati, si purifica questo sale lasciandolo per 1 giorno in presenza di alcool etilico a freddo. Si filtra e si lava bene con alcool; questo passa colorato in giallo pallido; e distillato rimangono poche gocce di un olio di colore rosso bruno, con odore di acido butirrico.

Il sale d'argento, così purificato, si dissecca nel vuoto, in presenza di acido solforico, poi a 100° fino a peso costante e si analizza:

sostanza gr. 0,1848 Ag gr. 0,0532

sostanza gr. 0,2361 CO_2 gr. 0,4681 H_2O gr. 0,0937

Donde %:

	Trovato	Calcolato per $C_{17}H_{17}O_3Ag$
Ag	28,79	28,65
C	54,07	54,10
H	4,44	4,50

Il medesimo sale d'argento (circa gr. 1,22), si tiene in sospensione in pochi c. c. di alcool e si aggiungono poi c. c. 7 di HCl N/2.

Dopo aver riscaldato a b. m. per 1 ora circa, si deposita il cloruro di argento. Si lascia ancora a b. m. per 1 ora, poi si filtra. Il liquido filtrato è di colore giallo bruno, e per aggiunta di acqua precipita una sostanza del medesimo colore. Le acque madri anche dopo 3 giorni sono lattiginose. Si estrae tutto con etere, e si distilla poi il solvente: rimane allora un olio di colore rosso bruno, che dopo qualche giorno è ancora semi-solido. Si discioglie tutto in poca ammoniaca e si estrae nuovamente con etere. La soluzione ammoniacale, dopo aver scacciato l'etere, si acidifica con HCl diluito. Precipita una sostanza di colore giallo mattone, che si filtra e si lava bene con acqua. Sono dei cristalli non ben definiti e frantumati, che a 75° incominciano a colorarsi in giallo arancio, e a 125-130° fondono in un liquido di colore rosso.

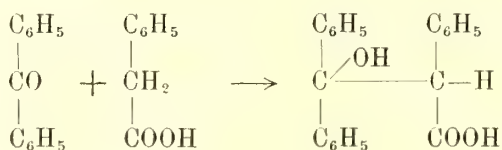
L'acido, così purificato, è solubile in alcol etilico e metilico, benzolo e cloroformio. In H_2SO_4 concentrato si discioglie colorando la soluzione in rosso.

Dai risultati analitici ottenuti e dai fatti osservati posso concludere che il benzofenone e l'acido butirrico normale, hanno dato luogo a due reazioni ben distinte:

1°) formazione di butirrato di propile, con la quale si spiega la presenza di anidride carbonica e la formazione di benzopinacone;

2°) sintesi di un acido per addizione di una molecola di benzofenone con una di acido butirrico.

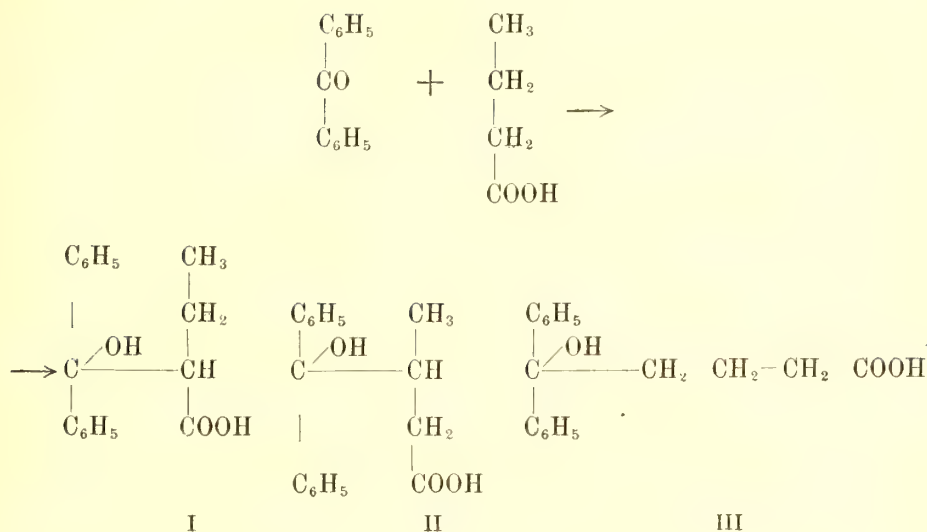
Già Paternò e Chieffi ([1]) avevano avuto formazione di un ossiacido da una reazione analoga; e cioè da benzofenone ed acido fenil-acetico avevano ottenuto l'acido β-trifenil-lattico, secondo lo schema seguente:

$$\begin{array}{c} C_6H_5 \\ | \\ CO \\ | \\ C_6H_5 \end{array} + \begin{array}{c} C_6H_5 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ COOH \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} C_6H_5 \\ |\diagup OH \\ C \\ | \\ C_6H_5 \end{array} \!\!-\!\!-\!\!-\!\! \begin{array}{c} C_6H_5 \\ | \\ C-H \\ | \\ COOH \end{array}$$

È molto probabile quindi che tra acido butirrico e benzofenone sia avvenuta una reazione simile.

In questo caso però è possibile la formazione di tre composti a seconda che il legame tra il CO del benzofenone ed un carbonio dell'acido butirrico, è in posizione α, β o γ, rispetto al carbossile, secondo lo schema seguente:

([1]) Paternò e Chieffi, Gazz. Chim. Ital., *40* (2), 323 (1910).

$$
\begin{array}{c} C_6H_5 \\ | \\ CO \\ | \\ C_6H_5 \end{array}
\;+\;
\begin{array}{c} CH_3 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ COOH \end{array}
\;\longrightarrow
$$

$$
\longrightarrow
\underset{\text{I}}{\begin{array}{ccc} C_6H_5 & & CH_3 \\ & & | \\ | & & CH_2 \\ & {}^{/OH} & | \\ C & \text{———} & CH \\ | & & | \\ C_6H_5 & & COOH \end{array}}
\qquad
\underset{\text{II}}{\begin{array}{ccc} C_6H_5 & & CH_3 \\ | & {}^{/OH} & | \\ C & \text{———} & CH \\ & & | \\ | & & CH_2 \\ & & | \\ C_6H_5 & & COOH \end{array}}
\qquad
\underset{\text{III}}{\begin{array}{cc} C_6H_5 & \\ | & {}^{/OH} \\ C & \text{———}CH_2 \; CH_2-CH_2 \; COOH \\ | & \\ C_6H_5 & \end{array}}
$$

La formazione del primo poteva sembrare la più probabile, ma essendo riuscito in questi giorni a fare la sintesi appunto dell'acido α etil-β-difenil-lattico, posso affermare fin da ora che non è identico a questo, poichè ha punto di fusione e proprietà diverse: presto renderò noti i risultati di queste esperienze che ho ancora in corso.

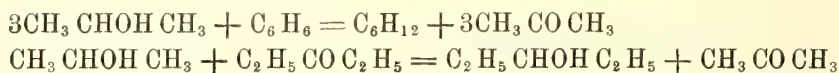
La formula terza non è da escludersi completamente, ma è difficile che si sia formato un acido di questo tipo, perchè in queste sintesi il gruppo CH_3 reagisce molto difficilmente, così, per es., se si espongono alla luce benzofenone ed acido acetico, si ottengono i prodotti inalterati [1].

È quindi molto probabile che l'acido che ho descritto, ottenuto per azione della luce sopra una mescolanza di benzofenone e acido butirrico normale, abbia la formula II, sia cioè l'*acido β-metil-γ-ossi-γ-difenil-butirrico.*

[1] Paternò e Chieffi, Gazz. Chim. Ital., *40* (2), 322 (1910).

Chimica-fisica. — *Sugli equilibrii dell'idrogenazione.* Nota di M. Padoa e B. Foresti, presentata dal Socio G. Ciamician.

In una nostra Nota precedente [1] abbiamo studiato i due equilibri

$$3CH_3\,CHOH\,CH_3 + C_6H_6 = C_6H_{12} + 3CH_3\,CO\,CH_3$$
$$CH_3\,CHOH\,CH_3 + C_2H_5\,CO\,C_2H_5 = C_2H_5\,CHOH\,C_2H_5 + CH_3\,CO\,CH_3$$

in presenza di catalizzatori, ne abbiamo determinate le costanti e le abbiamo confrontate con i valori ricavati teoricamente, applicando il teorema di Nernst.

Per il calcolo delle *costanti chimiche* delle sostanze che costituivano i nostri equilibrii, ci siamo limitati ad adoperare la formula in funzione del rapporto di Trouton e proposta dallo stesso Nernst.

Con tal metodo risultò l'accordo fra l'esperienza e la teoria.

Le costanti chimiche si sarebbero potute calcolare anche in altre maniere con opportuna combinazione di queste due formule proposte da Nernst:

$$\log p = -\frac{\lambda_0}{4.571\,T} + 1.75 \log T + \frac{\varepsilon T}{4.571} + C \tag{1}$$

$$\lambda = (\lambda_0 + 3.5\,T - \varepsilon\,T^2)\left(1 - \frac{p_0}{\pi_0}\right) \tag{2}$$

dove ε è la differenza dei calori molecolari del gas e del condensato allo zero assoluto; p è la tensione di vapore della sostanza considerata alla temperatura assoluta T; λ_0 il calore di vaporizzazione allo zero assoluto; π_0 la pressione critica; λ il calore di vaporizzazione alla temperatura T.

[1] Questi Rendiconti, XXIII (1914), 2° sem., pag. 84.
Approfittiamo dell'occasione per correggere alcuni errori sfuggiti nella stampa:

	errato	*corretto*
pag. 85, 2ª equazione	$\log K = \frac{Q_0}{4,571\,T} + \cdots$	$\log K = -\frac{Q_0}{4,571\,T} + \cdots$
» 86, ultima equazione	$K = \frac{p^3_{\text{alc. isopr.}}\, p_{C_6H_6}}{p^3_{\text{acet.}}\, p_{C_6H_6}}$	$K = \frac{p^3_{\text{alc. isopr.}}\, p_{C_6H_6}}{p^3_{\text{acet.}}\, p_{C_6H_{12}}}$
» 89, riga 12	$Q = 0,7$	$Q = -0,7$
» » » 18	$\log K = \cdots$	$\log K_1 = \cdots$
» » » 20	$\log K = 0,332$ e $K_1 = 2,15$	$\log K_1 = 0,3226$ e $K_1 = 2,10$

Ma, non conoscendosi le pressioni critiche e i calori di vaporizzazione di alcune delle nostre sostanze, non abbiamo potuto calcolare le costanti anche in questa seconda maniera. Il confronto non sarebbe stato privo d'interesse, date le divergenze già messe in rilievo da C. F. Mündel [1], tra i valori delle costanti che si ottengono adoperando l'uno o l'altro metodo di calcolo.

Ora, in un lavoro di U. Grassi [2], resosi noto alcun tempo dopo la nostra pubblicazione citata, nel quale egli si occupa di queste stesse divergenze fra i valori delle costanti chimiche, troviamo determinati sperimentalmente i calori dì vaporizzazione e le pressioni critiche di alcune sostanze: fra queste, il dietilchetone e l'alcool isopropilico.

Ma se con questo abbiamo il valore delle costanti chimiche del dietilchetone e dell'alcool isopropilico, manca ancora il modo di calcolare le costanti chimiche dei nostri equilibri, mancando le costanti che si riferiscono al cicloesano e al dietilcarbinolo. Tuttavia abbiamo creduto di poter calcolare, con sufficiente approssimazione per i nostri scopi, le costanti ancora ignote, ammettendo l'uguaglianza del rapporto fra le due costanti di due sostanze analoghe, calcolate secondo la formula di Trouton, al rapporto fra le costanti delle stesse sostanze, calcolate con le formule (1) e (2). Così, essendo 3,39:3,71 il rapporto delle costanti del dietilcarbinolo e dell'alcool isopropilico (dalla formula di Trouton), abbiamo creduto di poterlo uguagliare al rapporto fra la costante incognita del dietilcarbinolo e quella dell'alcool isopropilico, dedotta dalle formule (1) e (2).

Così abbiamo potuto raccogliere nella seguente tabella le costanti calcolate nei due modi; abbiamo inoltre creduto bene calcolare le costanti anche per mezzo della formula di Trouton corretta in funzione della temperatura assoluta di ebollizione ($C = 1,331 \log T - 0,00098\, T$, dove T è la temperatura assoluta di ebollizione) [3].

SOSTANZE	COSTANTI CHIMICHE dalle for. (1) e (2)	dalla cost. di Trouton	dalla cost. di Trouton corretta
Alcool isopropilico	4,94	3,71	3,044
Acetone	3,74	3,08	3,025
Dietilcarbinolo	4,51	3,39 [4]	3,063
Dietilchetone	4,54	2,92	3,056
Benzolo	4,37	2,9	3,043
Cicloesano	4,30	2,85	3,043

In base ai dati di questa tabella si possono così calcolare le costanti di equilibrio, ottenendo tre serie di valori a seconda che risulta la somma-

[1] Zeitschr. für Physik. Chemie, 1914, pag. 435.

[2] Nuovo Cimento (6), VII, 1, 313.

[3] Nernst, Theoretische Chemie (1912), 279.

[4] Media delle due costanti già calcolate nella Nota precedente.

toria delle costanti dell'una o dell'altra colonna. In questa seconda tabella raccogliamo le $\Sigma\nu C$ con le costanti di equilibrio corrispondenti calcolate e trovate.

EQUILIBRIO	$\Sigma\nu C$ dalle for. (1) e (2)	K calc.	$\Sigma\nu C$ dal rapp. di Trouton	K calc.	$\Sigma\nu C$ dal rapp. di Trout. cor.	K calc.	K trov.
Alc. isoprop., benzolo, cicloesano, acetone .	3,67	21,13	1,94	0,394	1,057	0,0515	0,23
Alc. isoprop., dietilchet., dietilcarb., acetone . .	1,23	38,3 30,4 (1)	0,16	3,26 2,59 (1)	0,012	2,30 1,84 (1)	3,45 2,07

Da un confronto dei varî valori di K, appare subito come il calcolo di questi in base a $\Sigma\nu C$ ricavata dalle formule (1) e (2) porti a risultati discordanti da quelli sperimentali. Anche in questo caso [2] gli errori dovuti all'esperienza non sembrano poter esser causa di discordanze così notevoli. Queste divengono assai più piccole quando le $\Sigma\nu C$ si calcolano in base al rapporto di Trouton, o in base all'equazione in funzione della temperatura assoluta di ebollizione.

Queste nostre osservazioni ci confermano nell'idea che il calcolo delle costanti chimiche non permetta colle formule finora proposte di giungere a risultati molto precisi, massime quando si tratti di processi a bassa tonalità termica.

Chimica-fisica. — *Sopra alcune nuove relazioni che servono a calcolare la frequenza nel moto vibratorio molecolare dei solidi.* Nota del prof. Stefano Pagliani, presentata dal Corrispondente L. Balbiano.

In una Nota precedente [3] ho dimostrato come si possa calcolare la frequenza nel moto vibratorio molecolare di un elemento allo stato solido mediante il valore dell'entropia alla sua temperatura di fusione, ed ho calcolato i valori di ν per 26 corpi semplici.

Si potrà quindi, mediante le relazioni ed i coefficienti indicati nella detta Nota, dedurre ν per corpi, di cui ho calcolata l'entropia, ma non si hanno i dati sperimentali richiesti dalla formola di Lindemann

$$\nu = k \sqrt{\frac{T}{mV^{2/3}}}\,.$$

(1) Le coppie di questi valori si ottengono a seconda che si consideri l'effetto termico $= -0,7$, oppure $= -0,5$.

(2) Nuovo Cimento, loc. cit.

(3) Questi Rendiconti, pag. 835.

Così, applicando il coefficiente dei metalloidi, si ottiene per il cloro $\nu = 1,6 \times 10^{12}$ e per il bromo $\nu = 1,1 \times 10^{12}$.

I valori da me calcolati per il cloro $1,6 \times 10^{12}$ e per il potassio $1,7 \times 10^{12}$ trovano una prima conferma in quello dell'argo, per il quale O. Sackur [1] avrebbe calcolato il valore $1,3 \times 10^{12}$. D'altra parte Ramsay e Travers dimostrarono doversi collocare l'argo fra Cl e K nel sistema periodico. Difatti abbiamo:

Cloro	$m = 35,46$	$\nu = 1,6 \times 10^{12}$
Argo	39,88	$1,3 \times 10^{12}$
Potassio . . .	39,1	$1,7 \times 10^{12}$

Confrontando le frequenze dei componenti di un composto binario con quella di questo, ho trovato che per composti binari di analoga costituzione come KCl, KBr, NaCl, KI, il rapporto fra la frequenza del composto e la somma delle frequenze specifiche dei componenti è pressochè costante, cosicchè si può calcolare la frequenza di un composto binario moltiplicando per $\frac{4}{3}$ la somma delle frequenze dei suoi componenti.

Ho potuto verificare detta relazione valendomi dei valori delle frequenze dei detti quattro sali, le sole state finora determinate direttamente mediante misure ottiche. Sono quelli stessi valori, che hanno servito al Nernst per la verifica della formola dei calori specifici di Nernst e Lindemann, in cui ha trovato in generale valori così concordanti da non lasciar dubbio sulla identità completa delle frequenze termiche e ottiche [2].

Rubens e Hollnagel [3] trovarono per il cloruro di potassio due valori delle lunghezze d'onda dei raggi residui, cui corrispondono i due valori di $\nu \times 10^{-12}$: 4,78 e 4,18 medio 4,48. Dai miei valori delle frequenze $1,7 \times 10^{12}$ per il K, e $1,6 \times 10^{12}$ per il Cl, si calcola colla suenunciata relazione per KCl $\nu = 4,4 \times 10^{12}$, risultato quasi coincidente con quello determinato direttamente. Colla suddetta formola di Lindemann [4], assumendo il coefficiente $k = 4,23 \times 10^{12}$, quale risultò dalle misure ottiche per la silvina, si calcolerebbe $4,7 \times 10^{12}$, coll'altra, contenente la costante dielettrica $5,3 \times 10^{12}$.

Così pure Rubens e Hollnagel ottennero per il bromuro di potassio il valor medio: $3,6 \times 10^{12}$. Dai miei valori $1,7 \times 10^{12}$ per K e $1,1 \times 10^{12}$ per Br si calcola per KBr: $3,7 \times 10^{12}$; valore pure quasi coincidente con quello trovato sperimentalmente. Colla prima formola di Lindemann si calcolerebbe $3,5 \times 10^{12}$.

(1) Ann. d. Physik, *40* (1913).

(2) W. Nernst, *Application de la théorie des quanta à divers problèmes physico-chimiques*. Nei *Rapports et Discussions* di Bruxelles (1911).

(3) Phil. Mag. Mai (1910). Sitzungsber. Preuss. Akad., *26* (1910).

(4) Physik. Zeits., *11* (1910).

Per il joduro di potassio colle misure ottiche si è trovato: $\nu = 3{,}10 \times 10^{12}$. Dai miei valori $1{,}7 \times 10^{12}$ per il K, e $1{,}1 \times 10^{12}$ per il J, si calcola per KI $3{,}7 \times 10^{12}$, valore pure concordante con quello trovato.

Per il cloruro di sodio le stesse misure ottiche hanno dato i due valori $5{,}4 \times 10^{12}$ e $6{,}3 \times 10^{12}$, medio $5{,}9 \times 10^{12}$. Dai miei valori $2{,}9 \times 10^{12}$ per il Na e $1{,}6 \times 10^{12}$ per il Cl, si calcola per NaCl $6{,}1 \times 10^{12}$, valore concordante col medio trovato.

Colla prima delle formole di Lindemann si calcolerebbe $6{,}0 \times 10^{12}$, colla seconda $9{,}7 \times 10^{12}$.

L'accordo fra i valori calcolati e quelli sperimentali è così soddisfacente che non si può considerare come dovuto soltanto al caso. Potremo quindi usare, almeno per i sali aloidi, la seguente espressione per calcolare la frequenza ν di un composto binario mediante le frequenze dei componenti ν_1 e ν_2:

$$\frac{\nu}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{4}{3}.$$

Credo interessante far notare che la somma delle due frequenze ν_1 e ν_2 dei componenti risulta così essere la media aritmetica fra la frequenza del composto e quella che ne differisce di un'ottava.

Secondo il Nernst si dovrebbe ammettere in KCl ed in NaCl la stessa frequenza per l'atomo metallico e per l'atomo alogeno, e cioè ugual frequenza per Na, K e Cl. In realtà solo le frequenze specifiche di K e Cl si possono considerare come uguali. Si verifica piuttosto che il rapporto fra il valore medio delle frequenze specifiche dei componenti e la frequenza del composto, in ciascuno dei sali omologhi KCl, KBr, KI, NaCl è pressochè costante, ed uguale al rapporto medio $\frac{S_1}{n}$ per i metalli alcalini.

Non si possono stabilire dei raffronti per altri composti posti perchè mancano i dati sperimentali, nè posso farlo per i sali, per i quali Nernst ha verificato le formole dei calori specifici, poichè, come egli stesso afferma [1], per i corpi composti e specialmente per quelli polimeri le formole da lui impiegate per il calcolo, come anche quelle di Pollitzer, devono essere considerate soltanto come formole di interpolazione; e le frequenze, che in esse sono assunte, non hanno significato fisico. Per talune sostanze poi, come i cloruri e ioduri di argento, di piombo, è stato necessario introdurre più frequenze.

Potremo confrontare i valori medii dai calcolati dalle diverse espressioni date nella Nota precedente, con quelli assunti dal Nernst per i metalli nella sua verifica della formola di Nernst e Lindemann, supponendo

[1] Ann. d. Physik., *36* (1911).

come fa l'Einstein [1], che il vero valore della frequenza specifica di un corpo sia dato dalla media aritmetica dei valori della frequenza dedotta dalla formola di Nernst e Lindemann e di quella che ne differisce di un'ottava, cioè da $\frac{\nu + \nu/_2}{2}$. Il raffronto è fatto nello specchietto seguente:

	$\nu \times 10^{-12}$	$^3/_4 \nu \times 10^{-12}$	medio
	dalla formola di N. L.		
Ag	4,5	3,4	3,6
Al	8,3	6,3	6,7
Cu	6,6	5,0	5,5
Pb	1,9	1,4	1,5
J	2,0	1,5	1,3
Zn.	4,8	3,6	3,5

Aggiungiamo che Einstein, mediante la sua espressione della frequenza in funzione del coefficiente atomico, della densità e del coefficiente di compressibilità, ha calcolato per la frequenza del rame $\nu = 5,7 \times 10^{12}$, concordante col suddetto valore medio.

Come si vede abbiamo un accordo soddisfacente fra i valori delle ultime due colonne.

Il Nernst poi nello stabilire le frequenze da assumere fece talune ipotesi solo in parte confermate dai valori delle frequenze, sopra ottenuti. Così nel HgCl suppone che le frequenze dei due atomi siano molto differenti; ciò non è confermato dai valori delle frequenze di Hg e di Cl, che stanno nel rapporto $\frac{1,0}{1,6}$. Suppone invece che il jone mercurio oscilli presso a poco come l'atomo di piombo, ed il jone cloro come l'atomo di rame; invero abbiamo per i due primi corpi il rapporto fra le frequenze $\frac{1,0}{1,4}$, poco differente dall'unità, ed invece per gli altri due $\frac{1,6}{6,1}$, molto differente dalla unità.

Del resto risulta che in generale l'applicazione delle formole di Einstein e di Nernst e Lindemann è alquanto arbitraria. Difatti Nernst e Lindemann stessi [2], volendo venire a qualche conclusione sulla costituzione dei corpi solidi, li distinguono in due categorie; quelli i cui calori atomici si possono calcolare bene colla loro formola o anche meglio con quella di Debye [3], e quelli per i quali si deve applicare una somma di espressioni di quella forma, ma con diversi valori della frequenza, in modo che si verifichi la

(1) Ivi, *35* (1911).

(2) Sitzungsber. Preuss. Akad., 1912, pag. 1160.

(3) Ann. d. Phys., *39* (1912).

condizione che ad alte temperature sia soddisfatta la legge di Dulong e Petit. Nella prima categoria entrerebbero i corpi semplici, i metalli specialmente, ma anche il carbonio allo stato di diamante; nella seconda i metalloidi, come zolfo ed il carbonio allo stato di grafite, ed i corpi composti. Per cui si ammette che nel primo caso si abbia a fare con corpi monoatomici, nel secondo con corpi poliatomici.

La stessa formola di Debye è fondata sopra un concetto, che differisce da quello originale di Einstein in ciò che, invece di un unico numero di vibrazioni dell'atomo, si ammette tutto uno spettro di vibrazioni specifiche, il quale però è costituito da un numero finito di linee. Ma anche l'Einstein [1] venne nel concetto che le oscillazioni termiche degli atomi siano molto lungi dall'essere monocromatiche.

Nelle premesse della teoria del Debye entra una sola costante necessaria; la frequenza limite ν_m, la quale entra nella definizione di una temperatura caratteristica θ, rilegata col calore specifico di ciascun corpo dalla legge seguente. Se si considera la temperatura T come un multiplo della detta temperatura caratteristica θ, il calore specifico per tutti i corpi monoatomici è una funzione universale del rapporto $\frac{T}{\theta}$. La detta temperatura caratteristica sarebbe definita da $\theta = \frac{h}{k}\nu_m = \beta\nu_m$, in cui, secondo Paschen-Gerlach

h, quanto di azione $= 7{,}10 \times 10^{-27}$ erg sec.
k, costante di Boltzmann $= 1{,}47 \times 10^{-16}$ erg.

e quindi $\beta = 4{,}83 \times 10^{-11}$.

S. Ratnowsky [2], appoggiandosi sulla detta teoria giunse per via analitica alla conseguenza che l'entropia è una funzione universale del rapporto $\frac{\theta}{T}$ ossia di $\frac{\nu_m}{T}$.

Ora se si confronta il valore di ν_m per ciascuno dei 16 metalli, per i quali Debye e Ratnowsky hanno dato la temperatura θ, col valore di ν, medio dei valori dedotti dalle diverse espressioni, indicate nella mia precedente Nota, nelle quali si ammetteva una sola frequenza od al più due frequenze, differenti fra loro di un'ottava, si trova che il rapporto $\frac{\nu_m}{\nu}$ non è costante per tutti i corpi. Però per metalli affini si trovano valori molto prossimi. Così per Fe, Ni, 1,65 e 1,66; per Na e K 1,38 e 1,47; per Cu, Ag, Au rispettivamente 1,23, 1,22, 1,26, e medio dei 16 rapporti, 1,34. Cosicchè, se non si tratta di un caso, $\nu_m = {}^4/_3\,\nu$. Cosicchè, siccome da $\theta = 76$

[1] *Rapports et discussions*, Bruxelles, 1911.
[2] Ber. Deuts. Phys. Gesells., 1914.

per il rubidio si deduce $\nu_m = 1,5$, così ne risulta $\nu = 1,0$, valore che sta in ordine cogli altri dei metalli alcalini, essendo per Rb, $m = 85,4$.

Infine nel dedurre il calore atomico a pressione costante da quello a volume costante, come nella formola di Magnus e Lindemann, si introduce un coefficiente della temperatura determinato, empiricamente, che rende anche più arbitraria l'applicazione delle formole relative.

Quindi anche piuttosto arbitraria si presenta l'applicazione delle formole, nelle quali la frequenza nei corpi composti si deduce dalla relazione indicata da Lindemann ([1]), che la frequenza di un elemento in una combinazione si possa calcolare coll'espressione $\nu_1 = \nu_2 \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$, dove ν_2 è la frequenza nota sia allo stato elementare, sia in un'altra combinazione, e T_1 e T_2 sarebbero le temperature di fusione dello elemento libero e dell'uno o dell'altro composto. A tale proposito faccio notare che la espressione data dal Planck ([2]), della entropia di un corpo solido, la quale conduce alla stessa conseguenza, cui sono sopra arrivato, che cioè l'entropia varia nei diversi corpi nello stesso senso che la frequenza, è fondata sulla ipotesi, ammessa dalla teoria di Einstein, che la frequenza delle vibrazioni degli atomi di un solido sia indipendente dalla temperatura e dal volume, e che la loro energia sia un multiplo intero di un quanto elementare di energia, come si è già sopra accennato. D'altra parte il principio stesso, su cui è fondata la espressione fondamentale del Lindemann, porta ad ammettere che esso non sia applicabile a rigore che ad una sola temperatura, quella di fusione del corpo, caratterizzata dalla condizione che le ampiezze di oscillazione degli atomi raggiungano l'ordine di grandezza delle distanze interatomiche.

L. Rolla ([3]) ha tentato di applicare la suddetta relazione fra le frequenze e le temperature di fusione per calcolare approssimativamente la affinità del zolfo per alcuni metalli, però ha dovuto introdurre una frequenza atomica media per lo zolfo del tutto arbitraria: $8,8 \times 10^{12}$; che corrisponderebbe ad una molecola triatomica, stando alla frequenza specifica, sopra trovata per l'atomo di zolfo. Ora tutti i risultati sperimentali ed anche i recenti studî dl Beckmann ([4]) tendono a dimostrare che le molecole poliatomiche di zolfo contengono sempre un numero pari di atomi di zolfo, per qualunque intervallo di temperatura.

Si può d'altronde dimostrare che anche per i composti la frequenza del moto vibratorio molecolare è proporzionale alla entropia dell'unità di massa

([1]) Discussione sul Rapporto di Nernst, loc. cit.

([2]) Planck, *Wärmestrahlung-Vorles. über Thermodynamik*, 1911; O. Sackur, *Lehrbuch der Thermochemie u. Thermodynamik*, 1912.

([3]) Gazz. Chim. ital., *43* (1913); *I Quanti di energia ed il principio di Nernst*. Pisa, 1914.

([4]) Sitzungsber. Preuss. Akad., 1913, pag. 886.

alla temperatura di fusione, e che il coefficiente di proporzionalità per sali omologhi, come KCl, KBr, NaCl si può considerare come costante e si può dedurre analogamente a quanto abbiamo fatto per i corpi semplici, mediante il rapporto $\frac{S_1}{n}$ ed il coefficiente della formola di Lindemann per detti sali. Esponiamo nello specchietto seguente i dati sperimentali introdotti nei calcoli ed i risultati ottenuti.

	M	T_1	d	S_1	n	$\frac{S_1}{n}$
NaCl	58,4	1077	2,170	0,687	1,43	0,48
KCl	74,5	1045	1,984	0,493	1,12	0,44
KBr	119,0	1023	2,756	0,340	0,84	0,41

Vediamo subito come anche per questi sali tanto i valori dell'entropia, quanto quelli del termine n, vanno diminuendo col crescere dei coefficienti molecolari, mentre il rapporto $\frac{S_1}{n}$ è pressochè costante, e si può assumere il valor medio 0,44. Ora Lindemann, come si è già accennato sopra, partendo dalla frequenza specifica della silvina, dedotta dalle misure ottiche di Rubens e Hollnagel, trovò per il coefficiente della sua nota formola $4{,}23 \times 10^{12}$ per i detti sali. Adottando questo coefficiente si ottiene come fattore di proporzionalità nella mia relazione $\nu = \alpha S_1$ il valore $\alpha = 9{,}6 \times 10^{12}$.

Nello specchietto seguente sono posti a confronto i valori di $\nu \times 10^{-12}$, dedotti dalle misure ottiche di Rubens e Hollnagel, quelli calcolati colla formola di Lindemann $\nu = 4{,}23 \,.\, 10^{12} \sqrt{\frac{Tf}{MV^{2/3}}}$, quelli assunti nella verifica della formola dei calori specifici di Nernst e Lindemann, e quelli dedotti dalle mie espressioni:

$$1) \quad \frac{\nu}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{4}{3} \qquad \text{e} \qquad 2) \quad \nu = 9{,}6 \times 10^{12} S_1$$

	R. H.	L.	N. L.	P. 1	P. 2
NaCl . . .	5,9	6,0	5,9	6,1	6,6
KCl . . .	4,5	4,7	4,4	4,4	4,8
KBr . . .	3,6	3,5	3,6	3,7	3.3

Anche per questi sali, come per i corpi semplici, si verifica la relazione che i valori della frequenza vanno diminuendo col crescere del coefficiente molecolare, come per l'entropia. Si fa notare che il coefficiente di proporzionalità nella relazione fra frequenza ed entropia è uguale a quello trovato per gli alogeni. Si osserva una buona concordanza anche fra i valori della frequenza, calcolati mediante l'entropia, e quelli determinati direttamente colle misure ottiche.

I risultati esposti in questa e nella precedente mia Nota mi sembrano presentare il particolare interesse di far intravedere delle nuove relazioni fra la teoria atomistica e la termodinamica classica da una parte, e la moderna teoria cinetica dei calori specifici e ipotesi dei quanti d'energia dall'altra.

Chimica-fisica. — *Analisi termica di miscele di idrati e alogenuri alcalini. II: Composti di sodio* (1). Nota di GIUSEPPE SCARPA, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

In continuazione alle ricerche sperimentali intraprese sullo studio termico delle miscele di idrati e alogenuri alcalini, riferisco in questa Nota i risultati tecnici ottenuti, studiando il comportamento ad alta temperatura dei seguenti sistemi: Na OH-Na Fl, Na OH-Na Cl, Na OH-Na Br, Na OH-Na J, formati dall'idrato di sodio e dai corrispondenti sali alogenati.

Il modo di operare fu identico a quello descritto nella Nota precedente (2): la fusione delle miscele veniva fatta in corrente di azoto e in crogiolo di argento, e la misura delle temperature con una pila argento-nichel. Riguardo l'attaccabilità verso l'argento dell'idrato sodico, si deve notare che essa è alquanto minore del corrispondente idrato potassico; e l'idrato sodico, inoltre, è assai stabile alla fusione, cosicchè può venire riscaldato a temperatura piuttosto elevata, senza subir la minima scomposizione. I prodotti adoperati provenivano tutti dalla ditta C. Erba di Milano. Per l'idrato sodico venne determinata la quantità di carbonato e di acqua che esso conteneva. L'analisi eseguita su un prodotto preso da un vaso aperto per la prima volta, dette i seguenti risultati: Na OH contiene Na OH = 97,46 %, Na_2CO_3 = 1,64 %, H_2O = 0,9 %.

Nel corso delle esperienze il peso delle varie miscele venne tenuto costantemente eguale a grammi trenta.

Sistema Na OH-Na Fl.

Sul punto di fusione e di solidificazione dell'idrato sodico si hanno dati assai scarsi. Hevesy (3), il quale studiò il comportamento termico degli idrati alcalini, dà questi punti rispettivamente a 318°,4 e a 299°,5. Neumann e Bergve (4) trovavano il punto di solidificazione a 300°. Dalle mie esperienze questi due punti risultarono rispettivamente a 310° e a 290°.

Per il fluoruro potassico il punto di fusione da me trovato a 1005° è in ottimo accordo con quello dato da Plato (5) (992°), da Kurnakow e

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Padova, diretto dal prof. G. Bruni.

(2) Rend. Accad. Lincei, XXIV, 1° sem., pag. 738.

(3) Zeitschrift f. ph. Chem., *73*, 667 (1910).

(4) Zeitschrift f. Elektroch., *9*, 271 (1914).

(5) Zeitschr. f. phys. Chem. *58*, 364 (1907).

Žemčužny [1] (997°), differisce da quello trovato da Ruff e Plato [2] (980°), e da Puschin e Baskow [3] (1040°).

Questi due sali dànno luogo a formazione di cristalli misti con lacuna di miscibilità.

Si ha quindi, a differenza del sistema KOH-KFL, formazione di due specie di soluzioni solide.

La curva delle temperature di cristallizzazione primaria si trova intermedia ai punti di solidificazione dei due componenti, e presenta un leggerissimo gomito alla concentrazione di 90 mol. % di Na OH. Per le miscele da 20 a circa 90 mol. % di idrato sodico si nota, oltre al primo, un secondo arresto alla temperatura di 360° circa. Il punto di trasformazione di Na OH, che per l'aggiunta di Na Fl viene leggermente abbassato, forma col limite delle soluzioni solide di Na Fl in KOH, un eutettico, il quale presenta un massimo di durata a circa 80 mol. % di idrato sodico e si annulla rispettivamente a circa 5 e a 10 mol. % di Na OH.

Mentre per le miscele da 5 a 80 mol. % di Na OH fu possibile cogliere con ogni esattezza la temperatura e la durata dell'arresto eutettico, per le miscele da 80 a 100 mol, % di idrato sodico questo non è possibile, poichè l'arresto dovuto alla trasformazione si confonde con quello eutettico (Vedi tabella I e fig. 1).

TABELLA I.

Peso % NaOH	Peso % NaFl	Mol. % NaOH	Mol. % NaFl	Temperature inizio cristallizzaz.	Temperature I arresto	Temperature fine cristallizzaz.	Temper. trasformazione NaOH	Temper. arresto eutettico	Durate in secondi
00.00	100.00	00 00	100.00	1005	—	—	—	—	—
10.00	90.00	10.64	89.54	960	—	850	—	—	—
20.00	80.00	20.83	79.17	922	360	—	—	260	20
30 00	70.00	31.12	68.88	885	360	—	—	260	40
40.00	60.00	41.15	58.85	815	360	—	—	263	70
50.00	50.00	51.23	48.77	800	360	—	—	263	90
60.00	40 00	61 22	38.72	685	365	340	—	265	120
70.00	30.00	71.14	28.86	580	365	330	—	265	140
80.00	20.00	82 25	17.75	430	365	320	270	—	—
90.00	10.00	90 36	9.64	365	365	318	280	—	—
95.00	5.00	95.56	4.44	340	—	315	285	—	—
100.00	00.00	100.00	00.00	310	—	—	290	—	—

[1] Zeitschr. f. Anorg. Chem. *52*, 186 (1907).
[2] Ber. *36*, 2363 (1903).
[3] Zeitschr. f. Anorg. Chem. *81*, 349 (1913).

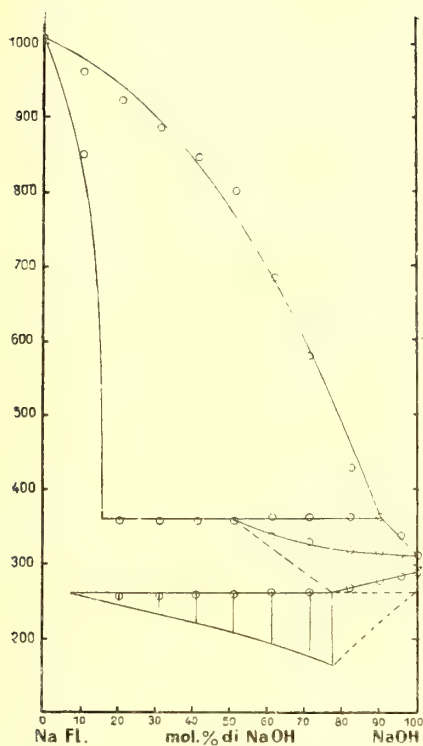
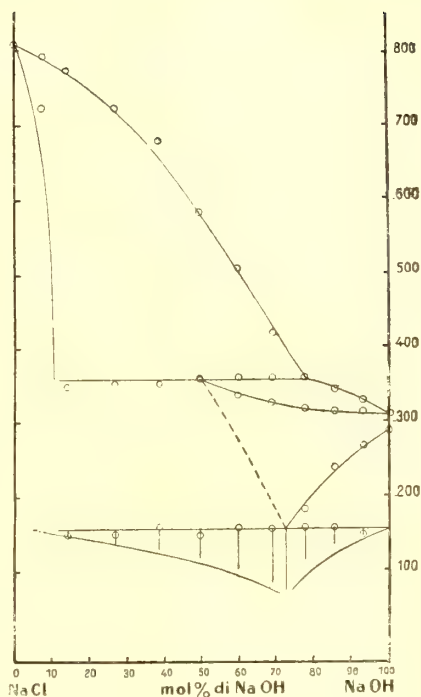



Fig. 1. Fig. 2.

Sistema Na OH-Na Cl,

Il punto di fusione di Na Cl giace, secondo le mie esperienze, a 806°. Esso è in buon accordo con quello dato da White ([1]) (800°), da Arndt ([2]) (805°), da Ruff e Plato ([3]) (820°), da Hüttner e Tammann ([4]) (810°), da Menge ([5]) (803°), da Truthe ([6]), da Sandonnini ([7]) (806°).

Questo sistema è analogo al precedente: si ha formazione di soluzioni solide di due specie con lacuna di miscibilità. La curva di cristallizzazione primaria discende dal punto di fusione del cloruro di sodio a quello dell'idrato corrispondente, presentando un gomito assai accentuato alla temperatura di 350° e alle concentrazione di circa 75 mol. °/₀ di Na OH.

([1]) Zeitschr. f. Anorg. Chem. *69*, 305.
([2]) Zeitschr. f. Elektroch. *12*, 337 (1906).
([3]) Ber. deutsch. Ges. *36*, 2357 (1903).
([4]) Zeitschr. f. Anorg. Chem. *52*, 191 (1907).
([5]) Zeitschr. Anorg. Ch. *72*, 162 (1911).
([6]) Zeitschr. Anorg. Ch. *76*, 137 (1912).
([7]) Rend. Accad. Lincei [5], *20*, I, 457 (1911).

Il punto di trasformazione dell'idrato sodico viene considerevolmente abbassato per aggiunta anche di piccole quantità di cloruro sodico e dà luogo, col limite delle soluzioni di Na Cl in Na OH, alla formazione di un arresto euttico. Questo arresto presenta un massimo di durata a 73 circa mol. °/₀ di Na OH, e si annulla rispettivamente a circa 5 e a 100 mol. °/₀ di idrato sodico.

Dalle curve di raffreddamento non fu possibile cogliere alcun punto della curva di cristallizzazione che discende dal limite delle soluzioni solide di Na Cl in Na OH. Con ogni probabilità la mancanza di questi arresti è dovuta ad uno sviluppo troppo debole di calore non apprezzabile praticamente (Vedi fig. 2 e tab. II).

TABELLA II.

Peso °/₀ NaOH	Peso °/₀ NaCl	Mol. °/₀ NaOH	Mol. °/₀ NaCl	Temperature inizio cristallizzaz.	Temperature I arresto	Temperature fine cristallizzaz.	Temper. trasformazione NaOH	Temper. arresto eutettico	Durate in secondi
00.00	100 00	00.00	100.00	806	—	—	—	—	—
5.00	95.00	7 67	92.33	790	—	722	—	—	—
10.00	90.00	13.96	86.04	770	348	—	—	145	10
20.00	80 00	26.73	73.27	720	350	—	—	150	30
30.00	70.00	38 66	61.34	675	350	—	—	160	40
40.00	60 00	49.50	50.50	580	358	—	—	150	70
50.00	50.00	59.52	40.48	505	360	335	—	160	100
60.00	40.00	68.80	31.20	418	360	320	—	150	140
70.00	30.00	77.43	22.57	360	360	318	185	160	80
80.00	20.00	85.10	14.90	345	345	315	240	160	50
90.00	10.00	92.96	07.04	330	330	312	270	155	20
100.00	00.00	100.00	00.00	310	310	—	290	—	—

Sistema Na OH-Na Br.

La temperatura di solidificazione di Na Br da me trovato (776°) è in buon accordo con quella data da molti autori, come Ruff e Plato (loc. cit.) (775°); Kurnakow Žemcžužny (loc. cit.) (768°); Crae [1] (761°).

Come appare dal diagramma di solidificazione questi due sali sono completamente miscibili allo stato liquido. La curva di cristallizzazione primaria consiste di due rami, i quali dipendono rispettivamente dai punti di solidificazione di Na Br e di Na OH, e s'intersecano in un punto eutettico alla temperatura di 260° circa.

Dalle curve di raffreddamento si può dedurre con ogni sicurezza che non si ha formazione, nemmeno in rapporti assai ristretti, di soluzioni solide, giacchè si osserva in modo evidente l'arresto eutettico anche per le

[1] Ann. phys. (3), *55* (1895).

miscele più ricche di ciascuno dei due componenti. Il punto di trasformazione dell' idrato sodico si osserva solo per la miscela a 95,74 mol. $^0/_0$ di Na OH e si mantiene costante a 290° (Vedi fig. 3 e tab. III).

Sistema Na OH-Na J.

Sul punto di fusione dell'ioduro sodico si trovano dati di diversi autori. Ruff e Plato (loc. cit.) dànno questo punto a 650°, Hüttner e Tammann (loc. cit.) a 664°, Kurnakow e Žemčužny (loc. cit.) a 660°. Dalle mie esperienze esso risulta a 665°.

I dati termici di questi due sali sono raccolti nella tabella IV e nella fig. 4.

Come appare dal diagramma di solidificazione questi due sali dànno luogo alla formazione di un composto decomponibile.

Dal punto di fusione di Na I, la curva di cristallizzazione primaria discende regolarmente fino a 65 mol. $^0/_0$ di idrato sodico dove presenta un evidente gomito; poi ridiscende e s'interseca col ramo di curva discendente dal punto di solidificazione di Na OH in un punto eutettico a 220° e a circa 82° mol. $^0/_0$ di idrato sodico.

Per le miscele sino a 65 mol. $^0/_0$ di Na OH, si nota, nelle curve di raffreddamento, oltre al primo, un secondo arresto alla temperatura di 300°, il quale assume un massimo di durata a 40 mol. $^0/_0$ di Na OH.

Questo arresto coincide con la formazione di un composto decomponibile alla fusione, al quale, con ogni probabilità spetta la formola 2 Na OH · 3 Na J.

L'arresto eutettico, si nota benissimo sulle curve di raffreddamento, anche per alcune miscele di concentrazione in ioduro sodico superiore a quelle corrispondenti al composto. Questo è un caso anormale già spiegato da Tammann [1] e già trovato da Sandonnini [2] nei due sistemi $Pb\,I_2$-$Pb\,Fl_2$ e KCl-Cu Cl. Esso è dovuto al fatto che la reazione che dà luogo al composto non accade completamente durante il tempo in cui avviene il raffreddamento.

Il punto di trasformazione di Na OH si presenta per la miscela a 3 mol. $^0/_0$ di Na J, praticamente alla stessa temperatura che per l'idrato sodico puro.

Questo e il netto arresto eutettico anche per le miscele le più ricche dei due componenti, fanno supporre l'assenza di cristalli misti, o la formazione di essi in limiti assai ristretti.

Concludendo l'idrato di sodio dà:

col fluoruro e col cloruro soluzioni solide di due specie con lacuna di miscibilità;

col bromuro formazione di un semplice eutettico;

coll'ioduro formazione di un composto decomponibile alla fusione della probabile formola 2 Na OH · 3 Na J.

(1) Zeitschr f. Anorg. Chem. *45* (1905), 24.

(2) Rend. Accad. Lincei [5], 20, I, 172 (1911); [5], 20, I, 457 (1011).

Dal comportamento termico di queste coppie di sali sodici e dai sali potassici già descritti in una Nota precedente, apparisce chiaramente, che se si eccettuano i fluoruri i quali, avvicinandosi nel comportamento agli idrati corrispondenti, si staccano dagli altri alogenuri, la solubilità allo stato solido, va gradatamente diminuendo passando dai cloruri, ai bromuri ed agli ioduri, ossia col diminuire dell'elettroaffinità dell'anione.

Il formarsi poi per i sali di sodio di un semplice entettico per il sistema Na OH-Na Br, e di un composto per il sistema Na OH-Na J, a differenza dei corrispondenti sali potassici, i quali dànno luogo per il sistema KOH-KBr, a formazione di soluzioni solide con lacuna di miscibilità, e per il sistema KOH-KJ a un semplice entettico, è da attribuirsi, con ogni verosimiglianza, ella minore elettroaffinità del Na^+ rispetto a quella del K^+.

TABELLA III.

Peso °/o NaOH	Peso °/o NaBr	Mol. °/o NaOH	Mol. °/o NaBr	Temperature inizio cristallizzazione	Temperature arresto eutettico	Durate in secondi	Temperature trasformazione NaOH
00.00	100.00	0.00	100.00	765	—	—	—
2.50	97.50	6 19	93.81	750	260	20	—
10.00	90 50	22.32	77.68	675	260	40	—
20.00	80.00	40.00	60.00	575	260	70	—
30.00	70.00	52.44	47.56	475	260	90	—
40 00	60.00	63.29	36.71	395	262	110	—
50.00	50 00	71.84	28.16	320	260	135	—
60.00	40.00	79.36	20.64	260	260	150	—
70.00	30.00	85.78	14.22	275	260	120	—
80.00	20 00	90 91	9.09	290	255	70	—
90.00	10.00	95.74	4 26	302	250	20	290
100.00	0.00	100.00	00.00	310	—	—	290

TABELLA IV.

Peso °/o NaHO	Peso °/o NaJ	Mol. °/o NaOH	Mol. °/o NaJ	Temperature inizio cristallizzaz.	Temperature I arresto	Durate in secondi	Temper. arresto eutettico	Durate in secondi	Temperature trasformazione NaOH
0.00	100.00	0.00	00.00	665	—	—	—	—	—
5.00	95.00	16.34	83.66	615	290	20	—	—	—
10.00	90.00	29.41	70.59	560	290	40	220	20	—
12.00	85.00	33.77	66.23	540	295	50	220	30	—
15 00	88.00	40.10	59.90	505	295	70	220	40	—
20.00	80.00	48.54	51.46	430	300	40	220	70	—
30.00	70.00	61.98	38.02	320	300	20			
35.00	65.00	67.05	32.95	290	—	—	225	100	
40.00	60.00	71.43	28.57	285	—	—	225	120	
45.00	55.00	75.75	24.25	260	—	—	225	140	
50.00	50.00	79.1	20 9	235	—	—	225	150	
60.00	40.00	84.74	15.26	245	—	—	225	120	
70.00	30.00	89.74	10.26	270	—	—	220	90	
80.00	20.00	93.89	6.11	290	—	—	215	40	
90.00	10.00	96.98	3.02	305	—	—	210	20	285
100.00	00.00	00.00	00.00	310	—	—	—	—	290

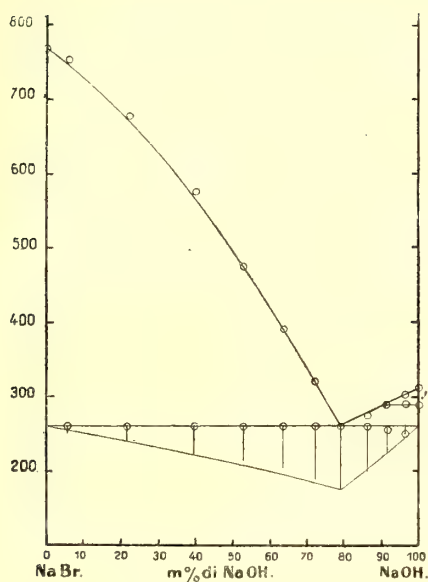
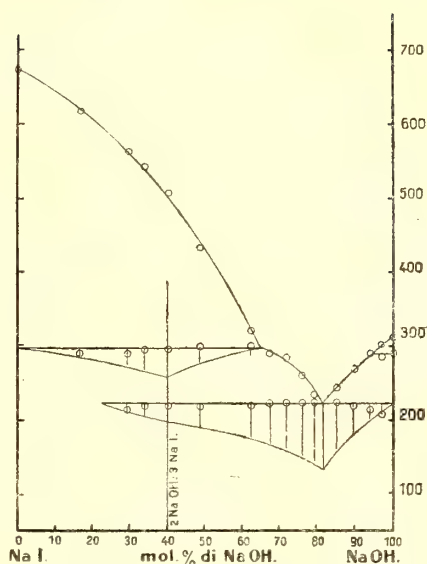



Fig. 3. Fig. 4

Mineralogia. — *Contributo alla mineralogia sarda. Sopra alcuni interessanti cristalli di baritina.* Nota di E. Grill, presentata dal Corrisp. Federico Millosevich.

I campioni di baritina sarda da me studiati provengono da due località: dal Piolanas Sud (Iglesias) e dalla miniera Piccalinus (Guspini) già ricordata per il quarzo studiato in una precedente Nota.

Di quest'ultima località ebbi un solo esemplare, ma assai interessante, perchè costituito da cristalli con facce e spigoli arrotondati. Tali cristalli, assai grandi, translucidi, incolori, sono disposti subparallelamente fra loro (senza però dar luogo al fenomeno della « haüfung ») sopra una matrice di quarzo e di pirite.

Nelle parti arrotondate essi hanno assunto una lucentezza speciale, tendente alla lucentezza grassa, che contrasta con quella vitrea-adamantina delle facce o porzioni di facce rimaste intatte.

La perfetta specularità di talune facce, nonchè la striatura abbastanza regolare delle zone arcuate, induce a credere che la causa della curvatura non sia dovuta a corrosione chimica o meccanica, ma sia piuttosto congenita.

Nonostante la poca perfezione dei cristalli, è ancora possibile riconoscere le forme, le quali sono fra le più comuni della baritina e vi costi-

tuiscono la combinazione: *c* {001}, *m* {110}, *d* {102}, *o* {011}, *b* {010}; ove il pinacoide orizzontale *c* {001} è il più sviluppato e conferisce quindi ai cristalli un abito tabulare, assai meno marcato, però, di quello della baritina che passo ora a descrivere.

Gli esemplari provenienti da Piolanas sud sono in numero di quattro; uno dei quali è costituito da baritina quasi opaca, biancastra, su diaspro ocraceo, compatto. I suoi cristalli presentano le caratteristiche zonature di accrescimento, e sono così fortemente appiattiti secondo *c* {001} da dar luogo a vere e proprie lamine, che vanno ancora assottigliandosi ai bordi. In mezzo alle lamine, disposte come stecche di un ventaglio chiuso, si osservano numerosissimi altri cristallini, dello stesso minerale, irregolarmente distribuiti, più lucenti, trasparenti e sempre spiccatamente lamellari.

Le facce limitanti questi due tipi d'individui sono quelle delle forme più comuni già ricordate, e, nei cristalli maggiori esse sono tanto imperfette, e rugose da non permettere più le misure angolari.

I tre altri campioni di Piolanas sud sono invece in cristalli perfetti, assai adatti per le misure goniometriche, più o meno trasparenti, con un colore giallino dovuto ad ossido di ferro.

In due di questi campioni i cristalli sono molto grandi e si presentano attaccati alla matrice per l'asse [*y*] [1], precisamente come quelli di Vassera (Varese) studiati dall'Artini. Secondo questa direzione essi assumono la maggiore grandezza lineare che, in taluni, non è meno di 10 mm. L'*habitus* è perfettamente tabulare e così marcato che per delle dimensioni orizzontali, medie, di millimetri 5 × 7 si ha sempre uno spessore inferiore ai 2 millimetri.

Il terzo campione è costituito invece da cristalli assai più piccoli, più chiari, meno appiattiti, ma per contro ancora più marcatamente allungati secondo l'asse [*y*]. Essi si presentano fittamente aggruppati fra loro sopra una matrice baritico-ocracea.

Per quel che riguarda le forme cristalline della baritina di Piolanas sud, mi limiterò a riportarne l'elenco e le combinazioni, poi che, com'è noto, la baritina sarda è omai ben conosciuta dal lato cristallografico dopo gli

[1] Nota. — Seguo l'orientazione cristallografica, più generalmente accettata, ossia quella di Hauy adottata da Miller, Dana, Strüver, Goldschmidt, secondo la quale la direzione di sfaldatura perfetta coincide con {001} e quella di sfaldatura quasi perfetta col prisma {110}. Nell'altra orientazione seguìta presentemente ancora dallo Tschermak (*Lehrbuch der Mineralogie*, siebente Auf., pag. 660, Wien., 1915) il piano di sfaldatura perfetta ha il simbolo {010} e il diametro corrispondente al nostro asse [*y*] è disposto verticalmente e quindi i cristalli appaiono allungati in quel senso.

studii di G. B. Negri [1], C. Riva [2], F. Millosevich [3], G. D'Achiardi [4] e G. Lincio [5].

Le forme da me osservate sono le seguenti:

a {100}	*m* {110}	*d* {102}	*o* {011}	*z* {111}
b {010}	*λ* {210}			*y* {122}
c {00.}	*β* {310}			

Il prisma verticale *β* {310} è nuovo per i giacimenti sardi; le altre 9 forme sono tutte note e assai comuni. Queste 10 forme sono associate come segue:

1ª	*a*	*m*	*o*	*d*				
2ª	"	"	"	"	*z*			
3ª	"	"	"	"	*b*			
4ª	"	"	"	"	"	*a*		
5ª	"	"	"	"	*λ*	*b*		
6ª	"	"	"	"	"	"	*a*	
7ª	"	"	"	"	"	"	"	*β*

La combinazione di gran lunga più comune, e caratteristica per i cristalli più grossi, è la 3ª con *b* sempre assai subordinato.

La baritina di Piolanas sud è quindi poco ricca di forme, relativamente a quella dei filoni di Montevecchio, studiata dal Negri, il quale vi osservò 22 forme sicuramente determinate, con una bella serie di piramidi (10). Anche sulla baritina di Piolanas sud ho potuto constatare che le piramidi *z* {111} e *y* {122} compaiono sempre con facce piccolissime, sovente appena percettibili, ma perfette, piane e lucentissime. Questo fatto è assai notevole data la discreta frequenza di tali forme e la semplicità del loro simbolo. Del resto, se si prescinde dalle quattro forme *c* {001}, *m* {110}, *o* {011}, *d* {012}, sempre presenti, si può ben dire che tutte le altre sono pochissimo sviluppate e sfuggono assai facilmente ad un primo esame.

Anche le facce delle quattro forme predominanti si presentano sui cristalli da me studiati molto piane. Non tutte però sono lucenti e quindi

[1] *Sopra le forme cristalline della baritina di Montevecchio* (Sardegna) Panebianco. Rivista di mineralogia e cristallog. ital., vol. XII, pag. 3, Padova, an. 1892.

[2] *Sopra alcuni minerali di Nebida.* Rend. R. Acc. Lincei, vol. XI, 1° sem., Roma, an. 1897.

[3] *Zolfo ed altri minerali di Malfidano presso Buggerru* (Sardegna), ibid.; *Appunti di mineralogia sarda* (baritina dell'isola di S. Pietro); ibid., vol. IX, 1° sem., Roma, an. 1900.

[4] *Minerali del Sarrabus* (Sardegna), Atti d. Soc. tosc. sc. naturali. Memorie, vol. XVII, Pisa, an. 1900.

[5] *Sulla baritina dello scavo Cungiaus. Miniera di Monteponi* (Sardegna), Atti d. R. Accad, d. sc., vol. XLIV, Torino, an. 1909.

particolarmente appropriate per buone misure goniometriche. Quelle del prisma fondamentale *m* {110} sono, benchè piane, quasi sempre opache o su tutta la loro estensione, o almeno parzialmente; quelle del pinacoide *c* {001} sono invece abbastanza lucenti, ma, specie nei grandi cristalli, leggermente screziate.

Di gran lunga più perfette, piane e speculari sono le facce dei due prismi *o* {011} e *d* {120}, le quali sono perciò particolarmente indicate per la determinazione delle costanti.

Prendendo tutte le misure, di egual peso, ricavate dagli angoli $(102):(10\bar{2})$ e $(011):(01\bar{1})$ dei vari cristalli misurati, ho notato, che, mentre quelle del primo angolo subiscono piccole variazioni e vanno quasi perfettamente d'accordo con il valore calcolato dalle costanti di Negri per la baritina di Levico [adottate anche per i cristalli di Montevecchio (Sardegna)], i valori angolari di $(011):(01\bar{1})$ variano invece a seconda della grandezza dei cristalli. E precisamente detto angolo aumenta e si discosta assai dal valore teorico nei cristalli più grossi, mentre esso si mantiene molto vicino al valore teorico nei cristalli piccoli.

Delle due facce (011), $(01\bar{1})$, una, dà sovente immagini luminose multiple (due o tre), mentre l'altra fornisce sempre una immagine unica, nettissima. Ma anche in questo caso puntando l'immagine più vicina a quella data dalla seconda faccia, si ha ancora, quasi sempre, nei cristalli più grandi un valore angolare maggiore di quello teorico.

Però per eliminare qualsiasi ombra di dubbio ho, naturalmente, scelto le sole misure ottenute da facce che davano immagini semplici e nettissime. Le misure sono le seguenti:

$(011):(01\bar{1})$	=	74°40°
"	=	74 40
"	=	74 42
"	=	74 42
"	=	74 46
"	=	74 48
"	=	74 48
"	=	74 50
"	=	74 52
"	=	74 52
Media	=	74 46; calcolato (Negri) = 74°38′

Dalla media di questi 10 angoli si ricava per il parametro *c* il valore 1,3087 che è (prescindendo da quelli dati da Mohs e da Beudant, perchè assai antichi) assieme a quello calcolato da Beckenkamp, uno dei più bassi, come risulta anche dal quadro seguente, in cui è riportato pure

il valore teorico dell'angolo (011):(01$\bar{1}$) corrispondente alle varie costanti.

$a:b:c$	= 0,81509:1:1,30992	Beckenkamp	(011):(01$\bar{1}$)	=	calc.	74°42′
"	= 0,81263:1:1,31156	Artini	"	=	"	74 39
"	= 0,81404:1:1,31189	Negri	"	=	"	74 37
"	= 0,81286:1:1,31252	Repossi	"	=	"	74 36
"	= 0,81461:1:1,31269	Fenyés [1]	"	=	"	74 36
"	= 0,81520:1:1,31359	Helmacker	"	=	"	74 34

Il valore teorico dell'angolo (011):(01$\bar{1}$) che si avvicina, più di tutti, a 74°46′ è quello ottenuto dalle costanti di Beckenkamp, nelle quali, però, il rapporto $\frac{a}{b}$ è diverso da quello dato da Negri che pure si conviene bene alla baritina di Piolanas sud.

Nei cristalli di questo giacimento sardo bisogna dunque ammettere che, durante l'accrescimento, il rapporto parametrico $\frac{b}{c}$ aumenta, ossia le facce di o {011}, soltanto, non si mantengono parallele a quelle primitiue. Questo fenomeno che ha luogo anche in alcuni altri minerali deve avvenire, a più forte ragione, nella baritina, la quale presenta, com'è noto da tempo, la cosiddetta da Kopp « doppelter bildung » cioè il cambiamento completo di forma durante il suo accrescimento.

Non riporterò gli altri valori angolari ottenuti nella determinazione delle singole forme, o nella verifica degli altri angoli, poichè essi concorcordano, in modo soddisfacentissimo, con i valori teorici ricavati sia dalle costanti di Negri, o anche di Helmacker (adottate da Dana, Riva e Millosevich).

Osserverò ancora che anche la baritina di Piolanas sud presenta, non raramente, il già ricordato fenomeno della « Haüfung » cioè la spiccata tendenza a formare degli aggruppamenti ipoparalleli, che per i loro angoli rientranti hanno tutta l'apparenza di veri e propri geminati.

Teratologia. — *Di alcune anomalie nella Beta vulgaris* L.

Nota di O. MUNERATI e T. V. ZAPPAROLI, presentata dal Socio R. PIROTTA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

[1] Queste costanti sono state adottate da Gonnard, Ungemach e anche da Lacroix nella sua *Mineralogie de la France et de ses colonies.*

Fisiologia vegetale. — *Ancora sull'assimilazione diretta dell'azoto atmosferico libero nei vegetali* [1]. Nota dei dott. EVA MAMELI e GINO POLLACCI, presentata dal Socio GIOVANNI BRIOSI.

In una Nota preliminare sull'assimilazione dell'azoto pubblicata nel 1909 e nella successiva Memoria completa [2], noi riferimmo i risultati di numerose ricerche sperimentali il cui scopo era quello di studiare l'assimilazione dell'azoto libero dell'aria in piante appartenenti a ordini diversi (dalle alghe alle fanerogame superiori).

In tali esperienze erano da noi state evitate le cause d'errore dovute: 1° all'incompleta sterilizzazione delle culture; 2° alla presenza dei composti azotati dell'aria; 3° allo sviluppo incompleto delle piante; 4° ai metodi analitici di dosaggio dell'azoto totale; cause d'errore che complessivamente non erano state evitate da nessuno degli autori che ci avevano preceduto nello studio di quest'importante problema.

Le culture vennero fatte, parte in mezzo liquido, parte in sabbia di quarzo puro. Le soluzioni nutritizie adoperate furono: la soluzione completa Knop e una soluzione nutritizia priva di composti azotati, così costituita: H_2O gr. 1000 ; $CaHPO_4$ gr. 0,50 ; KH_2PO_4 gr. 0,25 ; $MgSO_4$ gr. 0,25 ; $CaSO_4$ gr. 0,25 ; $Fe_2(PO_4)_2$ gr. 0,02.

I metodi d'analisi adoperati furono:

1°) *L'analisi indiretta*, consistente nella ricerca dell'azoto contenuto nei semi e nel substrato, e di quello rimasto nel terreno e contenuto nella pianta. La differenza tra le due somme ci dava la quantità di azoto guadagnata o perduta.

2°) *L'analisi diretta*, consistente nell'analisi dell'aria confinata in cui alcune piante avevano vissuto per qualche mese. Per confronto con l'analisi dell'aria esterna, riportata a pressione e a temperatura eguale, si notava se le piante avevano o no sottratto azoto all'atmosfera.

I risultati ottenuti dalle culture e dalle analisi, concordi nella quasi totalità, ci permisero di concludere che la proprietà di assimilare l'azoto libero dell'aria, dalla maggioranza degli autori attribuita al solo plasma

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto botanico di Pavia, aprile 1915.

[2] Mameli E. e Pollacci G., *Sull'assimilazione diretta dell'azoto atmosferico libero nei vegetali* (Atti Ist. botanico di Pavia, XIV, pp. 159-257), 1911 con 3 tavole.

dei bacteri, e fortemente discussa per le alghe, potesse estendersi « anche alle Crittogame vascolari e alle Fanerogame, in generale al plasma vegetale, *tenendo ben presente tuttavia, che le condizioni di cultura, sia chimiche che fisiologiche, influiscono potentemente sul fenomeno* ». È appunto per quest'ultima ragione che, in piante ottenute da culture fatte in laboratorio noi riuscimmo a constatare l'assimilazione di quantità d'azoto libero relativamente tenui, ciò tuttavia non diminuisce l'importanza del fenomeno e non esclude che in determinate condizioni di sviluppo — a noi per ora ignote — i vegetali possano usufruire con grande attività dell'azoto libero atmosferico.

Fra i principali risultati da noi ottenuti erano i seguenti, che riportiamo integralmente, perchè necessarî agli scopi critici che si prefigge la seguente Nota:

« Tra le Hydropteridee: l'*Azolla caroliniana* e la *Salvinia natans* si dimostrarono straordinariamente atte all'assimilazione dell'azoto libero atmosferico. Se per la prima specie la sterilizzazione non poteva effettuarsi completamente causa la sua nota simbiosi con l'*Anabaena*, la seconda specie invece venne resa completamente sterile per mezzo dell'acqua ossigenata, che si dimostrò un disinfettante utilissimo per tal genere di esperienze. Le analisi, sia delle piante, sia dell'aria in cui esse avevano vissuto, confermarono i risultati che già dallo sviluppo apparente delle piante si potevano prevedere;

« La *Lemna major* e la *L. minor*, rese sterili e coltivate in soluzione sterile esente d'azoto combinato, si svilupparono abbondantemente e diedero all'analisi notevoli aumenti d'azoto;

« Culture di *Raphanus sativus*, di *Acer Negundo*, di *Cucurbita Pepo*, di *Polygonum Fagopyrum*, ottenute in substrati sterili, ed in ambiente esente di composti azotati, diedero all'analisi notevoli aumenti di azoto, pienamente giustificati dalla completa astinenza di azoto combinato a cui queste piante erano state costrette.

Il loro sviluppo, relativamente alle condizioni in cui le piante crescevano, era notevole, e dimostrava anche *a priori* che esse assimilavano lo azoto libero atmosferico;

« Culture delle stesse piante, ottenute in substrato contenente una quantità nota di azoto combinato e in aria priva di composti azotati, diedero anch'esse all'analisi aumenti d'azoto notevoli, e variabili a seconda della quantità d'azoto somministrato. Si osserva cioè che ad una maggiore quantità di azoto ricevuta dalla pianta, corrisponde una minore attività assimilatrice dell'azoto libero, e che, mentre la pianta che ha assimilato tutto l'azoto combinato che le è stato fornito, dà la maggiore percentuale di azoto libero assorbito; il contrario avviene per quelle piante che, al momento dell'analisi, non avevano assorbito che una parte dell'azoto del terreno ».

Due brevi Note [1] apparse su quest'argomento dopo la pubblicazione del nostro lavoro, ci porgono l'occasione di confermare pienamente i risultati delle nostre esperienze, che non sono per nulla infirmati da quelli di Oes e di Molliard, date le condizioni specialissime nelle quali questi autori hanno posto a vegetare le piante sottoposte ad esperienza, invece di attenersi al metodo da noi seguìto.

Oes conferma anzitutto le nostre ricerche per ciò che riguarda l'assimilazione dell'azoto libero dell'aria per parte dell'*Azolla*, concludendo anche egli che quando la pianta manca di nitrati nel substrato si contenta di un'altra sorgente di azoto; e che questa mancanza di azoto combinato può, in buone condizioni di cultura, agire come stimolo d'accrescimento.

Che nel caso dell'*Azolla* l'assimilazione dell'azoto libero sia facilitata dall'associazione simbiotica di questa pianta con alghe del genere *Anabaena*, non è una scoperta dell'Oes, come sembrerebbe da alcune parole della Nota di Molliard, ma è un fatto che era stato già da noi constatato (vedi pag. 62 della nostra Memoria), tanto che dichiarammo che la sterilizzazione di queste piante non era possibile, data la presenza di endofiti nei loro tessuti. Tuttavia, che la presenza dell'alga sia indispensabile per l'assimilazione dell'azoto libero da parte dell'*Azolla*, neanche l'Oes ha dimostrato, nè poteva farlo, dato che questa simbiosi è largamente diffusa in tutte le *Azolla*, e data l'impossibilità di privare la pianta del suo ospite. Con tutta probabilità la consociazione favorisce e rende più copiosa l'assimilazione dell'azoto libero, dato che, come diversi autori dimostrarono, e noi confermammo, vi sono alghe capaci di tale assimilazione.

Contrariamente a ciò che avviene nell'*Azolla*, Oes afferma che *Salvinia auriculata*, *Lemna trisulca*, *L. gibba* e *L. polyrrhiza*, coltivate in soluzioni nutritizie esenti d'azoto, non assimilano l'azoto libero dell'aria. Osserviamo anzitutto che la soluzione nutritizia priva d'azoto somministrata dall'autore a queste delicate piante acquatiche, doveva necessariamente essere inadatta al loro sviluppo se non addirittura nociva, e che essa è ben diversa da quella da noi usata. Infatti, la soluzione usata da Oes è così costituita: H_2O dist. gr. 1000 ; $MgSO_4$ gr. 0,25 ; $CaCl_2$ gr. 1 oppure gr. 0,62 ; KH_2PO_4 gr. 0,50 ; KCl gr. 0,12 ; Fe_2Cl_6 traccie.

È noto che i sali di cloro più adatti per la nutrizione vegetale sono quelli di potassio e di sodio; Wypfel [2] inoltre trovò che soluzioni di cloruri (di magnesio, calcio, potassio e alluminio), in concentrazioni varie dal

[1] Oes A., *Ueber die Assimilation des freien Stickstoffs durch Azolla* (Zeitschr. f. Bot., V, 145), 1913; Molliard M., *L'azote libre et les plantes supérieures* (Comptes rendus de l'Ac. d. Sciences, *160*, 310), 1915.

[2] Wypfel M., *Weitere Versuche über den Einfluss der Chloride auf das Wachsthum der Pflanze* (Jahresber. d. Niederöster. Landes-Realgymn, *23*, 1892).

0,5 al 2 %, sono nocive per piantine di *Zea*, *Phaseolus*, *Pisum*, *Cucurbita* ecc.

Nella soluzione adoperata da Oes il tenore in cloruri è del 0,074-0,112 %, percentuale rappresentata in massima parte da cloruro di calcio ch'è tra i sali di cloro uno fra i più nocivi alle piante; non si capisce quindi perchè egli abbia scelto tale sale e l'abbia somministrato in dosi tanto elevate. Inoltre, il trasporto delle piantine dall'acqua dolce del fossato o della vasca nella quale vivevano, ad una soluzione siffatta non può essere avvenuto senza che il loro sistema radicale ne abbia in qualche modo sofferto.

Un altro appunto che dobbiamo fare alla Nota di Oes è quello della assoluta mancanza di analisi per ciò che riguarda le *Salvinia* e le *Lemna*. Mentre le analisi riportate dall'autore per le *Azolla* sono numerose, per le altre piante non v'è parola, nè di analisi dell'aria dalla quale l'azoto libero potesse o no essere stato sottratto, nè delle piante stesse. È bensì vero che lo scarso sviluppo delle culture ottenute dall'Oes, data la soluzione nutritizia ch'egli usò, doveva essere poco incoraggiante per intraprendere la ricerca analitica, ma non è men vero che in questioni così delicate e precise di chimica fisiologica solo l'analisi rigorosamente condotta può dire l'ultima parola.

Le esperienze del Molliard riguardano esclusivamente dieci culture di *Raphanus sativus*, ottenute in soluzione nutritiva contenente l'azoto sotto forma di cloruro ammonico. Dalle analisi fatte egli ottiene, in quattro casi, un aumento d'azoto, e precisamente di mg. 0,19 ; 0,09 ; 0,12 ; 0,17 (risultati che, nonostante siano stati ottenuti da piante poste in condizioni di cultura inadatte al loro buon sviluppo, sono conformi a quelli da noi ottenuti); in sei casi, invece, una diminuzione di mg. 0,02 ; 0,13 ; 0,16 ; 0,15 ; 0,08 ; 0,10. Dopo ciò l'autore conclude che il *Raphanus sativus* non ha la proprietà di utilizzare l'azoto libero dell'aria.

Che questa deduzione sia, più che affrettata, illogica, noi possiamo affermarlo riportando integralmente le seguenti parole dello stesso Molliard, che ne fanno fede:

« À la verité, je me suis placé, pour ces premières expériences, dans des conditions un peu spéciales; les plantes ont toujours eu à leur disposition de l'azote combiné et, d'après Mameli et Pollacci, l'assimilation de l'azote de l'air serait favorisée par la faim de la plante en azote combiné; d'autre part, les plantes ont eu à leur disposition du glucose et, de ce fait, leur nutrition a été en grande partie saprophytique ».

Noi aggiungiamo che non solo per queste due ragioni la soluzione nutritizia adoperata dall'autore era la meno adatta per la dimostrazione in parola, ma che essa doveva necessariamente essere di ostacolo allo sviluppo delle piantine, data l'eccessiva quantità di glucosio (50 gr. per 1 litro!) in essa contenuta. Infatti, osservando al microscopio tessuti di piantine di

Raphanus sativus coltivate in una soluzione nutritizia contenente glucosio nella proporzione di gr. 50 per un litro, come ha usato Molliard, si nota un'accentuata plasmolisi nelle cellule dell'apice radicale. Oltre a ciò, lo sviluppo delle piantine è evidentemente ostacolato e quasi arrestato, quindi, piante in condizioni così anormali non sono certo adatte per controllare le nostre ricerche.

L'autore non descrive l'aspetto delle piante al termine delle culture, che vennero fatte su pomice granulare, imbevuta della soluzione nutritizia.

Per ciò che riguarda le analisi fatte da Molliard osserviamo che varie sono in esse le cause d'errore, e cioè:

1°) L'analisi del liquido nutritizio dopo la cultura. L'autore dice di aver constatato che « si può spostare tutta l'ammoniaca dei liquidi in presenza della pomice, a condizione di polverizzare questa e di raccogliere alla distillazione in presenza di potassa un volume di liquido considerevole ». Ora, è inevitabile che perdita d'azoto vi sia stata e nella polverizzazione della pietra pomice e nella susseguente distillazione « di un volume di liquido considerevole », che si rese necessario per trascinare nel distillato tutti i composti azotati residuali. Un'analisi siffatta, applicata al solo residuo rimasto nel substrato dopo le culture, è tanto più una causa d'errore, perchè ad essa non fa riscontro un'analisi fatta in eguali condizioni e che avrebbe potuto compensarlo, e cioè l'analisi del substrato prima della cultura, poichè, supponendo purissima la pietra pomice, la quantità d'azoto contenuta nel liquido nutritizio somministrato era nota, data la composizione fissa di esso.

Da questo diverso metodo di apprezzamento deriva che nella diseguaglianza:

$$\text{N del seme} + \text{N della soluzione al principio della cultura} \gtrless \text{N della soluzione alla fine della cultura} + \text{N della pianta}$$

si ottiene nella seconda somma una quantità d'azoto minore di quella realmente presente.

2°) L'uso del semplice metodo Kjeldahl per il dosaggio dell'azoto totale delle piante. Noi, infatti, facemmo osservare nel nostro lavoro che « il metodo Kjeldahl, eseguito col semplice procedimento dettato dall'autore, permette di dosare solo l'azoto organico e l'azoto amidico, ma non è neppur certo che con questo metodo si riesca ad intaccare qualunque sostanza organica azotata, poichè, ad esempio, gli alcaloidi e le nucleine vegetali hanno una costituzione così complessa che il loro azoto offre una grande resistenza alla riduzione in ammoniaca ». Applicammo quindi in tutte le nostre analisi il metodo Kjeldahl modificato da Jodlbauer, che permette di dosare l'azoto organico, più l'azoto nitrico, anche in dosi minime, quali sono quelle che si trovano di solito nei vegetali. Si ottiene, infatti, con questo metodo la

scomposizione completa di tutte le sostanze azotate, come dimostrano le analisi di prova fatte dall'autore stesso con sostanze diverse, e da noi ripetute con quantità note di nitrato e nitrito potassico e di asparagina.

Sono dunque certamente andate perdute nelle analisi del Molliard fatte col semplice metodo Kjeldahl quelle piccole quantità d'azoto provenienti dalla decomposizione dei composti nitrici, degli alcaloidi e delle nucleine vegetali, e questo, tanto nelle analisi dei semi e delle piante, quanto in quelle del liquido nutritizio dopo la cultura; poichè, per quanto la soluzione contenesse l'azoto esclusivamente sotto forma di composto ammoniacale, pure non è da escludere che, in presenza delle secrezioni radicali delle piante e della pietra pomice granulare che potè anche esercitare un'azione catalitica, fossero presenti in questo liquido, alla fine della cultura, piccole quantità di nitrati o di nitriti.

3°) L'incostanza dei risultati ottenuti dall'autore, nelle sue poche analisi: aumento d'azoto in quattro casi, diminuzione negli altri sei.

Aggiungiamo in fine che causa d'errore non trascurabile in esperienze siffatte deve essere stata la piccolissima quantità di liquido nutritizio (60 $cm.^3$) somministrata a ciascuna cultura, per una durata di 7 settimane.

Non è da meravigliarsi quindi se tante diverse cause d'errore insieme unite: 1) soluzione nutritizia inadatta; 2) somministrazione di essa alle piante in quantità insufficiente; 3) metodi analitici poco precisi; abbiano condotto a risultati incostanti, alcuni dei quali tuttavia in accordo coi nostri, ed abbiano ostacolata la constatazione dei piccoli aumenti di azoto, quali sono quelli che possono verificarsi in una pianta di *Raphanus sativus* coltivata in tali condizioni in laboratorio.

Non v'ha dubbio che la scelta di mezzi nutritizi più adatti e l'esclusione delle cause d'errore delle quali abbiamo fatto cenno al principio della presente Nota, confermeranno quanto è risultato dalle nostre numerose esperienze rigorosamente condotte, e che ci occuparono per più di due anni, e cioè che « la facoltà di assimilare l'azoto libero atmosferico è proprietà assai più diffusa di quanto fino ad ora si ammetteva, e che è presumibile che anche tutti i vegetali clorofilliani, dalle alghe alle fanerogame, possano, in condizioni speciali, far uso, *con maggiore o minore attività*, di questo potere.

Chimica fisiologica. — *Contributo allo studio dell'azione dei fermenti peptolici sui polipeptidi* [1]. Nota del dott. ANTONINO CLEMENTI, presentata dal Socio L. LUCIANI.

La sintesi artificiale dei polipeptidi e lo studio del loro comportamento biologico formano uno dei capitoli più brillanti della fisiologia dell'ultimo ventennio, che è valso a versare un fascio di luce nuova sul problema, così arduo e oscuro, della costituzione chimica della molecola proteica e delle trasformazioni, a cui essa va incontro durante i fenomeni della digestione nel tubo intestinale e durante il metabolismo cellulare. Dopo che mediante l'applicazione del metodo di Kossel e di Kutscher [2], per la determinazione quantitativa dei diaminoacidi (basi esoniche), e del metodo di Emilio Fischer [3], per la determinazione dei monoaminoacidi, una lunga schiera di illustri chimici fisiologi, sottoponendo alla analisi la molecola delle più svariate proteine, dimostrarono, che queste ultime sono costituite fondamentalmente dalle stesse pietre strutturali (gli aminoacidi), e che la differenza consiste in genere (tranne alcune eccezioni) nelle diverse proporzioni in cui esse sono presenti, alla attenzione dei fisiologi si è imposto il problema della ricomposizione sintetica del complesso edificio molecolare dell'albumina. Le ricerche di Schaal [4] sulla anidride dell'acido asparaginico e sulla trasformazione di questo in poliasparaginurea (Grimaux) [5] e in acido poliaspartico (Schiff) [6] e le ricerche di Schutzenberger [7] sulla unione di diversi aminoacidi (leucine e leuceine) coll'urea mediante riscaldamento con anidride fosforica, e le ricerche di Lilienfeld [8], eseguite nel laboratorio di Kossel, e di Balbiano e Frasciatti [9], rappresentano ricerche iniziali in questo senso, le quali portarono alla sintesi di prodotti non ben definiti nè ben caratterizzabili, di cui rimangono sconosciuti la struttura e il grado di parentela con le proteine.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisiologica della R. Università di Roma.

(2) Kossel e Kutscher, *Beiträge zur Kenntniss der Eiweisskörpern.* Zeitschrift f. physiol. Chemie, XXXI, 165, an. 1900.

(3) Emil Fischer, *Ueber die Ester der Aminosaüre.* Berichte der deutsche chemische Gesellschaft, *34*, 4331, an. 1901.

(4) Schaal, Ann. d. Chem., *157*, 24, an. 1871.

(5) Grimaux, *Sur des colloides azotés.* Bull. Société chim., *38*, 64, an. 1882.

(6) Schiff, *Ueber Poliaspartsaüre.* Ann. der Chemie, *303*, 183, an. 1898.

(7) Schutzenberger, *Recherches sur la synthèse des matières albuminoïdes et protëique.* Comptes rendus, *106*, 1407, an. 1888.

(8) Lilienfeld, *Ueber protenähnliche Substanzen.* Dubois Archiv., pag. 383, 1894.

(9) Balbiano e Frasciatti, *Ueber ein neues Derivat des Glykokolls.* Berichte der deutsch. chemische Gesellschaft, *33*, 2323, an. 1900; *34*, 150, an. 1901.

È ad Emilio Fischer [1] che spetta il merito immortale di essere riuscito per il primo a trovare dei metodi chimici esatti per legare fra loro le molecole degli aminoacidi stabilendo legami amidici tra il gruppo carbossilico e il gruppo aminico di distinte molecole, e ad ottenere, così, nuovi corpi chimicamente ben definiti e individualizzabili, che egli chiamò col nome generico di Polipeptidi e con quello speciale di Di-, Tri-, Tetrapeptidi a seconda del numero di aminoacidi, che prendono parte alla costituzione della loro molecola. Emilio Fischer ha voluto così adoperare una nomenclatura, che mentre da una parte ricorda la nomenclatura attualmente adoperata per la classe dei saccaridi, dall'altra indica, che questi corpi, artificialmente ottenuti per sintesi, sono molto affini ai peptoni naturali, i quali risulterebbero dall'unione di molte molecole di polipeptidi. I polipeptidi infatti hanno comuni con i peptoni molte reazioni colorate, come ad esempio la reazione del biureto, e reazioni colorate specifiche a secondo la presenza o la assenza di speciali aminoacidi nella loro molecola: così ad esempio i polipeptidi, in cui è presente il triptofano, dànno positiva la reazione dell'acido gliossalico e negativa la reazione dell'acqua di bromo. La ebollizione dei polipeptidi di alto peso molecolare dà luogo a fenomeni, che ricordano la coagulazione delle proteine; d'altra parte poi i polipeptidi ad alto peso molecolare tendono a perdere la proprietà di cristallizzare e acquistano la tendenza a formare prodotti amorfi.

La dimostrazione biologica, che gli aminoacidi si trovano effettivamente legati fra loro nella molecola proteica in modo analogo a quello in cui lo sono nella molecola dei polipeptidi, è di doppia natura:

1°) l'isolamento chimico dai prodotti di idrolizzazione delle sostanze proteiche di polipeptidi, di cui precedentemente era stata compiuta la sintesi chimica artificiale (Fischer e Abderhalden) [2];

2°) l'analogia esistente tra il modo in cui i fermenti peptolitici agiscono sulla molecola dei polipeptidi e il modo in cui agiscono sulla molecola delle proteine (Fischer e Bergell) [3].

Il metodo, seguìto per la prima volta da Fischer e Bergell e da Fischer e Abderhalden [4], per studiare l'azione dei fermenti peptolitici sui polipeptidi,

[1] E. Fischer und Fourneau, *Ueber einige Derivate des Glykokolls*, Berichte der deutsche chemisch. Gesellschaft, *34*, 2868, an. 1908; E. Fischer, *Aminosaüre, Polipeptide und Proteine*, pag. 23, Springer, Berlin, 1906.

[2] E. Fischer und Abderhalden, *Bildung eines Dipeptides bei der Hydrolise des Seidenfibroins*. Berichte der deutsch. Gesellschaft, *33*, 752, an. 1906.

[3] E. Fischer und Bergell, *Ueber die Derivate einiger Dipeptide und Ihr Verhalten gegen Pankreasferment*, Berich. der deutsche chem. Gesell., *36*, 2592, an. 1903; E. Fischer und Bergell, *Spaltung einiger Dipeptide durch Pankreasferment*, Berichte der deutsch. Chem. Gesell., *37*, 2103, an. 1904.

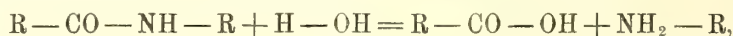
[4] E. Fischer und Abderhalden, *Ueber das Verhalten verschiedener Poliptide gegen Pankreassaft*, Zeitschr. f. Physiol. Chemie, XLVI, 52, an. 1915; E. Fischer und Abderhalden, *Ueber das Verhalten einiger Polipeptide gegen Pankreassaft*, LI, 264, an. 1907.

è un *metodo essenzialmente chimico* e ponderale consistente nell'isolamento e nella individualizzazione chimica, mediante la eterificazione, degli aminoacidi, in cui essi vengono o dovrebbero essere scissi per azione dei fermenti.

Abderhalden e Koerker [1] hanno elaborato in seguito un *metodo ottico* per lo studio dell'azione dei fermenti proteolitici sui polipeptidi, traendo profitto dal fatto osservato prima da Fischer, che molti polipeptidi sono otticamente attivi e posseggono un potere rotatorio più forte dei loro prodotti di scissione, donde la possibilità di constatare e seguire mediante determinazioni polarimetriche la scissione dei polipeptidi operata dagli enzimi.

Hans Euler [2] ha elaborato un *metodo elettrometrico* per riconoscere e studiare la scissione dei polipeptidi operata dai fermenti.

I metodi finora in uso non sono dei metodi quantitativi, in senso assoluto ed io mi sono proposto di colmare tale lacuna. Poichè gli aminoacidi sono legati fra loro nella molecola dei polipeptidi in catena amidica, e poichè la loro scomposizione fermentativa dà luogo essenzialmente alla rigenerazione, da una parte, dei gruppi carbossilici e, dall'altra, dei gruppi amidici degli aminoacidi, secondo lo schema generale seguente:

$$R-CO-NH-R+H-OH=R-CO-OH+NH_2-R,$$

è evidente che, determinando quantitativamente i gruppi aminici liberi dei polipeptidi prima e dopo l'azione dei fermenti peptolitici, possiamo riconoscere l'azione da questi esercitata sulla loro molecola. Il metodo che si può adoperare per la determinazione volumetrica dei gruppi aminici liberi è il metodo della titolazione al formolo di Sörensen. Lo stesso Sörensen [3], descrivendo il suo metodo, scrisse: « Nello studio della scomposizione di polipeptidi o di miscele di polipeptidi, per cui manca finora un metodo generalmente pratico, la titolazione al formolo potrà essere di grande utilità ». Egli stesso, pur avendo adoperato il metodo della titolazione al formolo per lo studio della scissione di miscele di polipeptidi a costituzione chimica poco definita, non lo applicò per lo studio della scomposizione fermentativa dei polipeptidi allo stato chimicamente puro. Ricerche invece sulla determinazione quantitativa dei gruppi aminici liberi dei polipeptidi non mancano: Abderhalden e van Slyke [4], Abderhalden e Haslian [5] hanno studiato il comportamento di tutta una serie di polipeptidi rispetto al metodo di van Slyke della de-

(1) Abderhalden und Koerker, *Die Verwendung optisch activer Polipeptide zur Prüfung der Wirksamkeit proteolitischer Fermente.* Zeitschr. f. Physiol. Chemie, LI, 294, an. 1905.

(2) Hans Euler, *Fermentative Spaltung von Dipeptiden.* Zeitschr. f. physiol. Chemie LI, an. 1905.

(3) Sörensen, *Enzimstudien.* Biochemische Zeitsckrift, *7*, 33, an. 1907.

(4) Abderhalden und van Slyke, *Die Bestimmung des Aminostickstoffs in einigen Polypeptiden.* Zeitschr. f. physiol. Chemie, *74*.

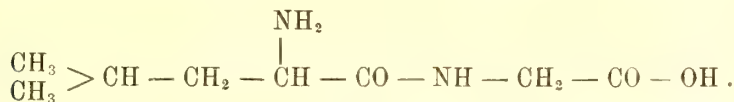
(5) Abderhalden und Haslian, *Ueber die Verwendüng der Estermethode züm Nachweis von Aminosaüren neben Polypeptide.* Zeitschr. f. physiol. Chemie, *77*.

terminazione dei gruppi aminici liberi: Sörensen studiò il comportamento rispetto alla titolazione al formolo della anidride della glicocolla e della glicilglicina, e trovò, che l'anidride della glicocolla si comporta come un corpo neutrale e la glicilglicina come un acido monobasico.

Teoricamente noi dobbiamo ammettere, che il comportamento di un polipeptide rispetto al formolo resterà invariato nel caso in cui il polipeptide non viene scisso dal fermento proteolitico e invece cambierà nel caso in cui viene scisso dal fermento negli aminoacidi suoi componenti, data la rigenerazione dei gruppi aminici e carbossilici liberi di questi ultimi.

La leucilglicina è il dipeptide, che io ho scelto per le presenti esperienze.

La d-l-leucilglicina risulta costituita dalla unione in catena amidica di una molecola di leucina e di una molecola di glicocolla, secondo la seguente formola di costituzione

$$\begin{array}{l} CH_3 \\ CH_3 \end{array} > CH - CH_2 - \underset{\displaystyle CH}{\overset{\displaystyle NH_2}{|}} - CO - NH - CH_2 - CO - OH\,.$$

Ho preparato la leucilglicina racemica, secondo il procedimento usato da Emil Fischer e Brunner [1], cioè per trasformazione della glicocolla in bromisocapronilglicina e di questa in leucilglicina. La molecola della leucilglicina contiene un gruppo carbossilico e un gruppo aminico: quindi essa presenterà nella titolazione al formolo il comportamento di un acido monobasico. Per ricercare se tale comportamento rimanga inalterato, quando il dipeptide non viene scomposto dai fermenti peptolitici, e come esso varia, quando il dipeptide viene idrolizzato per azione fermentativa, ho sottoposto la leucilglicina all'azione del succo pancreatico e all'azione dell'estratto acquoso di fegato.

Azione del succo pancreatico sulla d-l-leucilglicina. — Per studiare il comportamento della leucilglicina verso il succo pancreatico, 10 cc. di soluzione 1/40 *n.* di leucilglicina furono mescolati a cc. 0,5 di succo pancretico ricavato da un cane portante una fistola permanente pancreatica alla Pawlow, e dopo aggiunta di toluolo furono posti in termostato a 37 gradi per la durata di 25 giorni. Le cifre ottenute nella titolazione alla formaldeide di 10 cc. di soluzione di leucilglicina, di soluzione di leucilglicina più succo pancreatico, e di succo pancreatico più acqua, sono riportati nella seguente tabella:

[1] Fischer und Brunner, *Sintese von Polipeptide,* XI, Liebigs'annalen der Chemie, *340,* 123, an. 1905; Fischer und Abderhalden, loc. cit., Zeitschr. f. physiol. Chemie, *46,* an. 1905.

1 marzo 1915 27 » »	(in termostato a 37°)	Quantità adoperata di NaOH 1/5 *n* in ccm.	in °/₀ del calcolato
d-l-Leucilglicina	1/40 n. cc. 10	1,25	100
d-l-Leucilglicina Succo pancreatico	1/40 n. » 10 » 0.5	1,30	
Succo pancreatico Acqua distillata	» 0,5 » 10	0,10	
Come leucina + glicocolla	calcolato	2,50	
	trovato	1,20	
		in mgr.	in °/₀
d-l-leucilglicina	aggiunta	42	100
	scomposta	0	0

Risulta, da questa esperienza, che 10 cc. di leucilglicina 1/40 *n*. richiedevano, sia prima sia dopo un'azione della durata di 25 giorni, dei fermenti del succo pancreatico, la stessa quantità di cc. di NaOH n/5: *il risultato di questa esperienza dimostra, che la leucilglicina, non viene idrolizzata dal succo pancreatico.*

Un analogo risultato ebbero Fischer e Brunner (loc. cit.) servendosi del metodo chimico: essi sciolsero un grammo di leucilglicina in 35 cc. di acqua e 3 cc. di succo pancreatico, e lo lasciarono a digerire in termostato per 14 giorni: trovarono, che il liquido non era diventato otticamente attivo, e riottennero il dipeptide aggiunto: nella soluzione madre non poterono riscontrare col metodo della eterificazione la presenza di glicocolla e di leucinia; in una seconda e in una terza ricerca il risultato fu eguale. Gli autori ne dedussero che il succo pancreatico non è capace di idrolizzare la leucilglicina racemica.

Azione dell' estratto acquoso di fegato sulla d-l-leucilglicina. — L'estratto acquoso di fegato di cane adoperato fu preparato pestando al mortaio con polvere di quarzo frammenti di fegato di cane da poco ucciso, diluendo con acqua e filtrando: 5 cc. dell'estratto acquoso così preparato furono mescolati con 10 cc. di una soluzione di leucilglicina racemica 1/20 *n*. e messi a digerire in termostato a 37 gradi per la durata di 7 giorni.

Le cifre ricavate dalla titolazione al formolo di 10 cc. di soluzione 1/20 *n*. di leucilglicina dalla titolazione al formolo di estratto acquoso di fegato più la soluzione del dipeptide e dell'estratto acquoso più acqua sono riportate nella seguente tabella:

10 febbraio 1915 (in termostato 1 » » a 17°)	Quantità adoperata di NaOHn/5 in ccm.	in °/₀ del calcolato
d-l-Leucilglicina 1/20 *n*. cc. 10	2,30	92
d-l-Leucilglicina 1/20 *n*. » 10 Estr. acq. di fegato di cane » 5	4,30	
Acqua » 10 Estr. acq. di fegato di cane » 5	0,60	
Come leucina + glicocolla — calcolato	5,00	
Come leucina + glicocolla — trovato	3,70	
	in mgr.	in °/₀
d-l-Leucilglina — aggiunta	94	100
d-l-Leucilglina — scomposta	49	52

Da questa esperienza risulta che, dopo un'azione della durata di 7 giorni dell'estratto acquoso di fegato di cane sulla leucilglicina racemica, per la titolazione al formolo erano necessarî ccm. 3,7 di idrato di sodio 1/5 *n.*; come si vede, si ebbe un aumento rispetto al numero di ccm. di idrato di sodio necessarî per titolare 10 cc. di soluzione 1/20 *n.* di leucilglicina prima dell'azione dell'estratto acquoso di fegato. Questo risultato dimostra che *una scissione della leucilglicina in leucina e glicocolla avviene per opera dei fermenti epatici*; però questa scissione non è estesa a tutta la quantità di dipeptide presente nella soluzione, poichè, teoricamente, se tutta la leucilglicina fosse stata scissa in leucina e glicocolla, sarebbero stati necessarî, per la titolazione al formolo, cc. 5 di NaOH *n*/5.

In base al calcolo dell' N aminico, risulta che dei *94 mmgr.* di *d-l*-leucilglicina aggiunta *solo 49 furono scissi per azione dell'estratto acquoso del fegato*: cioè *esattamente la metà della quantità totale di d-l-leucilglicina sottoposta all'azione dell'estratto di fegato venne scomposta in leucina e glicocolla.*

Questi risultati concordano porfettamente con quelli ottenuti dagli autori che studiarono precedentemente l'azione dei fermenti proteolitici sui polipeptidi con altri metodi di ricerca, specialmente per ciò che riguarda il modo in cui agiscono i fermenti peptolitici sui polipeptidi racemici: infatti, mentre da una parte confermano, che la leucilglicina viene scissa dall'estratto di fegato (Abderhalden e Teruchi) [1], e non dal succo pancreatico (Fischer

[1] Abderhalden und V. Terunchi, *Das Verhalten einiger Peptide gegen Organextrakte*, Zeitschr. f. physiol. Chemie, *47*, 466, 1906; Abderhalden und V. Terunchi, *Studien über die proteolitische Wirkung der Pressäfte einiger tierischen Organe sowie des Darmsaftes*, Zeitschr. f. physiol. Chemie, *49*, 1, 1906.

e Brunner, loc. cit.), *rappresentano il primo dato di indole quantitativa finora noto a favore del principio di E. Fischer, che i polipeptidi racemici vèngono scissi dai fermenti peptolitici in modo asimmetrico*, cioè che delle due forme otticamente attive, di cui risulta costituito il polipeptide racemico, ne viene idrolizzata dai fermenti peptolitici solo una metà.

Furono Fischer e Bergell (loc. cit.) che per i primi osservarono che la pancreatina, agendo sulla carbetoxilglicil-dl-leucina, mette in libertà della leucina sinistrogira; subito dopo, essi osservarono che la pancreatina, agendo sulla leucilalanina racemica, mette in libertà leucina sinistrogira e lascia intatta una parte del dipeptide. Per ciò che riguarda la leucilglicina, Abderhalden e Teruchi (loc. cit.), facendo agire estratto acquoso di fegato di vitello su 5 grammi di leucilglicina racemica, poterono isolare dai prodotti di scissione gr. 1,3 di leucina sinistrogira, e in una seconda esperienza, in cui sottoposero all'azione dell'estratto di fegato 4 grammi di leucilglicina, riottennero gr. 0,7 di leucina sinistrogira e gr. 0,5 di cloridrato di etere di glicocolla e gr. 0,7 di anidride di leucilglicina; così finora, poichè il metodo adoperato, non può essere strettamente quantitativo, *fu dimostrato solo qualitativamente* che la scomposizione fermentativa dei polipeptidi racemici decorre in modo asimmetrico. La esperienza surriferita dimostra per la prima volta quantitativamente, che della quantità *totale del dipeptide sottoposto all'azione dei fermenti peptolitici epatici*, solo la metà viene scissa nei suoi componenti.

Riserbandomi di estendere le presenti ricerche, io credo frattanto di potere venire alle seguenti conclusioni sintetiche:

1°) *Per lo studio della azione dei fermenti peptolitici sui polipeptidi, un metodo praticamente assai adatto è il metodo volumetrico della titolazione alla formaldeide dei gruppi aminici liberi dei polipeptidi e dei loro prodotti di scissione.*

2° *Questo metodo presenta rispetto al metodo chimico di E. Fischer, il vantaggio di poter adoperare per ogni esperienza quantità piccole di polipeptidi*; *rispetto al metodo ottico di Abderhalden, il vantaggio di poter esperimentare anche con polipeptidi di aminoacidi otticamente inattivi*; *rispetto al metodo elettrometrico di Euler, il vantaggio della rapidità delle determinazioni*; *rispetto a tutti questi metodi insieme, il vantaggio di potere eseguire determinazioni rigorosamente quantitative.*

3°) *Applicando il metodo volumetrico della titolazione al formolo si rileva che per azione del succo pancreatico la d-l-leucilglicina non viene scissa, mentre per azione dei fermenti peptotitici del tessuto epatico, solo metà della quantità totale di d-l-leucilglicina aggiunta viene idrolizzata*; *questo risultato rappresenta il primo dato sperimentale di natura quantitativa, finora assodato, a favore del principio dell'azione asimmetrica dei fermenti peptolitici dell'organismo sui polipeptidi racemici.*

Chimica generale. — *Influenza esercitata dai sali neutri sull'equilibrio chimico* [1]. Nota di G. Poma e di G. Albonico, presentata dal Socio G. Ciamician.

In una Nota che pubblicammo di recente su questi stessi Rendiconti [2], abbiamo iniziato lo studio dell'azione esercitata dai sali neutri sulle costanti delle due reazioni inverse di eterificazione e di idrolisi che, avvenendo simultaneamente nel medesimo sistema, conducono all'equilibrio seguente:

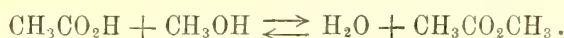
$$CH_3CO_2H + CH_3OH \rightleftarrows H_2O + CH_3CO_2CH_3 .$$

E nostro intendimento riferire nella presente comunicazione, i risultati che abbiamo ottenuti nell'ulteriore svolgimento di questa ricerca: nelle nostre nuove esperienze mantenemmo invariati il metodo d'indagine e le condizioni sperimentali che già avemmo occasione di descrivere. Così la temperatura, alla quale vennero mantenute le nostre soluzioni, era di 25° ± 0,01°, il valore iniziale del rapporto molecolare tra l'acqua e l'alcool metilico venne conservato, per le seguenti tredici prime tabelle, uguale a due, i sali neutri adoperati erano cloruri di cationi fortemente elettroaffini, ma dotati di diversa avidità per l'acqua. Le quantità di acido cloridrico, che introducemmo nel nostro sistema, per rendere cataliticamente più rapido lo svolgimento del processo, erano di 0,2 mole per litro.

Tabella 1ª.

In assenza di sale neutro.

Numero di mole contenute in 100 cm³ all'inizio $t=0$	all'equilibrio $t=\infty$	Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
$a = 0{,}1200$	$a_1 = 0{,}0329$	82′	55,70	0,0022
$b = 1{,}2620$	$b_1 = 1{,}1750$	207	44,40	0,0020
$c = 2{,}5260$	$c_1 = 2{,}6131$	300	38,90	0,0020
$d = 0$	$d_1 = 0{,}0871$	390	35.30	0,0020
		775	28,55	0,0019
$\zeta = 2{,}0930$; $\xi = 0{,}0870$		valor medio		**0.0020**
$K = \frac{k_2}{k_1} = \mathbf{0{,}170}$		$k_1 = \mathbf{0{,}00240}$ $k_2 = \mathbf{0{,}00041}$		

Tabella 2ª.

Sale neutro: $CaCl_2$ 0,5 norm. eq.

Numero di mole contenute in 100 ccm³ all'inizio $t=0$	all'equilibrio $t=\infty$	Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_3$
$a = 0{,}1200$	$a_1 = 0{,}0328$	54′	61.70	0,0026
$b = 1{,}2118$	$b_1 = 1{,}1246$	106	54,45	0,0025
$c = 2{,}4183$	$c_1 = 2{,}5055$	158	48.90	0,0025
$d = 0$	$d_1 = 0.0872$	264	40,75	0,0025
		358	36,30	0,0025
$\zeta = 2{,}0580$, $\xi = 0{,}0872$		valor medio		**0,0025**
$K = \frac{k_2}{k_1} = \mathbf{0{,}169}$		$k_1 = \mathbf{0{,}00301}$ $k_2 = \mathbf{0{,}00051}$		

Per tutto ciò che si riferisce alle nostre tabelle ed al procedimento matematico che permette di calcolare i valori delle costanti K, k_1 e k_2 rinviamo senz'altro il lettore alla nostra precedente comunicazione; vogliamo

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Parma.
[2] Rend. Acc. Lincei, anno 1915, 1° sem, pag. 747.

soltanto ricordare che con le lettere a, b, c, d intendiamo rispettivamente rappresentare l'acido acetico, l'alcool metilico, l'acqua e l'etere metilico allo stato iniziale, e con le lettere a_1, b_1, c_1, d_1 le stesse sostanze allo stato di equilibrio, dopo trascorso un tempo infinito dalla preparazione della miscela.

TABELLA 3ª.

Sale neutro: $CaCl_2$ 1 norm. eq.

Numero di mole contenute in 100 ccm³ — all'inizio $t = 0$	all'equilibrio $t = \infty$	Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
$a = 0,1200$	$a_1 = 0,0322$	55′	60,50	0,0030
$b = 1,1803$	$b_1 = 1,0925$	154	46,61	0,0030
$c = 2,3555$	$c_1 = 2,4433$	221	41,03	0,0029
$d = 0$	$d_1 = 0,0878$	341	34,40	0,0029
		438	32,16	0,0028
$\zeta = 1,9277$; $\xi = 0,0878$		valor medio		**0,0029**
$K = \frac{k_2}{k_1} = $ **0,163**		$k_1 =$ **0,00346**	$k_2 =$ **0,00056**	

TABELLA 4ª.

Sale neutro: $CaCl_2$ 1,41 norm. eq.

Numero di mole contenute in 100 ccm³ — all'inizio $t = 0$	all'equilibrio $t = \infty$	Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
$a = 0,1200$	$a_1 = 0,0317$	58′	59,90	0,0033
$b = 1,0846$	$b_1 = 0,9964$	108	51,80	0,0033
$c = 2,2526$	$c_1 = 2,2526$	185	43,20	0,0033
$d = 0$	$d_1 = 0,0883$	257	38,00	0,0033
		354	33,50	0,0033
$\zeta = 1,7541$; $\xi = 0,0883$		valor medio		**0,0033**
$K = \frac{k_2}{k_1} = $ **0,159**		$k_1 =$ **0,00392**	$k_2 =$ **0,00059**	

TABELLA 5ª.

Sale neutro: $CaCl_2$ 2 norm. eq.

all'inizio	all'equilibrio	Tempo	X	$k_1 - k_2$
$a = 0,1200$	$a_1 = 0,0312$	57′	58,10	0,0039
$b = 1,0845$	$b_1 = 0,9958$	109	49,40	0,0039
$c = 2,1650$	$c_1 = 2,2538$	188	40,60	0,0038
$d = 0$	$d_1 = 0.0888$	244	36,65	0,0038
		343	32,20	0,0037
$\zeta = 1,7354$; $\xi = 0,0888$		valor medio		**0,0038**
$K = \frac{k_2}{k_1} = $ **0,155**		$k_1 =$ **0,00461**	$k_2 =$ **0,00071**	

TABELLA 6ª.

Sale neutro: $MgCl_2$ 0,5 norm eq.

all'inizio	all'equilibrio	Tempo	X	$k_1 - k_2$
$a = 0,1200$	$a_1 = 0,0321$	45′	63,72	0,0025
$b = 1,2353$	$b_1 = 1,1474$	160	48,61	0,0024
$c = 2,4650$	$c_1 = 2,5529$	228	43,40	0,0024
$d = 0$	$d_1 = 0,0879$	347	36,58	0,0024
		444	33,30	0,0023
$\zeta = 2,0181$; $\xi = 0,0879$		valor medio		**0,00047**
$K = \frac{k_2}{k_1} = $ **0,164**		$k_1 =$ **0,00287**	$k_2 =$ **0,00047**	

TABELLA 7ª.

Sale neutro: $MgCl_2$ 1 norm. eq.

all'inizio	all'equilibrio	Tempo	X	$k_1 - k_2$
$a = 0,1200$	$a_1 = 0,0314$	42′	63,00	0,0029
$b = 1,1975$	$b_1 = 1,1089$	154	46,61	0,0029
$c = 2,3894$	$c_1 = 2,4780$	221	41.03	0,0029
$d = 0$	$d_1 = 0,0886$	341	34,40	0,0029
		438	32,16	0.0027
$\zeta = 1,9278$; $\xi = 0,0886$		valor medio		**0,0029**
$K = \frac{k_2}{k_1} = $ **0,159**		$k_1 =$ **0,00345**	$k_2 =$ **0,00055**	

TABELLA 8ª.

Sale neutro: $MgCl_2$ 1,41 norm. eq.

all'inizio	all'equilibrio	Tempo	X	$k_1 - k_2$
$a = 0,1200$	$a_1 = 0,0308$	39′	62,70	0,0035
$b = 1,1720$	$b_1 = 1.0828$	151	45,10	0,0033
$c = 2,3411$	$c_1 = 2,4303$	220	39,00	0,0033
$d = 0$	$d_1 = 0,0892$	306	34,30	0,0033
		403	31,10	0,0032
$\zeta = 1,8636$; $\xi = 0,0912$		valor medio		**0,0032**
$K = \frac{k_2}{k_1} = $ **0,154**		$k_1 =$ **0,00390**	$k_2 =$ **0,00060**	

TABELLA 9ª.

Sale neutro: $MgCl_2$ 2 norm. eq.

all'inizio	all'equilibrio	Tempo	X	$k_1 - k_2$
$a = 0,1200$	$a_1 = 0,0300$	144′	43,04	0,0041
$b = 1,1175$	$b_1 = 1,0275$	214	36,75	0,0041
$c = 2,2307$	$c_1 = 2\ 3205$	285	32,68	0,0041
$d = 0$	$d_1 = 0,0900$	382	29,65	0,0040
$\zeta = 1,7469$; $\xi = 0,0900$		valor medio		**0,0041**
$K = \frac{k_2}{k_1} = $ **0,147**		$k_1 =$ **0,00480**	$k_2 =$ **0,00070**	

TABELLA 10ª.

Sale neutro: $LiCl$ 1,41 norm.

all'inizio	all'equilibrio	Tempo	X	$k_1 - k_2$
$a = 0,1200$	$a_1 = 0,0288$	40′	62,05	0,0035
$b = 1,2243$	$b_1 = 1,1331$	78	51.70	0,0034
$c = 2,4444$	$c_1 = 2,5355$	120	48,40	0,0033
$d = 0$	$d_1 = 0,0912$	167	42,82	0,0033
		210	39,10	0,0033
$\zeta = 1,8758$; $\xi = 0,0912$		valor medio		**0,0034**
$K = \frac{k_2}{k_1} = $ **0,140**		$k_1 =$ **0,00395**	$k_2 =$ **0,00055**	

La normalità equivalente della soluzione di barite impiegata nelle esperienze che corrispondono alle prime quattordici tabelle, era 0,1913.

Dai risultati che abbiamo esposti fin qui, appare che anche i cloruri di calcio e di magnesio esercitano, sia sulla velocità di eterificazione, come su quella di idrolisi, un'azione acceleratrice, e che questa è subita, proporzionalmente, in misura assai maggiore dalla prima che non dalla seconda, in conseguenza di ciò la costante di equilibrio $K = k_2 : k_1$ diminuisce. Se confrontiamo ora i risultati avuti impiegando soluzioni contenenti, per litro, lo stesso numero di mole (non grammo equivalenti) di sale neutro, vediamo che lo spostamento dell'equilibrio cresce passando dal cloruro di litio a quello di calcio e da questo al cloruro di magnesio.

Abbiamo già visto, nella Nota precedente, che la costante di equilibrio determinata in assenza di sale neutro, ma in presenza di 0,2 mole di HCl per litro, risulta

Tabella 11ª.

HCl = 0,4 norm.

Numero di mole contenute in 100 ccm³ — all'inizio $t = 0$	Numero di mole contenute in 100 ccm³ — all'equilibrio $t = \infty$	Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
$a = 0,1200$	$a_1 = 0,0328$	24′	74,60	0,0044
$b = 1,2610$	$b_1 = 1,1740$	74	61,95	0,0043
$c = 2,5190$	$c_1 = 2,6050$	140	51,80	0,0043
$d = 0$	$d_1 = 0,0872$	273	44,30	0,0042
$\zeta = 2,0899$	$\xi = 0,0871$	valor medio		**0,0043**
$K = \frac{k_2}{k_1} = 0,1695$		$k_1 = 0,00517$	$k_2 = 0,00087$	

Tabella 12ª.

HCl 0,6 norm.

Numero di mole contenute in 100 ccm³ — all'inizio $t = 0$	Numero di mole contenute in 100 ccm³ — all'equilibrio $t = \infty$	Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
$a = 0,1200$	$a_1 = 0,0323$	42′	73,40	0,0069
$b = 1.2550$	$b_1 = 1,1673$	91	61,40	0,0068
$c = 2,5070$	$c_1 = 2.5947$	146	54,90	0,0067
$d = 0$	$d_1 = 0,0877$	205	51,35	0,0067
$\zeta = 2,0589$	$\xi = 0,0887$	valor medio		**0,0068**
$K = \frac{k_2}{k_1} = 0,1658$		$k_1 = 0.00815$	$k_2 = 0,00135$	

Tabella 13ª.

HCl = 0,8 norm.

all'inizio	all'equilibrio	Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
$a = 0,1200$	$a_1 = 0,0319$	39′	79,55	0,0098
$b = 1,2600$	$b_1 = 1,1719$	72	69,90	0,0097
$c = 2,5170$	$c_1 = 2,6051$	97	65.90	0,0096
$d = 0$	$d_1 = 0,0881$	202	59,45	0.0095
$\zeta = 2,0475$	$\xi = 0,0881$	valor medio		**0,0097**
$K = \frac{k_2}{k_1} = 0,1629$		$k_1 = 0,01158$	$k_2 = 0,00188$	

Tabella 14ª.

HCl = 1 norm.

all'inizio	all'equilibrio	Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
$a = 0,1200$	$a_1 = 0,0316$	35′	87,70	0,0129
$b = 1,2360$	$b_1 = 1,1482$	60	78,83	0,0130
$c = 2,4670$	$c_1 = 2,5550$	105	72,30	0,0128
$d = 0$	$d_1 = 0,0884$			
$\zeta = 1,9988$	$\xi = 0,0884$	valor medio		**0,0129**
$K = \frac{k_2}{k_1} = 0,1606$		$k_1 = 0.01537$	$k_2 = 0,00247$	

uguale a 0,17, numero notevolmente inferiore a quello che si può calcolare

in base alle celebri esperienze del Berthelot e del Péan de Saint-Gilles [1] e che oscilla, per acidi ed alcooli diversi, intorno a 0,25. Siccome questo fatto legittimava la ipotesi che l'acido cloridrico non esercitasse sul nostro processo una azione esclusivamente catalitica, ci è sembrato opportuno eseguire alcune delle nostre esperienze operando in guisa da far variare le concentrazioni dell'acido cloridrico, senza far variare, in modo apprezzabile, nessuno dei fattori dell'equilibrio.

I risultati ottenuti in queste esperienze sono raccolti nelle tabelle 1, 11, 12, 13 e 14; da essi appare evidente che la presenza di quantità crescenti di HCl determina sulla costante di equilibrio K variazioni nello stesso senso e del medesimo ordine di grandezza di quelle dovute ai sali neutri prima sperimentati, come è naturale invece, tale presenza fa crescere assai più rapidamente le singole costanti di eterificazione k_1 e d'idrolisi k_2: è interessante notare che ciascuna di queste due costanti cresce più rapidamente delle corrispondenti concentrazioni dell'acido cloridrico; infatti, mentre la normalità di quest'ultimo varia tra 0,2 ed uno, k_1 varia tra 0,00240 e 0,01537, e k_2 tra 0,00041 e 0,00247. Ciò evidentemente conferma le vedute di coloro che ritengono essere l'attività catalitica delle molecole indissociate degli acidi forti, più intensa di quella spiegata dallo ione idrogenico libero [2].

Allo scopo di conoscere l'influenza esercitata dalla natura chimica dell'alcool

TABELLA 15ª.

$[H_2O]:[C_2H_5OH]=2$; **in assenza di sale neutro.**

Numero di mole contenute in 100 ccm³ — all'inizio $t=0$	Numero di mole contenute in 100 ccm³ — all'equilibrio $t=\infty$	Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
$a=0,1200$	$a_1=0,0492$	48′	68,15	0,00072
$b=1,0213$	$b_1=0,9505$	94	65,65	0,00071
$c=2,0423$	$c_1=2,1131$	239	59,75	0,00065
$d=0$	$d_1=0,0708$	335	56,60	0,00064
$\zeta=2,5460$; $\xi=0,0705$		per estrapolazione. . .		**0.00062**
$K=\frac{k_2}{k_1}=$ **0,317**		$k_1=$ **0.00092** $k_2=$ **0 00030**		

TABELLA 16ª.

$[H_2O]:[C_2H_5OH]=2$; **sale neutro: LiCl 2 norm.**

Numero di mole contenute in 100 ccm³ — all'inizio $t=0$	Numero di mole contenute in 100 ccm³ — all'equilibrio $t=\infty$	Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
$a=0,1200$	$a^1=0,0364$	52′	64,70	0,0018
$b=0,9700$	$b_1=0,9336$	94	60,50	0,0018
$c=1,9720$	$c_1=2,0550$	221	51,05	0,0018
$d=0$.	$d_1=0,0836$	318	45.78	0,0017
$\zeta=1,7630$; $\xi=0,0835$		valor medio		**0,0018**
$K=\frac{k_2}{k_1}=$ **0,198**		$k_1=$ **0.00224** $k_2=$ **0,00044**		

(1) Ann. de chim. et de physique, *65* e *66* (1862) e *68* (1863).

(2) H. Goldschmidt, Zetschr. f. Elektrochem., *17*, 684 (1911); G. Bredig, Ztschr. f. Elektrochem., *18*, 535 (1912); C. S. Snethlage, Ztschr. f. Elektrochem., *18*, 539 (1912) e Ztschr. physik. chem., *85*, 211 (1913); H. S. Taylor, Ztschr. f. Elektrochem., *20*, 201 (1914); J. W. Mac Bain, Journ. chem. Soc. London, *105*, 1517 (1914).

e, sopra tutto del suo peso molecolare, sul fenomeno che c' interessa, abbiamo sostituito all'alcool metilico l'alcool etilico. Nelle tabelle 15 e 16 abbiamo appunto raccolto i dati numerici ottenuti in tali esperienze, la normalità del catalizzatore era ancora 0,2; nelle tabelle che seguono abbiamo fatto variare il rapporto molecolare iniziale tra l'acqua e l'alcool, ma abbiamo mantenuto costanti tutte le altre condizioni. A questo punto è necessario avvertire che siccome la differenza $k_1 - k_2$ nella tabella 14 e in tutte quelle che seguono e che corrispondono a misure fatte in assenza di sali neutri, diminuisce

TABELLA 17ª.

$[H_2O]:[C_2H_5OH] = 3$; **in assenza di sale neutro.**

Numero di mole contenute in 100 ccm³		Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
all'inizio $t = 0$	all'equilibrio $t = \infty$			
$a = 0{,}1200$	$a_1 = 0{,}0589$	53′	68,15	0,00076
$b = 0{,}8625$	$b_1 = 0{,}8014$	108	65,75	0,00075
$c = 2{,}5875$	$c_1 = 2{,}6486$	265	60,60	0,00066
$d = 0$	$d_1 = 0{,}0611$	359	58,15	0,00065
$\zeta = 2{,}3937$; $\xi = 0{,}0611$		per estrapolazione. . .		**0,00063**
$K = \frac{k_2}{k_1} =$ **0,292**		$k_1 =$ **0,00089**		
		$k_2 =$ **0,00026**		

TABELLA 18ª.

$[H_2O]:[C_2H_5OH] = 3$; **sale neutro: LiCl 2 norm.**

Numero di mole contenute in 100 ccm³		Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
all'inizio $t = 0$	all'equilibrio $t = \infty$			
$a = 0{,}1200$	$a_1 = 0{,}0458$	59′	65,10	0,0017
$b = 0{,}8270$	$b_1 = 0{,}7528$	108	61,40	0,0017
$c = 2{,}4800$	$c_1 = 2{,}5542$	246	53,10	0,0017
$d = 0$	$d_1 = 0{,}0742$	343	48,90	0,0016
$\zeta = 1{,}6346$; $\xi = 0{,}0742$		valor medio		**0,0017**
$K = \frac{k_2}{k_1} =$ **0,182**		$k_1 =$ **0,00208**		
		$k_2 =$ **0,00038**		

TABELLA 19ª.

$[H_2O]:[C_2H_5OH] = 4$; **in assenza di sale neutro.**

all'inizio $t = 0$	all'equilibrio $t = \infty$	Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
$a = 0{,}1200$	$a_1 = 0{,}0662$	121′	66,15	0,00073
$b = 0{,}7447$	$b_1 = 0{,}6909$	228	62,80	0,00071
$c = 2{,}9780$	$c_1 = 3{,}0318$	331	60,15	0,00068
$d = 0$	$d_1 = 0{,}0538$	452	57,40	0,00067
$\zeta = 2{,}3049$; $\xi = 0{,}0540$		per estrapolazione. . .		**0.00066**
$K = \frac{k_2}{k_1} =$ **0,280**		$k_1 =$ **0,00092**		
		$k_2 =$ **0,00026**		

TABELLA 20ª.

$[H_2O : C_2H_5OH] = 4$; **sale neutro: Li Cl 2 norm.**

all'inizio $t = 0$	all'equilibrio $t = \infty$	Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
$a = 0{,}1200$	$a_1 = 0{,}0536$	57′	66,00	0,0018
$b = 0{,}7110$	$b_1 = 0{,}6146$	132	61,25	0,0017
$c = 2{,}8430$	$c_1 = 2{,}9094$	238	55,50	0,0017
$d = 0$	$d_1 = 0{,}0664$	341	51,50	0,0017
		474	47,60	0,0017
$\zeta = 1{,}5648$; $\xi = 0{,}0664$		valor medio		**0,0017**
$K = \frac{k_2}{k_1} =$ **0,179**		$k_1 =$ **0,00207**		
		$k_2 =$ **0,00037**		

rapidamente, abbiamo calcolato il valore finale da attribuirsi ad essa per estrapolazione; a ciò siamo stati indotti dal fatto che al crescere del tempo essa sembra tendere verso un limite. Non avendo però elementi per mettere in luce la causa di tale diminuzione, così, al valore calcolato per questa via non assegnamo che un significato provvisorio. La normalità della soluzione di barite impiegata per tutte le misure che seguono alla tabella 15 era 0,1966.

Tabella 21ª.

$[H_2O : C_2H_5OH] = 5$; **in assenza di sale neutro.**

Numero di mole contenute in 100 ccm³		Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
all'inizio $t = 0$	all'equilibrio $t = \infty$			
$a = 0{,}1200$	$a_1 = 0{,}0724$	65′	68,50	0,00079
$b = 0{,}6510$	$b_1 = 0{,}6034$	115	66,70	0,00078
$c = 3{,}2560$	$c_1 = 3{,}3036$	292	62,30	0,00070
$d = 0$	$d_1 = 0{,}0476$	386	60,45	0,00068
$\zeta = 2{,}2724$; $\xi = 0{,}0476$		per estrapolazione . . .		**0,00065**
$K = \frac{k_2}{k_1} = 0{,}279$		$k_1 = 0{,}00090$ $k_2 = 0{,}00025$		

Tabella 22ª.

$[O_2H] : [C_2H_5OH] = 5$;
sale neutro: $CaCl_2$ 2 norm. eq.

Numero di mole contenute in 100 ccm³		Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
all'inizio $t = 0$	all'equilibrio $t = \infty$			
$a = 0{,}1200$	$a_1 = 0{,}0605$	71′	65,90	0,0017
$b = 0{,}6248$	$b_1 = 0{,}5653$	122	62,81	0,0017
$c = 3{,}1242$	$c_1 = 3{,}1837$	274	56,30	0,0017
$d = 0$	$d_1 = 0{,}0595$	371	53,20	0,0016
$\zeta = 1{,}5381$; $\xi = 0{,}0595$		valor medio		**0,0017**
$K = \frac{k_2}{k_1} = 0{,}181$		$k_1 = 0{,}00207$ $k_2 = 0{,}00037$		

Tabella 23ª.

$[H_2O : C_2H_5OH] = 5$; **sale neutro: Li Cl 2 norm.**

all'inizio $t = 0$	all'equilibrio $t = \infty$	Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
$a = 0{,}1200$	$a_1 = 0{,}0659$	77′	66,10	0,0018
$b = 0{,}5543$	$b_1 = 0{,}5002$	128	63,25	0,0018
$c = 2{,}7720$	$c_1 = 2{,}8261$	292	56,96	0,0018
$d = 0$	$d_1 = 0{,}0541$	387	54,20	0,0018
$\zeta = 1{,}6131$; $\xi = 0{,}0541$		valor medio		**0,0018**
$K = \frac{k_2}{k_1} = 0{,}215$		$k_1 = 0{,}00229$ $k_2 = 0{,}00049$		

Tabella 24ª.

$[O_2H] : [C_2H_5OH] = 5$;
sale neutro: $MgCl_2$ 2 norm eq.

all'inizio $t = 0$	all'equilibrio $t = \infty$	Tempo	X in ccm³	$k_1 - k_2$
$a = 0{,}1200$	$a_1 = 0{,}0639$	82′	65,50	0,0018
$b = 0{,}5698$	$b_1 = 0{,}5137$	132	62,58	0,0018
$c = 2{,}8190$	$c_1 = 2{,}9061$	309	55,60	0,0018
$d = 0$	$d_1 = 0{,}0561$	404	53,10	0,0017
$\zeta = 1{,}5236$; $\xi = 0{,}0562$		valor medio		**0,0018**
$K = \frac{k_2}{k_1} = 0{,}201$		$k_1 = 0{,}00225$ $k_2 = 0{,}00045$		

Tabella 25ª.

$[HCl] = 0.2$ norm. ; Temperatura 25° ; $[CH_3CO_2H] = 0.12$ per $t = 0$.

N.	$[H_2O]:[C_2H_5OH]$ per $t = 0$	Concentrazione molari di equilibrio $t = \infty$				Normalità del Li Cl	$K = \frac{k_2}{k_1}$
		a_1 CH_3CO_2H	b_1 C_2H_5OH	c_1 H_2O	d_1 $CH_3CO_2C_2H_5$		
1	2	0,0492	0,9505	2,1131	0,0708	0	0,317
2	2	0,0364	0,9336	2,0550	0,0836	2	**0,198**
3	3	0,0589	0,8014	2,6486	0,0611	0	0,292
4	3	0,0458	0,7528	2,5542	0,0742	2	**0.182**
5	4	0,0662	0,6909	3,0318	0,0538	0	0.280
6	4	0,0536	0,6446	2,9094	0,0664	2	**0,179**
7	5	0,0724	0,6034	3,3036	0,0476	0	0 279
8	5	0,0605	0,5653	3,1837	0,0595	2	**0 181**
9	7	0,0817	0,4871	3,7163	0,0383	0	0,280
10	7	0,0703	0,4521	3,5632	0,0497	2	**0,179**
11	8	0,0848	0,4337	3,8162	0,0352	0	0,278
12	8	0,0747	0,4115	3,7003	0,0453	2	**0,183**
13	10	0,0909	0,3721	4,0410	0,0291	0	0,288
14	10	0,0815	0,3475	3,8985	0,0385	2	**0,189**

Nella tabella che segue sono raccolti i valori che la costante di equilibrio assume sia in assenza di sale neutro che in presenza di una quantità costante di LiCl, quando il rapporto molecolare iniziale tra l'acqua e l'alcool etilico vada crescendo. Gli altri fattori dell'equilibrio, come pure la concentrazione del catalizzatore, vennero mantenuti invariati.

In una prossima Nota, dopo aver esposti nuovi fatti che abbiamo già potuto accertare e che sono necessarî per chiudere la presente ricerca, trarremo, dalla discussione di tutti gli elementi dei quali saremo così venuti in possesso, la opportuna conclusione.

Fisiologia. — *Ricerche sulla secrezione spermatica. IV: Influenza del riposo sulla secrezione spermatica del cane.* Nota del dott. G. Amantea [1], presentata dal Socio Luciani.

Un argomento fondamentale di studio, all'inizio delle indagini che mi sono proposto di eseguire sulla secrezione spermatica, mi è sembrato quello del rapporto tra quest'ultimo e il riposo sessuale più o meno prolungato. Tenendo conto del numero di spermatozoi eliminato in ciascuna ejaculazione, della quantità totale di sperma raccolto e della durata del coito fittizio, secondo la tecnica da me proposta e descritta precedentemente [2], mi si presentava facile una tale serie di ricerche sul cane. Siccome poi il numero di spermatozoi eliminati rappresenta, entro certi limiti, un criterio di misura del lavoro testicolare; la quantità di liquido ejaculato un criterio di misura del lavoro prostatico soprattutto nel cane, in cui mancano vescichette seminali e glandole del Cowper, e infine la durata del coito fittizio un criterio di misura specialmente del lavoro dei centri nervosi per l'erezione e l'ejaculazione; così lo studio dell'argomento accennato mi sarebbe appunto servito a dimostrare il modo come può variare la funzione di tutto il complesso degli organi suddetti col variare del ritmo della loro attività e del loro riposo.

Qui mi limiterò solo a riassumere i fatti osservati riportando, a titolo di esempio, sotto forma di tabelle o quadri, alcuni dei protocolli, che ad essi si riferiscono. La discussione e le considerazioni che ne deriverebbero costituiranno l'oggetto di una Nota a parte, che mi propongo di far seguire alla pubblicazione di altra serie analoga di osservazioni sull'uomo.

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di fisiologia della R. Università di Roma, diretto dal prof. L. Luciani.

[2] G. Amantea, Atti della R. Acc. dei Lincei, vol. XXIII, ser. 5ª, 1° sem., fasc. V, an. 1914; ibd., vol. XXIII, ser. 5ª, 1° sem., fasc. VI, 1914; Arch. ital. de biol., tom. LXII, pag. 34, an. 1914.

Già ho avuto occasione ([1]) di mettere in rilievo il fatto, che, se si raccoglie lo sperma di un cane normale dopo un lungo e sicuro periodo di riposo sessuale, e poi si fa una seconda raccolta con un intervallo di tempo opportuno, si può in questa seconda ottenere un numero di spermatozoi di molto superiore a quello della prima; e ho fatto notare come evidentemente la prima ejaculazione deve avere esercitato in tali condizioni un'azione eccitante e trofica sulla funzione del testicolo. In altri termini dopo una spece di assopimento funzionale dell'organo per il lungo riposo sessuale, si ha una spece di risveglio funzionale, per l'impulso impresso all'attività spermatogenetica dalla prima ejaculazione. Di questo fatto che era stato in precedenza dal Lode ([2]), più che dimostrato, intuito, giacchè le sue poche osservazioni e la sua tecnica non rigorosa (come si desume anche dalle cifre troppo basse che egli riferisce, relativamente al volume dello sperma raccolto e al numero degli spermatozoi) non potevano permettere una sicura e vera dimostrazione; di questo fatto, ripeto, ho già dato chiari esempî. Qui ora credo opportuno integrarli con altri ancora in una tabella più completa (vedi Tabella I), dalla quale risulta anche come all'aumento del numero degli spermatozoi può accompagnarsi aumento, o, più spesso, diminuzione della quantità di sperma eliminato; mentre la durata del coito fittizio generalmente si prolunga alquanto. Una sufficiente esperienza mi ha tuttavia oramai insegnato, che il fenomeno da me prima ritenuto costante, tale non si può affermare in modo assoluto; non si può essere sempre sicuri di sorprendere il testicolo in quel grado di assopimento funzionale, quale può avvenire solo dopo un periodo sufficientemente lungo di riposo sessuale completo, e quale è necessario per osservare netto il fenomeno dell'accennato risveglio funzionale consecutivo.

Se invece di tener conto, come sopra, solo delle due prime raccolte di sperma, si considerano *più ejaculazioni successive*, provocate in uno stesso cane mantenuto in condizioni presso a poco uniformi, e distanziate l'una dall'altra da intervalli di riposo variabili, i risultati variano soprattutto a seconda dell'animale, e a seconda del restauro più o meno completo, che si concede agli organi funzionanti tra le varie ejaculazioni.

([1]) G. Amantea, loc. cit.

([2]) Lode, Pflüger's Archif. Bd. L., pag. 278, an. 1891.

TABELLA I.

Cane	Data della ricerca	Durata del coito fittizio in minuti primi	Quantità dello sperma in cc.	Numero degli spermatozoi
1	15 novembre 1913 - ore 13,45	13	4,4	208.080.000
»	21 » » » 11,45	14	5,3	572 400 000
	(dopo *sei* giorni)			
2	18 novembre 1913 - ore 16,30	8	7,7	93 170.000
»	20 » » » 16,30	22	13	825.500.000
	(dopo *due* giorni)			
3	10 novembre 1913 - ore 11	9	3	444.00.000
»	22 » » » 10	10	4,3	189.200.000
	(dopo *dodici* giorni)			
4	3 gennaio 1914 - ore 16,10	11	6,3	211.680.000
»	15 » » » 12,10	12	4,3	450.210.000
	(dopo *dodici* giorni)			
5	18 gennaio 1914 - ore 12	11	5	110.000.000
»	21 » » » 12,15	19	5,8	263.320 000
	(dopo *tre* giorni)			
6	28 febbraio 1914 - ore 18	16	16	164.800.000
»	4 marzo » » 16.30	18	12,9	260.580.000
	(dopo *quattro* giorni)			
7	23 maggio 1914 - ore 9.30	7	1,8	190.800.000
»	25 » » » 12	7	1,2	199.200 000
	(dopo *due* giorni)			
8	29 maggio 1914 - ore 10,20	18	6,4	217.600.000
»	3 giugno » » 15	17	6,1	252.060.000
	(dopo *cinque* giorni)			
9	9 novembre 1914 - ore 18	19	12,4	23.560.000
»	14 » » » 12,15	25	9,8	49.294.000
	(dopo *cinque* giorni)			
10	16 gennaio 1915 - ore 14	7	1,7	94.690.000
»	23 » » » 19	7	1,7	356.320.000
	(dopo *sette* giorni)			
11	6 febbraio 1915 - ore 11,45	7	11,1	385.280.000
»	17 » » » 10	7	8,8	1.210.920.000
	(dopo *undici* giorni)			
12	23 febbraio 1915 - ore 12,30	14	7	26.950.000
»	26 » » » 13	17	6,9	112.470.000
	(dopo *tre* giorni)			

Esempî del modo come può aumentare il numero degli spermatozoi, quando si eseguono due raccolte successive di sperma, partendo da un riposo sessuale prolungato, e intercalando tra la prima e la seconda un intervallo da due a dodici giorni.

In qualsiasi esperienza si voglia istituire sulla secrezione spermatica del cane, è necessario tener conto anzitutto dell'eventuale influenza del *fattore individuale*: una stessa esperienza non decorre perfettamente nella stessa maniera su animali diversi; e ciò per un complesso di motivi che non è possibile considerare in modo esatto, e che, dovuti in parte all'età, in parte alle precedenti e attuali condizioni di vita, in parte a variabili rapporti o correlazioni nervose e umorali, ecc., si sommano in quello che con espressione unica si può indicare come fattore individuale.

Fissata dunque l'importanza di quest'ultimo, ecco in breve ciò che è possibile in generale osservare, quando si eseguano, come ho detto, su uno stesso animale più raccolte successive di sperma a varî intervalli.

Quando lo sperma si raccoglie *parecchie volte successivamente in una stessa giornata a intervalli regolari*, il numero di spermatozoi eliminati si vede degradare, in maniera più o meno rapida a seconda dell'animale, fino ad arrivarsi anche a una perfetta *azoospermia*; parallelamente, ma non nella stessa misura, si vede pure diminuire il volume del liquido ejaculato (talora si può persino giungere all'*aspermatismo*), e accorciarsi la durata del coito fittizio, il quale l'animale compie sempre meno attivamente. In altri termini si ha un progressivo esaurimento delle attività sessuali, centrali e periferiche. Quando poi in una stessa giornata si fanno più raccolte a *intervalli irregolari*, allora, pur avendosi anche qui un esaurimento progressivo, tuttavia si vede che esso non precipita rapidamente verso il massimo grado, ma si stabilisce attraversando talora qualche pausa o ripresa, in coincidenza con i periodi, in cui si concede un più lungo restauro. La Tabella II fornisce appunto un esempio del modo come può decorrere la secrezione spermatica in un cane, in cui si facciano più raccolte successive nella stessa giornata.

TABELLA II.

Data della ricerca	Durata del coito fittizio in minuti primi	Quantità dello sperma in cc.	Numero degli spermatozoi
23 maggio 1914 - ore 9,30	7	1,8	190.800.000
25 » » 12	7	1,2	199.200.000
» » » 13	4	0,4	86.400 000
» » » » 14	2	Una goccia	Scarsi da non potersi contare
26 » » » 11	7	1	104.000.000
» » » » 12,30	3	0,2	36 800 000
» » » » 15	2 ½	0,2	49.800.000
» » » » 16,30	2	0,2	10.720.000
27 » » » 9,30	6	0,6	88.000.000
» » » » 13,30	3	0,2	8.320.000
» » » » 15	2	0,1	Assenti

Esempio del modo come può variare la secrezione spermatica, qualora si provochino più ejaculazioni successive in uno stesso cane e nella stessa giornata.

Provocando *ejaculazioni quotidiane*, oppure *a giorni alterni*, di regola il numero di spermatozoi, dopo una diminuzione iniziale più o meno marcata, presenta oscillazioni più o meno ampie intorno ad una cifra media sempre inferiore a quella iniziale, ossia a quella media delle due o tre prime raccolte; un comportamento analogo può presentare anche la quantità di liquido ejaculato, mentre la durata del coito fittizio presenta in genere una costanza relativamente maggiore. L'animale inoltre compie il coito fittizio sempre meno attivamente. Qualche volta si può arrivare a un vero esaurimento.

Dopo una serie di raccolte quotidiane o a giorni alterni, facendo variare il riposo nel senso di prolungarlo, si può osservare un aumento nell'eliminazione di spermatozoi, che oscilla allora intorno ad una cifra media più alta della precedente. Le Tabelle III e V dànno un esempio rispettivamente del decorso della secrezione spermatica per raccolte quotidiane o per raccolte a giorni alterni. Eccezionalmente però può osservarsi anche per cinque o sei raccolte successive costanza, ovvero addirittura aumento della quantità di sperma, come risulta dal caso riferito nella Tabella IV.

Se le raccolte quotidiane o più specialmente quelle a giorni alternati, si iniziano partendo da un periodo di riposo sessuale sufficientemente lungo dell'animale, si può anche osservare un aumento iniziale più o meno rilevante nell'eliminazione degli spermatozoi, al quale poi succede diminuzione con oscillazione delle cifre successive intorno a una cifra media variabile sopratutto col variare dell'animale e del restauro (di uno, rispettivamente di due giorni).

TABELLA III.

Data della ricerca	Durata del coito fittizio in minuti primi	Quantità dello sperma in cc.	Numero degli spermatozoi
4 dicembre 1914 - ore 15	18	11,6	135 720.000
5 » » » 15	18	10	128 000.000
6 » » » 16	15	9,4	52.640.000
7 » » » 13	19	10,5	66.150.000
8 » » » 17,30	16	10,8	55.080.000
9 » » » 16	18	10,5	84.000.000
10 » » » 18,30	17	12,1	59 290.000
11 » » » 16	17	10,1	29.290.000
12 » » » 13,45	17	8,1	15.390 000
13 » » » 18	20	8,4	51.240.000
14 » » » 12	20	6,5	39 000.000
15 » » » 18	16	5,8	5.800.000
16 » » » 18,30	17	9,7	21.340.000
17 » » » 16,15	18	10,4	6.240 000
18 » » » 16	20	8,3	83.830.000

Esempio del modo come può decorrere la secrezione spermatica qualora si esegua su uno stesso cane una raccolta di sperma quotidianamente.

TABELLA IV.

15 febbraio 1915 - ore 15,30	9	4,3	660.480.000
16 » » » 17,45	8	4,3	650.740.000
17 » » » 15	7	4,4	454.080.000
18 » » » 20.15	8	6	690.000.000
19 » » » 18.45	8	4.9	309.680.000
20 » » » 17,50	9	4,6	338.560.000

Altro esempio di ejaculazione quotidiana dello sperma in uno stesso cane.

TABELLA V.

15 gennaio 1914 - ore 12,10	12	4,3	450.210.000
17 » » » 12,30	12	4,1	126.280.000
19 » » » 12,30	11	3,2	208.320.000
21 » » » 12	13	3,2	102.080.000
23 » » » 12,15	11	3.3	147.180.000
25 » » » 13	12	2,6	125.840.000
27 » » » 14,30	10	2,6	124 580.000
29 » » » 12,30	14	2,7	155.340.000
31 » » » 15,30	13	1,7	52.870.000
2 febbraio » » 15,30	14	2,1	189.840 000
4 » » » 13	9	2	133.200.000
6 » » » 12	11	1.9	40.660.000
8 » » » 13	9	1.8	288.000 000
10 » » » 13	12	2.7	132.030.000
12 » » » 13	5	0,7	52.500.000

Si continua intercalando due giorni di riposo:

15 febbraio 1914 - ore 12,30	8	1,7	253.640.000
18 » » » 13,15	12	2	237.400.000
21 » » » 12,15	8	2,6	170.040.000
24 » » » 13,10	9	2,4	279.840 000
27 » » » 15	9	2,4	178.800.000
2 marzo » » 13	9	3	212.100.000

Esempio di raccolta dello sperma a giorni alterni, e poi con intervalli di tre giorni, su uno stesso cane.

Se si intercala fra l'una raccolta e l'altra un *intervallo di tre giorni* (ved. Tabella VI) si può assistere a un aumento progressivo del numero totale degli spermatozoi eliminati in ciascuna ejaculazione, fino a un limite variabile da cane a cane e che può essere anche il limite massimo raggiungibile, intorno al quale poi oscillano le cifre successive; la quantità di sperma e la durata del coito fittizio si comportano presso a poco come nei casi precedenti (raccolta quotidiana e a giorni alterni).

Un risultato analogo a questo si ottiene di solito *intercalando un riposo di 4, di 5 e di 6 giorni.*

Con *intervalli di sette a dieci giorni* ho potuto osservare in generale spiccata tendenza a una minore variabilità sia della quantità di liquido eliminato, sia della durata del coito fittizio, mentre per il numero di spermatozoi si può osservare ancora l'aumento progressivo come sopra.

Raccolte eseguite con *intervalli superiori ai 10 giorni* fanno rilevare non solo una relativa costanza nella quantità di sperma e nella durata del coito fittizio, ma anche una variabilità sempre minore nell'eliminazione degli spermatozoi.

Tabella VI.

Data della ricerca	Durata del coito fittizio in minuti primi	Quantità dello sperma in cc.	Numero degli spermatozoi
18 gennaio 1914 - ore 12	11	5	110.000.000
21 » » » 12,50	19	5,8	265 320.000
24 » » » 13	16	5,2	432.640.000
27 » » » 15	15	4,1	354.240.000
30 « » » 13,50	15	4,6	361.560.000
2 febbraio » » 15	20	2,7	122.750.000
5 » » » 11,45	13	3,4	515.240.000
8 » » » 13,30	12	3,6	486.000.000
11 » » » 13	16	2,8	211.960.000
14 » » » 13	19	3,5	807.450 000
17 » » » 13,30	16	2,5	266.500.000
20 » » » 13,45	16	1,6	345.600.000

Esempio di raccolta dello sperma con intervalli di tre giorni su uno stesso cane.

In fine si può ammettere che un *riposo sessuale di oltre 15 giorni* sia capace per solito di avviare il testicolo verso quello stato di assopimento funzionale, su cui sopra ho insistito. Sempre però qualora si sia avuta cura di tenere l'animale in esperimento lontano da ogni sorgente di eccitamenti sessuali, e possibilmente addirittura isolato.

Riassumendo si può dire quindi, che, dopo un previo riposo sessuale sufficientemente lungo, è possibile, provocando una serie di ejaculazioni successive, o mantenere l'eliminazione degli spermatozoi nel cane pressochè uni-

forme (ejaculazioni con intervalli di oltre dieci giorni), oppure modificarla, nel senso di avviarla a un rapido esaurimento (più ejaculazioni successive nella stessa giornata), o nel senso di un esaurimento graduale e assai ritardato, o di una semplice diminuzione (ejaculazioni quotidiane o a giorni alterni), ovvero nel senso di esaltarla fino ad ottenere anche il massimo di attività (ejaculazioni ogni 3-10 giorni); e ciò facendo variare una sola condizione: il periodo concesso al restauro testicolare. Nella stessa maniera può diminuire più o meno la quantità complessiva dell'ejaculato, o mantenersi pressochè costante, col corrispondente variare del restauro concesso alla prostata. In fine può anche diminuire più o meno la durata del coito fittizio, e quindi dell'erezione e dell'ejaculazione, o mantenersi pressochè costante, a seconda che si concede un riposo e un restauro più o meno lungo ai centri sessuali.

Fin qui l'esposizione dei fenomeni osservati: la discussione di essi, come ho detto, mi propongo di farla in una prossima Nota, dopo avere esposto altre osservazioni eseguite sulla secrezione spermatica dell'uomo. Dirò allora, come in base al complesso dei fatti trovati possa intendersi il normale decorso della funzione del testicolo, come la capacità del testicolo al lavoro e il suo esaurimento, tenendo anche conto della funzione delle glandole accessorie (prostata soprattutto), e dell'attività dei centri nervosi.

Fisiologia. — *Sull'adattamento degli anfibi all'ambiente liquido esterno mediante la regolazione della pressione osmotica dei loro liquidi interni.* VI: *Importanza dei sacchi linfatici.* Nota di BRUNO BRUNACCI, presentata dal Socio L. LUCIANI.

Nelle esperienze riferite precedentemente ho sempre fatto notare la presenza o l'assenza della linfa nei sacchi linfatici delle rane esculente estive immerse per un periodo di tempo più o meno lungo nelle varie soluzioni Ringer o tenute in acqua dolce. Si è visto infatti che, mentre nelle rane tenute in acqua dolce corrente o in acqua distillata non si notava alcun accumulo di linfa nei sacchi linfatici; in quelle, invece, che erano state nelle soluzioni Ringer diversamente concentrate se ne poteva constatare una quantità più o meno abbondante.

Si è inoltre rilevato come tale accumulo di linfa avvenga sino dalle prime ore, si mantenga in notevole quantità durante i primi otto dieci giorni per andare poi gradatamente diminuendo sino a scomparire del tutto.

Con la diminuzione della linfa, accumulata nell'interno dei sacchi coincide, come si è visto, l'accumulo dell'orina nell'interno della vescica e l'inizio dell'eliminazione della medesima nel liquido ambiente.

Da tutte queste osservazioni risultava già evidente la importanza dei sacchi linfatici nella regolazione osmotica delle rane esculente estive.

Ho creduto perciò opportuno eseguire delle esperienze per constatare quei fenomeni che si sarebbero verificati, dopo l'apertura dei più estesi sacchi linfatici del tronco, sia nelle rane immerse in soluzione Ringer ipertonica (A), sia in quelle immerse in acqua dolce corrente, dopo essersi adattate all'ambiente salino ipertonico (B).

Relativamente al *primo ordine* di esperienze, cioè a quelle, che si riferivano allo studio dell'importanza dei sacchi linfatici per l'adattamento alle soluzioni concentrate, esse furono divise in *due serie*:

In primo luogo (I) cioè, si sono aperti i sacchi linfatici a rane, che avevano già soggiornato per alcuni giorni nel liquido ipertonico e che vi si erano quindi adattate, lasciandole poi in detto liquido.

In secondo luogo (II) sono stati aperti i sacchi linfatici a rane, che avevano prima soggiornato in acqua dolce, nel momento nel quale venivano immerse nella soluzione salina concentrata.

Tanto la prima serie di esperienze quanto la seconda sono state inoltre suddivise in *tre gruppi*; e precisamente in un *primo gruppo* (a) nel quale venivano aperti soltanto i sacchi linfatici laterali; in un secondo gruppo (b) nel quale si aprivano soltanto i sacchi cranio-dorsale e addominale: in un terzo gruppo (c), infine, nel quale venivano aperti tutti i suddetti sacchi linfatici.

La divisione del primo ordine di esperienze nelle serie su riferite, è stata fatta per vedere se l'adattamento già avvenuto alle soluzioni saline ipertoniche avesse conferito all'animale una maggiore resistenza di fronte alle soluzioni medesime allorchè fossero stati aperti ad esso i sacchi linfatici.

In tutte le esperienze l'apertura di questi ultimi fu poi, come si disse, parziale o totale, per constatare quali tra essi avessero avuto maggiore importanza tanto più in quanto si era sempre osservato come l'accumulo di linfa avesse luogo sopra tutto in quelli laterali. Tuttavia si comprende come ai risultati sperimentali non si dovesse assegnare sotto questo riguardo un valore assoluto, date le comunicazioni esistenti tra il sacco cranio-dorsale e quelli laterali e tra questi ultimi e quello addominale, attraverso i rispettivi *ostia septi dorsalis et abdominalis,* e considerate anche le comunicazioni esistenti tra i varî sacchi linfatici.

L'apertura dei sacchi linfatici era fatta per mezzo di un paio di forbici a punte sottili con le quali si praticava una piccola asola nelle corrispettive regioni della cute.

I risultati sperimentali sono stati i seguenti:

TABELLA I.

A. I) *Rane esculente estive adattate all'ambiente ipertonico aperti i sacchi linfatici e rimesse nell'ambiente ipertonico.*

Numero e data	Numero Rane	Sacchi linfatici laterali	Sacchi linfatici craniodorsale e addominale	Durata in vita	*Osservazioni*
1 Agosto 1911	5	aperti	—	quattro giorni	Soluzione Ringer contenente il 10 ‰ di NaCl + gli altri sali in proporzione. Temp. ambiente 12°-13° C.
" "	5	—	aperti	quattordici giorni	
" "	5	aperti	aperti	quattro giorni	
" "	15	—	—	—	*Dopo 336 ore tutte vive.*
2 Settem. "	7	aperti	—	tre giorni	
" "	7	—	aperti	sette giorni	
" "	7	aperti	aperti	tre giorni	
" "	21	—	—	—	Dopo 7 giorni tutte vive.

A. II) *Rane esculente estive normali messe in ambiente ipertonico subito dopo avere aperti i sacchi linfatici.*

Numero e data	Numero Rane	Sacchi linfatici laterali	Sacchi linfatici craniodorsale e addominale	Durata in vita	Osservazioni
1 Agosto 1911	5	aperti	—	due giorni	Soluzione Ringer contenente il 10 ‰ di NaCl + gli altri sali in proporzione. Temp. ambiente 12°-13° C.
" "	5	—	aperti	tre giorni	
" "	5	aperti	aperti	due giorni	
" "	15	—	—	—	Dopo 3 giorni tutte vive.
2 Settem. "	7	aperti	—	tre giorni	
" "	7	—	aperti	quattro giorni	
" "	7	aperti	aperti	tre giorni	
" "	21	—	—	—	Dopo 4 giorni tutte vive.

TABELLA II.

B. *Rane esculente estive adattate all'ambiente ipertonico (sacchi linfatici pieni di linfa): apertura dei sacchi e immersione in acqua dolce corrente.*

Numero e data	Numero Rane	Sacchi linfatici laterali	Sacchi linfatici craniodorsale e addominale	Durata in vita	Osservazioni
1 Agosto 1911	5	aperti	—	—	Dopo 20 giorni tutte vive.
" "	5	—	aperti	—	" " "
" "	5	aperti	aperti	—	" " "
" "	15	—	—	—	" " "
2 Settem. "	5	aperti	—	—	Dopo 15 giorni tutte vive.
" "	5	—	aperti	—	" " "
" "	5	aperti	aperti	—	" " "
" "	15	—	—	—	" " "

Tanto nelle rane morte in seguito all'apertura degli uni o degli altri sacchi linfatici, quanto in quelle che ancora resistevano in vita, si nota-

vano emorragie cutanee così diffuse che la pelle in alcuni punti ne era divenuta rossa, soprattutto quella delimitante all'esterno i sacchi linfatici laterali.

All'autopsia si osservavano sempre oltre alle emorragie cutanee, emorragie diffuse anche nei muscoli; nella muccosa della cavità orale, in quelle dello stomaco e dell'intestino; e più o meno accentuate anche nel rene e negli altri organi interni. Il cuore poi si trovava sempre arrestato in diastole.

Dai risultati ottenuti si può dunque concludere che l'integrità di tutti i sacchi linfatici esaminati è necessaria perchè le rane immerse in soluzioni saline ipertoniche si mantengano in vita. Si è constatato pertanto che quelli laterali sono più importanti di quelli cranio-dorsale e addominale; infatti le rane alle quali erano stati aperti i primi vivevano meno di quelle alle quali si erano aperti i secondi. Ciò coincideva col fenomeno già notato che durante l'adattamento sono precisamente i sacchi linfatici laterali quelli, che più degli altri, si riempiono di linfa.

La loro importanza si rende più manifesta negli animali che dall'ambiente normale passano all'ipertonico anzichè in quelli già adattati a quest'ultimo ambiente.

Per quanto riguarda le rane, che dall'ambiente salino venivano immerse nell'acqua dolce si è osservato che l'apertura dei sacchi linfatici non recava alcun danno, almeno nei limiti di durata delle osservazioni (20 giorni).

Volendo ricercare le ragioni per le quali i sacchi linfatici laterali si mostrino più importanti degli altri, devesi in primo luogo escludere che ciò sia in rapporto con una maggiore superficie sottocutanea assorbente, poichè i due sacchi linfatici laterali sono certo meno estesi del cranio-dorsale e dell'addominale uniti insieme. La vicinanza di spazi linfatici più importanti (spatium inquinale?), o una maggiore vascolarizzazione (arteria e vena cutanea magna), o forse anche un'attività secretoria maggiore dell'endotelio dei sacchi stessi potrebbero fornirci la ragione di ciò.

Patologia. — *Sui trapianti del timo.* Nota preventiva per il dott. Francesco Fulci, presentata dal Socio E. Marchiafava.

La possibilità di ottenere, mediante trapianti, l'attecchimento e la sopravvivenza del tessuto timico, ha determinato, nel volgere di pochi anni, una serie di ricerche, le quali sono state soprattutto guidate dalla speranza di poter riuscire, con esiti fortunati, ad evitare i danni di una mancante o insufficiente funzione specifica od a studiare gli effetti di una ipertimizzazione sperimentale.

Già sin dal 1896 Abelous e Billard avevano fatto tentativi d'innesto. Essi avevano osservato che, impiantando nelle rane sotto la pelle del dorso il timo « aussitôt après l'ablation » non si otteneva già un prolungamento

della vita, ma solo una più lenta decolorazione della loro pelle, rispetto ai controlli. Inoltre Abelous e Billard affermavano che in una rana, la quale cominciava a decolorarsi, per effetto della timectomia, si può far ricomparire la colorazione primitiva, introducendo sotto la sua pelle del dorso « le thymus qu'on vient d'enlever ». Però questi autori aggiungono che « au bout de quelques jours l'animal se redécolore; une nouvelle insertion de thymus fait reparaître la couleur primitive ».

Non risulta che Abelous e Billard abbiano fatto delle ricerche istologiche; ma già da questa loro esposizione apparrebbe la transitorietà del trapianto stesso.

Parecchi anni trascorsero senza che di trapianti timici si fosse più parlato.

Solo nel 1903 il Sinnhuber riprende lo studio della questione, con una serie, molto limitata, di ricerche (2 cani soltanto), nelle quali manca anche il sussidio dell'esame istologico.

Le successive indagini di Fischl (1904), Mitniskaia (1905), Grimani (1905), Sommer e Floerken (1908), Charrin e Ostrowski (1908), Valtorta (1909), Ranzi e Tandler (1909), Hart e Nordmann (1910), Klose e Vogt (1910), Scalone (1910), Gebele (1910 e 1911), Dustin (1911), von Basch (1912), Birscher (1912), Bayer (1912), Nordmann (1914), Klose (1914) etc. hanno determinato notevole differenza di risultati e quindi di opinioni, le quali, in gran parte almeno, possono stare anche in rapporto con la relativa deficienza o la mancanza completa dei singoli esami istologici.

Spinto da queste considerazioni, ho voluto perciò anch'io occuparmi dei trapianti del timo, sia per formarmi un'idea chiara della biologia di essi, sia per avere in queste esperienze (nel caso di esito positivo di esse) quasi un mezzo di controllo alle esperienze, da me già fatte, sulla rigenerazione del timo stesso.

Gli animali da me adoperati furono sempre i conigli, del peso variabile da 1200 a 2000 gr. ed anche di più. L'esito fortunato in questi animali adulti avrebbe avuto certamente significato anche per quelli più giovani.

L'esperienze furono anzitutto distinte in quattro gruppi, a seconda che furono praticati reimpianti, auto-, omo - o eterotrapianti.

Ogni gruppo di ricerche venne suddiviso in varie serie, a seconda delle modalità dell'esperienza stessa, della durata in vita degli animali etc.

*
* *

Stabilito con le esperienze fatte nella prima serie del primo gruppo, gli effetti della disturbata nutrizione per trazione meccanica (senza interruzione dei grossi vasi) sul tessuto timico, si passò con l'esperienze della seconda serie a studiare gli effetti del reimpianto del timo nella regione

del mediastino anteriore stesso. Queste esperienze, ed in parte anche le precedenti, permisero anzitutto di rilevare la presenza di masse di cromatina, le quali erano passate dall'interno dei lobuli, in via di necrosi, negli spazi linfatici del connettivo interlobulare ed in parte anche nei vasi linfatici perivascolari, quasi cromatina fluida, che poteva, in certo modo, servirci ad indicare le vie normali di efflusso del tessuto timico stesso. Già da queste prime esperienze la possibilità della coesistenza di processi necrotici e rigenerativi del tessuto timico veniva assodata.

Nella terza serie furono ripetute, a maggior conferma, l'esperienze precedenti, che dimostrarono, in maniera indiscutibile, il possibile esito fortunato di queste indagini, anche in animali già adulti. Il meccanismo rigenerativo del timo non differiva nei suoi quattro stati fondamentali (*epiteliale*, *invertito*, *linfoide* e *normale*) da quello da me in altri lavori precedenti osservato e descritto, per cui ogni ripetizione ne sarebbe superflua. Anche in queste esperienze è stato confermato il procedere relativamente rapido del processo rigenerativo, per cui ad· es. un periodo di tempo esteso dal 18 luglio all'8 settembre 1913 è stato sufficiente, perchè tutti gli stati fondamentali descritti nella rigenerazione si succedessero sino alla ricostituzione completa dell'organo.

*
* *

Non meno fortunate riuscirono, in genere, le esperienze del 2° gruppo (auto-trapianti), le quali furono distinte in tre serie, a seconda della durata in esperimento degli animali stessi, ai quali si tentò costantemente di estirpare completamente il proprio timo, per rendere più facile l'attecchimento dell'innesto. Questo venne fatto nel connettivo lasso sottocutaneo del dorso. La rigenerazione del timo, che si verifica in questi animali, malgrado che in qualcuno di essi (ad es. N. 146 di proto collo) la timectomia fosse stata incompleta, s'inizia fondalmente con gli stessi elementi e prosegue con le stesse modalità già note. Essa sembra tuttavia svolgersi con una certa difficoltà nel tessuto lasso sottocutaneo della regione laterale del dorso. Pur non di meno. si è arrivati sovente a constatare l'organo relativamente bene sviluppato, con corpi di Hassal neoformati, sebbene la sostanza midollare fosse relativamente poco ampia. All'intorno delle trabecole epiteliali rigeneratrici dell'organo, non è raro constatare la presenza di qualche cellula gigante del tipo di quelle da corpi estranei. Piuttosto abbondante è stata la quantità di *Plasmazellen* osservate, e specialmente attorno ai vasi sanguigni; relativamente scarsa è stata quella degli elementi eosinofili. La presenza di tipiche *Degenerationszellen* è stato alquanto difficile ad osservarsi; in questi casi si notò piuttosto la presenza di caratteristiche cellule fagocitarie, cariche di lipoidi ed anche di eteri colesterinici, le quali ricordavano le così dette *Schaumzellen*, o *Pseudoxantomzellen* (Aschoff).

Le *Mutterzellen* timiche stesse avevano sovente nucleo più piccolo dell'ordinario, più scuro, nucleolo poco distinto e protoplasma più stretto, poco più intensamente colorato.

Con la rigenerazione, l'organo trapiantato sembra riacquistare la sua funzione specifica ed in parte anche i rapporti biologici con i vari altri organi a secrezione interna, come dimostra lo stato di questi in rapporto a quelli dei controlli ([1]).

Solo in qualche caso l'autoinnesto ha avuto risultato negativo (ad esempio coniglio N. 212 di protocollo).

*
* *

Esito completamente negativo ebbero le esperienze del terzo gruppo (omotrapianti), sia che gli innesti fossero stati fatti su animali già timectomizzati, e con timi provenienti da coniglio morto gia da 24 ore (1ª serie); o con timi freschissimi di animali della stessa cucciolata (serie 2ª e 3ª).

Nella 4ª serie, malgrado gl'insuccessi precedenti, volli estirpare a due animali (N. 137 e 138 di protocollo) completamente il proprio timo, ed innestai loro nel sottocutaneo della regione laterale del dorso rispettivamente parte del timo, già ridotto con le forbici in piccoli frammenti, il quale proveniva da un altro coniglio, che da sette giorni era stato trattato con iniezioni endovenose di carminio litico, per ottenerne una buona colorazione vitale. Nel caso di esito fortunato queste ricerche avrebbero avuto importanza, per la determinazione della genesi dei singoli elementi, che contribuiscono alla costituzione dei lobuli timici.

Partendo inoltre dal concetto che negli autotrapianti lo sviluppo di essi era più rigoglioso e più rapido nei reimpianti dell'organo nel mediastino che negli auto-trapianti di esso nella regione del dorso, ho tentato nella 5ª serie di esperienze di praticare omotrapianti, innestando il timo nella regione del mediastino anteriore stesso, dopo di aver operato l'animale di timectomia completa. Per potere in questi casi nettamente differenziare una eventuale proliferazione del timo innestato (omotimo) da quella di qualche frammento timico, involontariamente lasciato nella timectomia preventiva, mi sono servito in questi casi per i trapianti di timi di animali della stessa cucciolata, precedentemente colorati vitalmente con carminio.

In questi casi la presenza dei granuli del carminio nei frammenti timici trapiantati, sarebbe bastata a differenziare questi da quelli incidentalmente rimasti, e quindi rigeneratisi, nel mediastino stesso dell'animale.

Ad uno di questi animali ho inoltre innestato, sotto la pelle del dorso, parte del proprio timo, per potermene servire come di controllo rispetto all'omotimo.

([1]) Su ciò mi riserbo in seguito di discutere.

L'esame macro e microscopico ha permesso in questi casi di rilevare che l'omotrapianto cadeva costantemente in necrosi (la quale era più o meno estesa a seconda del tempo decorso dall'atto operativo) senza manifestare attivita rigenerativa alcuna; mentre l'autotrapianto invece nel caso speciale (serie 5) aveva attecchito e progredito nel suo sviluppo.

Attorno a questi omotrapianti si è, con notevole frequenza, constatato, oltre alla presenza di plamacellule, situate specialmente in vicinanza dei vasi sanguigni, la presenza di tipiche cellule giganti da corpi estranei, di volume talora anche notevole e con nuclei numerosi (20-30 ed anche più). Non si notarono mai vere e proprie *Degenerationszellen*; le cellule eosinofile furono piuttosto scarse. Dopo circa un mese la necrosi ed il riassorbimento dell'organo innestato erano quasi complete e solo poche tracce di esso residuavano.

*
* *

Malgrado gli esiti costantemente negativi, ottenuti negli omotrapianti, anche se tentati tra animali della stessa cucciolata, volli tuttavia nel 4° gruppo provare gli eterotrapianti, servendomi del timo di due cagnolini che, freschissimo, fu innestato, dopo essere stato ridotto in piccoli frammenti, nel cellulare sottocutaneo della regione lalerale destra del dorso di quattro conigli, del peso variabile dai 1200 ai 1450 gr. Questi animali. erano stati, precedentemente all' innesto, completamente timectomizzati, nella speranza di potere con ciò influire sulla migliore riuscita dell'esperimento stesso. Di questi quattro animali uno fu ucciso dopo dieci giorni, gli altri furono mantenuti in vita sino ad un massimo di 50 giorni. In tutti furono costanti i processi regressivi dell'organo innestato, nel quale mai si constatarono fenomeni rigenerativi.

Nell'animale ucciso per ultimo il tessuto timico trapiantato era quasi completamente scomparso e solo il residuo di una vivace reazione organica con cellule giganti ancora numerose, Plasmazellen abbondanti, vasi sanguigni neoformati etc. rendeva evidente il punto in cui l' innesto era stato praticato. Ritenni inutile ripetere l'esperienze, data la concordanza dei risultati ottenuti, che non ammettevano dubbi e la loro coincidenza con quelli. nel gruppo precedente, osservati e descritti.

*
* *

Io mi riserbo di parlare in seguito più estesamente di queste esperienze, specialmente dal punto di vista del loro significato biologico generale, ma intanto, volendo riassumere quanto essenzialmente risulta dalla serie delle mie indagini, si può dire che: *il reimpianto del tessuto timico nel mediastino anteriore dei conigli dà risultato positivo e la rigenerazione completa dell'organo, la quale segue alla necrosi di esso, può verificarsi anche in animali adulti ed in un periodo di tempo relativamente breve, secondo*

il meccanismo da me già indicato e percorrendo i quattro stadi fondamentali già descritti. Anche l'autotrapianto può dare risultati positivi, sebbene la rigenerazione dell'organo, nel connettivo lasso sottocutaneo della regione laterale del dorso, sembri compiersi con una certa difficoltà. Tuttavia in qualche caso può anche aversi esito negativo.

Dai numerosi risultati positivi ottenuti vengono essenzialmente confermati i fatti, già da me affermati, che cioè la comparsa delle piccole cellule rotonde del timo, è affatto indipendente da una eventuale immigrazione di elementi linfoidi dall'esterno. Essa avviene indubbiamente per successive modificazioni delle cellule epitelliali, che prime compaiono nella rigenerazione dell'organo, le cosidette Mutterzellen. La produzione dei timolinfociti si compie quindi, in situ, per una fisiologica differenziazione delle Mutterzellen stesse. La formazione del midollo e quindi dei corpi di Hassal segue alla comparsa delle piccole cellule rotonde e quindi allo stadio linfoide; essa si verifica per ulteriori modificazioni delle piccole cellule rotonde stesse.

La formazione del reticolo, che è di natura connettivale, avviene contemporaneamente, ma indipendentemente, da quella del parenchima.

Il timo rigeneratosi nel trapianto é un organo funzionante.

L'omotrapianto è seguito da risultati negativi e la rigenerazione dell'organo non avviene, anche negli animali che in precedenza erano stati completamente timectomizzati, anche se si adoperano, per l'innesto, timi freschissimi di animali della stessa cucciolata e se si fa l'innesto nella regione del mediastino anteriore stesso.

L'eterotrapianto dà anch'esso risultati negativi.

La comparsa di grossi elementi mononucleati fagocitarii, del tipo delle così dette Schaumzellen e di numerose cellule giganti da corpi estranei accompagna, quasi costantemente, il riassorbimento del tessuto timico, omogeo o eterogeneo, trapiantato.

LAVORI RICORDATI.

Abelous et Billard, Compt. rend. de la Soc. de biologie. Paris, 1896, pag. 808.

Bayor, Beiträge z. Klin. Chirurg. 1912. Bd. 82. S. 408.

Birscher, Zentralbl. f. Chirurgie, 1912, S. 138.

Bompiani, Centralbl. f. allgem. Patholog. u. pathol. Anatomie. Bd. 25, S. 929, 1914.

Dustin, Compt. rend. de l'Assoc. des anatom. 1911, pag. 10.

Fischl, Zeitsch. f. experim. Patholog-und Therapie. Bd. 1. S. 388, 1905.

Fulci, Pathologica, 1913, pag. 259, n. 108.

Fulci, Deut. med. Wochen, 1913, n. 37.

Fulci, Centralbl. f. allg. Patholog-und pathol. Anatom. 1913. Bd. 24. S. 968.

Fulci, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. Vol. 23, fasc. 9. Seduta del 3 maggio 1914.

Gebele, Beiträge f. Klin. Chirurg. Bd. 70. S 20, 1910.

Gebele, Beiträge f. Klin. Chirurg, 1911, S. 823, Bd. 76.
Grimani, Archivio di anatomia patologica e scienze affini, 1905, pag. 351
Hart und Nordmann, Berlin. Klin. Wochen. 1910, S. 815; Centralbl f. Physiolog. Bd. 14, 1910.
Klose und Vogt, Klinik und Biologie der Thymusdrüse. Tübingen, 1910.
Klose, Chirurgie der Thymusdrüse. Berlin. Verlag. Springer, 1914.
Mitniskaia, Thèse de Genève, 1905.
Nordmann, Münch. med. Wochen, 1914, S. 1312.
Ranzi und Tandler, Wien. Klin. Wochen, 1909, S. 980, n. 27.
Scalone, il Tommasi, 1908, nn. 30, 31.
Scalone, il Tommasi, 1909, nn. 22, 23, 24.
Scalone, Gazzetta internaz. di medic., chirurgia ed igiene. Napoli, 1910, nn. 5, 6.
Sinnhuber, Zeitsch. f. Klin. Mediz. Bd. 54, S 38, 1904.
Sommer und Floerchen, Physiolog. med. Gesellsch im Würzburg, 1908; Deut. med. Wochen, 1908.
Valtorta, Annali di ostetricia e ginecologia, 1909, pag. 63.

Patologia. — *Ulteriori ricerche sulla Leishmaniosi.* Nota del dott. C. Basile, presentata dal Socio B. Grassi.

Fisiologia. — *Ricerche sulla secrezione spermatica.* — VI. *Osservazioni sulla secrezione spermatica nell'uomo.* Nota di G. Amantea e T. Rinaldini, presentata dal Socio L. Luciani.

Fisiologia. — *Ricerche sulla secrezione spermatica.* — VII. *Considerazioni generali sul decorso normale della secrezione spermatica nel cane e nell'uomo.* — VIII. *Alcune osservazioni su cani castrati e su cani sottoposti a escissione parziale dei deferenti.* Note di G. Amantea, presentate dal Socio L. Luciani.

Chimica. — *Sul metabolismo degli aminoacidi nell'organismo.* — VII. *Azione del fegato sugli aminoacidi aggiunti al liquido di Ringer circolante.* Nota di U. Lombroso e C. Lucchetti, presentata dal Socio L. Luciani.

Chimica. — *Sul metabolismo degli aminoacidi nell'organismo.* — VIII. *Azione del fegato sugli aminoacidi aggiunti al sangue circolante.* Nota di U. Lombroso e C. Artom, presentata dal Socio L. Luciani.

Fisiologia. — *Ricerche sugli effetti dell'alimentazione maidica. Valore nutritivo delle farine di grano, di mais e dell'uovo nei ratti albini.* Nota VI di S. Baglioni, presentata dal Socio L. Luciani.

Le Note precedenti saranno pubblicate in un prossimo fascicolo.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Corrispondente FEDERICO MILLOSEVICH legge la seguente Commemorazione del Socio prof. GIOVANNI STRÜVER.

Quando Giovanni Strüver laureato di fresco nell'Università di Gottinga giunse a Torino nel 1864, le condizioni della mineralogia in Italia erano tutt'altro che liete. Questa scienza, che nella prima metà del secolo XIX aveva fatto fuori d'Italia grandi e brillanti progressi, era presso di noi rappresentata si può dire unicamente da due scienziati. Affrettiamoci ad aggiungere per conforto del nostro orgoglio nazionale, che questi si chiamavano Arcangelo Scacchi e Quintino Sella. Il primo lavorava da più di un ventennio ad un'opera non peritura, ma non aveva avuto, nè il tempo, nè i mezzi per creare una scuola; il secondo pur allora aveva brillato nella scienza di luce intensa, ma passeggera, perchè troppo presto rapito dalla più gravi cure della vita politica alle severe indagini scientifiche. Mancava nella giovane Italia nel campo mineralogico, come in tanti altri, una organizzazione e una scuola e, forse per ovviare a un tale inconveniente che doveva apparirgli manifesto, Quintino Sella si rivolse all'università tedesca e precisamente al suo illustre amico Sartorius von Walthershausen, perchè gli inviasse un giovane che fosse adatto a coprire l'ufficio di coadiutore del geologo B. Gastaldi nella cattedra di mineralogia e geologia del Valentino, tenuta già dal Sella. E lo scolaro prescelto dall'insigne mineralista di Gottinga per tale missione di fiducia fu appunto Giovanni Strüver, che in tal modo sotto gli auspici del Sella entrava nell'arringo scientifico italiano, dove doveva imprimere orma così profonda.

Egli nacque il 23 gennaio 1842 nella città di Braunschweig, dove compì gli studi secondari inscrivendosi a 19 anni nella Facoltà di filosofia di Gottinga. Questa Università aveva raggiunto in quel tempo il suo massimo splendore e nel periodo in cui il giovane Strüver ne frequentò i corsi ebbe la ventura di trovarvi a maestri uomini come il chimico Wöhler, il geologo Seebach, il zoologo Keferstein, il mineralista e petrografo Sartorius von Walthershausen celebre per il suo magistrale studio sull'Etna. Di Walthershausen fu assistente volontario fin dal secondo anno di Università e sotto la direzione di Keferstein pubblicò le sue prime ricerche scientifiche sopra pesci fossili, che gli servirono come argomento per la sua dissertazione di laurea da lui conseguita nell'agosto 1864. Dopo pochi mesi egli era in Italia, di dove non doveva più muoversi tranne per qualche breve ritorno in patria.

A Torino la sua attività trovò un vasto campo per molteplici applicazioni: l'insegnamento, la collaborazione col Gastaldi alla compilazione della carta geologica delle Alpi occidentali, la ricerca scientifica. La quale gli procurò in breve volger d'anni sì larga e meritata fama da farlo considerare il degno continuatore dell'opera del Sella, che lo ebbe carissimo.

Nel 1871 era già professore straordinario dell'Università di Torino e nel 1873, dovendosi istituire una cattedra autonoma di mineralogia nell'Università della nuova capitale, fu chiamato a coprirla per le disposizioni dell'articolo 69 della legge Casati. In Roma in quel Museo della Sapienza che era per lui senza famiglia il più gradito soggiorno, continuò per più di 40 anni nella sua mirabile operosità di scienziato e di maestro, compiendo le più importanti delle sue indagini scientifiche, fondando e ordinando la più completa collezione di minerali che esista in Italia, guidando i giovani nel difficile cammino degli studi, impartendo le sue lezioni a generazioni intere di giovani ingegneri, di chimici, di naturalisti.

E nel pieno esercizio di quest'opera, continuata anche nella sua felice e sana vecchiezza con ininterrotto e non stanco fervore, serenamente si spense per malattia improvvisa il 21 febbraio scorso.

Dopo alcune pubblicazioni di minore importanza il nome dello Strüver divenne celebre di un tratto fra gli studiosi di mineralogia per la monografia sulla Pirite del Piemonte e dell'Elba che, pubblicata nel 1869, rimane ancora oggidì un modello classico e difficilmente superabile fra le ricerche di mineralogia descrittiva che furono da lui predilette. Per compiere il suo studio durato più di 4 anni, fu necessario allo Strüver l'esame accurato di più di 5000 cristalli, nei quali osservò ben 47 forme semplici diverse ed un numero assai più grande di combinazioni, da lui raffigurate in una serie di tavole, che sono considerate dai tecnici quanto di più perfetto si sia prodotto in fatto di disegno cristallografico. Delle osservazioni assai acute, che sono anche esposte in detta Memoria e che riguardano l'aggruppamento delle forme in certe determinate combinazioni e la frequenza di queste, recano un interessante contributo alla soluzione di questioni di cristallografia teorica.

Questo pregio di sapere assurgere dalla pura e semplice descrizione a considerazioni concernenti problemi più elevati di indole generale o teorica, è comune del resto a tutti o a quasi tutti i lavori mineralogici dello Strüver e ne accresce l'importanza per la scienza. Sotto un tal punto di vista sono da considerarsi ben più che semplici monografie locali, quelle sui minerali del Lazio e dei Sabatini e quelle sul celebre giacimento di Val d'Ala. Anche in esse, dovunque gli si presentò l'occasione, l'insigne mineralista fece rilevare fatti attinenti a importanti questioni teoriche di cristallografia, come le anomalie dei valori angolari contro la simmetria apparente in taluni minerali e l'importanza del cosidetto abito dei cristalli, o affrontò con solida

coltura e spirito critico elevato le eleganti ed ardue questioni di genesi dei minerali in relazione alla loro paragenesi ed al loro giacimento Nè vanno taciute fra le tantissime benemerenze dello Strüver nel campo della mineralogia descrittiva la scoperta di due minerali nuovi, cioè la sellaite e la gastaldite e il ritrovamento per primo in Italia di specie rare, come la perowskite, la columbite, la brookite, l'axinite, ecc.

Il procedere delle nostre esatte nozioni scientifiche sul polimorfismo e sull'isomorfismo ha sempre più cresciuto interesse alle ricerche cristallografiche su composti artificiali inorganici e organici, le quali, più che un utile, ma modesto contributo alla conoscenza di una delle proprietà di detti composti, rappresentano un passo tendente a raggiungere una meta lontana, ma assai seducente: l'esatta definizione dei rapporti che intercedono fra costituzione chimica e forma cristallina di una sostanza. Quando poi nel 1870 il Groth colle sue ricerche cristallografiche sui derivati del benzolo fece conoscere quella serie di fenomeni cui dava il nome di morfotropia, parve che una nuova via verso questa meta si aprisse agli studiosi di cristallografia chimica, via che secondo le apparenze avrebbe dovuto menar più diritta allo scopo, dappoichè sembrava possibile di riuscire a determinare per così dire quantitativamente l'influenza che la sostituzione di un atomo o di uno speciale gruppo di atomi con altri esercita sulla forma cristallina di una molecola. Era ben naturale che in quel tempo lo Strüver fosse attratto ad occuparsi di tali ricerche così promettenti e profittasse della felice occasione di avere a collega Stanislao Cannizzaro, che giusto in quegli anni si dedicava ai suoi mirabili studi sulla santonina preparandone tanti nuovi derivati. Lo studio cristallografico di questi (1876-1878) permise allo Strüver di portare in una questione allora palpitante il contributo del suo ingegno e della sua rara sagacia scientifica, giovando a smorzare i troppo facili entusiasmi per la novella dottrina della morfotropia con la dimostrazione dell'inesistenza di rapporti morfotropici che sarebbero stati prevedibili, svelando le relazioni cristallografiche che intercedono fra i vari isomeri della santonina, e soprattutto additando il metodo rigoroso da eseguire senza soverchie illusioni, ma con serena fiducia, per giungere allo scopo desiderato. Oggi, a tanti anni di distanza, e tenuto il debito conto del solo reale perfezionamento portato in seguito al metodo di tali ricerche, che è l'introduzione degli assi topici, dei parametri cioè riferiti al volume molecolare, lo studio cristallografico dei derivati della santonina può reggere il confronto con i più recenti lavori dei moderni cristallografi chimici.

Cossa e Strüver furono i primi in Italia a coltivare seriamente e scientificamente la Petrografia: il primo con indirizzo prevalentemente chimico, il secondo applicando in modo speciale quei metodi ottici di ricerca, che andavano allora mano a mano sviluppandosi nella scienza straniera.

Non predilesse la petrografia alla quale contribuì con non molti lavori; tuttavia, anche in questo campo, con quel finissimo senso di naturalista, che era una delle sue migliori qualità, seppe indicare le giuste direttive, così da valutare la petrografia per quel che deve realmente essere, una branca cioè della geologia coltivata con metodi propri della mineralogia e quindi in possesso più dei mineralisti che dei geologi: perchè il perfezionamento sempre maggiore della tecnica ottica e la più larga applicazione della analisi chimica non sono sufficienti per le ricerche petrografiche, se queste non sieno guidate da un criterio geologico: senza di questo anzi hanno prodotto più male che bene col complicare artificiosamente la materia di per sè assai complessa. Ricordo che questa opinione il compianto maestro soleva riassumere col dire che la petrografia, come fine a sè stessa, e non in sussidio di un problema geologico, è una mineralogia inesatta, perchè fatta in cattive condizioni. Dopo il primo lavoro su rocce alpine e sulla Peridotite di Baldissero del 1871 e del 1874 egli pubblicò nel 1876 i suoi Studi petrografici sul Lazio, in cui è chiarita la genesi e la natura della lava sperone ed è fatto conoscere per la prima volta un interessantissimo tipo di roccia con hauyna; e dopo molti anni rese noti i risultati dello studio dei graniti della bassa Val Sesia con un importante lavoro di indole geologica che ce lo rivela sotto un aspetto che egli, per la sua innata gentilezza d'animo, ben rare volte volle assumere: quello del critico. Anche in questo del resto riusciva a meraviglia: con spirito e garbatezza, ma anche con una logica così stringente e così tagliente da annichilire l'avversario.

L'opera scientifica di Giovanni Strüver, che in questo breve discorso sono costretto a tratteggiare soltanto nelle sue linee principalissime, eccelle in senso assoluto per alcune sue qualità particolari, che sono: la felice scelta dell'argomento, il metodo rigoroso ed esatto, l'ordine e la chiarezza della esposizione, la quale generalmente egli sapeva ridurre nei più brevi termini possibili e ai soli fatti nuovi e scientificamente importanti. Come nella impostazione del lavoro non vi è una osservazione superflua o un esperimento mal condotto o inutile, così non vi è una parola inutile o superflua nella esposizione dei risultati. In senso relativo poi, cioè riferita agli anni in cui fu prodotta quest'opera, acquista un' importanza veramente superiore, perchè nel quarantennio dal 1860 al 1900, che fu quello dell'attività dello Strüver, i suoi lavori rappresentano l'espressione della evoluzione massima della sua scienza in quel tempo.

Lo Strüver fu mineralista completo; derivò dal Sella la pratica esattissima della cristallografia ed il gusto per le questioni teoriche, dai suoi maestri di Gottinga e specialmente dal Wöhler il pieno possesso della teoria e dei metodi di ricerca della fisica e della chimica, ed ebbe oltre a ciò il vantaggio di una straordinaria inclinazione allo studio delle scienze naturali, anche biologiche, che egli coltivò con profitto e con grande passione

fin da giovanetto; il che gli permise di mantenere alla Mineralogia l'indirizzo naturalistico che questa scienza deve avere, pur perfezionandone i metodi alla stregua delle novelle conquiste della scienza.

Per tale fortunata coincidenza di felici qualità dell'uomo in un tempo propizio era a lui destinato l'onore di fondare la prima scuola di mineralogia esatta nel nostro paese. Scuola intendo non nel senso particolare e forse un po' gretto della parola, ma nel senso più nobile e più elevato, perchè egli mostrò il giusto indirizzo della scienza, ne insegnò il vero metodo e fornì con i suoi lavori dei mirabili modelli da imitare. Sotto questo punto di vista tutti i cultori della mineralogia in Italia, anche coloro che non gli vissero più da vicino, sono suoi scolari, tutti avendo derivato dalla sua opera qualcosa della loro.

Non coltivò espressamente la mineralogia chimica forse perchè gli mancarono mezzi sperimentali adeguati: ma alla sua mente aperta a tutte le nuove correnti di idee non sfuggì l'importanza sempre crescente di questo campo, del quale lo sviluppo della chimica fisica ha allargato insperatamente gli orizzonti. E non è senza significazione il fatto che l'ultimo dei suoi lavori sia appunto di mineralogia chimica e riguardi certi fenomeni curiosissimi di reazione fra minerali per semplice contatto e a temperatura ordinaria, che potrebbero essere il punto di partenza per tutta una serie di ricerche nuove ed originalissime. Si direbbe quasi che, giunto sulla soglia della vecchiaia e stanco di una vita operosa, abbia voluto additare ai giovani il nuovo cammino da seguire.

Da parecchi anni la sua attività scientifica pareva diminuita e la sua partecipazione, del resto mai molto attiva, alla vita diremo così esteriore cessata del tutto. Non per questo si sarebbe stati autorizzati a credere che egli riposasse sui meritati allori. Era invece tutto dedito ad un'opera lunga, tenace, paziente, opera che l'ininterrotto contributo giornaliero di anni ed anni di lavoro rese addirittura colossale: la creazione dapprima, il riordinamento poi del Museo Mineralogico della Sapienza.

Il Museo specie negli ultimi tempi era l'unica sua passione, la meta dei suoi pensieri, lo scopo quasi della sua esistenza. E l'opera era riuscita degna del grande amore che l'aveva generata.

Nel 1873 lo Strüver trovò nell'Università di Roma un discreto Museo di cui facevano parte essenziale le collezioni Riccioli e Spada; quest'ultima di grandissima importanza, perchè messa insieme da un conoscitore profondo dei minerali, che per le sue estese e cospicue relazioni in ogni paese del mondo si era potuto procurare dei campioni ricchi o rari, taluni anzi di un valore eccezionale. Intorno a questo nucleo, da lui con somma cura riordinato e descritto, lo Strüver nei 40 anni della sua permanenza alla Sapienza venne raggruppando una ricchissima e sceltissima raccolta, con materiale acquistato con i fondi della dotazione ed anche, e non in piccola parte di sua borsa,

o donatogli, o inviatogli in cambio, o raccolto nelle sue escursioni estive in diverse regioni mineralogicamente importanti, escursioni che soltanto da una diecina di anni avea interrotte. I suoi intimi sapevano di non potergli fare cosa più gradita di un dono di materiale interessante al Museo, i colleghi d'Italia e dell'Estero gli inviavano o gli offrivano in cambio splendidi o rari campioni, ai negozianti di minerali era ben noto che gli oggetti di maggior interesse scientifico o più cospicui per mole e bellezza avrebbero trovato in lui un generoso acquirente, pronto anche a spender di suo, ove non bastassero le risorse del bilancio.

Il Museo di Roma può stare a confronto con i migliori dell'Estero se non per il numero, per la qualità degli esemplari, perchè un alto concetto scientifico ne ha guidato l'ordinamento, perchè vi sono rappresentate tutte le specie veramente degne di questo nome e per ogni singola specie i giacimenti più importanti. Tutto in esso è opera dello Strüver: dal catalogo, che è molto più di un elenco inventariale, e contiene particolari e osservazioni di un alto interesse scientifico, al disegno del mobilio appropriatissimo e scelto dopo innumerevoli prove e confronti, dalla distribuzione degli esemplari, all'opera stessa calligrafica delle etichette.

Tedesco di nascita, Giovanni Strüver amò di vero cuore la sua patria di adozione. Venuto in Italia cinquanta anni fa aveva avuto campo di constatare i progressi da essa compiuti in ogni campo, e sinceramente se ne compiaceva, augurandole sempre migliori destini. Alla pubblica amministrazione portò il contributo della sua esperienza e della sua sagacia collaborando come capo di gabinetto di Guido Baccelli al progetto di riforma universitaria e partecipando per circa un ventennio ai lavori del Consiglio superiore della Pubblica Istruzione. Ma modesto, come egli era, di una modestia addirittura eccezionale, preferì la vita tranquilla del Laboratorio a tutte le cariche che, pur che avesse voluto, gli sarebbero state di buon grado affidate; così delle onorificenze e degli attestati di riconoscimento del suo merito conferitogli da corpi scientifici italiani e stranieri non menava vanto, pur compiacendosene intimamente; ed una sola volta in tanti anni di relazione con lui accadde che mi mostrasse con legittimo orgoglio e con grande compiacenza uno dei contrassegni della estimazione, nella quale era tenuto dal mondo delle scienze, il diploma cioè che l' Università di Gottinga suol rilasciare dopo cinquanta anni dalla laurea ai suoi allievi resisi illustri nel campo del sapere o della attività umana. Si era nell'ottobre scorso e l'omaggio tributatogli dalla patria lontana impegnata in una tragica lotta doveva certo destare nell'animo suo una folla di sentimenti diversi, lieti e tristi insieme, che egli, così poco espansivo, anche con i suoi intimi, non poteva o non voleva manifestare, pur non riuscendo completamente a celare.

Poteva sembrare un misantropo, ma chiunque avesse avuto occasione di avvicinarlo lo trovava invece affabilissimo e di cuore generoso. Severissimo con

sè stesso nell'adempimento dei propri doveri, era invece indulgente con gli altri: diligentissimo insegnante, e le sue lezioni erano un modello di precisione e di chiarezza, era all'opposto un esaminatore fin troppo benevolo, cosicchè gli studenti che non avessero voluto trar profitto dalla sua dottrina trovavano sempre modo di profittare della sua bontà. I suoi allievi amava senza ostentazione ed aiutava nella carriera senza parzialità, perchè la moderazione e lo spirito di equità erano le note fondamentali del suo carattere franco e sincero. Così quest'uomo che avrebbe potuto raggiungere agevolmente i fastigi della carriera scientifica e trarre profitto della grande autorità di cui godeva, visse una vita operosamente modesta, facendo largamente il bene, ritraendone pochi vantaggi, pago più che di altro di intime soddisfazioni spirituali e dell'affetto formato di ammirazione e di riconoscenza di coloro, come me, ai quali aveva generosamente prodigato i tesori della sua dottrina e della sua bontà.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Millosevich presenta le pubblicazioni giunte in dono segnalando quella del Socio Bassani intitolata: *L'Ittiofauna della pietra Leccese* (*Terra d'Otranto*). Fa inoltre menzione di due fascicoli del prof. A. Favaro: *Corrispondenti di Galileo Galilei. XXXI*: *Bonaventura Cavalieri. XXXII*: *Francesco di Noailles*; di una *Commemorazione del prof. E. Fergola*, del prof. Pinto; e del volume del prof. A. D'Achiardi: *Guida al corso di Mineralogia. Mineralogia Generale.* Finalmente annuncia che per mezzo del Corrisp. Di Legge, il P. Lais, della Specola Vaticana, ha fatto dono all'Accademia di una bella serie di carte fotografiche del cielo, per la zona affidata alla Specola sopraricordata nel lavoro astronomico internazionale, del quale parla nei riguardi di detta zona.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 2 maggio 1915.

Bassani Fr. — La ittiofauna della pietra leccese. (Terra d'Otranto). Con 4 tavole. Napoli, 1915. 4°.

D'Achiardi A. — Guida al corso di mineralogia. Mineralogia generale. 2ª edizione. Pisa, 1915. 8°.

Favaro A. — Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. XXXI. Bonaventura Cavalieri. (Estr. dagli « Atti del R. Istituto Veneto di scien. lett. ed arti ». t. LXXIV). Venezia, 1915. 8°.

Favaro A. — Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. XXXII. Francesco di Noailles. (Estr. dagli « Atti e Memorie della R. Accad. di sc. lett. ed arti di Padova », vol. XXXI). Padova, 1915. 8°.

Guerrieri E. — Sulla curva di luce e sulla variazione del periodo di Y Cygni. (Estr. dalle « Memorie delle Soc. degli Spettroscopisti italiani », vol. III). Catania, 1914. 8°.

Pinto L. — Emanuele Fergola. Commemorazione. (Estr. dal « Rend. della R. Accad. delle Scienze fis. e matem. di Napoli 1915 »). Napoli, 1915. 8°.

Royal Society Club. — Foundation, objects, rules, by-Laws, List of Membres. London, 1914. 8°.

PERSONALE ACCADEMICO

PRESENTAZIONE DI LIBRI

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 maggio 1915.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Segue in terza pagina.

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 4 giugno 1915.* N. 10.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 maggio 1915.

Volume XXIV°. — Fascicolo 10°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 maggio 1915.

O. Tommasini, Socio anziano (Presidente).

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla classificazione delle curve algebriche e sul teorema d'esistenza di Riemann.* Nota II del Corrispondente Francesco Severi.

5. Punti doppî proprî ed improprî rispetto alle curve di una data famiglia. — Sia V una famiglia di curve C_p^n nello $S_r (r > 2)$. Si dice che una curva C della famiglia, ha acquistato un (nuovo) *punto doppio proprio* P, quando l'acquisto di tal punto singolare trae seco l'abbassamento di un'unità nel genere effettivo p di C; il nuovo punto doppio P dicesi invece *improprio*, quando la C, che lo ha acquistato, ha ancora il genere p.

Se la particolar curva C appartiene ad un'altra famiglia W, rispetto a questa il punto doppio acquistato da C può esser di specie diversa, che non rispetto a V. Un esempio espressivo in proposito, vien dato dalle quartiche sghembe razionali con un punto doppio, in quanto si considerino come forme limiti delle quartiche sghembe ellittiche, o delle quartiche razionali, senza punti doppî.

Rispetto alla varietà delle corde e alla sviluppabile osculatrice della curva variabile nella famiglia V, i punti proprî ed improprî si comportano in modo essenzialmente diverso.

Quando C acquista il punto doppio proprio P, la congruenza delle corde della curva variabile ha per limite la *sola* varietà delle corde della curva limite, e la sviluppabile osculatrice ha per limite la sviluppabile oscula-

trice alla curva limite, insieme al fascio di raggi individuato dalle due tangenti in P, contato doppiamente.

Mentre, allorchè C acquista il punto doppio improprio P, la varietà delle corde della curva variabile ha per limite una congruenza spezzata nella varietà delle corde della curva limite ed in una stella di raggi, di centro P, situata in un S_3, la cui posizione dipende dalla legge colla quale la curva variabile si avvicina alla curva limite. La sviluppabile osculatrice ha invece per limite la *sola* sviluppabile osculatrice della curva limite.

Quando la curva C_p variabile in V, si spezza in 2 parti C'_{p_1}, C''_{p_2}, aventi δ punti comuni, questi punti saranno proprî rispetto a V ogni volta sia $p = p_1 + p_2 + \delta - 1$. Che se $p < p_1 + p_2 + \delta - 1$, qualcuna delle intersezioni di C', C'', è un punto doppio improprio.

La condizione che s'impone alle curve di V, volendo che acquistino un nuovo punto doppio proprio in un punto non dato di S_r, è di dimensione 1; mentre l'imposizione di un punto doppio improprio, in un punto non dato, è una condizione $(r-2)$-pla, *sempre che, beninteso, le condizioni suddette sieno compatibili colla definizione della famiglia* V.

6. Il teorema fondamentale per le famiglie non speciali. — Sia, nello S_r, una famiglia V non speciale di curve C_p^n $(n \geq p + r)$. Dal fatto che alla famiglia V′ delle curve piane irriducibili d'ordine n, con $h = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$ nodi, *le quali possono considerarsi tutte come proiezioni delle* C_p^n, appartiene (n. 4) ogni curva spezzata in una curva irriducibile d'ordine $n-1$ e genere $p-1$ ed in una retta, si deduce agevolmente che V contiene curve composte mediante una C_{p-1}^{n-1} irriducibile ed una sua corda. Ma non è perciò detto nè che V contenga *ogni* curva così composta, nè quindi che le rette che entrano come componenti nelle suddette C_p^n spezzate, sieno proprio corde o non piuttosto i-secanti $(i \geq 3)$ delle relative C_{p-1}^{n-1}. Nulla di assurdo ci sarebbe in ciò, perchè in tal caso fra questi i punti d'appoggio, $i-2$ dovrebbero esser punti doppî improprî rispetto alle curve di V.

Per provare che effettivamente V contiene ogni curva spezzata in una C_{p-1}^{n-1} ed in una corda di questa, procediamo così: L'imposizione di 2 punti doppî proprî alle curve di V, equivale a 2 condizioni (al più), sicchè si avranno in V ∞^k curve siffatte, ove

$$k \geq \lambda \ (\lambda = n(r+1) - (r-3)(p-1) - 2).$$

La varietà Σ di queste curve, può essere riducibile, e può anche darsi che qualcuna delle sue *parti* sia di dimensione λ, e qualche altra di dimensione $\lambda + 1$. Comunque è certo che una, D, delle curve di V composte con una C_{p-1}^{n-1} e con una corda a di questa (la quale sia eventualmente i-secante), in quanto è appunto una C_p^n con 2 punti doppî proprî (e forse $i-2$ im-

proprî) appartiene ad una varietà irriducibile $W\infty^{\lambda}$ contenuta in Σ. Ora è facile vedere che ogni curva di W è spezzata.

Infatti le proiezioni piane della D e di una $\overline{D}$ di W ad essa infinitamente vicina, hanno lo stesso numero $h+2$ di punti doppî, sicchè anche la proiezione della $\overline{D}$, e perciò la $\overline{D}$ stessa, pel principio già ricordato di Enriques, è spezzata. Ed è poi chiaro che lo spezzamento di $\overline{D}$ non può aver luogo che in una C_{p-1}^{n-1} ed in una sua corda. Le curve di W sono dunque spezzate tutte come D, e quindi W è contenuta nella varietà W_1 delle curve composte da una qualsiasi C_{p-1}^{n-1} e da una qualsiasi corda di questa. Ma poichè anche W_1 è irriducibile e di dimensione λ, si conclude che W coincide con W_1.

Ricordiamoci ora che un qualunque $(n-p)$-latero di genere effettivo zero in S_r, è contenuto nella varietà delle curve razionali d'ordine $n-p$. Siccome ogni tal curva, insieme ad una sua corda, dà una curva appartenente alla varietà delle curve ellittiche di S_r, se ne trae che a questa varietà appartiene ogni $(n-p)$-latero di genere effettivo zero, insieme ad una sua corda; e così risalendo dal genere 1 al genere 2, ed in generale da $p-1$ a p, si arriva al teorema fondamentale:

Alla famiglia non speciale V *delle* C_p^n *di* S_r $(n \geq p+r)$, *appartiene ogni n-latero composto mediante un* $(n-p)$*-latero di genere effettivo zero, insieme a p corde generiche di questo.*

In particolare si possono prendere $n-p$ rette $a_1, a_2, \ldots, a_{n-p}$, di cui ciascuna sia appoggiata alla successiva, ma l'ultima sia sghemba colla prima, e p corde generiche dell'$(n-p)$-latero $a_1\, a_2 \ldots a_{n-p}$; oppure $n-p-1$ rette generiche $a_2, \ldots, a_{n-p}$, appoggiate ad a_1, e p corde generiche di questo $(n-p)$-latero. Si osserverà che così si ottiene *un n-latero rappresentante tipico della famiglia* V, *nel quale mai tre lati giacciono in un piano.*

Per ottenere gli n-lateri contenuti in V, si può anche imporre alle curve di V di acquistare $n+p-1$ punti doppî proprî, perchè in tal modo la sviluppabile osculatrice di C_p^n, che è d'ordine $2(n+p-1)$, viene a spezzarsi in $n+p-1$ fasci di raggi contati doppiamente, e quindi la curva riducesi ad un sistema connesso di rette. Così s'impongono $n+p-1-\varepsilon$ $(\varepsilon \geq 0)$ condizioni, per guisa che l'infinità degli n-lateri contenuti in V risulta espressa da:

$$k_{n,r} = n(r+1) - (r-3)(p-1) - (n+p-1-\varepsilon) =$$
$$= nr - (r-2)(p-1) + \varepsilon .$$

D'altronde, che $k_{n,r}$ non sia inferiore ad $nr-(r-2)(p-1)$, risulta pur da ciò che gli n-lateri di genere effettivo p in S_r, dipendono almeno da tante costanti, perchè la condizione d'incidenza di due rette è di dimensione $r-2$. Vedremo al n. 8 *che la varietà degli n-lateri contenuti in* V *è spezzata e che in essa vi sono generalmente parti di diverse dimensioni;*

ma possiamo subito provare che *tuttavia in* V *vi è sempre una famiglia completa di n-lateri, che ha la dimensione regolare* $nr - (r-2)(p-1)$.

La cosa si dimostra per induzione, a partire da un $(n-p)$-latero di genere effettivo zero, costituito da $n-p-1$ rette incidenti ad una medesima ed osservando che l'aggiunta di una corda generica ad un $(n-p+i)$-latero $(i=0, 1, \ldots, p-1)$, aumenta l'ordine ed il genere effettivo di un'unità ed il numero dei parametri di 2 unità.

7. Come una famiglia speciale si possa considerare parzialmente contenuta in una non speciale. — Abbiasi in S_r una famiglia speciale $(n < p+r)$ di C_p^n irriducibili. Dal n. 4 risulta che la generica proiezione piana C' di C_p^n, insieme a δ rette del piano, ove $n+\delta \geq p+r$, qualora si consideri come inesistente, per ogni retta aggiunta, uno dei punti ov'essa incontra C', appartiene alla famiglia delle curve piane irriducibili d'ordine $n+\delta$ e genere p. E poichè ognuna di queste curve è proiezione di qualche $C_p^{n+\delta}$ di S_r, se ne trae agevolmente che *la curva speciale* C_p^n *di* S_r *insieme a* δ *sue rette secanti, ove* $\delta \geq p+r-n$, *può considerarsi con un elemento della famiglia non speciale delle* $C_p^{n+\delta}$ *irriducibili di* S_r.

Alla stessa conclusione si perviene nel modo seguente, dal quale risulta di più che le δ secanti, da aggiungersi a C_p^n, non secano altrove la curva. Si consideri un S'_r sghembo con S_r, e pongasi un'omografia fra S_r, S'_r. La curva C_p^n viene mutata in una $C_p'^n$ di S'_r, e le congiungenti delle coppie di punti omologhi di C, C', generano una rigata F, di genere p e ordine $2n$, rispetto alle cui generatrici le C, C' sono unisecanti. Si prova, senza difficoltà, che su F le C, C' appartengono ad un medesimo fascio $|C|$, di grado 0. Se pertanto s'aggiunge a $|C|$ una serie lineare g_δ^ϱ $(\varrho > 0)$ di generatrici di F, il sistema lineare somma, di curve unisecanti, d'ordine $n+\delta$ e genere p, sarà irriducibile. Proiettando in S_r, e tenendo conto dell'osservazione con cui si chiude il n. 1, si conclude col teorema enunciato.

Un'analisi ulteriore proverebbe anzi che le δ rette secanti possono scegliersi ad arbitrio.

8. Il teorema fondamentale per le C_p^n di una famiglia qualunque. — Sia in S_r una famiglia V di C_p^n. Se $n < \frac{r}{r+1}p + r$, le curve di questa famiglia sono a moduli particolari (n. 3). Per valutare la dimensione x di V, si può ripetere il ragionamento svolto da Noether per le curve gobbe ([17]), e si trova così per x il limite inferiore (3) (n. 3).

Dunque: *Una famiglia qualunque di* C_p^n, *nello* S_r, *ha dimensione non minore di* $n(r+1)-(r-3)(p-1)$.

([17]) Noether, loc. cit., pag. 19. Trattandosi qui di trovare un limite inferiore per x, non occorre alcuna considerazione del tipo di quelle esposte al n. 3, ove si voleva pervenire ad un'uguaglianza (valida per le famiglie di curve a moduli generali).

L'eccesso e di questa dimensione, sul limite inferiore (3), lo chiameremo l'*irregolarità* di V. Per $n \geq \frac{r}{r+1} p + r$ la famiglia è di certo *regolare*.

Sia ora δ un intero per cui sia soddisfatto il teorema del num. prec.; e sia inoltre W la famiglia non speciale delle $C_p^{n+\delta}$ di S_r. Con un ragionamento analogo a quello esposto nel n. 6, si prova che le curve composte mediante una C_p^n di V, alla quale vengono aggiunte δ rette secanti generiche, costituiscono una *parte* della varietà formata dalle curve di W dotate di δ punti doppî proprî. Si perviene così alla relazione

$$x + r\delta = (n + \delta)(r + 1) - (r - 3)(p - 1) - \delta + e \quad (e \geq 0),$$

donde si trae di nuovo $x = n(r + 1) - (r - 3)(p - 1) + e$.

Imponiamo ora alle curve di V di acquistare $n + p - 1$ punti doppî proprî, cioè di spezzarsi in n rette. Si può subito osservare che *queste condizioni son compatibili colla definizione di* V. Infatti il cono $\boldsymbol{\Gamma}$ che proietta una generica C_p^n da un punto O, fuori di S_r, contiene un sistema lineare ∞^{r+1} di sezioni iperpiane, fra cui c'è la C_p^n data ed i gruppi di n generatrici staccati su $\boldsymbol{\Gamma}$ dagl'iperpiani (di S_{r+1}) uscenti dal vertice O. Proiettando tutto sullo S_r primitivo, da un generico punto P di S_{r+1}, si ha in S_r un sistema irriducibile ∞^{r+1}, di curve C_p^n, cui appartengono la curva data ed ∞^r n-lateri. Poichè questo sistema è contenuto in V (n. 1), si conclude che V contiene effettivamente curve degenerate in gruppi di n rette distinte.

Gli $n + p - 1$ punti doppî proprî imposti, equivalgono ad $n + p - 1 - \varepsilon$ $(\varepsilon \geq 0)$ condizioni, cosicchè esistono in V infiniti n-lateri dipendenti da $nr - (r - 2)(p - 1) + e + \varepsilon$ parametri. Ciascuno di questi punti n-lateri, insieme a δ sue rette secanti, fornisce un $(n + \delta)$-latero di W. Si ottiene in tal modo in W una varietà di $(n + \delta)$-lateri, di dimensione $(n + \delta) r - (r - 2)(p - 1) + e + \varepsilon$, e si prova così che *ad una famiglia non speciale* W, *la quale contenga parzialmente una famiglia irregolare di curve, appartengono due o più varietà irriducibili di n-lateri, di cui alcune di dimensione regolare e le altre di dimensione irregolare.*

Ci resterebbe da mostrare che gli n-lateri esistenti in V son privi di punti doppî improprî, cioè che il loro genere effettivo coincide col genere virtuale p. Rimandiamo al n. 9 per talune induzioni in proposito, riservandoci di completare questo punto nel lavoro più esteso. Enunceremo concludendo che:

In ogni famiglia V *di curve* C_p^n *dello* S_r, *esistono almeno* $\infty^{rn-(r-2)(p-1)}$ *n-lateri di genere p. L'irregolarità di* V *non supera la massima irregolarità d'una famiglia completa di n-lateri di genere p in* S_r.

Un'altra disuguaglianza cui soddisfa e, è la seguente, che si ottiene con semplici considerazioni di geometria sopra una curva:

L'irregolarità di V *non supera* $(r-2)\,i$, *i essendo l'indice di specialità della generica* C_p^n.

9. Sull'inversione del teorema fondamentale. — Dato in S_r un n-latero (connesso) $L \equiv a_1 a_2 \dots a_n$, di genere effettivo $p \geq 0$, è possibile costruire una famiglia di curve irriducibili C_p^n di S_r, cui appartenga L? Per rispondere a questa domanda, osserviamo anzitutto che *tutti gli n-lateri aventi lo stesso schema di connessione, formano una varietà irriducibile.*

Dicendo che due n-lateri hanno lo stesso *schema di connessione* o che sono *isomorfi*, intendiamo che si possa porre fra i loro lati una corrispondenza biunivoca tale, che a due lati incidenti dell'uno rispondano due lati incidenti dell'altro, e viceversa.

Per dimostrare la proposizione enunciata, si può profittare ad esempio del fatto che, dato un n-latero L di genere $p \geq 0$, è sempre possibile di scegliere $n-1$ vertici, i quali bastino a stabilire la connessione fra i lati di L, per guisa che, dopo ciò, L possa considerarsi come proiezione di un n-latero L_0 di genere effettivo zero, appartenente ad S_n, ed avente p corde appoggiate al centro di proiezione (n. 4). L'affermazione enunciata, si riconduce allora all'altra, pressochè evidente, che in S_n gli n-lateri isomorfi fra loro, costituiscono una sola varietà.

Premesso questo, ricordiamoci (n. 4) che, dato in S_r lo n-latero L, esiste sempre qualche curva razionale C, ad esso infinitamente vicina, la quale possiede $q \leq p$ nodi infinitamente prossimi ad altrettanti vertici di L. Ne deriva che esiste una sottofamiglia V di curve razionali con q punti doppî, alla quale appartengono tutti gli n-lateri isomorfi con L.

Proiettiamo genericamente la C sopra un piano. Poichè la proiezione C' appartiene alla famiglia delle curve piane irriducibili, d'ordine n e genere q, se ne deduce, se $n \geq q+r$, che C appartiene alla famiglia W delle C_q^n di S_r. La sottofamiglia V è pertanto contenuta in W, ed a W appartengono perciò tutti gli n-lateri isomorfi con L. Rispetto a W, $n+q-1$ nodi di L son proprî, e gli altri $p-q$ improprî.

Se poi $n < q+r$ si giunge ad una conclusione analoga, usufruendo del teorema di Riemann-Roch, per le *curve non aggiunte* [18]. Dunque:

Dato in S_r *un n-latero (connesso) di genere effettivo* $p \geq 0$, *esso definisce sempre qualche famiglia di curve irriducibili d'ordine n e genere* $q \leq p$, *prive di punti multipli. Rispetto alle curve di questa famiglia,* $p-q$ *nodi del dato n-latero sono da considerarsi come impropri. Due n-lateri isomorfi, definiscono la stessa famiglia.*

[18] Noether, *Ueber die Schnittpunktsysteme einer algebraischen Curve mit nicht-adjungirten Curven* (Math. Annalen, 15, 1879), pag. 507.

È appena necessario di avvertire che deve esistere qualche condizione complementare, affinchè un n-latero di genere effettivo p, definisca, in S_r, una famiglia di C_p^n irriducibili, senza punti multipli, e di genere uguale a p. È ben noto infatti che il genere delle C_p^n irriducibili, senza punti multipli, di S_r, non può sorpassare un certo massimo, assegnato, per r qualunque, da Castelnuovo; e che d'altra parte, come ha provato Halphen (per $r = 3$), anche al disotto di questo massimo, vi sono lacune nei valori possibili di p.

Ritengo per certo che la risposta a tale importante questione debba ottenersi mediante il teorema di Riemann-Roch per le curve spezzate ([19]); ma su ciò, come ho detto, mi propongo di ritornare. Il risultato definitivo dovrebbe esser questo:

« La condizione necessaria e sufficiente perchè un n-latero L, di genere « effettivo $p \geq 0$, definisca in S_r una famiglia di C_p^n irriducibili (senza punti « multipli), quando $n < p + r$, è che per gli h punti doppî della generica « proiezione piana L' di L, provenienti dai punti doppî apparenti di L, pas- « sino almeno $\infty^{p+r-n-1}$ curve d'ordine $n - 4$, le quali non contengano come « parte alcuna retta di L'. Per $n \geq p + r$, non si richiede alcuna condizione ».

Una volta provato questo, si potrà completare il teorema del n. prec., perchè ne deriverà la possibilità di costruire in S_r un n-latero di genere *effettivo* p, isomorfo con un n-latero M di genere virtuale p, contenuto in una data famiglia V di C_p^n, ove beninteso l'isomorfismo fra L, M, si ponga astraendo dagli eventuali punti doppî improprî di M. Si concluderà così che a V appartiene anche lo n-latero L.

Non va inoltre taciuto che *due n-lateri non isomorfi posson anche definire la stessa famiglia*. Questa circostanza si verifica pure nel caso più semplice delle curve razionali. Così, p. es., nello spazio ordinario, i quadrilateri $a_1 a_2 a_3 a_4$ collo schema di connessione (12) (23) (34) — in cui cioè a_2 appoggiasi ad a_1, a_3 ad a_2, a_4 ad a_3 — ed i quadrilateri collo schema (12) (13) (14), definiscon entrambi la famiglia delle quartiche di 2ª specie. Ciascuno dei due schemi suddetti dà luogo ad una famiglia regolare di quadrilateri, che contiene 13 costanti.

Quando i due n-lateri dipendono dallo stesso numero di parametri, un criterio sufficiente, per decidere s'essi definiscono o no famiglie distinte, è dato dalla considerazione delle superficie (o forme) del minimo ordine a cui essi appartengono.

Per es. nel caso $n = 9$, $p = 10$, le due famiglie distinte di curve gobbe, incontrate per la prima volta da Halphen, son definite da due 9-lateri dei tipi seguenti:

1) Sei lati son generatrici di una schiera rigata e gli altri 3 generatrici della schiera rigata incidente.

([19]) Noether, *Ueber die reductiblen algebraischen Curven* (Acta math., 8, 1886), pag. 161.

2) I 9 lati son le intersezioni di una superficie generale del 3° ordine, con 3 de' suoi piani tritangenti.

I 9-lateri di questi due tipi dipendono ciascuno da un numero regolare, 18, di costanti, e definiscon famiglie distinte, perchè per quelli del tipo 1) le superficie minime son quadriche, mentre per gli altri son superficie del 3° ordine.

10. Applicazioni a questioni di postulazione. — La degenerazione delle curve algebriche in sistemi di rette, si applica utilmente alle questioni di postulazione; e si posson così ottenere, in questo campo, molti risultati nuovi.

Mi limiterò ad un esempio, calcolando la postulazione offerta alle forme d'ordine l di S_r, da una C_p^n generica, con $n \geq p + r$.

Poichè, appena sia $l \geq 2$, l'ordine della $g_{nl}^{r_l}$, staccata su una C_p^n dalle forme di ordine l, è non speciale, sarà $r_l \leq nl - p$, e quindi la postulazione P_l non supererà $nl - p + 1$. D'altronde, quando C_p^n degenera in un $(n - p)$-latero di S_r, collo schema $(12)(13)\ldots(1, n-p)$, ed in p corde generiche di questo $(n-p)$-latero, si trova subito che la postulazione è esattamente $nl - p + 1$; e poichè, particolarizzando C_p^n nella propria famiglia, la postulazione non può crescere, così si conclude che $P_l = nl - p + 1$. Dunque:

L'ordine minimo delle forme di S_r che contengono una generica C_p^n, quando $n \geq p + r$, è il minimo intero λ per cui $\binom{\lambda + r}{r} + p \geq n\lambda + 2$. Le forme d'ordine $l \geq \lambda$ staccano su C_p^n una serie completa non speciale.

Naturalmente, quando C_p^n si particolarizza entro la propria famiglia, l'ordine minimo suddetto potrà abbassarsi e potrà perciò non valer più il teorema precedente. Così, ad es., per una generica quintica gobba razionale, è $\lambda = 3$; ma, come si sa, vi sono anche quintiche razionali (irriducibili) tracciate su quadriche.

11. Applicazioni alla geometria numerativa. — Dalla possibilità che una C_p^n di S_r, variando nella propria famiglia, possa degenerare in un n-latero di genere p, si deduce *la completa giustificazione dei metodi di spezzamento parziale o totale, usati da varî Autori per la determinazione di numeri inerenti alle curve algebriche, nonchè la legittimità delle applicazioni del metodo funzionale di Cayley.*

È vero che non si potrà sempre ricorrere allo spezzamento totale in rette, perchè potrà darsi che il numero che si ricerca divenga infinito, per inevitabili legami sussistenti fra i lati di un n-latero, appartenente ad una data famiglia. Così, ad es., chi voglia l'ordine della rigata delle trisecanti di una C_p^n gobba, non potrà senz'altro ricorrere alla degenerazione in rette, perchè potrebbe darsi che, nella famiglia di C_p^n, ogni n-latero dovesse avere di necessità tre o più rette in un piano. È appunto questo il caso della C_{10}^9 del tipo 2) considerato alla fine del n. 9.

Ma comunque, profittando dei teoremi dei nn. 6, 7, si potrà sempre pervenire rigorosamente al risultato, nel modo che ora indichiamo, riferendoci per brevità alla rigata delle trisecanti di una C_p^n gobba.

Se $n \geq p+3$, la C_p^n può degenerare in un n-latero L, di genere effettivo p, tale che mai più di due lati di L stanno in un piano (n. 6). L'ordine della rigata delle trisecanti si valuterà quindi subito, riferendosi alla *rigata* delle trisecanti di L. Si troverà così per quest'ordine l'espressione ben nota $\varphi(n,p)$, che non occorre qui trascrivere, bastandoci di avvertire ch'essa risulta evidentemente funzione soltanto di n,p. Dopo ciò si supponga che la C_p^n sia qualunque, anche con $n<p+3$.

Si potranno allora aggiungere ad essa δ rette secanti, per guisa da ottenere una $C_p^{n+\delta}$, appartenente alla famiglia delle curve gobbe irriducibili d'ordine $n+\delta \geq p+3$. L'ordine della rigata delle trisecanti di C_p^n, si otterrà allora togliendo da $\varphi(n+\delta, p)$, δ volte l'ordine della rigata formata dalle corde di C_p^n appoggiate ad una sua secante; $\binom{\delta}{2}$ volte l'ordine della rigata formata dalle rette appoggiate a C_p^n e a 2 delle sue δ secanti; e infine $\binom{\delta}{3}$ volte l'ordine della schiera rigata costituita dalle rette appoggiate a 3 delle δ secanti di C_p^n; i quali ordini sono evidentemente funzioni delle sole n,p. L'ordine della rigata delle trisecanti di C_p^n, risulterà dunque, in ogni caso, funzione delle sole n,p, e dovrà pertanto coincidere colla funzione $\varphi(n,p)$ prima trovata.

Come ho detto, con procedimenti di questo genere, si giustifica in ogni caso anche l'applicazione del metodo funzionale di Cayley. Nè fanno eccezione i problemi relativi a coniche plurisecanti di curve gobbe (Berzolari, Severi), giacchè in questi casi, qualora, per la ragione detta sopra, non serva lo spezzamento in rette, si potrà ricorrere ad uno spezzamento misto della C_p^n in rette, coniche, cubiche gobbe, spezzamento la cui legittimità si stabilisce, per $n \geq p+3$, con procedimenti analoghi a quelli già sviluppati (n. 6). E si osserverà poi che l'aggiunta di convenienti rette o coniche o cubiche, ad una qualunque C_p^n $(n<p+3)$, dà luogo ad una C_p^m $(m>n)$ appartenente ad una famiglia non speciale (cfr. col n. 7).

Queste considerazioni fanno senz'altro prevedere come sia possibile assurgere rigorosamente alla seguente conclusione generale:

Ogni numero inerente ad una C_p^n di S_r, in quanto sia relativo ad una condizione algebrica che abbia senso per una curva qualunque di ordine e genere dati, è una funzione razionale delle sole variabili n,p.

12. Applicazioni alle questioni di realità. — Dirò in proposito soltanto poche parole, perchè applicazioni di questo genere si prevedono senz'altro, quando si tenga presente il metodo cosidetto della « piccola variazione », che si usa nelle questioni di realità per le curve piane.

Dato un n-latero reale L di genere effettivo o virtuale p, appartenente ad una famiglia V di C_p^n irriducibili di S_r, a partire da un punto vicino ad un lato, si segua il lato stesso, finchè si arrivi vicino ad un punto doppio proprio P. Senza bruschi cambiamenti nella curvatura della traiettoria, si prosegua allora lungo il lato che si connette al precedente attraverso P, e così di seguito. Si otterrà una traiettoria che rappresenterà con grande approssimazione la forma di una curva di V vicina ad L, ed avente perciò, rispetto alle curve della famiglia, il massimo numero di rami reali, purchè si osservino inoltre queste due regole, d'immediata giustificazione:

1) Ad ogni segmento d'un lato di L, che non contenga nodi proprî, deve esser sempre vicino uno ed un sol pezzo della traiettoria.

2) Quando s'incontra un punto doppio improprio Q, si deve proseguire a mantenersi vicini al lato lungo cui si camminava, come se Q non ci fosse.

Per contare i rami *graficamente* distinti della curva, si avvertirà che due rami metricamente distinti, i quali siano « paralleli » a due semiraggi opposti, situati sullo stesso lato a di L, ed aventi per origini due diversi nodi proprî, si riconnettono attraverso al punto all'infinito di a (supposto, beninteso, ch'esso non sia un nodo proprio).

Matematica. — *Sopra una classe di sistemi tripli di superficie ortogonali.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

1. Se l'elemento lineare ds dello spazio euclideo, riferito ad un sistema triplo ortogonale (u_1, u_2, u_3), assume la forma

$$(1)\qquad ds^2 = H_1^2\, du_1^2 + H_2^2\, du_2^2 + H_3^2\, du_3^2\,,$$

si sa che le sei rotazioni β_{ik}, definite dalle formole

$$\beta_{ik} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial u_i} \qquad (i \neq k),$$

soddisfano al sistema delle nove equazioni differenziali del primo ordine:

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\,\beta_{lk} \\[2mm] \dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \dfrac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} = -\,\beta_{li}\,\beta_{lk}\,, \end{cases}$$

dove (i, k, l) indica una qualunque permutazione degli indici $1, 2, 3$.

Viceversa, se le sei funzioni β_{ik} di u_1, u_2, u_3 verificano le (2), esistono infiniti sistemi tripli ortogonali con queste rotazioni e dipendenti da tre funzioni arbitrarie. La ricerca di questi sistemi tripli ortogonali si può com-

piere in due modi diversi, sostanzialmente equivalenti [1]. Il primo modo consiste nell'assumere come incognite i coefficienti H_1, H_2, H_3 nella (1), ed allora queste tre funzioni debbono unicamente soddisfare al sistema lineare:

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k \qquad (i \neq k). \tag{3}$$

Nel secondo modo si prendono invece come incognite le tre distanze (algebriche), che diremo W_1, W_2, W_3, di un punto fisso dello spazio (p. es. dell'origine) dalle tre facce del triedro principale. In tal caso le W_i debbono soddisfare al sistema, che diremo l'*aggiunto* di (3):

$$\frac{\partial W_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} W_k \qquad (i \neq k). \tag{3*}$$

Si osservi che se (H_1, H_2, H_3), (W_1, W_2, W_3) sono due terne qualunque di soluzioni, la prima del sistema (3), l'altra dell'aggiunto (3*), si ha:

L'espressione $H_1 W_1 du_1 + H_2 W_2 du_2 + H_3 W_3 du_3$ *è un differenziale esatto.*

Le ricerche contenute nella presente Nota muovono dal considerare che, in molte questioni concernenti i sistemi tripli ortogonali, si riscontra come una reciprocità fra le proprietà che dipendono dalle H_i e quelle che si riferiscono alle W_i.

Ora si sa che in quei sistemi tripli ortogonali (u_1, u_2, u_3) in cui la famiglia $u_3 = \text{cost}$ consta di superficie a curvatura costante, basta scegliere convenientemente i parametri u_1, u_2 perchè i coefficienti H_1^2, H_2^2 risultino legati da una relazione lineare

$$H_1^2 + c H_2^2 = \text{cost},$$

dove c è una costante che si può porre, del resto, senza alterare la generalità, $= \pm 1$. Dopo ciò, risulta naturale la domanda se esistono sistemi tripli ortogonali, corrispondenti in certo modo ai superiori secondo l'accennata legge di reciprocità, e pei quali si verifichi una relazione della forma

$$W_1^2 + c W_2^2 = \text{cost}, \tag{a}$$

dove ora per altro il valore della costante c risulterà essenziale, e soltanto saranno da escludersi i casi impossibili $c = 0$, $c = 1$ [2].

[1] Ved. Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux* (2ª ediz., 1910. Livre III, chap. V), od anche le mie *Lezioni di geometria differenziale*, vol. II, § 413.

[2] Se fosse $c = 0$, le superficie $u_1 = \text{cost}$ dovrebbero ridursi ad un'unica sfera. Se $c = 1$, le curve (u_3) avrebbero tutte le tangenti a distanza costante dall'origine e sarebbero tutte tracciate sopra una sfera col centro in questo punto, casi manifestamente assurdi.

Siccome W_1, W_2 sono le distanze dall'origine dei piani principali delle superficie $u_3 = \text{cost}$, la (a) rappresenta un'equazione del secondo ordine a cui tutte le $u_3 = \text{cost}$ debbono soddisfare, sicchè il problema proposto è il seguente:

Trovare tutte le famiglie di Lamè composte di superficie integrali della equazione (a) *a derivate parziali del secondo ordine.*

Si vedrà che esistono in effetto infiniti di tali sistemi tripli ortogonali e dipendono da tre funzioni arbitrarie *essenziali*. Questi sistemi tripli godono di singolari proprietà geometriche, che sono del resto comuni anche a tutti i loro sistemi paralleli, e per le quali i sistemi stessi vengono a collegarsi colle congruenze pseudosferiche.

Avvertiamo che nelle ricerche seguenti sarà trascurato, come ovvio, il caso che nel sistema triplo figuri una serie di sviluppabili, e per ciò supporremo che *nessuna delle rotazioni* β_{ik} *si annulli.*

2. Per trattare analiticamente il nostro problema dobbiamo aggregare al sistema delle equazioni (2) e (3*) per le nove funzioni incognite β_{ik}, W_i l'equazione in termini finiti (a) fra W_1, W_2. Scrivendo in primo luogo per disteso le (2), abbiamo il sistema:

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_3} = \beta_{13}\beta_{32}, \quad \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_1} = \beta_{21}\beta_{13}, \quad \frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_2} = \beta_{32}\beta_{21}\\
&\frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_3} = \beta_{23}\beta_{31}, \quad \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_1} = \beta_{31}\beta_{12}, \quad \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_2} = \beta_{12}\beta_{23}\\
&\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} = -\beta_{31}\beta_{32}, \quad \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2} + \frac{\partial \beta_{32}}{\partial u_3} = -\beta_{12}\beta_{13},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\partial \beta_{31}}{\partial u_3} + \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_1} = -\beta_{23}\beta_{21},
\end{aligned}\right.$$

e similmente per la (3*)

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
&\quad * \qquad\qquad \frac{\partial W_1}{\partial u_2} = \beta_{12}W_2, \quad \frac{\partial W_1}{\partial u_3} = \beta_{13}W_3\\
&\frac{\partial W_2}{\partial u_1} = \beta_{21}W_1, \qquad * \qquad \frac{\partial W_2}{\partial u_3} = \beta_{23}W_3\\
&\frac{\partial W_3}{\partial u_1} = \beta_{31}W_1, \quad \frac{\partial W_3}{\partial u_2} = \beta_{32}W_2 \qquad *
\end{aligned}\right.$$

Ora se l'equazione in termini finiti (a) si deriva rapporto ad u_1, u_2, u_3 mediante le (5), e dai risultati si sopprimono i rispettivi fattori non nulli W_1, W_2, W_3, si trovano le due equazioni differenziali

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial W_1}{\partial u_1} = -c\,\beta_{21}W_2\\
&\frac{\partial W_2}{\partial u_2} = -\frac{1}{c}\beta_{12}W_1,
\end{aligned}\right.$$

e l'altra in termini finiti

$$\beta_{13} W_1 + c\beta_{23} W_2 = 0 . \tag{7}$$

Paragonando le (6) colle equazioni delle due prime linee in (5) e costruendo le corrispondenti condizioni d' integrabilità, si hanno le seguenti:

$$\left\{ \begin{aligned} & c \frac{\partial}{\partial u_2} (\beta_{21} W_2) + \frac{\partial}{\partial u_1} (\beta_{12} W_2) = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial u_1} (\beta_{12} W_1) + c \frac{\partial}{\partial u_2} (\beta_{21} W_1) = 0 \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} & c \frac{\partial}{\partial u_3} (\beta_{21} W_2) + \frac{\partial}{\partial u_1} (\beta_{13} W_3) = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial u_3} (\beta_{12} W_1) + c \frac{\partial}{\partial u_2} (\beta_{23} W_3) = 0 . \end{aligned} \right.$$

Eseguendo le derivazioni colle (4), (5) e (6), ed osservando la (7), troviamo che si riducono alle tre condizioni:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + c \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} = 0 \\ & \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_1} = - c \beta_{21} \beta_{23} \quad , \quad \frac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2} = - \frac{1}{c} \beta_{12} \beta_{13} . \end{aligned} \right. \tag{8}$$

La prima di queste, combinata colla prima equazione della terza linea in (4), porge

$$\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} = \frac{c}{1-c} \beta_{31} \beta_{32} \quad , \quad \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} = - \frac{1}{1-c} \beta_{31} \beta_{32} .$$

Ed ora, aggregando queste ultime e le due seconde (8) al sistema (4), questo resta risoluto rispetto a due delle derivate di ciascuna rotazione ed assume la seguente forma definitiva:

$$\left\{ \begin{array}{lll} * & \dfrac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} = \dfrac{1}{c-1} \beta_{31} \beta_{32} \ , & \dfrac{\partial \beta_{21}}{\partial u_3} = \beta_{23} \beta_{31} \ , \\[2ex] * & \dfrac{\partial \beta_{31}}{\partial u_2} = \beta_{32} \beta_{21} \ , & \dfrac{\partial \beta_{31}}{\partial u_3} = (c-1) \beta_{21} \beta_{23} \ , \\[2ex] \dfrac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} = \dfrac{c}{1-c} \beta_{31} \beta_{32} \ , & * & \dfrac{\partial \beta_{12}}{\partial u_3} = \beta_{13} \beta_{32} \ , \\[2ex] \dfrac{\partial \beta_{32}}{\partial u_1} = \beta_{31} \beta_{12} \ , & * & \dfrac{\partial \beta_{32}}{\partial u_3} = \dfrac{1-c}{c} \beta_{12} \beta_{13} \ , \\[2ex] \dfrac{\partial \beta_{13}}{\partial u_1} = - c \beta_{21} \beta_{23} \ , & \dfrac{\partial \beta_{13}}{\partial u_2} = \beta_{12} \beta_{23} & * \\[2ex] \dfrac{\partial \beta_{23}}{\partial u_1} = \beta_{21} \beta_{13} \ , & \dfrac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2} = - \dfrac{1}{c} \beta_{12} \beta_{13} \ , & * \end{array} \right. \tag{I}$$

Vediamo dunque intanto che: *Se in un sistema triplo ortogonale* (u_1, u_2, u_3) *le superficie* $u_3 = cost$ *sono integrali della equazione del secondo ordine* (*a*)

$$W_1^2 + cW_2^2 = \text{cost}$$

le rotazioni β_{ik} *debbono soddisfare al sistema* (I).

Inversamente si vedrà fra breve che ad ogni sistema di rotazioni β_{ik}, che soddisfino le (I), corrisponde un sistema triplo ortogonale della specie richiesta, univocamente determinato a meno di un'omotetia.

Per semplificare le ricerche conviene osservare la seguente singolare proprietà di costruzione nel sistema (I): *Il sistema differenziale* (I) *resta invariato per una permutazione qualunque degli indici* 1, 2, 3, *purchè si eseguisca contemporaneamente sulla costante c una corrispondente sostituzione lineare del gruppo diedrale* G_6 *del rapporto anarmonico.*

Per accertarsene basta osservare: 1°) Il sistema (I) non cangia scambiando l'indice 1 con 2 e mutando c in $\frac{1}{c}$; 2°) esso non muta nemmeno per la permutazione circolare (1, 2, 3), cangiando insieme c in $\frac{1}{1-c}$. Dopo ciò la proprietà enunciata resta evidente, e ne segue che la corrispondenza (d'isomorfismo oloedrico) fra le 6 permutazioni degli indici e le 6 sostituzioni lineari del gruppo diedrale su c è data da

$$1 \sim c \quad , \quad (123) \sim \frac{1}{1-c} \quad , \quad (132) \sim \frac{c-1}{c}$$

$$(12) \sim \frac{1}{c} \quad , \quad (23) \sim \frac{c}{c-1} \quad , \quad (13) \sim 1-c \,.$$

3. Ed ora la prima questione analitica che si presenta è di esaminare la compatibilità delle 12 equazioni simultanee (I) per le 6 incognite β_{ik}, e valutare il grado di arbitrarietà dell'integrale generale.

Il sistema (I) assegna, per ciascuna delle β_{ik}, due delle derivate prime come prodotto di altre due β, e ciò in guisa che se si costruiscono le 6 corrispondenti condizioni d'integrabilità, delle quali la prima è

$$\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_3}\right) - \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2}\right) = \frac{\partial}{\partial u_2}(\beta_{23}\,\beta_{31}) + \frac{1}{1-c}\,\frac{\partial}{\partial u_3}(\beta_{31}\,\beta_{32}) = 0\,,$$

si trovano tutte soddisfatte, in virtù delle (I) stesse. Il sistema (I) appartiene dunque ad una delle più semplici classi di sistemi lineari canonici *completamente integrabili* del Bourlet ([1]), ed ammette quindi infinite solu-

([1]) Bourlet, *Sur les équations aux dérivées partielles simultanées* (Annales de l'École Normale Supérieure, tom. VIII, 3ème série suppl. (1891)]. Per il caso semplice attuale ved. anche Darboux (loc. cit.). Livre III, chap. I.

zioni dipendenti da sei funzioni arbitrarie. Precisamente se consideriamo un sistema iniziale di valori per u_1, u_2, u_3, sia per semplicità $(0, 0, 0)$, le (I) *posseggono uno ed un solo sistema di soluzioni* β_{ik}, tali che

$$\beta_{21}, \beta_{31}$$

si riducano a due funzioni arbitrariamente date della variabile u_1, quando vi si fa $u_2 = u_3 = 0$, e similmente

$$\beta_{12}, \beta_{32} \text{ a funzioni date di } u_2, \quad \text{per} \quad u_1 = u_3 = 0,$$
$$\beta_{13}, \beta_{23} \text{ a funzioni date di } u_3, \quad \text{per} \quad u_1 = u_2 = 0.$$

Ma osserviamo subito che tre di queste funzioni arbitrarie sono soltanto apparenti, e dipendono dall'arbitrarietà ancora lasciata ai parametri u_1, u_2, u_3. E così, p. es., senza alterare la generalità, possiamo prescrivere che risulti

$$\beta_{21}(u_1, 0, 0) = 1, \quad \beta_{32}(0, u_2, 0) = 1$$
$$\beta_{13}(0, 0, u_3) = 1.$$

Concludiamo adunque che in realtà:

L'integrale generale del sistema (I) *nelle* β_{ik} *dipende da tre funzioni arbitrarie essenziali.*

Questi risultati conducono naturalmente a cercare di esprimere le 6 incognite β_{ik} per tre sole ausiliarie, e l'opportuna introduzione di queste tre incognite ausiliarie viene suggerita dal riconoscere che il sistema (I), ammette tre integrali quadratici facilmente distinguibili.

Se costruiamo in effetto le tre espressioni

$$(9) \qquad \begin{cases} \Omega_1 = (1-c)\,\beta_{21}^2 + \beta_{31}^2 \\ \Omega_2 = (1-c)\,\beta_{12}^2 - c\beta_{32}^2 \\ \Omega_3 = \beta_{13}^2 + c\beta_{23}^2, \end{cases}$$

riconosciamo che a causa delle (I) stesse si ha identicamente

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u_2} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial u_3} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_1} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial u_3} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_3}{\partial u_1} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial u_2} = 0 \text{ [1]},$$

onde segue che Ω_1 è funzione della sola u_1, Ω_2 della sola u_2, ed Ω_3 di u_3. Inoltre se si considera che, cangiando i parametri u_1, u_2, u_3, le rotazioni β_{21}, β_{31} risultano moltiplicate per un fattore arbitrario funzione di u_1, e similmente β_{12}, β_{32} per una funzione di u_2, e β_{13}, β_{23} per una funzione di u_3, si vede che è lecito alterare $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ per rispettivi fattori *positivi* arbitrarii, ordinatamente funzioni di u_1, u_2, u_3.

[1] Basta del resto verificare queste ultime ed applicare poi l'osservazione alla fine del n. 2.

Procediamo ora alla riduzione del sistema (I) a forme normali, osservando che ci possiamo limitare a supporre la costante c *negativa.*

E invero, da quanto si è detto alla fine del n. 2, risulta che ogni altro caso si riconduce a questo, effettuando sugli indici la permutazione circolare (123) o il suo quadrato (132), poichè dei tre valori

$$c\,,\ \frac{1}{1-c}\,,\ \frac{c-1}{c}$$

uno è sempre negativo, gli altri due positivi.

4. Limitandoci dunque al caso di c negativa, poniamo

$$c = -tg^2\sigma\,,$$

dove σ denota un angolo costante reale (arbitrario).

Secondo le (9), le tre espressioni

$$\frac{\beta_{21}^2}{\cos^2\sigma} + \beta_{31}^2\,,\quad \frac{\beta_{12}^2}{\operatorname{sen}^2\sigma} + \beta_{32}^2\,,\quad \frac{\beta_{13}^2}{\operatorname{sen}^2\sigma} - \frac{\beta_{23}^2}{\cos^2\sigma} \tag{10}$$

saranno rispettivamente funzioni la prima di u_1, la seconda di u_2, la terza di u_3. Ma poichè le due prime sono positive, potremo intanto disporre dei parametri u_1, u_2 sì da rendere

$$\frac{\beta_{21}^2}{\cos^2\sigma} + \beta_{31}^2 = 1\,,\quad \frac{\beta_{12}^2}{\operatorname{sen}^2\sigma} + \beta_{32}^2 = 1. \tag{10*}$$

Quanto alla terza, avremo da suddistinguere secondo che è diversa da zero, oppure nulla:

1° caso $\Omega_3 \neq 0$. Senza alterare la generalità, scambiando se occorre i parametri u_1, u_2, possiamo supporre $\Omega_3 > 0$, ed allora disponiamo anche di u_3 in guisa che si abbia

$$\frac{\beta_{13}^2}{\operatorname{sen}^2\sigma} - \frac{\beta_{23}^2}{\cos^2\sigma} = 1\,. \tag{10**}$$

La forma delle (10*), (10**) suggerisce l'introduzione di tre funzioni ausiliarie θ, φ, ψ, per le quali esprimiamo le 6 rotazioni colle formole:

$$\left\{\begin{array}{ll} \beta_{21} = \cos\sigma\cos\theta\,, & \beta_{31} = \operatorname{sen}\theta \\ \beta_{12} = \operatorname{sen}\sigma\cos\varphi\,, & \beta_{32} = \operatorname{sen}\varphi \\ \beta_{13} = \operatorname{sen}\sigma\cosh\psi\,, & \beta_{23} = \cos\sigma\operatorname{senh}\psi\,. \end{array}\right. \tag{11}$$

Introducendo questi valori delle β_{ik} nelle (I), ove è da farsi inoltre $c = - tg^2\sigma$, il sistema si riduce nelle tre funzioni incognite θ, φ, ψ al seguente:

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \quad * \qquad \dfrac{\partial\theta}{\partial u_2} = \cos\sigma \operatorname{sen}\varphi \quad , \quad \dfrac{\partial\theta}{\partial u_3} = -\operatorname{senh}\psi \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1} = \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\theta \quad , \quad * \qquad \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_3} = -\cosh\psi \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u_1} = \operatorname{sen}\sigma\cos\theta \quad , \quad \dfrac{\partial\psi}{\partial u_2} = \cos\sigma\cos\varphi \qquad * \end{cases}$$

Risulta già da quanto si è detto al n. 2, e si può constatare anche subito direttamente, che le condizioni d'integrabilità per questo sistema (II) sono identicamente soddisfatte, onde l'integrale generale (θ, φ, ψ) dipende da tre funzioni arbitrarie (essenziali).

2° caso $\Omega_3 = 0$. In questo secondo caso, avendosi

$$\frac{\beta_{13}}{\operatorname{sen}\sigma} = \pm \frac{\beta_{23}}{\cos\sigma},$$

potremo limitarci a prendere il segno superiore, bastando cangiare nel caso contrario σ in $-\sigma$. Ed allora, mantenendo per β_{21}, β_{31}; β_{12}, β_{32} le posizioni fatte in (11), poniamo invece

$$\frac{\beta_{13}}{\operatorname{sen}\sigma} = \frac{\beta_{23}}{\cos\sigma} = e^{\psi},$$

dove è da notarsi che, cangiando il parametro u_3, si può aumentare l'ausiliaria ψ di una funzione arbitraria di u_3. I valori delle rotazioni saranno dunque ora:

$$\text{(11*)} \quad \begin{cases} \beta_{21} = \cos\sigma\cos\theta \quad , \quad \beta_{31} = \operatorname{sen}\theta \\ \beta_{12} = \operatorname{sen}\sigma\cos\varphi \quad , \quad \beta_{32} = \operatorname{sen}\varphi \\ \beta_{13} = \operatorname{sen}\sigma\, e^{\psi} \quad , \quad \beta_{23} = \cos\sigma\, e^{\psi}, \end{cases}$$

ed al sistema differenziale (II) si sostituirà l'altro:

$$\text{(II*)} \quad \begin{cases} \quad * \qquad \dfrac{\partial\theta}{\partial u_2} = \cos\sigma \operatorname{sen}\varphi \quad , \quad \dfrac{\partial\theta}{\partial u_3} = -e^{\psi} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1} = \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\theta \qquad * \qquad \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_3} = -e^{\psi} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u_1} = \operatorname{sen}\sigma\cos\theta \quad , \quad \dfrac{\partial\psi}{\partial u_2} = \cos\sigma\cos\varphi \qquad * \end{cases}$$

Anche qui le condizioni d'integrabilità sono soddisfatte, e l'integrale generale (θ, φ, ψ) dipende da tre funzioni arbitrarie.

Inversamente, ad ogni terna (θ, φ, ψ) che soddisfi alle equazioni (II), ovvero alle (II*), corrisponderà (n. 1) un' intera classe di sistemi tripli ortogonali paralleli, le cui rotazioni β_{ik} saranno date dalle (11) nel primo caso, dalle (11*) nel secondo.

5. Ma ora dobbiamo ritornare al nostro problema primitivo (n. 1) e ricercare se fra i sistemi tripli ortogonali anzidetti ne esiste qualcuno in cui le superficie $u_3 = \text{cost}$ soddisfino la equazione (a), la quale, nella nostra ipotesi di

$$c = -\text{tg}^2\sigma ,$$

assume la forma

$$\cos^2\sigma\, W_1^2 - \text{sen}^2\sigma W_2^2 = \text{cost} . \tag{12}$$

Supponiamo dapprima di trovarci nel primo caso del n. 4 in cui valgono le (11) e le (II), ed osserviamo che la equazione (7) n. 2:

$$\beta_{13}\, W_1 = \text{tg}^2\,\sigma\, \beta_{23}\, W_2$$

diventa qui per le (11)

$$\cos\sigma \cosh\psi \,.\, W_1 = \text{sen}\,\sigma\, \text{senh}\,\psi \,.\, W_2 \,.$$

Possiamo dunque porre:

$$W_1 = \lambda\, \text{sen}\,\sigma\, \text{senh}\,\psi \quad , \quad W_2 = \lambda \cos\sigma \cosh\psi \,,$$

dove λ indica un fattore di proporzionalità, il quale a causa della (12) deve necessariamente essere una costante. Sostituendo al sistema triplo un sistema omotetico, si può fare senz'altro $\lambda = 1$

$$W_1 = \text{sen}\,\sigma\, \text{senh}\,\psi \quad , \quad W_2 = \cos\sigma \cosh\psi \,.$$

Dopo ciò le due formole dell'ultima colonna in (5) dànno concordemente $W_3 = \frac{\partial\psi}{\partial u_3}$; ed inversamente si vede che, ponendo.

$$W_1 = \text{sen}\,\sigma\, \text{senh}\,\psi \quad , \quad W_2 = \cos\sigma \cosh\psi \quad , \quad W_3 = \frac{\partial\psi}{\partial u_3} \,, \tag{13}$$

tutte le condizioni (5) risultano verificate dando alle rotazioni β_{ik} i valori (11). Si conclude quindi:

Ad ogni terna (θ, φ, ψ) *integrale del sistema* (II) *corrisponde uno ed un solo sistema triplo ortogonale colle rotazioni* β_{ik} *date dalle* (11), *le cui superficie* $u_3 = \text{cost}$ *soddisfano alla condizione*

$$\frac{W_2^2}{\cos^2\sigma} - \frac{W_1^2}{\text{sen}^2\sigma} = 1 \,.$$

In effetto un tale sistema è univocamente definito dalle (13).

In simil modo si tratta l'altro caso che le β_{ik} siano date dalle (11*), soddisfacendo θ, φ, ψ al sistema (II*). La (7) n. 2 diventa ora semplicemente

$$\cos\sigma\, W_1 = \operatorname{sen}\sigma\, W_2 ,$$

e noi poniamo in corrispondenza

$$W_1 = \lambda \operatorname{sen}\sigma\, e^{\psi} \quad , \quad W_2 = \lambda \cos\sigma\, e^{\psi}$$

con λ fattore di proporzionalità. Ma dalle due equazioni (5)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial W_2}{\partial u_1} &= \beta_{21} W_1 = \cos\sigma \cos\theta\, W_1 \\ \frac{\partial W_1}{\partial u_2} &= \beta_{12} W_2 = \operatorname{sen}\sigma \cos\varphi\, W_2 \end{aligned} \right.$$

risulta ora

$$\frac{\partial}{\partial u_1}(\lambda e^{\psi}) = \lambda \operatorname{sen}\sigma \cos\theta\, e^{\psi} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial u_2}(\lambda e^{\psi}) = \lambda \cos\sigma \cos\varphi\, e^{\psi} ,$$

indi per le (II*)

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u_1} = \frac{\partial \lambda}{\partial u_2} = 0 .$$

Il fattore λ dipende dunque solo da u_3, ed anzi, aumentando ψ di una funzione di u_3 (n. 4), possiamo rendere senz'altro $\lambda = 1$. Così troviamo

$$(13^*) \qquad W_1 = \operatorname{sen}\sigma\, e^{\psi} \quad , \quad W_2 = \cos\sigma\, e^{\psi} \quad , \quad W_3 = \frac{\partial \psi}{\partial u_3} ;$$

e viceversa con questi valori di W_1, W_2, W_3 sono soddisfatte le (5), e ne resta definito un sistema triplo ortogonale della specie voluta.

Si osservi che:

In questi sistemi tripli ortogonali (13*) *le superficie* $u_3 = \text{cost}$ *hanno costante* $(= \operatorname{tg}\sigma)$ *il rapporto* $\frac{W_1}{W_2}$ *delle distanze dall'origine dai piani principali*; *inoltre le loro trajettorie ortogonali* (u_3) *sono curve piane.*

Quest'ultima asserzione risulta provata da ciò che il rapporto delle due rotazioni β_{13}, β_{23} è costante.

6. Così abbiamo risoluto il problema proposto solo nel caso che nella equazione (*a*) il valore della costante c sia negativo. Per altro le considerazioni alla fine del n. 2 ci dimostrano che, per risolverlo negli altri casi, basterà riferirsi sempre alle formole del n. 4 con uno scambio opportuno di indici, effettuando in pari tempo sulla costante c la corrispondente sostituzione lineare. Ora se nella relazione (*a*)

$$W_1^2 + c W_2^2 = \text{cost}$$

operiamo la sostituzione circolare (123) cangiando in pari tempo c in $\frac{1}{1-c}$, questa diventa

$$W_2^2 + \frac{1}{1-c} W_3^2 = \text{cost},$$

e ripetendo l'operazione

$$W_3^2 + \frac{c-1}{c} W_1^2 = \text{cost}.$$

Poichè adunque si ha qui $c = -\text{tg}^2\sigma$, ci resta ancora da esaminare se fra i sistemi tripli ortogonali corrispondenti alle formole (11) o (11*) per le rotazioni ne esistono di quelli che soddisfino la condizione

$$W_2^2 + \cos^2\sigma\, W_3^2 = \text{cost}, \tag{14}$$

e di quelli che soddisfino l'altra

$$W_1^2 + \text{sen}^2\sigma\, W_3^2 = \text{cost}. \tag{15}$$

La questione si risolve affermativamente, ambedue le volte, coll'assegnare gli effettivi valori che debbono darsi a W_1, W_2, W_3. Il procedimento, affatto analogo a quello del n. 5, consiste nell'aggregare la equazione in termini finiti (14), ovvero la (15), alle equazioni differenziali (3*) per le W. Facciamo i calcoli nel caso delle equazioni (11) e (II) n. 4, ove le equazioni differenziali per le W si scrivono

$$(16)\quad \begin{cases} \quad\star & \dfrac{\partial W_1}{\partial u_2} = \text{sen}\,\sigma \cos\varphi\, W_2\ , & \dfrac{\partial W_1}{\partial u_3} = \cos\sigma\, \text{senh}\,\psi\, W_3 \\ \dfrac{\partial W_2}{\partial u_1} = \cos\sigma \cos\theta\, W_1 & \quad\star & \dfrac{\partial W_2}{\partial u_3} = \cos\sigma\, \text{senh}\,\psi\, W_3 \\ \dfrac{\partial W_3}{\partial u_1} = \text{sen}\,\theta\, W_1\ , & \dfrac{\partial W_3}{\partial u_2} = \text{sen}\,\varphi\, W_2 & \quad\star \end{cases}$$

Se a queste aggreghiamo dapprima la (14), derivando questa rapporto ad u_1, risulta per le (16) stesse

$$\cos\theta\, W_2 + \cos\sigma\, \text{sen}\,\theta\, W_3 = 0\ ,$$

onde possiamo porre

$$W_2 = \lambda \cos\sigma\, \text{sen}\,\theta\quad ,\quad W_3 = -\lambda\cos\theta\ ,$$

e λ sarà per la (14) una costante, che possiamo porre $= 1$.

Dopo ciò, p. es., dalla prima equazione della seconda linea in (16) viene $W_1 = \frac{\partial\theta}{\partial u_1}$; ma inversamente se si prende

$$W_1 = \frac{\partial\theta}{\partial u_1}\quad ,\quad W_2 = \cos\sigma\, \text{sen}\,\theta\quad ,\quad W_3 = -\cos\theta \tag{17}$$

si soddisfano, a causa delle (II), tutte le equazioni (16), e resta quindi definito dalle (17) un sistema triplo ortogonale colle rotazioni (11), e con W_2, W_3 legate dalla relazione

$$\frac{W_2^2}{\cos^2\sigma} + W_3^2 = 1 .$$

In modo analogo, aggregando invece la (15), si trovano le formole

$$(18) \qquad W_1 = \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\varphi \quad , \quad W_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \quad , \quad W_3 = -\cos\varphi ,$$

che definiscono un altro sistema triplo ortogonale parallelo al precedente, e con W_1, W_3 legate dalla relazione

$$\frac{W_1^2}{\operatorname{sen}^2\sigma} + W_3^2 = 1 .$$

Da ultimo, se si considera il secondo caso del n. 4 e si suppone che per le β_{ik} valgano le (11*) e per θ, φ, ψ le formole (II*), si trova ancora che le formole stesse (17) e (18) definiscono i due sistemi tripli ortogonali cercato.

7. Tutti i sistemi tripli ortogonali le cui rotazioni β_{ik} soddisfano alle equazioni (I) n. 2 godono di una notevole proprietà geometrica comune di cui diciamo al numero seguente. Qui osserviamo che, in grazia appunto delle particolari relazioni (I) a cui soddisfano le β_{ik}, si possono stabilire delle trasformazioni speciali che dànno il passaggio da un sistema triplo ortogonale noto (u_1, u_2, u_3) della specie a nuovi sistemi tripli ortogonali *paralleli al primitivo.*

Sussiste invero la proposizione seguente:

Se le rotazioni β_{ik} *soddisfano alle condizioni* (I), *ed è* (W_1, W_2, W_3) *una terna qualunque di soluzioni del sistema* (3*), *le formole*

$$(19) \qquad \begin{cases} H_1 = \dfrac{\partial W_1}{\partial u_1} + c\beta_{21}W_2 \\[2ex] H_2 = c\,\dfrac{\partial W_2}{\partial u_2} + \beta_{12}W_1 \\[2ex] H_3 = \beta_{13}W_1 + c\beta_{23}W_2 \end{cases}$$

definiscono una soluzione (H_1, H_2, H_3) *del sistema aggiunto.*

La verifica è immediata, quando si tenga conto che le β_{ik} soddisfano alle (I), e le W_i alle (3*).

Dall'osservazione alla fine del n. 2 segue poi immediatamente che si ottengono medesimamente nuove terne (H_1, H_2, H_3) di soluzioni delle (3) colle formole

$$(19')\quad \begin{cases} H_1 = \beta_{21} W_2 + \dfrac{1}{1-c} \beta_{31} W_3 \\ H_2 = \dfrac{\partial W_2}{\partial u_2} + \dfrac{1}{1-c} \beta_{32} W_3 \\ H_3 = \dfrac{1}{1-c} \dfrac{\partial W_3}{\partial u_3} + \beta_{23} W_2 , \end{cases}$$

come pure colle altre

$$(19'')\quad \begin{cases} H_1 = \dfrac{c-1}{c} \dfrac{\partial W_1}{\partial u_1} + \beta_{31} W_3 \\ H_2 = \beta_{32} W_3 + \dfrac{c-1}{c} \beta_{12} W_1 \\ H_3 = \dfrac{\partial W_3}{\partial u_3} + \dfrac{c-1}{c} \beta_{13} W_1 . \end{cases}$$

Soltanto si osserverà che ad esempio la trasformazione (19) diventa illusoria nel caso in cui il sistema triplo (u_1, u_2, u_3) di partenza sia quello speciale in cui la (a) è soddisfatta, cioè:

$$W_1^2 + c W_2^2 = \text{cost} .$$

In tal caso infatti, per le (6), (7) n. 2, risulta identicamente

$$H_1 = H_2 = H_3 = 0 ,$$

cioè il sistema trasformato si riduce ad un punto.

Similmente, le formole di trasformazione (19'), diventano illusorie quando

$$W_2^2 + \frac{1}{1-c} W_3^2 = \text{cost} ;$$

e le (19'') quando sia

$$W_3^2 + \frac{c-1}{c} W_1^2 = \text{cost} .$$

Alle trasformazioni dei nostri sistemi tripli (u_1, u_2, u_3) definite dalle (19), (19'), (19'') sono da associarsi le loro inverse, nelle quali si suppone data una terna (qualunque) (H_1, H_2, H_3) di soluzioni del sistema (3) e si cerca una terna corrispondente (W_1, W_2, W_3) di soluzioni del sistema aggiunto (3*) che soddisfi inoltre alle (19), ovvero alle (19'), (19''). Si dimo-

stra facilmente che l' inversione domandata è sempre possibile; anzi esistono ∞^1 di tali terne (W_1, W_2, W_3) che si determinano con una quadratura.

8. Veniamo da ultimo a descrivere la proprietà geometrica comune a tutti i sistemi tripli (u_1, u_2, u_3), colle rotazioni β_{ik} soddisfacenti al sistema (I), a cui sopra è accennato. Essa risulta dalla proposizione seguente:

Le superficie di ciascuna delle tre serie nel sistema triplo sono divise in parallelogrammi infinitesimi d'area costante da un doppio sistema di trajettorie isogonali delle loro linee di curvatura sotto un conveniente angolo.

Avvertiamo però subito che, mentre per una delle tre famiglie le dette trajettorie isogonali sono reali, per le altre due famiglie invece sono immaginarie, l'angolo costante d'inclinazione essendo per esse un immaginario (puro).

Le superficie dotate della proprietà sopra enunciata, di avere cioè per linee di curvatura le bisettrici di un doppio sistema (u, v) che dà al ds^2 la forma caratteristica

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

con

$$EG = 1 \quad , \quad F = \text{cost},$$

vennero considerate la prima volta in una mia Memoria del 1890 [1]. La proprietà è comune a tutte le superficie colla stessa rappresentazione sferica, e vale quindi in particolare per la sfera rappresentativa stessa. Qualunque superficie dotata della proprietà in discorso può inserirsi in sistemi tripli ortogonali della nostra classe.

Qui verifichiamo ad esempio che in ogni sistema triplo ortogonale corrispondente alle rotazioni date dalle (11) n. 4, quando θ, φ, ψ soddisfano al sistema (II), sulle superficie $u_3 = \text{cost}$, le trajettorie isogonali sotto l'angolo $\pm\sigma$ delle linee di curvatura dividono la superficie in parallelogrammi infinitesimi equivalenti. Basterà verificare che tale proprietà sussiste nell'immagine sferica, il cui ds'^2 è dato da

$$ds'^2 = \beta_{31}^2\,du_1^2 + \beta_{32}^2\,du_2^2 = \text{sen}^2\theta\,du_1^2 + \text{sen}^2\varphi\,du_2^2.$$

Le equazioni differenziali delle trajettorie isogonali, sotto l'angolo $\pm\sigma$, delle linee di curvatura si scrivono

$$\begin{cases} \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\sigma}\,du_1 - \dfrac{\text{sen}\,\varphi}{\text{sen}\,\sigma}\,du_2 = 0 \\[2ex] \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\sigma}\,du_1 + \dfrac{\text{sen}\,\varphi}{\text{sen}\,\sigma}\,du_2 = 0\,. \end{cases}$$

[1] *Sopra alcune nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali.* (Annali di matematica. Serie II, tom. XVIII).

I primi membri di queste ammettono per le (II) i rispettivi fattori integranti $e^{-\psi}$, e^{ψ}, e se poniamo

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}\int e^{-\psi}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta\, du_1}{\cos\sigma} - \frac{\operatorname{sen}\varphi\, du_2}{\operatorname{sen}\sigma}\right) \\ v = \frac{1}{2}\int e^{\psi}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta\, du_1}{\cos\sigma} + \frac{\operatorname{sen}\varphi\, du_2}{\operatorname{sen}\sigma}\right) \end{cases}$$

ne risulta

$$\operatorname{sen}\theta\, du_1 = \cos\sigma\,(e^{\psi}\, du + e^{-\psi}\, dv)$$
$$\operatorname{sen}\varphi\, du_2 = \operatorname{sen}\sigma\,(-\, e^{\psi}\, du + e^{-\psi}\, dv)\,,$$

da cui quadrando e sommando

$$ds'^2 = e^{2\psi}\, du^2 + 2\cos 2\sigma\, du\, dv + e^{-2\psi}\, dv^2\,,$$

che ha appunto la forma caratteristica indicata con $EG = 1$, $F = \text{cost.}$

In generale il problema di trovare sulla sfera i doppî sistemi ortogonali di linee le cui trajettorie isogonali, sotto un conveniente angolo costante, dividono la sfera in parallelogrammi infinitesimi equivalenti si risolve nel modo geometrico più semplice ricorrendo alla teoria delle congruenze pseudosferiche (ved. m. c.). Con questa teoria vengono quindi a collegarsi gli attuali sistemi tripli ortogonali; ed anzi dalle trasformazioni di Bäcklund delle congruenze pseudosferiche (o ciò che torna lo stesso dal teorema di permutabilità) possono dedursi dei nuovi metodi di trasformazione pei nostri sistemi tripli ortogonali in altri della stessa specie, ma con diversa immagine sferica. Si è così ricondotti alla teoria dei *sistemi obliqui di Weingarten*, di cui tratta una mia Memoria del 1912 negli Annali di matematica (t. 19°, ser. 3ª). Ma gli sviluppi relativi a queste nuove trasformazioni oltrepasserebbero i limiti di una breve Nota e debbono venire riservati ad una pubblicazione ulteriore.

Anatomia-fisiologica. — *La dottrina dei moti delle sensitive. Note anatomo-fisiologiche* di A. Borzì e G. Catalano.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

Matematica. — *Il teorema di Eulero per le funzioni di linea omogenee.* Nota della dott.ssa ELENA FREDA, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. La funzione di linea $F|[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})]|$ è omogenea di grado r (r numero reale qualsiasi) se si ha:

$$F|[\mu \cdot f(\overset{1}{\underset{0}{x}})]| = \mu^r F|[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})]|$$

qualunque sia il valore del parametro μ.

Ammettiamo che la funzione F possa anche eventualmente avere (quando non sia detto esplicitamente il contrario) dei punti eccezionali $x_1 x_2 \dots x_n$, tali che la parte del primo ordine della variazione di F, corrispondente ad una variazione infinitesima $\delta f(x)$, data a $f(x)$ in tutto l'intervallo 01, abbia la forma:

$$\delta F = \int_0^1 F'|[(\overset{1}{\underset{0}{x}})\xi]|\,\delta f(\xi)\,d\xi + \sum_1^n {}_s A_s|[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})]|\,\delta f(x_s) \;[1].$$

Le stesse ipotesi valgono per tutte le funzioni di linea che considereremo nei paragrafi successivi.

Dalla definizione seguono alcune delle proprietà di cui godono le funzioni di linea omogenee, proprietà corrispondenti a quelle delle funzioni omogenee di n variabili.

2. Sia data la funzione $F|[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})]|$ omogenea di grado r. Proponiamoci di calcolare il risultato che si ottiene sostituendo nel differenziale (o variazione prima) di F, a $\delta f(x)$ $f(x)$.

Per avere il differenziale di F basta calcolare

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} F|[f(x) \overset{1}{\underset{0}{+}} \lambda\, \delta f(x)]| \right\}_{\lambda=0}.$$

Invece di fare prima questa derivazione e poi la detta sostituzione, possiamo sostituire senz'altro in $F|[f(x) \overset{1}{\underset{0}{+}} \lambda\, \delta f(x)]|$ a $\delta f(x)$ $f(x)$, e poi calcolare

[1] Sulle diverse specie di punti eccezionali di una funzione di linea, cfr. Volterra, *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles*, pag. 26 (Paris, Gauthier-Villars, 1913).

la derivata rispetto a λ per $\lambda = 0$. Otterremo evidentemente lo stesso risultato. Basta dunque calcolare

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathrm{F} \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \cdot (1 + \lambda) \right] \right| \right\}_{\lambda=0} .$$

Ma poichè F è omogenea di grado r, si ha:

$$\mathrm{F} \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \cdot (1 + \lambda) \right] \right| = (1 + \lambda)^r \, \mathrm{F} \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \right] \right| ,$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathrm{F} \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) (1 + \lambda) \right] \right| \right\}_{\lambda=0} = r \, \mathrm{F} \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \right] \right| .$$

Per le funzioni di linea si ha dunque il seguente teorema, corrispondente al teorema di Eulero pe le funzioni omogenee di n variabili:

Se nel differenziale di una funzione di linea omogenea, $\mathrm{F} \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \right] \right|$, *si sostituisce a* $\delta f(x)$ $f(x)$, *si ottiene la funzione stessa moltiplicata per il grado di omogeneità.*

Se $\mathrm{F} \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \right] \right|$ è una funzione senza punti eccezionali, si ha:

$$\delta \mathrm{F} = \int_0^1 \mathrm{F}' \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \, \xi \right] \right| \delta f(\xi) \, d\xi .$$

Dunque:

Una funzione di linea $\mathrm{F} \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \right] \right|$ *senza punti eccezionali, omogenea di grado* r, *soddisfa all'equazione alle derivate funzionali*:

$$\int_0^1 \mathrm{F}' \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \, \xi \right] \right| f(\xi) \, d\xi = r \, \mathrm{F} \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \right] \right| .$$

Quest'ultimo risultato corrisponde al teorema di Eulero nella sua forma ordinaria. Il teorema precedentemente enunciato è più generale, poichè vale anche per le funzioni di linea con punti eccezionali della specie detta.

3. Verifichiamo ora se valga per le funzioni di linea anche il reciproco del teorema di Eulero.

Consideriamo una funzione di linea $\mathrm{F} \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \right] \right|$ tale che sostituendo nel suo differenziale a $\delta f(x)$ $f(x)$ si ottenga $r \cdot \mathrm{F} \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \right] \right|$; tale cioè che:

$$\text{(A)} \qquad \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathrm{F} \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \cdot (1 + \lambda) \right] \right| \right\}_{\lambda=0} = r \, \mathrm{F} \left| \left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}) \right] \right| .$$

Evidentemente si avrà pure

$$\text{(A')}\qquad \left\{ \frac{\partial}{\partial\lambda} \mathrm{F} \left| \left[\mu \cdot f\binom{1}{x}_{0} \cdot (1+\lambda) \right] \right| \right\}_{\lambda=0} = r\,\mathrm{F} \left| \mu \cdot f\binom{1}{x}_{0} \right| .$$

Per vedere come la funzione $\mathrm{F}\left|\left[\mu \cdot f\binom{1}{x}_{0}\right]\right|$ dipenda da μ, calcoliamo la sua derivata rispetto a μ.

Come facilmente si verifica, si ha:

$$\frac{\partial}{\partial\mu} \mathrm{F} \left| \left[\mu \cdot f\binom{1}{x}_{0} \right] \right| = \left\{ \frac{\partial}{\partial\lambda} \mathrm{F} \left| \left[(\mu+\lambda) \cdot f\binom{1}{x}_{0} \right] \right| \right\}_{\lambda=0} .$$

Ossia

$$\frac{\partial}{\partial\mu} \mathrm{F} \left| \left[\mu \cdot f\binom{1}{x}_{0} \right] \right| = \left\{ \frac{\partial}{\partial\lambda} \mathrm{F} \left| \left[\mu \cdot f\binom{1}{x}_{0} \cdot \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \right] \right| \right\}_{\lambda=0} .$$

Da quest'ultima uguaglianza e dalla (A′) segue:

$$\frac{\partial}{\partial\mu} \mathrm{F} \left| \left[\mu \cdot f\binom{1}{x}_{0} \right] \right| = \frac{r}{\mu} \mathrm{F} \left| \left[\mu \cdot f\binom{1}{x}_{0} \right] \right| .$$

Quindi:

$$\mathrm{F} \left| \left[\mu \cdot f\binom{1}{x}_{0} \right] \right| = \mu^{r}\, \mathrm{F} \left| \left[f\binom{1}{x}_{0} \right] \right| .$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione di linea $\mathrm{F}\left|\left[f\binom{1}{x}_{0}\right]\right|$ *sia omogenea di grado r è che sostituendo nel suo differenziale a $\delta f(x)$ $f(x)$ si ottenga la funzione stessa moltiplicata per r.*

Per una funzione senza punti eccezionali, tale condizione è equivalente all'altra di essere un integrale dell'equazione alle derivate funzionali:

$$\int_0^1 \mathrm{F}' \left| \left[f\binom{1}{x}_{0}\ \xi \right] \right| f(\xi)\, d\xi = r\, \mathrm{F} \left| \left[f\binom{1}{x}_{0} \right] \right| \ \text{(}^1\text{)}.$$

4. Dalla definizione stessa di funzione di linea omogenea, segue immediatamente che la più generale funzione di linea omogenea di grado r può ottenersi moltiplicando la più generale funzione di linea omogenea di grado zero per una particolare funzione di linea omogenea di grado r.

La più generale funzione di linea omogenea di grado zero è data da:

$$\Phi \left| \left[\frac{f\binom{1}{x}_{0}}{\int_0^1 f(\xi)\, d\xi} \right] \right| \qquad (\Phi \text{ funzione arbitraria}) \ (^2).$$

[1] Per il caso $r = 0$, cfr. Volterra, *Sulle equazioni alle derivate funzionali*, § 2, Rend. della R. Accad. dei Lincei, 15 marzo 1914.

[2] Volterra, loc. cit., § 2.

Possiamo dunque prendere come espressione generale di una funzione di linea omogenea di grado r la seguente:

$$\text{(I)} \qquad \mathrm{F}\left|\left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})\right]\right| = \Phi\left|\left[\frac{f(\overset{1}{\underset{0}{x}})}{\int_0^1 f(\xi)\,d\xi}\right]\right| \cdot$$

$$\cdot \int_0^1\int_0^1 \cdots \int_0^1 f^{r_1}(\xi_1)\, f^{r_2}(\xi_2) \ldots f^{r_s}(\xi_s)\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_s$$

$$(\Phi \text{ funzione arbitraria; } r_1 + r_2 + \cdots + r_s = r).$$

Da quanto si è detto nei paragrafi precedenti, segue che, se Φ non ha alcun punto eccezionale nell'intervallo 01, la (I) ci dà l'integrale generale dall'equazione alle derivate funzionali:

$$\text{(II)} \qquad \int_0^1 \mathrm{F}'\left|\left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})\,\xi\right]\right| f(\xi)\,d\xi = r\,\mathrm{F}\left|\left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})\right]\right|.$$

Tutto quanto si è dimostrato per le funzioni di una sola linea si estende immediatamente alle funzioni di più linee.

5. L'equazione alle derivate funzionali

$$\text{(III)} \qquad \int_0^1 \mathrm{F}'\left|\left[\varphi(\overset{1}{\underset{0}{x}})\,\xi\right]\right| \theta(\varphi(\xi))\,d\xi = r\,\mathrm{F}\left|\left[\varphi(\overset{1}{\underset{0}{x}})\right]\right|$$

(F funzione incognita di linea, senza punti eccezionali; θ funzione ordinaria, nota) si può ricondurre alla (II) ponendo:

$$\text{(IV)} \qquad f(x) = e^{\int^{\varphi(x)} \frac{d\psi}{\theta(\psi)}}.$$

La (I) del paragrafo precedente (nell'ipotesi che Φ non abbia punti eccezionali) ci dà dunque, tenendo conto della (IV), l'integrale generale della (III).

Consideriamo ora l'equazione:

$$\text{(V)} \qquad \int_0^1 \Omega\left(\mathrm{F}'\left|\left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})\,\xi\right]\right|\right) f(\xi)\,d\xi = r\,\mathrm{F}\left|\left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})\right]\right|$$

(Ω funzione ordinaria).

Poniamo $\mathrm{F}'\left|\left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})\,\xi\right] = p(\xi)\right.$. Sostituiamo alle variabili $f(\xi)$ le variabili $p(\xi)$, e alla funzione $\mathrm{F}\left|\left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})\right]\right|$ la funzione $\Psi\left|\left[p(\overset{1}{\underset{0}{x}})\right]\right|$ definita dalla relazione:

$$\text{(B)} \qquad \mathrm{F}\left|\left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})\right]\right| = \int_0^1 p(\xi)\,f(\xi)\,d\xi - \Psi\left|\left[p(\overset{1}{\underset{0}{x}})\right]\right| \ (^1).$$

(1) Questa trasformazione corrisponde a quella di Legendre per le funzioni di n variabili.

Se F non ha punti eccezionali, il suo differenziale è dato da

$$\delta F = \int_0^1 p(\xi)\, \delta f(\xi)\, d\xi ,$$

e per la (B) si ha:

$$\delta \Psi = \int_0^1 f(\xi)\, \delta p(\xi)\, d\xi .$$

Dunque:

$$\Psi' |[p(\overset{1}{\underset{0}{x}})\, \xi]| = f(\xi) .$$

Poniamo:

$$r p(\xi) - \Omega(p(\xi)) = \theta(p(\xi)) .$$

La (V) si riduce allora, mediante la detta trasformazione, all'equazione:

$$\int_0^1 \Psi' |[p(\overset{1}{\underset{0}{x}})\, \xi]|\, \theta(p(\xi))\, d\xi = r \Psi |[p(\overset{1}{\underset{0}{x}})]| .$$

Questa equazione è del tipo (III); di essa sappiamo dunque costruire, applicando il teorema di Eulero, l'integrale generale.

Costruito questo integrale, se si risolve rispetto a $p(x)$ l'equazione (di tipo integrale) $f(\xi) = \Psi' |[p(\overset{1}{\underset{0}{x}})\, \xi]|$ e si sostituisce nella (B) a p la sua espressione in funzione di f, si ha l'integrale generale della (V).

6. Si può anche ricondurre alla (II) (in cui sia posto $r = 1$) ogni equazione del tipo:

$$\text{(VI)} \qquad \int_0^1 F' |[\varphi(\overset{1}{\underset{0}{x}})\, \xi]|\, \Theta |[\varphi(\overset{1}{\underset{0}{x}})\, \xi]|\, d\xi = \Psi |[\varphi(\overset{1}{\underset{0}{x}})]|\, F |[\varphi(\overset{1}{\underset{0}{x}})]|$$

(F funzione incognita senza punti eccezionali; Θ, Ψ funzioni note) quando di essa si conosca un'infinità continua d'integrali, ossia un integrale contenente un parametro che possa assumere tutti i valori compresi, per es., nell' intervallo 01.

Se $F_0 |[\varphi(\overset{1}{\underset{0}{x}})\, \eta]|$ è il detto integrale, basta porre:

$$\text{(VII)} \qquad f(\eta) = F_0 |[\varphi(\overset{1}{\underset{0}{x}})\, \eta]| .$$

La più generale funzione omogenea di primo grado, e senza punti eccezionali, dipendente da tutti i valori di $f(\eta)$ nell' intervallo 01 ci dà dunque, tenendo conto della (VII), l'integrale generale della (VI),

Questo risultato corrisponde all'altro, valido per le funzioni di n variabili: noti n integrali particolari di un'equazione alle derivate parziali del primo ordine, lineare ed omogenea rispetto alla funzione incognita e alle sue derivate, l'integrale generale è dato da un'arbitraria funzione omogenea di primo grado di quei n integrali.

Matematica. — *Sulle equazioni integrali.* Nota del dott. LUCIANO ORLANDO, presentata del Corrispondente A. DI LEGGE.

Sia

$$(1)\qquad \varphi(x) = \mathrm{F}(x) + \int_0^x [p_1(x)\, q_1(\xi) + p_2(x)\, q_2(\xi) + \cdots \\ \cdots + p_n(x)\, q_n(\xi)]\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

un'equazione integrale del tipo di Volterra; la funzione φ è incognita, e le altre sono funzioni note.

Noi vogliamo qui far vedere come si possa risolvere quest'equazione, adoperando un mio metodo, che ho largamente applicato, in numerosi altri miei lavori, alle equazioni del tipo di Fredholm.

Supponiamo di voler esplorare le vicinanze di un punto regolare a, e che Φ sia un numero positivo non superato da $|\varphi|$ in tali vicinanze.

Scriviamo l'equazione (1) come segue:

$$(2)\qquad \varphi(x) = \mathrm{F}(x) + \int_0^a [p_1(x)\, q_1(\xi) + \cdots + p_n(x)\, q_n(\xi)]\, \varphi(\xi)\, d\xi \\ + \int_a^x [p_1(x)\, q_1(\xi) + \cdots + p_n(x)\, q_n(\xi)]\, \varphi(\xi)\, d\xi\,.$$

Se poniamo

$$(3)\qquad m_\nu = \int_0^a q_\nu(\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi\,,$$

dove ν rappresenta i numeri $1, 2, \ldots, n$, e chiamiamo $\mathrm{K}(x, \xi)$ il nucleo $p_1(x)\, q_1(\xi) + p_2(x)\, q_2(\xi) + \cdots + p_n(x)\, q_n(\xi)$, noi potremo scrivere

$$(4)\qquad \varphi(x) = p_1(x)\, m_1 + p_2(x)\, m_2 + \cdots + p_n(x)\, m_n + \int_a^x \mathrm{K}(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi\,.$$

Le costanti m_ν sono incognite.

Ed ora, secondo il metodo d'approssimazioni successive, al quale ho prima alluso, scriviamo

$$\varphi + \varepsilon_1 = \mathrm{F} + \Sigma pm \qquad \varphi + \varepsilon_2 = \mathrm{F} + \Sigma pm + \int_a^x \mathrm{K} \cdot (\varphi + \varepsilon_1)\, d\xi$$

$$\varphi + \varepsilon_3 = \mathrm{F} + \Sigma p\, m + \int_a^x \mathrm{K} \cdot (\varphi + \varepsilon_2)\, d\xi\,, \ldots$$

Noi verremo così a fare i successivi errori

$$\varepsilon_1 = -\int_a^x \mathrm{K}\varphi d\xi \quad , \quad \varepsilon_2 = \int_a^x \mathrm{K}\,\varepsilon_1\, d\xi \quad , \quad \varepsilon_3 = \int_a^x \mathrm{K}\,\varepsilon_2\, d\xi \,, \ldots$$

Se riteniamo fissato un numero positivo ϱ, tale da superare $|\mathrm{K}|$ nelle vicinanze di a, e chiamiamo M il numero positivo fisso $\varrho\Phi$, allora noi sceglieremo l'ampiezza $(a\,,x)$ tale, per esempio, da non superare $0,1\,\mathrm{M}$; e perverremo ad una serie convergentissima, che esprimerà φ contenendo linearmente le incognite m_ν. La (3) ci darà allora il modo di avere n equazioni di primo grado fra le n incognite m_ν; queste si potranno ricavare da tale sistema.

Il metodo si estende agevolmente al caso che il nucleo non sia

$$p_1(x)\, q_1(\xi) + p_2(x)\, q_2(\xi) + \cdots + p_n(x)\, q_n(\xi)\,,$$

ma ne differisca per una funzione $\theta(x\,,\xi)$, la quale oscilli in limiti sufficientemente ristretti.

Lo svolgimento di ciò che qui abbiamo molto sinteticamente esposto, e l'estensione a casi alquanto più generali di quelli consentiti dalle nostre implicite ipotesi, costituiscono un facile lavoro, sul quale non vogliamo insistere. Mi preme soltanto stabilire che il mio metodo si estende benissimo anche alle equazioni con limiti variabili, e conduce ad una serie di agevole algoritmo, e convergente con rapidità che si può subito prestabilire.

Matematica. — *Sopra un'operazione funzionale atta a trasformare i potenziali logaritmici in simmetrici.* Nota della signorina Lina Bianchini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Fra i potenziali binari (quelli cioè che si possono far dipendere da due sole coordinate) i logaritmici occupano un posto speciale, per le molteplici e semplici applicazioni di cui sono suscettibili, in quanto vi si può impiegare il metodo delle funzioni di variabile complessa, e trar partito dall'agile sussidio della rappresentazione conforme.

Per gli altri tipi, in particolare pei potenziali simmetrici, che sono altrettanto e forse più importanti dal punto di vista applicativo, pur potendosi definire le funzioni associate, come nel caso logaritmico, manca un analogo sussidio, onde è assai più ristretta la categoria di questioni che, per essi, si sanno risolvere in modo esauriente.

Stando così le cose, si presenta interessante indagare il legame fra le dette due specie di potenziali, nella mira di valersene per trasportare ai potenziali simmetrici alcuni dei risultati già conseguiti pei logaritmici.

In due Note (la presente e un'altra che le farà tosto seguito) sorte da un suggerimento del prof. Levi-Civita, mi propongo di far vedere come vi sia corrispondenza biunivoca fra le coppie (reali e regolari) di funzioni associate simmetriche (u, v) e le coppie (pure reali) di funzioni associate logaritmiche (φ, ψ), vincolate alla condizione $\psi = 0$ sulla retta, che è asse di simmetria per (u, v).

In altri termini ogni funzione di variabile complessa $\varphi + i\psi$, reale sull'asse reale, dà luogo ad una coppia (u, v), e reciprocamente.

L'espressione analitica di tale corrispondenza (funzionale lineare) è fornita da integrali definiti semplici, e invertibili in modo semplice, mercè il teorema di Abel. A ciò si perviene combinando opportunamente la formula di Whittaker, che dà l'integrale generale dell'equazione di Laplace [1], con altre già rilevate dal Beltrami [2]. Immediato corollario della corrispondenza funzionale, or ora specificata, è l'esistenza, per i potenziali simmetrici, di un gruppo di trasformazioni che ha la stessa generalità del gruppo conforme. La sua natura funzionale ne rende però assai meno efficace l'impiego di quel che non avvenga nel caso logaritmico. Per la stessa ragione i problemi al contorno, relativi ad una specie di potenziali, non si trasformano, almeno in generale, per effetto delle formule di corrispondenza, in problemi analoghi relativi all'altra specie. Così l'obbiettivo, di portare, mediante trasformazioni, la teoria dei potenziali simmetrici allo stesso grado di sviluppo consentito dai logaritmici, non sarà completamente raggiunto, ma qualche caso, come, ad es., il problema del disco, di cui mi occuperò in Note successive, offrirà una facile e vantaggiosa applicazione.

1. — Richiamo e nuova dimostrazione della formula di Whittaker.

La più generale soluzione (regolare in un certo campo S) dell'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

può essere rappresentata con una espressione del tipo

$$(1) \qquad u = \int_0^{2\pi} f(z + ix\cos\lambda + iy\,\mathrm{sen}\,\lambda, \lambda)\, d\lambda = \int_0^{2\pi} f(l, \lambda)\, d\lambda,$$

[1] Whittaker, *On the partial differential equations of math. physics*, Mathematische Annalen, 57 Band, 1903.

[2] Beltrami, Opere matematiche, tomo 3°, *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche*. E ibid., *Intorno ad un teorema di Abel e ad alcune sue applicazioni*. Debbo notare che già il prof. Burgatti nella sua Nota, *Sui potenziali binarii* (Rend. della R. Accad. di Bologna, 1909), aveva ricavato un'espressione dei potenziali simmetrici dalla formula di Whittaker, senza però trattare la questione che forma oggetto del presente scritto.

dove f è una funzione generica dei due argomenti

$$l = z + ix \cos\lambda + iy \operatorname{sen}\lambda \quad \text{e} \quad \lambda ,$$

periodica rispetto a λ col periodo 2π e regolare per valori reali di λ.

La dimostrazione di questo importante risultato può darsi, in modo alquanto diverso da quello indicato da Whittaker, ricorrendo alla rappresentazione di una qualsivoglia funzione armonica u, regolare entro un campo S, mediante la formula

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{du}{dn}\frac{1}{r}\right) d\sigma , \tag{2}$$

dove σ designa il contorno di S, n la sua normale in un punto generico ξ, η, ζ del contorno stesso, ed r la distanza fra il punto potenziato (x, y, z), e il punto potenziante (ξ, η, ζ).

Basta all'uopo osservare con Whittaker che si ha identicamente:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{l - \varLambda} , \tag{3}$$

dove, come s'è detto,

$$l = z + ix \cos\lambda + iy \operatorname{sen}\lambda ;$$

e

$$\varLambda = \zeta + i\xi \cos\lambda + i\eta \operatorname{sen}\lambda ,$$

talchè in primo luogo il potenziale elementare $\frac{1}{r}$ rimane effettivamente definito dalla (1), prendendovi per f

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{l - \varLambda} .$$

Ne consegue, chiamando α, β, γ i coseni direttori della normale n,

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dn} = \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\alpha + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\beta + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\gamma = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{i\alpha\cos\lambda + i\beta \operatorname{sen}\lambda + \gamma}{(l - \varLambda)^2} d\lambda .$$

Tale derivata risulta pure nel tipo (1), essendo

$$f = f_2 = \frac{1}{2\pi}\frac{i\alpha\cos\lambda + i\beta\operatorname{sen}\lambda + \gamma}{(l - \varLambda)^2} .$$

Sostituendo nella (2) in luogo di $\frac{d\frac{1}{r}}{dn}$ e di $\frac{1}{r}$ i loro valori, e invertendo le integrazioni rispetto a λ e a σ, risulta senz'altro che, per la u generica, si ha

$$f = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(u f_2 - \frac{du}{dn} f_1\right) d\sigma ,$$

quindi essa è rappresentabile sotto la forma (1),

c. d. d.

2. — Corollario relativo ai potenziali simmetrici.

La dimostrazione testè esposta ha il vantaggio di fornire, con metodo analogo, anche la più generale espressione di un potenziale simmetrico, attorno all'asse delle z, sotto la forma

$$(4) \qquad u = \int_0^{2\pi} f(z + ix\cos\lambda + iy\,\mathrm{sen}\,\lambda)\, d\lambda = \int_0^{2\pi} f(l)\, d\lambda ,$$

che non differisce dalla (1) se non per il fatto che f va ritenuto indipendente da λ.

Per rendersene conto conviene riprendere la (2), nell'ipotesi che vi sia simmetria rispetto all'asse Oz: ben s'intende sia per il potenziale u, che per la superficie σ, entro la quale lo si suppone regolare.

Si indichi con s un generico meridiano di σ, con ds il relativo elemento (circostante al generico punto potenziante ξ, η, ζ) e si ponga

$$x = \varrho \cos\omega \quad , \quad y = \varrho\,\mathrm{sen}\,\omega ,$$
$$\xi = \varrho_1 \cos\omega_1 \quad , \quad \eta = \varrho_1\,\mathrm{sen}\,\omega_1 .$$

Manifestamente $u(x, y, z)$ dovrà risultare funzione dei soli argomenti ϱ e z; e del pari $u(\xi, \eta, \zeta)$, $\frac{du}{dn}$ dipenderanno dai soli argomenti ϱ_1 e ζ.

Con ciò (essendo indipendente da ω_1 anche il simbolo di derivazione rapporto ad n), l'integrale che sta nel secondo membro della (2) potrà essere scritto:

$$(5) \qquad \frac{1}{4\pi}\int_\sigma ds \left\{ u \frac{d}{dn}\int_0^{2\pi} \frac{1}{r}\, d\omega_1 - \frac{du}{dn}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}\, d\omega_1 \right\} .$$

Ora se nell' $\int_0^{2\pi} \frac{1}{r}\, d\omega_1$ (potenziale d'una circonferenza omogenea) sostituiamo per $\frac{1}{r}$ il valore dato dalla (3), e invertiamo le integrazioni rispetto a λ e

ad ω_1, si ha:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{r} d\omega_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{2\pi} \frac{d\omega_1}{l - A} .$$

ove

$$A = \varrho_1 \{1 + i \cos(\omega_1 - \lambda)\} .$$

In luogo di ω_1, assumiamo come variabile di integrazione $\tau = \omega_1 - \lambda$. Verrà

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\omega_1}{l - A} = \int_\lambda^{2\pi+\lambda} \frac{d\tau}{l - \varrho_1(1 + i \cos\tau)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{l - \varrho_1(1 + i \cos\tau)} ,$$

da cui risulta che l' $\int_0^{2\pi} \frac{1}{r} d\omega_1$, è rappresentabile sotto la forma (1) senza che f dipenda esplicitamente da λ. Se ne inferisce che anche l'espressione (5) di u appartiene in definitiva allo stesso tipo (4),

c. d. d.

Rimane pertanto acquisito (posto, nella (4), $x = \varrho \cos\omega$, $y = \varrho$ sen ω, e assunta $\lambda - \omega = \vartheta$ al posto di λ come variabile corrente d' integrazione) che ogni potenziale simmetrico $u(z, \varrho)$ può porsi sotto la forma:

$$\int_0^{2\pi} f(z + i\varrho \cos\vartheta)\, d\vartheta .$$

Scrivendo materialmente x al posto di z, e y al posto di ϱ, con che, nel piano rapresentativo (x, y), Ox funge da asse di simmetria, si ha per i potenziali in questione, cioè per un qualsiasi integrale regolare dell'equazione

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 ,$$

l'espressione

$$u = \int_0^{2\pi} f(x + iy \cos\vartheta)\, d\vartheta .$$

L' integrale del secondo membro può essere ridotto all' intervallo $0, \pi$. Infatti:

$$u = \int_0^{2\pi} f d\vartheta = \int_0^{\pi} f d\vartheta + \int_\pi^{2\pi} f(x + iy \cos\vartheta)\, d\vartheta ,$$

e, posto nel secondo integrale $\vartheta' = 2\pi - \vartheta$, è

$$u = \int_0^{\pi} f d\vartheta - \int_\pi^{0} f(x + iy \cos\vartheta')\, d\vartheta' .$$

Ossia

$$u = \int_0^{\pi} f(x + iy \cos\vartheta)\, d\vartheta ,$$

qualora s' indichi ancora con f la funzione, *a priori* arbitraria, $2f$.

3. — La funzione coniugata v.

Dalle equazioni di coniugio relative alle funzioni associate simmetriche

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= \quad y \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -y \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned} \right.$$

si ricava in primo luogo

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -i \int_0^\pi f' y \cos \vartheta \, d\vartheta,$$

f' designando la derivata di f rispetto al suo argomento $x + iy \cos \vartheta$.

Ne consegue

$$v = -i \int_0^\pi f y \cos \vartheta \, d\vartheta + \mathrm{Y}, \tag{6}$$

dove Y è costante rispetto ad x, e quindi *a priori* una funzione della sola y. Vedremo ora che Y risulta costante anche rispetto ad y. Infatti, dalla (6) si ha

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -i \int_0^\pi f \cos \vartheta \, d\vartheta + \int_0^\pi y \cos^2 \vartheta \, f' d\vartheta + \mathrm{Y}',$$

e siccome, per la prima equazione di coniugio,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \int_0^\pi y f' d\vartheta,$$

così (scrivendo $1 - \operatorname{sen}^2 \vartheta$ al posto di $\cos^2 \vartheta$) si ricava

$$-i \int_0^\pi f \cos \vartheta \, d\vartheta - \int_0^\pi y \operatorname{sen}^2 \vartheta \, f' d\vartheta + \mathrm{Y}' = 0 .$$

Ma

$$- \int_0^\pi y \operatorname{sen}^2 \vartheta \, f' d\vartheta = -i \int_0^\pi \frac{df}{d\vartheta} \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta =$$

$$= \left[-i f \operatorname{sen} \vartheta \right]_0^\pi + i \int_0^\pi f \cos \vartheta \, d\vartheta = i \int_0^\pi f \cos \vartheta \, d\vartheta,$$

per conseguenza

$$\mathrm{Y}' = 0 ,$$

c. d. d.

La costante additiva Y è inessenziale. Potremo quindi assumerla senz'altro eguale a zero, e avremo complessivamente le cercate espressioni funzionali d'ogni coppia di associate simmetriche sotto la forma:

$$\left\{ \begin{aligned} u &= \int_0^\pi f(x + iy \cos \vartheta) \, d\vartheta , \\ v &= -i \int_0^\pi f(x + iy \cos \vartheta) \, y \cos \vartheta \, d\vartheta . \end{aligned} \right. \tag{7}$$

Fisica matematica. — *Sulla distribuzione della massa nell'interno d'un corpo in corrispondenza a un'assegnata azione esterna.* Nota di Corradino Mineo, presentata dal Socio P. Pizzetti.

1. Il chmo prof. Pizzetti, in una sua fondamentale Memoria *Intorno alle possibili distribuzioni della massa nell'interno della Terra* (¹), ha stabilito parecchi metodi per costruire corpi d'attrazione esterna nulla, relativi allo spazio τ limitato da una superficie chiusa S. Uno si fonda su questa semplicissima considerazione. Sia $f(x, y, z)$ una funzione continua in τ, insieme con le sue derivate prime, e dotata inoltre di derivate seconde atte all'integrazione in τ: allora condizione necessaria e sufficiente affinchè la f sia la funzione potenziale *interna* d'un corpo situato dentro τ, che non esercita azione newtoniana all'esterno, è che essa si annulli insieme con la sua derivata normale in ogni punto del contorno S; e la densità del corpo sarà data da $\Delta_2 f : -4\pi$.

In particolare, se

$$s = 0 \tag{1}$$

è l'equazione della S, e u una funzione arbitraria dei punti di τ, saranno corpi d'attrazione esterna nulla quelli dentro τ la cui densità è espressa dalla funzione $\Delta_2(us^2)$ (²).

Nel caso che il corpo situato in τ eserciti un'azione esterna non nulla, il compianto prof. Lauricella — che anch'egli, dopo il Pizzetti, s'ebbe a occupare della questione — mostrò come, prestabilita l'azione esterna, si possa costruire la più generale funzione potenziale interna del corpo, e quindi la più generale densità, servendosi della seconda funzione del Green (³).

Ora noi vogliamo mostrare come, modificando in modo molto semplice la fondamentale considerazione del Pizzetti, si possano per altra via ottenere quante si vogliano distribuzioni della massa, corrispondenti a un'assegnata azione esterna non nulla.

(¹) Annali di matematica pura ed applicata, tomo XVII, 1910, pp. 225-258.

(²) Per un'estensione di questo risultato, vedi Crudeli, *I corpi d'attrazione nulla*, questi Rendiconti, vol. XXI, 1912, fasc. 7°. Noi qui ci limitiamo al caso che u e s sieno funzioni continue, insieme con le derivate prime, in tutto il dominio τ, compresa la frontiera S, e che inoltre ammettano derivate seconde atte all'integrazione in τ.

(³) Lauricella, *Sulla funzione potenziale di spazio corrispondente ad una assegnata azione esterna*, questi Rendiconti, vol. XX, 1911, fasc. 2°.

2. Sia

$$r = \mathrm{MP} \tag{2}$$

la distanza tra un punto qualunque M della S e un punto P del dominio τ (non esclusa la frontiera). Sia sempre (1) l'equazione della S e u una funzione dei punti di τ. Applicando alla funzione us la seconda formola del Green, risulta facilmente

$$\int_\tau \frac{\Delta_2(us)}{r}\, d\tau = \int_{\mathrm{S}} \left(us \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{d}{dn}(us) \right) d\mathrm{S}\,, \tag{3}$$

dove il verso positivo della normale è quello della semiretta penetrante in τ. Ma sulla S è $us = 0$; poi potremo supporre (cambiando eventualmente di segno la s) che i coseni della fissata direzione positiva della normale siano dati da

$$\cos \widehat{nx} = \frac{-1}{\sqrt{\Delta_1 s}} \frac{\partial s}{\partial x}\,, \quad \cos \widehat{ny} = \frac{-1}{\sqrt{\Delta_1 s}} \frac{\partial s}{\partial y}\,, \quad \cos \widehat{nz} = \frac{-1}{\sqrt{\Delta_1 s}} \frac{\partial s}{\partial z}\,, \tag{4}$$

ritenendo presa la determinazione positiva del radicale ed essendo

$$\Delta_1 s = \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2 . \tag{5}$$

Allora la (3) si scrive.

$$\int_\tau \frac{\Delta_2(us)}{r}\, d\tau = \int_{\mathrm{S}} \frac{u\sqrt{\Delta_1 s}}{r}\, d\mathrm{S}\,. \tag{6}$$

Questa mostra che *una massa distribuita in τ con densità $\Delta_2(us)$ esercita la stessa azione esterna che se distesa in semplice strato sul contorno* S *con densità $u\sqrt{\Delta_1 s}$*.

Nota dunque in superficie la funzione potenziale V del corpo, cioè nota la sua azione esterna, se riesciamo a risolvere l'equazione integrale di prima specie del tipo Fredholm

$$\int_{\mathrm{S}} \frac{\varrho(\mathrm{P})}{r}\, d\mathrm{S} = \mathrm{V}(\mathrm{M})\,, \tag{7}$$

avremo la densità ϱ del semplice strato superficiale, che esercita l'assegnata azione esterna; poi, posto

$$u_{\mathrm{S}} = \frac{\varrho}{\sqrt{\Delta_1 s}}\,, \tag{8}$$

non avremo che a prolungare in τ, con legge qualunque, la funzione u_s dei punti della S: se u è un tal prolungamento, cioè una funzione continua dei punti di τ, che sul contorno coincide con u_s, allora

$$h = \Delta_2(us) \tag{9}$$

è la densità d'un corpo situato in τ, che esercita l'assegnata azione esterna.

3. La questione è dunque ricondotta a risolvere l'equazione integrale (7). Poniamo

$$W(M) = \int_S \frac{\varrho(P)}{r} dS, \tag{10}$$

dove intenderemo ora che M sia un punto qualunque dello spazio, e P un punto variabile della S. Distingueremo, poi, al solito, con l'indice e i valori d'una funzione in punti esterni alla S; con l'indice i, i valori della funzione in punti interni della S. Essendo V la funzione potenziale del nostro corpo, dalle (7) e (10) segue subito

$$W_e = V_e . \tag{11}$$

Per le note proprietà delle funzioni potenziali di semplice strato, abbiamo

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{dW_e}{dn} - \frac{dW_i}{dn} = 4\pi\varrho(M), \\ &\frac{dW_e}{dn} + \frac{dW_i}{dn} = 2\int_S \varrho(P)\frac{\cos\psi}{r^2} dS ; \end{aligned} \right. \tag{12}$$

dove M è un determinato punto della S, nel quale s'intendono calcolate le due derivate normali, e ψ è l'angolo della retta MP con la seminormale positiva (n. 2) in M alla S. Dalle (11) e (12) segue

$$\frac{dV_e}{dn} = 2\pi\varrho(M) + \int_S \varrho(P)\frac{\cos\psi}{r^2} dS . \tag{13}$$

Se dunque si suppone nota l'azione esterna del corpo, e quindi la derivata normale $\frac{dV_e}{dn}$, la ricerca di ϱ si può anco far dipendere dalla (13), vale a dire da un'equazione integrale di Fredholm di seconda specie. Essa ammette sempre un'unica soluzione continua, giacchè l'equazione omogenea relativa, per le note proprietà delle funzioni potenziali, non può ammettere che la soluzione identicamente nulla. E la soluzione di (13) è soluzione di (7): anzi ne è l'unica, giacchè il nucleo della (7) è chiuso.

4. Notiamo due casi particolari semplicissimi.

Se la S è di livello per il corpo, allora, essendo M un punto qualunque di S, è

$$W(M) = V(M) = \text{costante},$$

e quindi W è pure costante (perchè armonica in τ); sicchè dalla prima delle (12) segue subito, badando alla (11):

$$\varrho(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi} \frac{d\mathrm{V}_e}{dn} ,$$

come è risaputo.

5. Supponiamo in secondo luogo che la S sia una sfera di raggio a col centro nell'origine delle coordinate. Allora

$$\cos \psi = \frac{r}{2a} ,$$

e la (13) diviene

$$\frac{d\mathrm{V}_e}{dn} = 2\pi\varrho + \frac{\mathrm{V}_s}{2a} ,$$

che non è altro se non l'equazione di Lagrangia. Se ne deduce

$$\varrho = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{d\mathrm{V}_e}{dn} - \frac{\mathrm{V}_s}{2a}\right) ; \tag{14}$$

sicchè il nostro problema è per la sfera interamente risoluto.

6. Ma possiamo anco risolvere col nostro metodo un caso importante per la Geodesia, già altrimenti risoluto dal prof. Pizzetti; cioè quello d'un pianeta, che ammetta come *superficie d'equilibrio* esteriore un ellissoide a tre assi d'equazione

$$s = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 , \tag{15}$$

sia inoltre dotato d'un moto rotatorio uniforme, di velocità angolare ω, intorno a uno dei tre assi, per es. intorno all'asse z, e abbia una massa totale M conosciuta. In questo caso, infatti, si deve avere in superficie

$$f\mathrm{V}_s + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \mathrm{C} , \tag{16}$$

dove f è la costante dell'attrazione, e C un'altra costante, che, per le ipotesi fatte, resta univocamente determinata (teorema di Stokes). Ne segue che la risoluzione della (7) è ridotta in questo caso a quella d'un doppio problema di Dirichlet, esterno e interno, rispetto all'ellissoide (15): cioè alla ricerca di due funzioni armoniche W_e e W_i, la prima all'esterno, e la seconda all'interno dell'ellissoide, e che in superficie si riducano a

$$\frac{1}{f}\left(\mathrm{C} - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)\right) ;$$

dopo di che, la prima delle (12) dà ϱ, e si può applicare il procedimento del n. 2.

Questo doppio problema si risolve elegantemente per mezzo delle funzioni armoniche ellissoidali del Morera [1].

Allora la funzione W_e è quella già costruita dal Pizzetti, cioè

$$W_e = V_e = \frac{M}{2} K + k_1 v_1 + k_2 v_2 , \tag{17}$$

essendo K, v_1, v_2 tre determinate funzioni armoniche nello spazio esterno all'ellissoide, e k_1, k_2 due certe costanti [2].

Quanto alla W_i, essa è data dalla formola

$$W_i = \frac{M}{2} K^{(0)} + k_1 v_1^{(0)} + k_2 v_2^{(0)} + \varepsilon \left[v_1^{(0)} + v_2^{(0)} + v_3^{(0)} \right] , \tag{18}$$

dove $K^{(0)}$, $v_1^{(0)}$, $v_2^{(0)}$, $v_3^{(0)}$ sono quel che diventano K, v_1, v_2 e l'analoga v_3, quando in esse, invece della maggior radice della nota equazione cubica, si metta lo zero; mentre la costante ε è data così

$$\varepsilon = \frac{- c^2(k_1 b^2 + k_2 a^2)}{b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2} . \tag{19}$$

Se si calcola ora la differenza delle derivate normali delle due funzioni (17) e (18) e si bada alla prima delle (12), si ottiene senza difficoltà

$$\varrho = \frac{1}{4\pi abc} \left\{ \left(M - 4k_1 \frac{x^2}{a^4} - 4k_2 \frac{y^2}{b^4} \right) p - \frac{4\varepsilon}{p} \right\} , \tag{20}$$

essendo p la distanza dal centro del piano tangente all'ellissoide in un suo punto.

La (8) diventa nel caso della (15):

$$u_s = \frac{1}{8\pi abc} \left\{ \left(M - 4k_1 \frac{x^2}{a^4} - 4k_2 \frac{y^2}{b^4} \right) p^2 - 4\varepsilon \right\} . \tag{21}$$

Si tratta ora di prolungare la u_s all' interno dell'ellissoide. Per avere

[1] Vedi Morera, *Alcune considerazioni relative alla Nota del prof. Pizzetti* ecc., questi Rendiconti, vol. III, 1894, fasc. 8°; e per una teoria autonoma di queste importanti funzioni del Morera, vedi una Nota del prof. Somigliana, nel Circ. mat. di Palermo, tom. XXXI, 1911, fasc. 3°.

[2] Cfr. Pizzetti, *Principii della teoria meccanica della figura dei pianeti*. Pisa, Spoerri, 1913, pp. 69-71.

densità spaziali finite in tutto τ, notiamo che p^2, tenuto conto della (15), si può scrivere così

$$(22) \qquad p^2 = \frac{a^4 b^4 c^2}{a^4 b^4 - (a^2 - c^2)\, b^4 x^2 - (b^2 - c^2)\, a^4 y^2} ,$$

e questa è una funzione continua in tutto τ.

Si può allora prendere in τ:

$$(23) \qquad u_1 = \frac{1}{2\pi abc}\left(\frac{p^2}{4}\,\mathrm{D} - \varepsilon\right) ,$$

essendo

$$(24) \qquad \mathrm{D} = \mathrm{M} - 4\left(k_1 \frac{x^2}{a^4} + k_2 \frac{y^2}{b^4}\right) .$$

In conseguenza si potrà avere una distribuzione di massa nell'interno dell'ellissoide — e quindi infinite (n. 1) — compatibilmente all'assegnata azione esterna, prendendo come densità la funzione $h_1 = \Delta^2(u_1 s)$. Si trova

$$(25) \qquad \pi abc\, h_1 = \left(\frac{\mathrm{D}}{4}\, p^2 - \varepsilon\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) - 4p^2\left(\frac{k_1 x^2}{a^6} + \frac{k_2 y^2}{b^6}\right) +$$
$$+ \mathrm{D}p^4\left(\frac{\alpha x^2}{a^6} + \frac{\beta y^2}{b^6}\right) - p^2 s\left(\frac{k_1}{a^4} + \frac{k_2}{b^4}\right) - 4p^4 s\left(\frac{k_1 \alpha x^2}{a^8} + \frac{k_2 \beta y^2}{b^8}\right) +$$
$$+ \frac{\mathrm{D}p^4 s}{4}\left(\frac{\alpha}{a^4} + \frac{\beta}{b^4}\right) + \mathrm{D}p^6 s\left(\frac{\alpha^2 x^2}{a^8} + \frac{\beta^2 y^2}{b^8}\right) ,$$

essendo

$$(26) \qquad \alpha = \frac{a^2 - c^2}{c^2} \quad , \quad \beta = \frac{b^2 - c^2}{c^2} .$$

Se l'ellissoide è di rotazione intorno a z, non c'è che da fare $a = b$ e $k_1 = k_2$; la V_e, data dalla (17), si riduce a quella calcolata dal prof. Pizzetti; la legge di distribuzione della massa, in questo caso, è abbastanza semplice, ecc. Il caso della sfera si ottiene facendo, in tutte le formole, $a = b = c$: peraltro si ottiene più immediatamente partendo dalla (14) del n. 5.

Fisica. — *Sulla variazione di resistenza del bismuto nel campo magnetico* (1). Nota di G. C. Trabacchi, presentata dal Socio P. Blaserna.

La variazione di resistenza che alcuni metalli subiscono nel campo magnetico assume, come è noto, un valore assai rilevante per il bismuto, cosicchè se ne trae vantaggio per la misura della intensità dei campi come fu proposto da Lenard.

Sulle cause di questa variazione di resistenza, che la teoria elettronica non permette di spiegare, regna ancora grande oscurità ed assumono perciò un certo interesse tutti i fatti che possono portare un po' di luce sull'argomento.

Se si prendono in esame i risultati dei varî sperimentatori che hanno determinato la variazione di resistenza del bismuto nel campo magnetico si riscontra che per uno stesso campo i valori trovati sono discordi; poichè per i varî campioni sperimentati era costante il grado di purezza, la discordanza dei risultati dipende evidentemente dal modo di preparazione: è infatti nota la grande influenza del regime di raffreddamento sulla struttura del bismuto.

È inoltre degno di nota, come ho trovato Patterson (2), che la variazione di resistenza è assai piccola per le lamine infinitamente sottili che possono essere ottenute coi depositi dati dai raggi catodici. Questi fatti fanno pensare ad una relazione fra il fenomeno e la struttura del metallo.

Questa ipotesi è avvalorata dai risultati delle esperienze che mi accingo a descrivere.

Ho preso del bismuto puro fornito da C. A. F. Kahlbaum; l'ho ridotto, con mezzi meccanici, in polvere sottilissima, e quindi ne ho fatta una lamina comprimendo la polvere in un apposito stampo costruito in modo analogo alle ordinarie macchine da pastiglie; le dimensioni erano però più grandi delle ordinarie e la pressione rilevatissima essendo esercitata da una robusta pressa.

Una lamina così ottenuta presenta un aspetto esterno molto simile a quello del bismuto fuso; anche le sue proprietà meccaniche differiscono di poco: la resistenza specifica elettrica è di poco superiore.

La struttura interna però di queste lamine è certo assai differente da quella del bismuto fuso, perchè mancano assolutamente i grossi cristalli.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Roma.

(2) Cambr. Proc. (2) 9, 118 (1901).

La misura della resistenza è stata fatta col metodo già adoperato in altre esperienze analoghe eseguite con il prof. Corbino [1]. In due punti della lamina erano applicati due elettrodi puntiformi che funzionavano da adduttori della corrente e nelle loro vicinanze due elettrodi sonde per la esplorazione di potenziali, disponendoli in posizione tale da rendere trascurabile la differenza di potenziale per effetto Hall.

Allo scopo di eliminare completamente l'influenza di quest'ultimo veniva preso come valore della differenza di potenziale fra le sonde la media dei valori, poco differenti, ottenuti col campo diretto e col campo invertito. In tal modo la variazione di resistenza, che si deduce dalla variazione di differenza di potenziale osservata, è del tutto dovuta alla variazione delle proprietà specifiche del bismuto sotto l'azione del campo. Essendomi messo in condizione di evitare tutte le possibili cause di errore ho proceduto alla misura del rapporto fra la resistenza specifica del bismuto col campo a quella senza campo, prendendo come termine di confronto una lamina di bismuto fuso della stessa qualità di quello usato per preparare la polvere.

Le lamine avevano tutte le stesse dimensioni e cioè erano dei dischi dello spessore di mm. 1,8 e del diametro di mm. 20.

Chiamando con r la resistenza specifica della lamina nel campo ed r_0 quella fuori, ho trovato i seguenti risultati:

	Campo U.C.G.S.	$\frac{r}{r_0}$
Bismuto fuso	5400	1,20
Bismuto in polvere compresso	5400	1,04

Come si vede la variazione di resistenza si riduce per queste lamine di polveri compresse ad un valore assai piccolo.

Ho in seguito sperimentato delle lamine di polvere di bismuto compresso ottenute in modo del tutto analogo a quelle precedentemente descritte, ma usando della polvere preparata riducendo con mezzi chimici un sale di bismuto.

La polvere sottilissima così ottenuta ben lavata ed asciugata con cura mi ha permesso d'ottenere delle lamine di aspetto analogo alle precedenti, ma solo un po' più fragili.

La struttura interna era però molto più fine.

Per tali lamine la variazione di resistenza per campi anche di 10,000 unità C. G. S. è praticamente nulla.

Ho voluto poi studiare per le stesse lamine un fenomeno che non pare, nella sua parte più essenziale, legato alla struttura grossolana del metallo;

[1] Rend. R. Accad. Lincei, XXIV, pag. 806.

ho perciò determinato per esse la costante dell'effetto Hall. Per questo scopo mi sono servito della solita disposizione con i quattro elettrodi puntiformi, prendendo le dovute precauzioni, per evitare le cause di errore che così fortemente possono influire sulla determinazione quantitativa di detta costante.

Ho sperimentato insieme con le lamine di polveri compresse la lamina di bismuto fuso ed ho trovato *valori uguali per tutte* se si escludono delle piccole divergenze che possono essere giustificate da inevitabili errori di osservazione. I valori ottenuti per le lamine di polveri compresse, sono in ogni caso nei limiti di quelli trovati per la costante dell'effetto Hall per il bismuto fuso dai varî sperimentatori.

Si può concludere che, poichè una lamina di bismuto fuso, che presenta insieme l'effetto Hall e la variazione di resistenza nel campo, polverizzata e ricomposta per compressione conserva inalterato il primo effetto e perde il secondo, non pare vi sia relazione alcuna fra i due effetti.

Ciò spiega perchè la teoria che dà ragione dell'effetto Hall ed analoghi, non lascia prevedere la variazione di resistenza dei metalli nel campo magnetico che apparisce forse dipendente da alterazioni transitorie prodotte dal campo sulla struttura dei metalli stessi.

Fisica. — *Sull'attrito interno del nickel in campo magnetico variabile.* Nota preliminare del prof. Ernesto Drago, presentata dal Corrispondente A. Battelli.

Fisica. — *Determinazione indiretta dello spettro solare.* Nota del prof. A. Amerio, presentata dal Socio P. Blaserna.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Chimica-fisica. — *Determinazione sperimentale delle costanti critiche dell'azoto, dell'ossido di carbonio, dell'ossigeno, e del metano* [1]. Nota di ETTORE CARDOSO, presentata dal Socio E. PATERNÒ.

1. Ho già pubblicato i risultati sperimentali delle mie ricerche sullo stato critico d'una diecina di gas le cui temperature critiche erano comprese fra + 9° e + 157° [2]. Lo scopo di queste misure è di riunire il più grande numero di dati precisi assolutamente indispensabili per lo studio dell'equazione di stato dei fluidi reali. Allargando il campo delle mie investigazioni fui portato a studiare i gas comunemente chiamati permanenti.

Questi gas, che sono stati poco o mai studiati (forse a causa delle difficoltà sperimentali che si presentano nel loro studio) offrono fra varie particolarità quella interessantissima, al punto di vista dello studio degli stati corrispondenti, di dare delle temperature ridotte, i cui valori decrescono rapidamente a una piccola distanza dal punto critico.

2. La più grossa difficoltà da superare nello studio delle costanti critiche dei gas dei quali mi sono occupato, risiede nella costruzione di un criostato semplice e preciso, capace di mantenere costante la temperatura a 0°10 (o ciò che è ancor meglio a 0°05) fra — 80° et — 160°. Ho trovato una soluzione di questo problema senza ricorrere all'ebullizione dei gas sotto pressione ridotta, perchè questo metodo, che può essere molto preciso [3], è in ogni caso di prezzo elevatissimo e richiede un personale tecnico. Ho dato altrove [4] una descrizione molto sommaria del criostato semplicissimo che ho costruito e che ha corrisposto perfettamente allo scopo per il quale fu studiato. Questo apparecchio è stato alquanto perfezionato e ne darò una descrizione molto completa a tempo debito.

3. La temperatura era misurata per mezzo di un termometro di vetro duro francese graduato da Baudin e riempito da me con dell'isopentano purissimo che debbo alla cortesia del mio amico prof. J. Timmermans di Bruxelles.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di fisica della Università di Ginevra, maggio 1913-ottobre 1914.

(2) J. chim. phys. (1912), X, 479.

(3) Esistono, a mia conoscenza, solo due o tre di questi impianti. Il più perfetto e più completo di essi è quello giustamente celebre dell'Università di Leida che ha permesso al suo ideatore prof. Kammerlingh-Onnes di realizzare le temperature più basse possibili nello stato attuale delle nostre conoscenze.

(4) Archives des. Sc. phys. et nat. (1913), XXXVI, 97.

Lo studio di questo istrumento mi ha dimostrato che prendendo certe precauzioni forniva dei risultati sicuri e precisi; senza voler insistere per adesso sulla questione dei termometri dirò soltanto che dovetti ricorrere al suddetto apparecchio perchè i termometri di Baudin, che dànno sempre degli ottimi risultati, non davano più risultati sicuri nelle mie condizioni sperimentali.

4. Gli apparecchi di compressione e di misura delle pressioni erano, salvo qualche leggera variante, gli stessi che utilizzai nelle nostre precedenti ricerche sui gas facilmente coercibili [1]. Il tubo laboratorio però, invece di essere dritto, era ricurvo due volte ad angolo retto in modo da pescare nel criostato.

5. Il controllo della purezza dei campioni di gas era fatto per compressione isoterma, facendo variare largamente il volume rispettivo delle due fasi. Ho considerato il campione puro quando la differenza di pressione fra il principio e la fine della liquefazione non sorpassava 0,05 atmosfere.

6. Coi suddetti metodi di ricerca ho determinato la temperatura e la pressione critica dei quattro gas seguenti. I risultati pubblicati qui sotto (arrotondati a 0,05 atmosfere e 0°05) [2] sono la media di numerose misure concordanti.

Gas	pressione critica (atmosfere)	temperatura critica (centigrada)
N_2	33,65	— 144,7
CO	34,60	— 138,7
O_2	49,30	— 118,0
CH_4	45,60	— 82,85

In una Memoria generale che pubblicherò prossimamente farò conoscere tutti i particolari sperimentali e descriverò altresì certe prove, rimaste senza risultato, fatte collo scopo di provocare il fenomeno dell'opalescenza critica coi gas studiati.

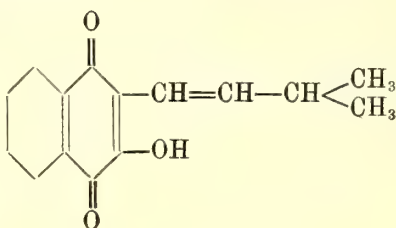
[1] J. chim. phys., loc. cit.

[2] Lo scarto si è mantenuto sempre inferiore a questo valore nelle mie esperienze; qualche volta non arrivava a $\frac{1}{100}$ di atmosfera.

Chimica. — *Sopra alcuni derivati dell'acido lapacico* [1]. Nota di Lydia Monti, presentata dal Socio E. Paternò.

L'acido lapacico è una sostanza gialla, contenuta nel legno di lapacho o taigu (una bigoniacea che cresce nel sud-America) ed in altre varietà di legni.

Il prof. Paternò [2], nel 1882, determinò la sua composizione, che trovò corrispondente alla formula $C_{15}H_{14}O_3$, ed in seguito ad un accurato studio gli attribuì la formula di costituzione seguente:

O
‖
—$CH{=}CH{-}CH{<}^{CH_3}_{CH_3}$
—OH
‖
O

I

Su questo acido, e sopra alcuni dei suoi derivati, ho fatto alcune esperienze di riduzione, che descrivo in questa Nota.

L'acido lapacico, d'accordo con la formula sopra scritta, in soluzione alcoolica, in presenza di nero di Pd, addiziona due atomi di idrogeno, trasformandosi nel corrispondente idrochinone scolorato, il quale, in contatto dell'ossigeno dell'aria, subito si riossida per dare il chinone corrispondente (acido lapacico). In queste condizioni, il doppio legame della catena amilenica non viene idrogenato, probabilmente per l'influenza negativa che esercita l'ossidrile fenico.

Quando questo ossidrile è eterificato, come nel *monoacetil-derivato*, allora viene assorbita una quantità di idrogeno, corrispondente a quattro atomi per $C_{17}H_{16}O_4$. Due atomi di idrogeno trasformano la catena amilenica in catena amilica; due, invece, riducono il chinone in idrochinone e vengono perduti di nuovo, quando il prodotto di riduzione viene a contatto dell'aria. Infatti, il prodotto, che si può isolare dopo l'idrogenazione, è una sostanza cristallina di color giallo canario fusibile a 74-75°, la quale, dis-

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Roma.

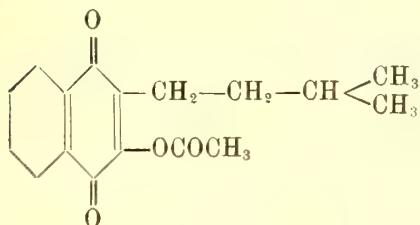
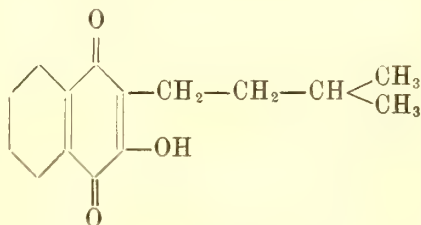
[2] Paternò, Gazz. ch. ital., *12*, 337 (1882).

seccata nel vuoto, ha dato all'analisi risultati concordanti con la formula di un biidroderivato.

Sostanza g. 0,3033:	CO^2 g. 0,7945;		H_2O g. 0,1692
Donde $^0/_0$	trovato	C 71,44	H 6,20
$C_{17}H_{18}O_4$	calcolato	C 71,33	H 6,29

Questo prodotto di riduzione è un chinone; in presenza di nero di Pd, assorbe a sua volta due atomi di idrogeno, che perde poi subito all'aria.

A questa sostanza si dovrà dunque attribuire la formula di costituzione (II)

$$-CH_2-CH_2-CH{<}^{CH_3}_{CH_3} \qquad -OCOCH_3 \qquad (II)$$

$$-CH_2-CH_2-CH{<}^{CH_3}_{CH_3} \qquad -OH \qquad (III)$$

Il prodotto che si ottiene saponificandola, con soluzione acquosa di idrato potassico, è un acido *biidrolapacico* della formula (III). Purificato per cristallizzazione dall'alcool diluito, si presenta in magnifici aghetti gialli fusibili a 87-89°. All'analisi dà i seguenti risultati:

Sostanza g. 0,2145:	CO_2 g. 0,5802;		H_2O g. 0,1265.
Donde $^0/_0$	trovato	C 73,77	H 6,60
$C_{15}H_{16}O_3$	calcolato	C 73,77	H 6,55

Altri prodotti di riduzione ho ottenuti sottoponendo alla riduzione acetilante l'acido lapacico e il suo derivato monoacetilico.

Riscaldando a ricadere, con una piccola fiamma, l'acido lapacico (g. 1) sciolto in anidride acetica (cc. 20) con polvere di zinco (g. 10), la soluzione, colorata intensamente in giallo, in pochi minuti si decolora completamente. Si filtra e si decompone con acqua il filtrato; si deposita così una sostanza oleosa giallastra, che in breve solidifica. Questo prodotto, purificato per cristallizzazione dall'alcool bollente, si presenta in aghetti bianchi fusibili a 138-140°. All'analisi ha dato i seguenti risultati:

Sostanza g. 0,2407:	CO_2 g. 0,6022;		H_2O g. 0,1272.
Donde $^0/_0$	trovato	C 68,23	H 5,90
$C_{21}H_{22}O_6$	calcolato	C 68,04	H 5,96

Questo prodotto, che ho potuto ottenere così facilmente con la riduzione acetilante è identico, in tutte le sue proprietà, al *triacetil-derivato dell'a-*

cido idrolapacico, che il prof. Paternò e Minunni[1] avevano preparato con tanta difficoltà, trattando con anidride acetica il prodotto ottenuto, per riduzione dell'acido lapacico con zinco e potassa, operando fuori del contatto dell'aria.

La medesima sostanza ho potuto ottenere ancora per riduzione acetilante dal monoacetil-derivato, operando nello stesso modo sopra descritto.

È interessante di far notare, che, con la riduzione acetilante, il doppio legame della catena amilenica rimane inalterato.

Infatti l'acido triacetil-biidrolapacico, a cui spetta la formula (IV), in soluzione alcoolica, in presenza di nero di Pd, assorbe una quantità di idrogeno corrispondente a due atomi per $C_{21}H_{22}O_6$.

Il prodotto di riduzione ottenuto si purifica, facendolo cristallizzare dall'alcool. Aghetti bianchi fusibili a 110-112°. Seccato a 100°, è stato analizzato.

Sostanza g. 0,2170:	CO_2 g. 0,5376;	H_2O g. 0,1250.
Donde $^0/_0$ trovato	C 67,57	H 6,44
$C_{21}H_{24}O_6$ calcolato	C 67,8	H 6,4

Questa sostanza, per il modo con cui è stata preparata, deve avere dunque la formula (V), cioè deve essere un *triacetil-derivato dell'acido tetraidro-lapacico* della formula (VI).

OCOCH$_3$ — —CH=CH—CH<$^{CH_3}_{CH_3}$ — —OCOCH$_3$ — OCOCH$_3$

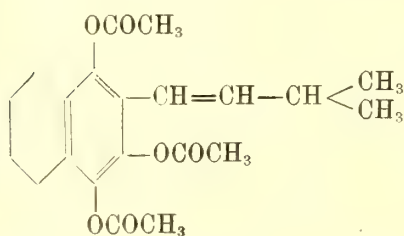
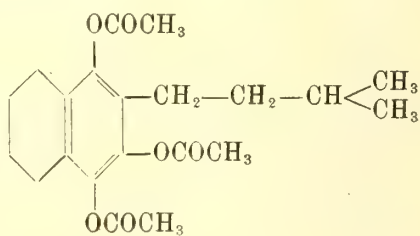
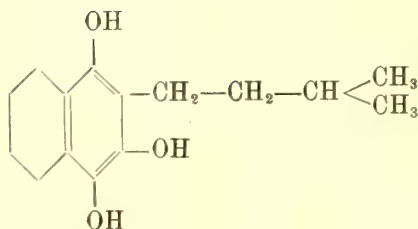
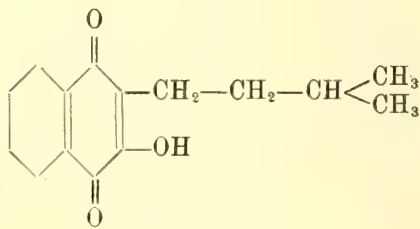
IV

OCOCH$_3$ — —CH$_2$—CH$_2$—CH<$^{CH_3}_{CH_3}$ — —OCOCH$_3$ — OCOCH$_3$

V

OH — —CH$_2$—CH$_2$—CH<$^{CH_3}_{CH_3}$ — —OH — OH

VI

O — —CH$_2$—CH$_2$—CH<$^{CH_3}_{CH_3}$ — —OH — O

VII

[1] Paternò e Minunni, Gazz. ch. ital., *19*, 601 (1889).

Questo acido tetraidrolapacico però non si può isolare, perchè si ossida immediatamente.

Quando si saponifica con potassa il suo triacetil-derivato, fusibile a 110-112°, si forma invece l'*acido biidrolapacico* giallo, fusibile a 87-89°, che ho già descritto (formula VII).

Riduzione dei lapaconi.

Fin dalla sua prima Nota sui derivati dell'acido lapacico, il prof. Paternò [1] fece notare che per azione dell'acido solforico l'acido lapacico viene trasformato in un isomero di color rosso aranciato, fusibile a 156°, privo di proprietà acide, che chiamò lapacone. Facendo agire l'acido nitrico sull'acido lapacico, osservò inoltre che insieme col lapacone si formava un'altra sostanza di color giallo.

Hooker [2] riprese lo studio del lapacone ed esservò che, sciogliendo l'acido lapacico in un miscuglio di acido acetico e di acido cloridrico concentrato e riscaldando su b. m. la soluzione, si formava una sostanza gialla fusibile a 116-117°, pure isomera dell'acido lapacico, anch'essa priva di proprietà acide.

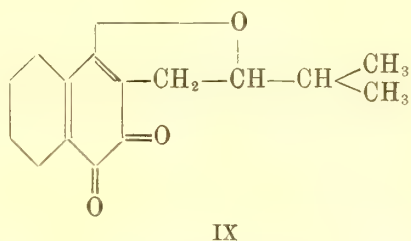
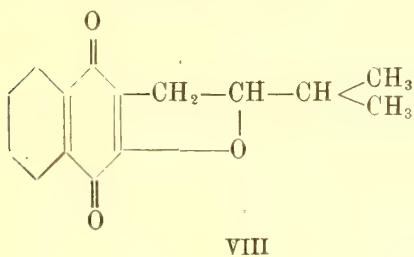
Egli fece notare inoltre che questa sostanza è identica alla sostanza gialla che il prof. Paternò aveva ottenuta per azione dell'acido nitrico.

Per spiegare la differenza fra questi due isomeri e l'acido lapacico, Hooker, accettando la formula dell'acido lapacico quale era stata data dal prof. Paternò, ammise che il lapacone giallo fosse un derivato dell'α-naftochinone (della formola VIII) e lo chiamò *α-lapacone*, mentre il lapacone rosso sarebbe, secondo Hooker, un derivato del β-naftochinone (della formula IX) e lo chiamò *β-lapacone*.

O, $-CH_2-CH-CH<^{CH_3}_{CH_3}$, O, O

VIII

O, $-CH_2-CH-CH<^{CH_3}_{CH_3}$, =O, O

IX

Queste due formule sono bene in accordo col comportamento chimico dei lapaconi, e sono comunemente accettate.

Dopo aver fatto le descritte esperienze sopra l'acido lapacico, volli estenderle ancora ai lapaconi.

[1] Paternò, Gazz. ch. ital., *12*, 337 (1882).

[2] Hooker Soc., *61*, 611 (1892).

Nel ripreparare questi due composti, ho esservato che la natura dell'acido minerale, che si fa agire sull'acido lapacico, non ha, come si poteva supporre dalle esperienze precedenti, influenza specifica sulla formazione dell'uno o dell'altro lapacone, ma che questa formazione dipende soltanto dalla temperatura a cui si opera.

Infatti, facendo agire l'acido solforico a caldo sull'acido lapacico, ho potuto constatare la formazione dell'α-lapacone; e inversamente, per azione dell'acido cloridrico a freddo, ho notato che si forma β-lapacone.

In verità si ottengono generalmente delle mescolanze nelle quali prevale l'α-lapacone o il β- secondo la temperatura.

In soluzione alcoolica, i due lapaconi, in presenza di nero di Pd, assorbono un volume di idrogeno corrispondente a due atomi per $C_{15}H_{14}O_3$.

Quando però le soluzioni scolorate dei prodotti di riduzione, così ottenuti, vengono in contatto dell'aria, subito si colorano di nuovo; facendo distillare l'alcool, si riottengono i lapaconi inalterati.

Questo comportamento va bene d'accordo con le formole sopra scritte per questi composti, formole nelle quali non sono doppî legami capaci di addizionare stabilmente idrogeno. L'idrogeno assorbito in presenza di Pd, non fa altro che trasformare questi due chinoni nei corrispondenti idrochinoni, i quali all'aria si riossidano immediatamente.

Prodotti di riduzione stabili ho invece ottenuto tanto dall'α- quanto dal β-lapacone, sottoponendoli alla riduzione acetilante.

Il β-lapacone (lapacone rosso fusibile a 156°), riscaldato con anidride acetica e polvere di zinco, dà origine ad una sostanza che, purificata per cristallizzazione dall'alcool bollente, si presenta in aghetti bianchi fusibili a 160-162°. All'analisi ha dato i seguenti risultati:

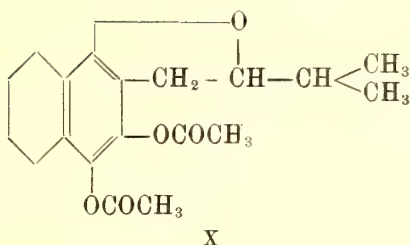
Sostanza g. 0,2185:	CO_2 g. 0,5570;		H_2O g, 0,1200.
Donde °/₀ trovato		C 69,63	H 6,10
$C_{19}H_{20}O_5$ calcolato		C 69,51	H 6,09

Questo prodotto è identico, in tutte le sue proprietà, al *biacetil-derivato dell'idro-β-lapacone*, che il prof. Paternò e Minunni ([1]) avevano preparato, per azione dell'anidride acetica sulla sostanza ottenuta, riducendo il lapacone con sodio e alcool, operando fuori del contatto dell'aria.

A questo composto, in accordo con la formola soprascritta per il β-lapacone, dovrà attribuirsi la formola di costituzione (X)

([1]) Paternò e Minunni, Gazz. ch. ital., *19*, 611 (1889).

$$
\begin{array}{l}
\text{(naftalene)}\!-\!CH_2-\underset{|}{CH}-CH<^{CH_3}_{CH_3} \\
\quad\;\;\, |\!\!-\!OCOCH_3 \qquad\quad\;\; \text{(ponte O)} \\
\quad OCOCH_3
\end{array}
$$

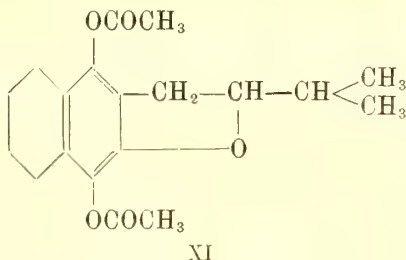
X

Dall'α-lapacone (lapacone giallo fusibile a 116-117°) con la riduzione acetilante, nelle medesime condizioni, ho ottenuto un prodotto, che, cristallizzato dall'alcool, si ha in aghetti bianchi che fondono a 170-172°.

La sostanza è stata seccata a 100° e analizzata.

Sostanza g. 0,2138:	CO_2 g. 0,5447;	H_2O g. 0,1158.	
Donde °/₀	trovato	C 69,61	H 6,06
$C_{19}H_{20}O_5$	calcolato	C 69,51	H 6,09

A questo *biacetil-derivato dell'idro-α-lapacone*, ottenuto dall'α-lapacone della formola (VIII), si deve dare la formola di costituzione (XI):

$$
\begin{array}{l}
\quad OCOCH_3 \\
\text{(naftalene)}\!-\!CH_2-CH-CH<^{CH_3}_{CH_3} \\
\qquad\qquad\quad |\!\!-\!\!-\!\!-\!O \\
\quad OCOCH_3
\end{array}
$$

XI

Riduzione del derivato biacetilico dell'acido lapacico.

Riscaldando per pochi minuti l'acido lapacico con anidride acetica e acetato sodico, il prof. Paternò [1] ottenne il derivato monoacetilico fusibile a 81°, che prima ho rammentato.

Prolungando il riscaldamento per circa un quarto d'ora, notò che si forma invece un composto differente, fusibile a 131-132°. Questo, all'analisi, dà risultati corrispondenti alla formola $C_{15}H_{12}O\ (O\,CO\,CH_3)^2$ di un derivato biacetilico dell'acido lapacico. Il peso molecolare [2], determinato col metodo crioscopico, concorda con questa formola. La costituzione di questo derivato biacetilico è però rimasta sempre oscura.

(1) Paternò, Gazz. ch. ital., *12*, 337 (1882).

(2) Paternò e Nasini, Gazz. ch. ital., *16*, 270 (1886).

Perciò, avendone a disposizione qualche grammo, ho voluto anche con questo, fare esperienze di riduzione, per cercare di chiarire la sua costituzione.

La riduzione acetilante ha dato risultato negativo; il prodotto è rimasto inalterato.

Buon esito ha avuto invece la riduzione con idrogeno in presenza di nero di Pd. In queste condizioni la sostanza, disciolta in alcool, assorbe una quantità di idrogeno corrispondente a due atomi per una molecola di $C_{19}H_{18}O_5$.

Il prodotto di riduzione, così ottenuto, si fa cristallizzare dall'alcool. All'analisi dà i seguenti risultati:

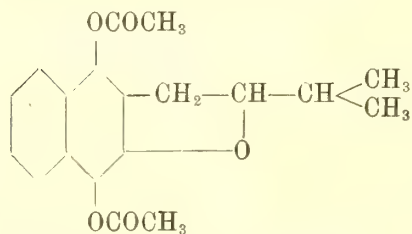
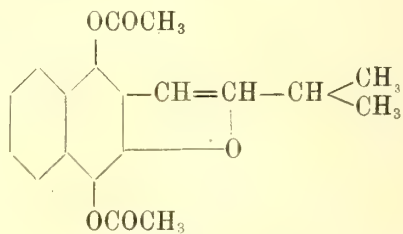
Sostanza g. 0,2180:	CO_2 g. 0,5540;	H_2O g. 0,1215.	
Donde % trovato	C 69,31	H 6,23	
$C_{19}H_{20}O_5$ calcolato	C 69.51	H 6,09	

Questo prodotto di riduzione è in aghetti bianchi, fusibili a 170-172°. Esso ha la stessa composizione centesimale, lo stesso punto di fusione, gli stessi caratteri del biacetil-derivato dell'idro-α-lapacone che sopra ho descritto. Una mescolanza delle due sostanze conserva il punto di fusione 170-172°.

Siccome al biacetil-derivato dell'idro-α-lapacone si deve attribuire, come ho detto prima, la formola (XII), è dunque molto probabile che al cosiddetto biacetil-derivato dell'acido lapacico spetti la formola (XIII)

OCOCH₃ — $-CH_2-CH-CH<^{CH_3}_{CH_3}$ — O — OCOCH₃

XII

OCOCH₃ — $-CH=CH-CH<^{CH_3}_{CH_3}$ — O — OCOCH₃

XIII

cioè una delle formole che già Hooker [1] aveva supposto dovesse assegnarsi a questa sostanza.

[1] Hooker, Soc., *61*, 611 (1892).

Chimica. — *Autossidazioni alla luce nella serie dei terpeni.* Nota II di E. Sernagiotto, presentata dal Socio G. Ciamician.

Autossidazione del pulegone.

Vennero esposti alla luce, dal giugno all'ottobre, 50 gr. di pulegone, divisi in 10 palloni della capacità di 5 litri, pieni di ossigeno e contenenti ciascuno 100 cm.^{3} di acqua. All'apertura si notò una forte aspirazione; il contenuto era diventato acido ed il chetone in parte resinificato.

La parte liquida di tutto il prodotto diede, per distillazione con vapore d'acqua, prolungata fino a reazione neutra del distillato, una parte volatile fortemente acida, di odore terpenico ed un residuo acquoso, pure acido, oltre ad una certa quantità di pece.

Parte volatile. — Come per il citronellale, questa venne neutralizzata con carbonato sodico, indi distillata nuovamente in corrente di vapore; nella parte volatile, oltre ad *acetone*, che fu identificato in forma del p. bromofenilidrazone, fondente a 94°, passa una piccola quantità di olio, riconosciuto per pulegone inalterato a mezzo del semicarbazone caratteristico che fonde a 174° [1].

Nel pallone, allo stato di sale sodico rimane una notevole quantità di *acido formico*, insieme a traccie di acidi grassi superiori, di cui si potè avvertire l'odore, ma non preparare un sale argentico analizzabile.

Parte fissa. — Il liquido acido, rimasto nel pallone dopo la distillazione del prodotto greggio, separato dalla pece formatasi, venne reso alcalino con carbonato sodico e successivamente estratto con etere. Si ottenne una massa cristallina, solubile in alcool, etere, acido acetico, benzolo, la quale, da quest'ultimo solvente, si presenta in prismi, che fondono a 183°5 ed hanno la composizione $C_{10}H_{14}O_3$.

Analisi:

Sostanza 3,371 mgr.; CO_2 8,17 mgr.; H_2O 2,31 mgr.
" 3,028 " CO_2 7,33 " H_2O 2.12 "

	Trovato		Calcolato per $C_{10}H_{14}O_3$
C	66,09	66,02	65,90
H	7,66	7,83	7,74

Non è stabile al permanganato a freddo. È il *lattone di un acido chetonico*, poichè mentre è insolubile nei carbonati, si scioglie facilmente negli idrati alcalini; dà un sale argentico insolubile, in fiocchi bianchi, facilmente alterabile e dà un ossima che purificata dall'etere petrolico fonde a 116°.

[1] Baeyer ed Henrich. Berichte 28, pag. 653.

Analisi:

Sostanza: 4,136 mgr. Azoto, misurato a 20° e 768° mm. cmc. 0,265

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{15}NO_3$
N	7,54	7,10

È più stabile del corrispondente acido; infatti, scomponendo il sale potassico con acido solforico, si può estrarre con etere il lattone inalterato, col punto di fusione 183°5.

Per ossidazione col miscuglio cromico, dà un acido cristallino che purificato dall'acqua fonde a 86°,7 ed è identico all'*acido β-metilglutarico*.

Analisi:

Sostanza: 3,828 mgr.; CO_2 6,90 mgr.; H_2O 2,39 mgr.

	Trovato	Calcolato per $C_6H_{10}O_4$
C	49,16	49,31
H	7,01	6,90

Contemporaneamente si forma pure *acetone*, identificato nei prodotti volatili dell'ossidazione, a mezzo del suo p. bromofenilidrazone, che fonde a 94°.

Il liquido alcalino diede poi, per acidificazione, un olio bruno, vischioso estraibile con etere, che presentava la reazione di Lieben ed in piccola parte precipitava con la fenilidrazina, ma che non accennava a solidificare.

Neutralizzato con ammoniaca, per aggiunta di solfato di rame, diede un precipitato fioccoso, verde, di sale ramico, poco solubile, da cui, con idrogeno solforato, fu posto in libertà l'acido, il quale, purificato dall'acqua, fonde a 84° e corrisponde all'*acido β-metiladipico*.

Analisi:

Sostanza: 4,575 mgr.; CO_2 11,15 mgr.; H_2O 309 mgr.

	Trovato	Calcolato per $C_7H_{12}O_4$
C	52,80	52,47
H	7,55	7,55

Dal sale di rame rimasto sciolto nel liquido, scomposto con idrogeno solforato, si ebbe un liquido denso, giallognolo, il quale lentamente si rapprese in piccola parte in cristalli, riconosciuti pure per acido β-metiladipico.

Il residuo oleoso, precipitato frazionatamente con nitrato argentico, dette dei prodotti fioccosi bianchi, insolubili in acqua, alterabili all'ebullizione ed alla luce.

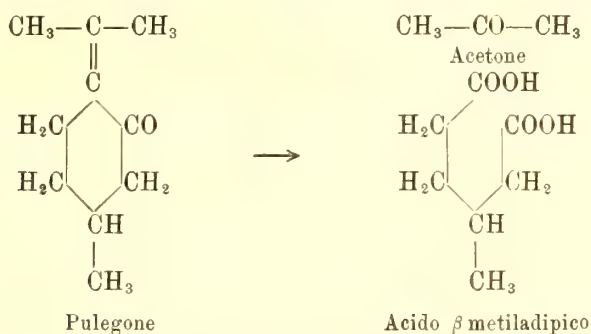
Dalla frazione mediana, presumibilmente più pura, si ebbero numeri corrispondenti al sale argentico di un acido di composizione $C_{10}H_{18}O_5$, di ancora ignota costituzione.

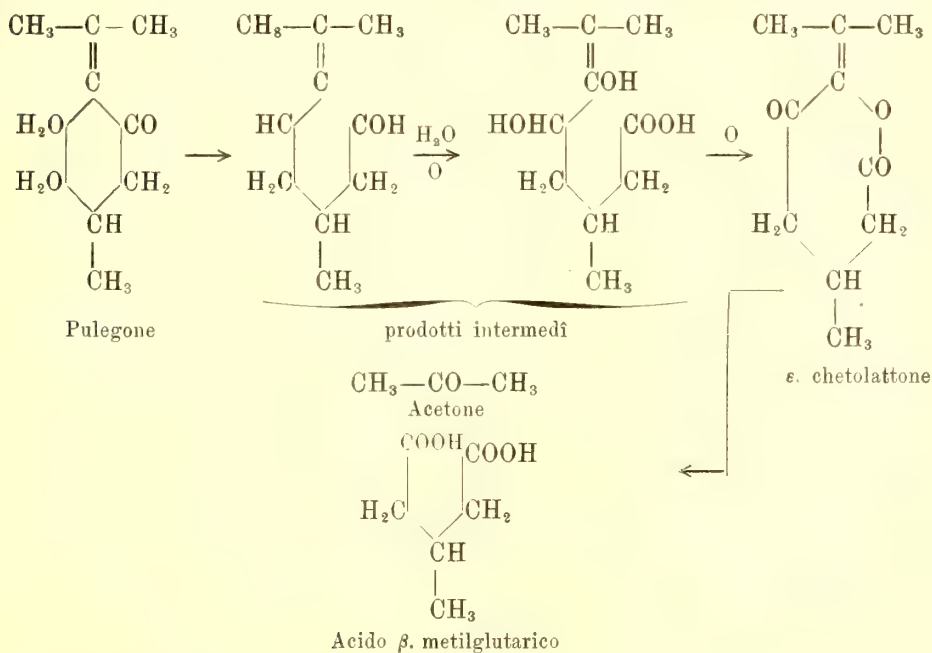
Analisi:

Sostanza 4,442 mgr.; CO_2 4,44 mgr.; H_2O 1,45 mgr.; Ag 2,208 mgr.

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{16}O_5Ag_2$
C	27,26	27,29
H	3,65	3,73
Ag	49,71	49,96

Nell'autossidazione alla luce, il pulegone si comporta in parte come rispetto al permanganato [1] dando *acetone* ed *acido β-metiladipico*.

```
CH3—C—CH3                          CH3—CO—CH3
    ||                               Acetone
    C                                 COOH
H2C/ \CO                          H2C/   COOH
  |   |          ——>                |     |
H2C\ /CH2                         H2C\   /CH2
    CH                                 CH
    |                                  |
    CH3                                CH3
 Pulegone                     Acido β metiladipico
```

Oltre a questi prodotti, si forma un *chetolattone* non saturo della formula $C_{10}H_{14}O_3$, il quale, per ossidazione, dà *acetone* ed acido *β-metilglutarico*. Esso non era ancor noto; tuttavia i fatti osservati permettono con una certa probabilità di dedurne la formula di costituzione, ammettendo alcune trasformazioni del pulegone, aventi un perfetto riscontro in altre, osservate da Ciamician e Silber, per varii chetoni ciclici, esposti alla luce, con o senza ossigeno; questo nuovo composto sarebbe un ε chetolattone.

```
CH3—C—CH3        CH3—C—CH3             CH3—C—CH3              CH3—C—CH3
    ||               ||                    ||                     ||
    C                C                     COH                    C
H2O/ \CO         HC/   COH   H2O     HOHC/   COOH    O        OC/   \O
  |   |    ——>     |    |    ——>       |     |      ——>        |     |
H2O\ /CH2       H2C\   /CH2   O      H2C\   /CH2                |     CO
    CH               CH                   CH                    |     |
    |                |                    |                   H2C    CH2
    CH3              CH3                  CH3                    \   /
                                                                  CH
 Pulegone          prodotti intermedî                             |
                                                                  CH3
                                                            ε. chetolattone
                    CH3—CO—CH3
                      Acetone
                   COOH   COOH
                    |      |               <——
                  H2C     /CH2
                      \  /
                       CH
                       |
                       CH3
               Acido β. metilglutarico
```

[1] Accad. Lincei, vol. 16, I, pag. 835 (1907); vol. 17, I, pag. 179 (1908); vol. 17, I, pag. 577; vol. 18, I, pag. 317.

Mineralogia. — *Studio mineralogico della Lepidolite Elbana* (¹). Nota del dott. Probo Comucci, presentata dal Corrispondente Federico Millosevich.

Della lepidolite dell'Elba nella letteratura è fatta menzione non raramente, non in riguardo ad uno studio di proposito, piuttosto per confrontare alcuni dati fisici con le lepidoliti meglio studiate di Moravia, d'America ecc. Il minerale lepidolitico dell'Elba è stato definito per tale dal semplice aspetto e nessuna analisi completa esiste su di esso. Solo alcuni dati chimici di una varietà speciale sono stati determinati da G. D'Achiardi (²). Ho creduto utile perciò di compiere uno studio chimico di questo minerale interessante se non per altro, perchè fluorifero e quindi legato alla genesi della ricca produzione dei minerali dei graniti Elbani.

*
* *

L'analisi di questo minerale è stata condotta sulla guida dei trattati di analisi chimica e specialmente di quello del Treadwell. Si richiedono almeno tre campioni: uno per le terre e la silice, uno per gli alcali ed uno per il fluoro; e faccio notare questa circostanza, perchè i tre campioni, dovendo cercare la massima purezza e perfezione nelle scagliette lepidolitiche da sottoporre all'analisi, non ho potuto trarli da un medesimo pezzo, sia per la non sufficiente grandezza di questi, sia per evitare la distruzione di esemplari del Museo di Firenze.

È questa una ragione che compromette *a priori* l'esattezza della somma dei componenti riferiti a cento. Si aggiunga la lunghezza e la difficoltà della ricerca complicata con il litio negli alcali e il pericolo che nel fluoruro di calcio sia rimasto un poco di silice nonostante il trattamento con carbonato d'ammonio e quindi con l'ossido di zinco ammoniacale. Si spiega così come le analisi della lepidolite che si trovano nella letteratura non ostante fatte da valentissimi sperimentatori, diano una somma, specialmente le più recenti, di circa 102, il che non accade in generale.

(¹) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia del R. Istituto di studii superiori di Firenze.

(²) Proc. verb. Soc. tosc. Sc. nat. Pisa, *14* (1904), 91,

Ecco il risultato della mia analisi:

SiO_2	48,05
Al_2O_3	28.18
Fe_2O_3	2,51
TiO_2	0 16
MnO	2.13
K_2O	7,77
LiO	5 27
F	6,32
H_2O	1,65
	102,05

Nella somma qui sopra riferita tutti i cationi sono considerati come combinati all'ossigeno; peraltro il fluoro presente sostituisce una parte di questo negli ossidi e dalla somma deve perciò detrarsi la quantità equivalente di ossigeno. Questa rispetto a 6,32 di fluoro è 2,66 che sottratta da 102,05, dà 99.39.

In merito al procedimento dell'analisi, la separazione delle terre dal manganese fu fatta mediante il carbonato di bario. Nella percentuale del potassio è compresa anche quella eventuale del rubidio e del cesio, i quali elementi da Pisani sono stati riscontrati nella lepidolite Elbana, ma dosati forse solo approssimativamente. Infatti egli ne dà la seguente notizia: « La lepidolite rosa dell'Elba contiene una quantità di rubidio uguale a quella di Rozena e una quantità minore di cesio (un quarto di quella di rubidio) (1). Il litio fu dosato nel liquido filtrato dal cloroplatinato di potassio, previa separazione del platino, con il metodo dell'alcool amilico. Una nota particolare merita il titanio per la prima volta ritrovato in questo minerale; ed ancora maggiormente notevole è la forte percentuale di ferro, il quale negli altri giacimenti è stato sempre ritrovato in quantità piccolissima, quantunque in un'isola di minerali di ferro anche tutti gli altri è presumibile che ne siano al massimo inquinati, senza contare che come minerale fluorifero la lepidolite potrebbe essere legata alla genesi dell'ossido di ferro stesso.

La formula ordinaria della lepidolite è:

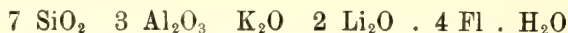
$$3\ SiO_2\ .\ Al_2O_3\ (LiKNa)_2\ O\ (Fl, OH)_2$$

Per calcolare una formula sulla mia analisi ho io pure preso in considerazione solamente gli elementi sopraccennati, e in conseguenza ho sostituito all'ossido di ferro, questa volta rilevante, l'equivalente in ossido di

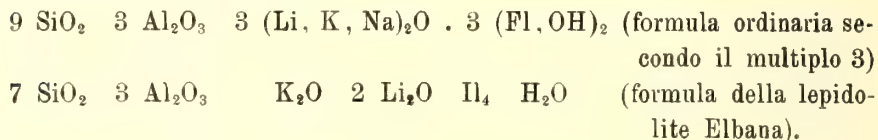
(1) Compt. rend. 57 (1864). 715.

alluminio, cioè 1,60 di Al_2O_3 in luogo di 2,51 di Fe_2O_3; cosicchè la percentuale di $Al_2 O_3$ diviene 29,78.

La formula che meglio di ogni altra corrisponde, a mio parere, alla mia analisi sarebbe:

$$7\ SiO_2\quad 3\ Al_2O_3\quad K_2O\quad 2\ Li_2O\ .\ 4\ Fl\ .\ H_2O$$

la quale risulta in complesso, rispetto all'ordinaria, più povera di silice come si vede dal seguente prospetto:

$9\ SiO_2\quad 3\ Al_2O_3\quad 3\ (Li, K, Na)_2O\ .\ 3\ (Fl, OH)_2$ (formula ordinaria secondo il multiplo 3)

$7\ SiO_2\quad 3\ Al_2O_3\quad K_2O\quad 2\ Li_2O\quad Il_4\quad H_2O$ (formula della lepidolite Elbana).

Do lo specchietto delle percentuali secondo la mia analisi e secondo la formula da me proposta per farne rilevare il grado di attendibilità:

	Trovato	Calcolato
SiO_2	48,05	48.32
Al_2O_3	29,78	28,56
K_2O	7,77	8,76
Li_2O	5,27	5,59
F	6,32	7,08
H_2O	1,65	1,67

*
* *

Della lepidolite Elbana ho eseguito una determinazione di densità con scopo diagnostico, per confermare cioè di trattarsi di vera lepidolite e d'altra parte verificare se il contenuto anormale in ferro portava una qualche variazione. La determinazione fu fatta con la bilancia di Westphal. Per liquido da ridurre a uguale densità fu usato il liquido di Thoulet convenientemente diluito con acqua. L'esperienza dette il valore: 2,842, valore che entra benissimo nei limiti della densità per la lepidolite: 2,8-2.9.

*
* *

Più importanti per questo minerale sono le possibili determinazioni ottiche. Non potendo applicare, per determinare l'indice di rifrazione, il metodo del duca di Chaulnes, perchè richiede omogeneità e limpidità almeno nel punto, il che non avveniva nel mio materiale, e nemmeno essendo applicabile il metodo del totalrefrattometro, perchè le lamine presentavano cattive superficii e non erano perfettamente piane, ho dovuto limitarmi alla ricerca dell'indice medio con il metodo di Becke, mediante un liquido di uguale indice di rifrazione: così ottenevo $n_m = 1{,}550$ per la luce del sodio.

Poichè i valori dati per gli indici della lepidolite sono: $\beta = 1,59$, e $\gamma = 1,60$ (1) si può concludere che la lepidolite, dell'Elba ha un indice di rifrazione decisamente inferiore. La lepidolite dei giacimenti del Madagascar, da non molti anni additata agli studiosi dal Lacroix, ha gli indici seguenti:

n_g	n_m	n_p	
1,5569	1,5522	2,5318	*a*)
1,5621	1,5570	1,5308	*b*)

a) lepidolite di Antsangambato; *b*) lepidolite di Antoboka (2).

Mentre vi sarebbe accordo fra la lepidolite dell'Elba e queste nuove lepidoliti per l'indice di rifrazione, vi è poi disaccordo per altri caratteri contro l'aspettativa, perchè la paragenesi è nei due casi molto simigliante come dirò in seguito.

È interessante in questa lepidolite determinare l'angolo degli assi ottici. Esso è molto più piccolo di tutti quelli dei quali si trova menzione nella letteratura per questo minerale. I valori massimi dell'angolo assiale per le lepidoliti americane raggiungono 77°, ma Tschermak (3) si è occupato anche dell'angolo assiale della lepidolite Elbana, limitando la notizia che l'angolo varia fra 50° e 72°; cosicchè una tendenza a dare un angolo assiale piccolo era già notato nel minerale di questa località. D'Achiardi (loc. cit.) osservò nella varietà da lui studiata un angolo ampio, ma non di un valore preciso. Su di una lamina, che dava una buona figura assiale, ottenni $2\,E = 21°\,19'$; ma altre lamine esaminate al microscopio, se non permisero nuove misure, confermarono la piccolezza dell'angolo nei limiti della misura precedente.

Per assodare se il piano degli assi ottici fosse perpendicolare o parallelo al piano di simmetria, in vista del dubbio, per il forte tenore in ferro, che si trattasse di Zinnwaldite, ho costruito la figura di percusione e determinato rispetto a questa la orientazione del piano assiale. La traccia di questo formava un angolo di 25° con uno dei rami della figura di percessione; rimane perciò escluso il caso di una mica di 2ª specie e quindi anche di Zinnwaldite (4). Se l'angolo di 25° sopradetto non raggiunge il valore teorico di 30°, è da attribuirsi alla difficoltà di ottenere una buona immagine assiale nel campo del microscopio, ove sia pure visibile la figura di percussione.

La piccolezza dell'angolo assiale se è insolita, non è in disaccordo con quanto già si sa sulle miche. Tschermak (5) trovava per l'anomite e la mu-

(1) Groth's Zeit. 12, 8.

(2) Duparc, Wunder, Sabot, Mem. Soc. phys. Genève, XXXVI, 283 (1910).

(3) Groth's Zeit. 2, 47.

(4) È però da ricordare che Scharizer ha trovato di 2° specie anche delle lepidoliti. Groth's Zeit. 12-5 e 13, 464.

(5) Groth's Zeit. 2, 49.

scovite (con il PA normale a 010) $\varrho > v$ e l'angolo assiale decrescente con il salire del tenore in ferro. Meroxeno e Hogopite di 2° specie (PA parallelo a 010) mostrano $\varrho > v$ e l'angolo assiale crescente con il tenore in ferro [1]. Essendo dunque la lepidolite Elbana una mica di 1° specie ed avendo un contenuto in ferro relativamente alto, dovrà avere anche l'angolo assiale minimo. Anzi posso qui aggiungere che prove qualitative mi farebbero presupporre in certi campioni una ricchezza in ferro anche superiore a quella data dall'analisi qualitativa completa.

* * *

Per ultimo aggiungo le notizie poco importanti che posso partecipare sui caratteri cristallografici del minerale. Essi erano già tanto scarsi che non è stato possibile mai calcolare nemmeno un rapporto assiale, ed io non sono stato più fortunato. Macroscopicamente il minerale è ben definito « In cristalli laminari, e in aggregati sferoidali a rosette o in lamine estese » [2]. Al microscopio si presenta come sottili lamine a contorni esagonali; gli angoli piani misurati oscillano intorno ai 60°, piuttosto al disotto che al disopra. Raramente si vedono facce laterali, forse di prisma, forse anche di piramide. Le lamine estese differiscono un poco per il colore che è piuttosto bianco argenteo, talvolta fino grigio. Su un campione di queste varietà ho fatto la seguente analisi parziale:

SiO_2	45,58
Al_2O_3	29,68
Fe_2O_3	1,89
TiO_2	0,20
MnO	1,65

Risulta che anche queste lamine mantengono le caratteristiche del minerale cioè manganesifere, titanifere e ferrifeie. Del resto lamine con il diametro, come queste, anche di 5 cm., non sono più una rarità dal momento che Lacroix parla di lamine lepidolitiche con il diametro di 15 cm. nel giacimento di Mont Bity (Maharitra, Madagascar).

Di questo giacimento il citato autore dà una dettagliata notizia [3] e possiamo osservare che consiste in un granito pegmatitico ricco di tormalina della varietà rubellite, ove si trovano anche trifano e bityite, nuovo minerale litinifero pseudoesagonale specifico di questa località. Fa perfettamente

[1] Panichi, Acc. Lincei (1906) pp. 14 e 18.
[2] Millosevich F., 5000, Elbani, Firenze (1914).
[3] Bull. Soc. min. Franc. (1908) 218.

riscontro il giacimento Elbano pure in granito tormalinifero, ma con tormaline in prevalenza nere, ed accompagnato da altro minerale litinifero, la petalite.

Ma l'analisi di lepidoliti di Antsangambato (*a*) e Antaboka (*b*) (1) che si trovano nelle stesse condizioni di giacimento di Maharitra dimostrano trattarsi di miche molto più silicee, meno alluminifere e ferrifere, inoltre meno dense. L'angolo degli assi ottici, come è prevedibile dalla composizione, è molto più grande. Le condizioni dunque di genesi avevano differenze particolari spiccate.

Eccone i dati relativi:

	a)	*b*)
SiO_2	55.97	57,25
Al_2O_3	17,70	17,65
Fe_2O_3	0,68	0,51
MgO	0,09	0,17
MnO	0,58	0,24
K_2O	10,14	10,11
Na_2O	0.82	0,78
Li_2O	4,71	5,42
F	7.12	6.28
H_2O	2,24	1,38
	100.05	99.79
Densità	2,799	2,804
2 E	74°26	74

Riassumendo, la lepidolite dell'Elba è una vera lepidolite di 1° specie litinifera e fluorifera: ma ha un contenuto superiore in ferro e specialmente un angolo assiale molto piccolo.

Sento il dovere di ringraziare pubblicamente il mio maestro, prof. Millosevich, per gli aiuti e i consigli, di cui mi è stato largo in questa ed in altre occasioni.

(1) Duparc, Wunder, Sabot, op. cit.

Patologia. — *Ulteriori ricerche sulla leishmaniosi interna del Mediterraneo.* Nota del dott. Carlo Basile [1], presentata dal Socio B. Grassi.

Trasmissione della leishmaniosi interna per via gastrica.

Le ricerche sulla trasmissione della leishmaniosi interna per via gastrica sono state da me eseguite dal marzo al maggio dell'anno 1914; io ho tardato a pubblicarle, perchè mi proponevo riferire tutta una nuova serie di ricerche originali nel mio lavoro definitivo sulla leishmaniosi interna del mediterraneo, che sarebbe stato di già certamente pubblicato se, in seguito ai ripetuti esperimenti di Laveran e Franchini, sull'infezione dei topi per mezzo di flagellati di invertebrati, anche per consiglio del mio Maestro prof. B. Grassi, non avessi ritenuto più opportuno, nell'interesse scientifico, differirne la pubblicazione e vagliare, con nuove ricerche originali, le conclusioni di questi autori.

Tuttavia, avendo letto nel Tropical Diseases Bullettin (15 aprile 1915) alcune ricerche dell'Archibald sulla trasmissione della leishmaniosi interna per via gastrica, io mi propongo in questa Nota riferire alcune mie ricerche simili a quelle dell'Archibald.

Questo autore ha ottenuto la trasmissione della leishmaniosi (virus del Soudan) in due scimmie, facendo mangiare ad una di esse materiale di una scimmia sperimentalmente infetta, ed all'altra materiale di un caso mortale di leishmaniosi.

L'Archibald ha tentato anche di infettare un cucciolo per via gastrica e sebbene il cucciolo presentasse, dopo qualche tempo, segni di dimagrimento e di anemia, tuttavia sacrificato dopo 162 giorni, non è stata mai rinvenuta alcuna *leishmania* nei suoi organi emopoietici; soltanto nel fegato l'autore avrebbe osservato taluni corpi cocciformi che, dopo un'accurata disamina dei lavori di Smallman e Wenyon, egli ritiene che sieno di origine protozoica e che debbano associarsi alle *leishmania.*

Le mie ricerche sono state eseguite su due cuccioli; ambedue dell'età di un mese, nati ed allevati in laboratorio con tali cautele da poter assicurare che non sono stati mai in contatto con insetti ematofagi. Essi cuccioli il giorno 7 marzo dell'anno 1914 mangiarono il fegato e la milza di un cane intensamente infetto di leishmaniosi naturale; dopo qualche tempo presentarono segni di dimagrimento. Al 60° giorno dall'aver mangiato il

[1] Dall'istituto di Anatomia Comparata della R. Università di Roma.

materiale infetto, uno di essi, il più dimagrito, fu sacrificato; l'altro fu sacrificato al 67° giorno. Nei preparati per strisciamento (fissati e coloriti al Giemsa) eseguiti dalla milza, dal midollo osseo e con maggior frequenza in quelli eseguiti dal fegato, io ho osservato delle forme, le quali presentavano un plasma roseo o bleu-chiaro contenente nel suo interno uno o più corpicciuoli dall'apparenza di cromatina; in questi stessi preparati, provenienti dagli organi emopoietici dell'uno e dell'altro cucciolo, io ho anche osservato, sebbene molto raramente, altre forme ancora le quali presentavano la morfologia tipica delle *leishmania*; esse mostravano un plasma roseo o bleu-chiaro, nel cui interno distinguevasi un macronucleo ed un micronucleo.

Io ritengo che le suddette forme costituite da un plasma contenente nel suo interno uno o più corpicciuoli di cromatina appartengono a stadî evolutivi di *leishmania*; infatti io ho potuto riscontrare forme del tutto identiche nel fegato e nella milza di giovani conigli, ripetute volte inoculati con virus culturale di *leishmania* di origine infantile e di origine canina, senza che li avessi mai osservati nel fegato e nella milza di numerosi altri giovani conigli sani tenuti per controllo.

Come è costante metodo in tutte le mie ricerche sperimentali, anche in questi miei esperimenti di trasmissione della leishmaniosi interna per via gastrica io ho tenuti per controllo altri due cuccioli nati nello stesso parto ed allevati nelle stesse condizioni dei due cuccioli che hanno mangiato materiale infetto di *leishmania*.

Questi due cuccioli di controllo si sono mantenuti sempre sani. Anche essi furono sacrificati come i precedenti, e per quante minuziose ricerche avessi eseguito, non ho mai osservato nei loro organi alcuna delle forme surriferite.

Risulta per ciò dalle mie ricerche che io sin dal maggio dell'anno 1914 ho ottenuto in cuccioli, per via gastrica, la trasmissione della leishmaniosi interna di origine canina.

Concomitanza di infezione da Leishmania e da Piroplasma nel cane.

Un'altra osservazione fatta dall'Archibald sulla concomitanza di infezione nell'uomo da *leishmania* e da *filaria* mi induce a riferire in questa Nota un mio esperimento eseguito anche esso nei mesi di aprile e maggio dell'anno 1914 e che è stato da me oralmente comunicato all'Associazione fra i liberi cultori di scienze mediche e naturali dell'Università di Roma nella seduta dell'11 giugno 1914.

Si tratta, per quanto a me consta, del primo caso di concomitanza della leishmaniosi con altra infezione protozoica.

Un cane anemico e dimagrito intensamente infetto di leishmaniosi fu tenuto in osservazione per 15 giorni; l'esame microscopico del midollo osseo

tibiale rivelò soltanto la presenza di numerosissime *leishmania* ; non furono riscontrati altri parassiti; l'esame microscopico del sangue periferico ripetuto quotidianamente non rilevò mai nè *leishmania*, nè altri parassiti di sorta.

Al 15° giorno di osservazione questo cane fu portato in un canile di uno degli istituti scientifici dell' Università ove, era a mia conoscenza, che si trovavano cani con numerose zecche e che alcuni di essi erano infetti di piroplasmosi.

Il cane infetto di leishmaniosi dopo 38 giorni da quando era stato posto a convivere con i cani infetti di piroplasmosi fu da me riveduto; esso presentava dimagrimento ancor più notevole, impossibilità assoluta di reggersi sul treno posteriore, notevoli edemi alle estremità; ancora due ulcere apparivano presso l'articolazione tibio tarsica; esse si approfondivano notevolmente e con uno specillo io ho potuto accertare che esse erano in continuità l'una dell'altra e che i tessuti *extra* articolari erano stati distrutti. L'esame microscopico del materiale tolto da queste ulcere rivelò la presenza non solo di tipiche *leishmania* ma anche di *piroplasma*; il sangue periferico esaminato successivamente era ricco delle varie forme tipiche di *piroplasma*.

L'animale dopo altri pochi giorni è morto e dai suoi organi emopoietici, ma specialmente dal midollo costale, io ho potuto ottenere dei preparati in cui è veramente notevole la quantità dei due protozoi, *leishmania* e *piroplasma*, associati l'uno all'altro.

L'infezione sperimentale da leishmania nelle pulci.

Il dott. Pereira Da Silva ha pubblicato recentemente negli *Arquivos do Instituto Camara Pestana* (tomo IV, fasc. III, Lisbona, 1915) alcuni suoi tentativi di infezione sperimentale di pulci di uomo (*Pulex Irritans*) con virus di leishmaniosi interna infantile, eseguiti per un periodo di 75 giorni dal 26 maggio all' 8 agosto 1914. Le pulci adoperate dall'autore sono state soltanto 25, le quali, legate col metodo del Noeller, erano poste a succhiare ogni due giorni sulla cute di un bambino infetto.

Dai protocolli riferiti dall'autore, risulta che esse sono state divise in tre gruppi: un primo gruppo, di 8 pulci (26 maggio - 8 agosto 1914): un secondo di 9 pulci (11 giugno - 8 agosto 1914); un terzo di 8 pulci (21 luglio - 8 agosto 1914). Soltanto 2 pulci appartenenti al primo gruppo han succhiato sul bambino infetto un massimo di 38 volte; tutte le altre han succhiato un numero di volte sempre più decrescente fino ad un minimo di due.

L'autore assicura di aver nutrito sulla propria cute per 15 giorni ogni pulce prima di sottoporla all'esperimento, per accertare che non fosse naturalmente infetta di *herpetomonas o crithidia*; e tenendo presente quanta influenza abbia la temperatura sul ciclo evolutivo dei protozoi patogeni nei loro ospiti trasmissori, egli assicura anche che le pulci, subito dopo il pasto, erano trasportate dall' ospedale di s. Josè, ove degeva il bambino infermo,

all'istituto Camara Pestana, e quivi eran poste in una stufa alla temperatura di 22° ctgr.; questa temperatura, come io ho dimostrato, è molto opportuna all'ulteriore sviluppo delle *leishmania.* Il Pereira ha esaminato le deiezioni delle 25 pulci sia all'atto del succhiamento, sia negli intervalli, ma non ha mai riscontrato in esse *leishmania*; egli perciò conclude l'esposizione delle sue ricerche scrivendo, in modo obbiettivamente scientifico, che « se esse non possono dimostrare in modo assoluto che le pulci non si infettano, dimostrano tuttavia che questa infezione è molto difficile ».

Che la infezione di pulci con virus di *leishmania* sia difficile, è stato anche da me osservato in talune ricerche fin oggi non pubblicate; del resto tale difficoltà è stata anche da me rilevata in natura sin dal 1910, quando io, in base ad estesissime ricerche nelle pulci raccattate sui bambini e sui cani infetti di *leishmania*, ho potuto osservare ed ho pubblicato che soltanto il 4 per mille di esse erano infette di protozoi « tipo *leishmania* »; i quali protozoi, inoculati in cuccioli ed in topi (*mus musculus*) hanno determinato in questi animali un'infezione caratterizzata dagli stessi sintomi e dallo stesso reperto parassitario che si osservano nelle leishmaniosi naturale o sperimentale.

Una tale difficoltà di infezione naturale e sperimentale delle pulci con virus di *leishmania* risiede certamente nella grande rarità con cui si rinvengono i parassiti nel sangue circolante e dei quali taluni forse non sono neppure adatti all'ulteriore sviluppo; più particolarmente nelle ricerche del Pereira, condotte con attenzione, noi ci sentiamo autorizzati a ritenere che nessuna delle pulci in esperimento ingerì mai *leishmania*, perchè questi protozoi come ci assicura l'Autore, mai sono apparsi all'esame il più minuzioso di tutte le deiezioni raccolte, sia durante il pasto, sia negli intervalli; evidentemente se le *leishmania* non erano state ingerite, non potevano svilupparsi ! ! !

Io non mi sarei fermato su tali ricerche del Pereira se questo autore non avesse tentato una generalizzazzione delle idee del Brumpt sulla *xeno-diagnostica*, e non avesse ricordato le ricerche del Wenyon e del Patton sull'infezione sperimentale delle pulci con virus di *leishmania tropica* e *leishmania donovani* per giungere ad affermare, inaspettatamente, che le sue ricerche fin oggi dimostrano che « le pulci (del cane e dell'uomo) non sono gli agenti di trasmissione della leishmaniosi umana e canina ».

Tale affermazione del Pereira è in evidente contrasto non solo colle sue stesse ricerche che, come egli scrive in precedenza nella sua stessa Nota « non possono dimostrare in modo assoluto che le pulci non si infettano », ma è anche in contrasto con le altre sue simili ricerche da lui precedentemente pubblicate e nelle quali ha ottenuto reperto positivo di infezione sperimentale delle pulci (del cane) ponendole a succhiare su un cane sperimentalmente infetto di leishmaniosi di origine infantile; ricerche queste che

sono state già da me esaminate in una mia precedente pubblicazione (Rendic. Accad. Lincei, 1914) e che per brevità di spazio io qui non ripeto.

Rispetto alla *xenodiagnostica* proposta dal Brumpt per la diagnosi della tiroidite parassitaria (quando gli altri mezzi diagnostici non sono applicabili o sono negativi) io osservo al Pereira che lo stesso Brumpt, che riferisce di aver ottenuto il 100 °/₀ di successi sperimentando con *Triatoma* o *Rhodnius* e soggetti infetti di tiroidite parassitaria scrive a tal proposito « questa percentuale distingue questi meravigliosi ospiti trasmissori dalle *Glossine* che nella malattia del sonno ed in altre tripanosomiasi animali si infettano in una proporzione minima ».

È stato infatti osservato che molti protozoi patogeni ingeriti dai loro ospiti trasmissori naturali non compiono in essi l'ulteriore sviluppo, ma invece degenerano e scompaiono; le cause di questi fenomeni non sono fino oggi note.

Il Grassi, studiando lo sviluppo dei parassiti malarici nell'intestino dell'*Anopheles*, ha potuto osservare in taluni *Anopheles* la degenerazione e la scomparsa dei parassiti malarici; egli ha interpretato questo fenomeno con un fenomeno di immunità congenita che presentano taluni *Anopheles* e ne ha dato la dimostrazione sperimentando con *Anopheles* allevati in laboratorio.

Il Minchin e Thomson studiando recentemente il ciclo evolutivo del *Tripanosoma Lewisi* nella pulce del topo (*Ceratophillus fasciatus*) hanno potuto accertare che nelle numerosissime pulci poste a succhiare su topi intensamente infetti di *Trip. lewisi* soltanto in alcune di esse si è compiuto l'ulteriore sviluppo del tripanosoma nel tubo digerente: in una percentuale approssimativa del 25°/₀: nelle altre pulci il parassita ingerito è ben tosto degenerato e scomparso.

Nella malaria e nelle tripanosomiasi i parassiti sono talora frequentissimi nel sangue periferico; mentre nella leishmaniosi interna nelle regioni mediterranee è ormai definitivamente accertata la loro costante rarità.

Al lume quindi delle suddette osservazioni sulla frequenza o meno dei protozoi patogeni nel sangue periferico, sulla loro capacità o no all'ulteriore sviluppo e sulla recettività o refrattarietà dei loro ospiti trasmissori naturali si può oggi dedurre che nessun valore scientifico hanno gli esperimenti del Pereira, e che è per lo meno prematura la conclusione che il Wenyon ed il Patton hanno voluto trarre dalle loro ricerche di infezione sperimentale delle pulci con virus di *leishmania tropica* e *leishmania donovani*.

Matematica. — *Alcune questioni di geometria sopra una curva algebrica.* Nota I di RUGGIERO TORELLI, presentata dal Socio E. BERTINI.

In questo lavoro, dopo avere brevemente ricordata la rappresentazione analitica di una corrispondenza algebrica fra due curve (§ 1), scrivo certe relazioni cui soddisfano i periodi normali degli integrali normali di prima specie relativi a due curve $C_p \overline{C}_p$ di genere p, allorquando esse sono birazionale identiche (teorema I); e mostro poi come parte di queste relazioni siano sufficienti per dedurre l'identità birazionale di $C_p \overline{C}_p$ (teorema II). Ciò getta qualche luce sulle incognite relazioni di Riemann che legano i periodi normali relativi a una curva.

Enuncio poi una condizione necessaria e sufficiente, relativa sempre ai periodi di $C_p \overline{C}_p$, perchè queste due curve abbiano la stessa varietà di Jacobi (teorema III); e ciò mi dà occasione di ritrovare un teorema del Severi in proposito.

Per esporre gli altri risultati, premetto qualche spiegazione.

A) Siano $V_\rho, \overline{V}_\rho$ le varietà delle ϱ-ple di punti di due curve $C_p \overline{C}_p$ ($\varrho \leq p$). Dicendo ciò, intendiamo che siano state *fissate* le corrispondenze fra i punti di $V_\rho \overline{V}_\rho$ e le ϱ-ple di punti di $C_p \overline{C}_p$; e che, se C_p è sovrapposta a $\overline{C}_p$, sia V_ρ sovrapposta a $\overline{V}_\rho$, e le due dette corrispondenze coincidano.

Se fra $C_p \overline{C}_p$ intercede una corrispondenza biunivoca, questa fa corrispondere biunivocamente le ϱ-ple di punti di C_p a quelle di $\overline{C}_p$, inducendo così una ben determinata corrispondenza biunivoca fra $V_\rho \overline{V}_\rho$. Quest'ultima, e quelle da essa dedotte moltiplicandola per trasformazioni *ordinarie* (1) in sè di $V_\rho \overline{V}_\rho$, si diranno *associate* alla data corrispondenza biunivoca fra le due curve.

B) Consideriamo nella varietà di Jacobi V_p, relativa a una curva C_p, la varietà ∞^ρ imagine delle p-ple di punti di C_p con $p - \varrho$ punti fissi arbitrarî. Applicando a tal varietà tutte le trasformazioni ordinarie di V_p in sè, si hanno ∞^p varietà che chiameremo brevemente *varietà* W_ρ. Le W_ρ

(1) Una corrispondenza biunivoca fra le ϱ-ple di punti di una curva C_p di genere $p \geq \varrho$ si dice *ordinaria di 1ª o 2ª specie,* quando la differenza o la somma di ϱ-ple omologhe varia in una serie lineare. Se $\varrho = p - 1$, ovvero se C_p è iperellittica, esiste *una* corr. ordinaria (che è di 2ª specie); se $\varrho < p - 1$ e C_p non è iperellittica, non esistono corr. ordinarie.

Una corr. non ordinaria dicesi *singolare.*

costituiscono *un* sistema ∞^p se $\varrho = p - 1$, ovvero se C_p è iperellittica; *due* sistemi ∞^p negli altri casi.

C) Entro una varietà V_k chiameremo *carattere d'immersione* di una V_{k-1} il numero dei punti comuni ad essa e a $k-1$ varietà canoniche. Il carattere d'immersione delle V_{k-1} di un sistema continuo si calcola facilmente mediante gli *invarianti* Ω_0 (grado del sistema canonico) delle V_{k-1} stesse e delle varietà comuni a 2, a 3, ..., a k delle V_{k-1} (per un gruppo di n punti si assume $\Omega_0 = n$; per una curva di genere p si assume $\Omega_0 = 2p - 2$) (1).

Ciò posto, nel § 5 io dimostro il seguente

Teorema IV. — *Nella varietà jacobiana V_p di una curva C_p si abbia una varietà V_ϱ bir. identica alla varietà delle ϱ-ple di punti di un'altra curva $\overline{C}_p$, e tale che nessun integrale di 1a specie di V_p resti costante su di essa. Se le W_{p-1} di V_p segano su tal V_ϱ varietà aventi il carattere di immersione*

$$p\sum_{k=0}^{\varrho-2}(2p-\varrho-2-k)\binom{\varrho-2}{k}(p-\varrho-1)^{\varrho-2-k}\times$$
$$\times(p-1)(p-2)\dots(p-k),$$

allora le curve $C_p \overline{C}_p$ sono bir. identiche, e la V_ϱ è una varietà W_ϱ.

Da questo teorema seguono subito gli altri due:

Teorema V. — *Se fra le varietà di Jacobi $\overline{V}_p V_p$ di due curve $\overline{C}_p C_p$ intercede una corrispondente biunivoca che muti una W_ϱ di $\overline{V}_p$ in una W_ϱ di V_p, tal corrispondenza è associata a una corrispondenza biunivoca fra $\overline{C}_p C_p$* (2).

Teorema VI. — *Se fra le varietà delle ϱ-ple di punti di due curve $C_p \overline{C}_p$ ($\varrho < p$) intercede una corrispondenza biunivoca, questa è associata a una corrispondenza biunivoca fra $C_p \overline{C}_p$.*

(1) Chiamando $\Omega_0^{(1)} \Omega_0^{(2)} \dots \Omega_0^{(k)}$ i detti invarianti Ω_0 (talchè $\Omega_0^{(k)}$ è il *grado* delle V_{k-1}), si ha per es.:

per $k = 2$: car. immers. $= \Omega_0^{(1)} - \Omega_0^{(2)}$;

per $k = 3$: car. immers. $= \Omega_0^{(1)} - 2\Omega_0^{(2)} + 3\Omega_0^{(3)}$;

e si calcola subito, per induzione, la formula generale.

(2) Nel caso $\varrho = p - 1$, questo teorema è stato recentemente dimostrato dal Comessatti [Atti Accad. Torino, vol. 50, 1914-15]; e allora può anche (come lo stesso Comessatti avverte) dedursi immediatamente dal mio teorema ricordato al principio del n. 7. Basta osservare che alla curva di $\overline{V}_p$, imagine delle p-ple di punti di $\overline{C}_p$ con $p-1$ punti fissi arbitrarî, la corrispondenza di cui parla l'enunciato del teorema V (postovi $\varrho = p - 1$) fa corrispondere una curva di V_p che incontra in p punti le W_{p-1}; e applicare il mio ricordato teorema.

Quest'ultimo è poi essenziale anche per la dimostrazione del teorema V.

Da questi due teoremi, supponendo che le curve $C_p \bar{C}_p$ siano sovrapposte, segue che

Se la varietà jacobiana di una curva C_p *possiede una trasformazione singolare che muti in sè la totalità delle* W_ρ, *tal trasformazione è associata a una trasformazione birazionale singolare* [1] *di* C_p *in sè.*

Se la varietà delle ϱ*-ple di punti di una curva* C_p *possiede una trasformazione singolare in sè, questa è associata a una trasformazione birazionale singolare in sè di* C_p.

§ 1. — Rappresentazione analitica di una corrispondenza algebrica fra due curve.

1. Sia C_p una curva di genere p; y un suo punto variabile. Possiamo rappresentare i punti y mediante i punti di una ciambella con p buchi R: siano $A_i B_i$ $(i = 1, 2, \dots, p)$ le p retrosezioni su R; $v_i(y)$ i p integrali normali di 1ª specie; τ_{ik} il periodo di $v_i(y)$ lungo B_k $(\tau_{ik} = \tau_{ki})$. Osserviamo subito che, data C_p, la corrispondenza fra i suoi punti e quelli di R non è determinata in modo unico; nè, per conseguenza, sono determinati univocamente gli $\frac{1}{2}p(p+1)$ numeri τ_{ik}. Il sistema dei τ_{ik} si dirà brevemente un *sistema di periodi normali di* C_p.

Sia poi $\bar{C}_p$ un'altra curva di genere p; x un suo punto variabile; $\bar{R}, \bar{A}_i \bar{B}_i$, $u_i(x)$, a_{ik} enti analoghi ai precedenti, e relativi a $\bar{C}_p$.

Supponiamo che tra $C_p \bar{C}_p$ interceda una corrispondenza $(n\nu)$ che, pensata come operazione che porta da un punto di $\bar{C}_p$ a n punti di C_p, chiameremo S; sia $y' y'' \dots y^n$ il gruppo degli omologhi del punto x di $\bar{C}_p$. Allora si hanno le classiche p relazioni di Hurwitz

$$(1) \quad v_k(y') + \cdots + v_k(y^n) = \sum_i \pi_{ki}\, u_i(x) + \pi_k \qquad (k = 1, 2, \dots, p) \text{ [2]},$$

dove le π_k sono costanti e le π_{kl} verificano le eguaglianze

$$(2) \quad \begin{cases} \pi_{kl} = h_{kl} + \sum_i g_{il}\, \tau_{ki} \\ \sum_i \pi_{ki}\, a_{il} = H_{kl} + \sum_i G_{il}\, \tau_{ki}\,, \end{cases}$$

gli $h\, g\, H\, G$ essendo numeri interi (*intieri caratteristici* di S).

[1] Le sole corrispondenze biunivoche non singolari, su curve di genere $p > 1$, sono quelle date dalle g_2^1 delle curve iperellittiche.

[2] In tutte le formule, quando non sia esplicitamente notato il contrario, gli indici di sommazione variano da 1 a p.

Da queste si traggono le p^2 relazioni

$$(2') \qquad \sum_{ji} g_{ji}\, \tau_{kj}\, a_{il} + \sum_i h_{ki}\, a_{il} - \sum_i G_{il}\, \tau_{ki} - H_{kl} = 0 .$$

Se la corrispondenza S non è a valenza zero, i numeri π_{kl} non sono tutti nulli; e viceversa. E si noti che, com'è facile vedere, i numeri π_{kl} sono tutti nulli se, e solo se, lo sono i numeri $h\,g\,H\,G$.

2. Per l'operazione S^{-1} (inversa della S), che porta da un punto y di C_p ai suoi omologhi $x'\, x'' \dots x^{\nu}$, avremo similmente

$$u_k(x') + \cdots + u_k(x^{\nu}) = \sum_i \overline{\pi}_{ki}\, v_i(y) + \overline{\pi}_k ,$$

e

$$\overline{\pi}_{kl} = \overline{h}_{kl} + \sum_i \overline{g}_{il}\, a_{ki}$$

$$\sum \overline{\pi}_{ki}\, \tau_{il} = \overline{H}_{kl} + \sum_i \overline{G}_{il}\, a_{ki} .$$

Ora, i numeri $\overline{h}\,\overline{g}\,\overline{H}\,\overline{G}$ si determinano facilmente, imitando il procedimento che segue l'Hurwitz nel caso che le curve $C_p\,\overline{C}_p$ siano sovrapposte e si rappresentino *allo stesso modo* su un'unica ciambella (talchè $\tau_{ik} = a_{ik}$). Si trova così

$$\overline{h}_{kl} = G_{lk} \ , \ \overline{g}_{kl} = -\, g_{lk} \ , \ \overline{H}_{kl} = -\, H_{lk} \ , \ \overline{G}_{kl} = h_{lk} .$$

3. Vediamo adesso facilmente che

Se $p > 1$ e il determinante Π dei numeri π_{kl} è diverso da zero, non possono esistere su $\overline{C}_p$, nè su C_p, infinite coppie di punti i cui gruppi omologhi siano equivalenti o coincidano.

Infatti, se ogni gruppo $(y'\, y'' \dots y^n)$ fosse equivalente a qualche altro gruppo analogo, i p integrali di $\overline{C}_p$

$$\sum_i \pi_{ki}\, u_i(x)$$

non potrebbero essere linearmente indipendenti [1]; quindi seguirebbe $\Pi = 0$, contro il supposto. Se poi si verificasse qualcun altro dei casi che vogliamo dimostrare assurdi, la serie descritta su C_p dal gruppo $(y'\, y'' \dots y^n)$ dovrebbe godere di una delle due proprietà: 1ª) essere birazionale identica a una involuzione di $\overline{C}_p$ (loc. cit., n. 1); 2ª) essere nella stessa classe [2] con

[1] R. Torelli, *Sulle serie algebriche* ecc. [Rend. Palermo, tomo XXXVII (1914)], n. 16, III.

[2] Si dice che due serie (di egual dimensione) appartengono alla stessa *classe*, quando esse possono mettersi fra loro in corrispondenza biunivoca tale che la somma o la differenza di due gruppi omologhi varii in una serie lineare.

una serie composta con una involuzione (loc. cit., n. 21, teorema IV). Ma allora si arriverebbe daccapo alla deduzione che gli integrali sopra scritti non sono linearmente indipendenti.

Dalla precedente proposizione segue subito che

Se $p > 1$ *e* $\Pi \neq 0$, *le serie* γ_n^1, γ_ν^1 *degli ordini* n, ν, *indotte dalla corrispondenza* S *su* $C_p \overline{C}_p$, *hanno gli indici rispettivi* ν, n, *e sono birazionali identiche rispettivamente a* $\overline{C}_p C_p$.

Si potrebbe anche facilmente vedere che

Se è $\Pi \neq 0$, *è anche diverso da zero il determinante degli intieri caratteristici* (scritto al n. 9).

4. Supponiamo $p > 1$ e $\Pi \neq 0$. Chiamando omologhi su C_p due punti quando sono in uno stesso gruppo della serie γ_n^1, si ottiene su C_p una corrispondenza simmetrica T, di indice $\nu(n-1)$. In modo analogo si ottiene su $\overline{C}_p$ una corrispondenza simmetrica $\overline{T}$, di indici $n(\nu-1)$.

Si ottengono facilmente le rappresentazioni analitiche delle corrispondenze $T, \overline{T}$.

Basta osservare che, per es., la T non è altro che il prodotto $S^{-1}S$, diminuito dell'identità contata ν volte. Con che, detti $y' y'' \ldots$ gli omologhi di y nella T, si hanno le formule

$$v_k(y') + v_k(y'') + \cdots = -\nu v_k(y) + \sum_i \pi^\star_{ki} v_i(y) + \pi^\star_k$$

$$\pi^\star_{kl} = h^\star_{kl} + \sum_i g^\star_{il} \tau_{ki}$$

$$\sum \pi^\star_{ki} \tau_{il} = H^\star_{kl} + \sum_i G^\star_{il} \tau_{ki} \quad (^1)$$

$$(3) \qquad \begin{cases} h^\star_{kl} = \quad G^\star_{lk} = \sum_i (h_{ki} G_{li} - H_{ki} g_{li}) \\ g^\star_{kl} = -g^\star_{lk} = \sum_i (g_{ki} G_{li} - G_{ki} g_{li}) \\ H^\star_{kl} = -H^\star_{lk} = \sum (H_{ki} h_{li} - h_{ki} H_{li}) . \end{cases}$$

Analogamente si potrebbero scrivere le formule relative a $\overline{T}$.

È anche facile di calcolare il comune difetto di equivalenza z *delle due serie* γ_n^1, γ_ν^1.

(1) Le espressioni delle costanti $\pi^\star_k$ non hanno per noi alcun interesse.

Avverto che le considerazioni di questo numero subiscono qualche *lievissima* modificazione, quando si tolga l'ipotesi $p > 1, \Pi \neq 0$.

Basta osservare che il numero dei punti doppî di γ_n^1, ossia dei punti uniti di T [1], è dato notoriamente da

$$2\nu(n+p-1)-2z\,;$$

e anche, per una importante formula di Hurwitz, da

$$2\nu(n-1)-2\Big(\sum_k h_{kk}^{\star}-\nu p\Big)\,.$$

Dal paragone delle due espressioni segue

$$z=\sum_k h_{kk}^{\star}=\sum_{ki}\left(h_{ki}\,\mathrm{G}_{ki}-\mathrm{H}_{ki}\,g_{ki}\right)\,. \tag{4}$$

5. Le considerazioni del n. 1 si invertono così: Se due sistemi di periodi normali $\tau_{ik}\,a_{ik}$ delle due curve $\mathrm{C}_p\,\overline{\mathrm{C}}_p$ soddisfano alle relazioni (2′), esistono fra $\mathrm{C}_p\,\overline{\mathrm{C}}_p$ infinite corrispondenze, cui competono gli intieri caratteristici $h\,g\,\mathrm{H}\,\mathrm{G}$ ovvero $-h\ -g\ -\mathrm{H}\ -\mathrm{G}$.

Tutte queste corrispondenze formano, come diremo, una *classe*, nel senso che le serie da esse indotte su C_p e su $\overline{\mathrm{C}}_p$ formano una classe.

In una classe di corrispondenze (che non sia quella delle corrispondenze a valenza zero) esistono infinite corrispondenze aventi uno degli indici eguale a p. Basta osservare che, supposte verificate le (2), il sistema di *equazioni abeliane*

$$\overline{v_k(y')+\cdots+v_k(y^p)=}\sum_i \pi_{ki}\,u_i(x)+\pi_k\,,$$

colle costanti π_k genericamente scelte, individua, per ogni punto x di $\overline{\mathrm{C}}_p$ un gruppo $(y'\ldots y^p)$ di p punti su C_p. In tal senso diremo che il precedente sistema rappresenta una γ_p' di C_p.

Notiamo che le cose dette in questo § 1, eccettuato naturalmente il n. 3, si estendono subito al caso di due curve di generi *diversi*.

§ 2. — Condizioni per l'identità birazionale di due curve.

6. Dalle considerazioni del § 1 deduciamo facilmente le condizioni necessarie cui debbono soddisfare le $\tau_{ik}\,a_{ik}$ perchè le due curve $\mathrm{C}_p\,\overline{\mathrm{C}}_p$ siano birazionalmente identiche. Basta pensare che, se fra $\mathrm{C}_p\,\overline{\mathrm{C}}_p$ intercede una corrispondenza biunivoca S, il prodotto $\mathrm{S}^{-1}\,\mathrm{S}$, la cui rappresentazione analitica si deduce subito da quella di S (n. 4), è l'identità. Tenendo dunque presenti le formule (2′) (3), abbiamo il

[1] Se tali punti fossero infiniti, si ricorrerebbe a un'altra corrispondenza S′, avente gli stessi intieri caratteristici di S (cfr. n. 5), e non presentante questa particolarità.

Teorema I. — *Se due curve $C_p \bar{C}_p$ sono birazionalmente identiche, fra due loro qualunque sistemi di periodi normali $\tau_{ik}\, a_{ik}$ intercedono certe p^2 relazioni*

$$\sum_{ji} g_{ji}\, \tau_{kj}\, a_{il} + \sum_i h_{ki}\, a_{il} - \sum_i \mathrm{G}_{il}\, \tau_{ki} - \mathrm{H}_{kl} = 0\,,$$

dove gli intieri $hg\mathrm{HG}$ (dipendenti dalla scelta dei $\tau_{ik}\, a_{ik}$) soddisfano alle $p(2p-1)$ eguaglianze

$$\sum_i (h_{ki}\, \mathrm{G}_{ki} - \mathrm{H}_{ki}\, g_{ki}) = 1$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_i (h_{ki}\, \mathrm{G}_{li} - \mathrm{H}_{ki}\, g_{li}) = 0 \\ &\sum_i (g_{ki}\, \mathrm{G}_{li} - \mathrm{G}_{ki}\, g_{li}) = 0 \\ &\sum_i (\mathrm{H}_{ki}\, h_{li} - h_{ki}\, \mathrm{H}_{li}) = 0 \end{aligned}\right\} \quad k \neq l\,,$$

e alla condizione che il determinante dei numeri $\pi_{kl} = h_{kl} + \sum_i g_{il}\, \tau_{ki}$ è diverso da zero.

7. Le condizioni *sufficienti* per l'identità birazionale delle curve $C_p \bar{C}_p$ si deducono dal § 1 e da un teorema da me dimostrato tempo fa (¹): teorema il quale afferma, in sostanza, che se per la corrispondenza S, di cui si è parlato nel § 1, si verificano le due circostanze che il determinante dei numeri π_{kl} è diverso da zero, e il difetto d'equivalenza z delle serie $\gamma_n^1\, \gamma_\nu^1$ ha il valore p, allora nella classe individuata da S vi è una corrispondenza biunivoca. Otteniamo così il

Teorema II. — *Per affermare che due curve $C_p \bar{C}_p$ sono birazionali identiche, basta sapere che esse posseggono due sistemi di periodi normali $\tau_{ik}\, a_{ik}$ verificanti le p^2 relazioni*

$$\sum_{ji} g_{ji}\, \tau_{kj}\, a_{il} + \sum_i h_{ki}\, a_{il} - \sum_i \mathrm{G}_{il}\, \tau_{ki} - \mathrm{H}_{kl} = 0\,,$$

dove gli intieri $hg\mathrm{HG}$ soddisfano alla condizione

$$\sum_{ik} (h_{ki}\, \mathrm{G}_{ki} - \mathrm{H}_{ki}\, g_{ki}) = p\,,$$

e all'altra che il determinante formato coi numeri $\pi_{kl} = h_{kl} + \sum_i g_{il}\, \tau_{ki}$ sia diverso da zero.

(¹) R. Torelli, *Sulle varietà di Jacobi* [questi Rend., vol. XXII, agosto 1913], teorema I.

8. Dal paragone dei teoremi I e II viene il seguente

Corollario. — *Supposto che i numeri $\tau_{ik}\, a_{ik}$ siano due sistemi di periodi normali di due curve $C_p\, \overline{C}_p$, il sistema delle p^2+1 equazioni nelle $h\, g\, H\, G$:*

$$(5) \qquad \sum_{ji} \tau_{kj}\, a_{il}\, g_{ji} + \sum_i a_{il}\, h_{ki} - \sum_i \tau_{ki}\, G_{il} - H_{kl} = 0$$

$$(6) \qquad \sum_{ki} (h_{ki}\, G_{ki} - H_{ki}\, g_{ki}) = p\,,$$

gode della seguente proprietà: se esso ammette una soluzione intera che non annulli il determinante Π dei numeri $\pi_{kl} = h_{kl} + \sum_i g_{il}\, \tau_{ki}$, questa soluzione necessariamente soddisfa alle $p(2p-1)$ relazioni

$$\sum_i (h_{ki}\, G_{ki} - H_{ki}\, g_{ki}) = 1$$

[si noti che da queste *segue* la (6)]

$$\left.\begin{array}{l} \sum_i (h_{ki}\, G_{li} - H_{ki}\, g_{li}) = 0 \\ \sum_i (g_{ki}\, G_{li} - G_{ki}\, g_{li}) = 0 \\ \sum_i (H_{ki}\, h_{li} - h_{ki}\, H_{li}) = 0 \end{array}\right\} k \neq l\,.$$

Orbene: *questa proprietà del sistema* (5) (6) *implica delle relazioni fra i coefficienti $\tau_{ik}\, a_{ik}$: essa è cioè equivalente alle relazioni riemanniane, ricordate in prefazione, fra le τ_{ik} e fra le a_{ik}* (*o a parte di esse*).

Per giustificare questa affermazione osserviamo, che, scelti degli intieri $h\, g\, H\, G$ colla *sola* condizione che soddisfino alla (6), si può sempre risolvere, in ∞^p modi almeno, il sistema (5) rispetto alle $p(p+1)$ *incognite* $\tau_{ik}\, a_{ik}$ (convenendo che debba essere $\tau_{ik} = \tau_{ki}$, $a_{ik} = a_{ki}$). E la generica di queste soluzioni non annulla certo il determinante Π; perchè ciò non avviene *particolarizzando* ancor più gli intieri $h\, g\, H\, G$: basta, per convincersene, prendere due curve $C_p\, \overline{C}_p$ birazionalmente identiche, e scrivere le relazioni di cui parla il teorema I.

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXIV. (1892-1915). Fasc. 10°. Sem. 1°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIII. (1892-1914).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-X.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 maggio 1915.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

(*) Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.
(**) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 24 giugno 1915.* **N. 11.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 giugno 1915.

Volume XXIV°. — Fascicolo 11°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 giugno 1915.

Presidenza del Socio anziano F. TODARO.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica. — *Sulla distribuzione della corrente in un elettrolita posto nel campo magnetico.* Nota del Socio prof. AUGUSTO RIGHI.

1. Anteriori ricerche sperimentali e teoriche [1], rivolte allo studio degli effetti prodotti dal campo magnetico sul movimento dei ioni e degli elettroni in un gas percorso dalla corrente elettrica, mi hanno condotto a dimostrare, che gli urti di essi sulle pareti del tubo che contiene il gas dànno una risultante tendente a spostare il tubo medesimo, precisamente come accadrebbe se, invece del gas, la corrente percorresse un conduttore metallico di identica forma e dimensione. La forza ponderomotrice che agisce sul tubo non è dunque altro che la risultante delle pressioni dovute agli urti effettuati dagli elettroni e dai ioni, sia sulle molecole gassose, sia direttamente sulle pareti. L'analogia porta così alla ipotesi, che l'ordinaria forza ponderomotrice prodotta dal campo su di un filo percorso dalla corrente sia la risultante degli urti degli elettroni, al moto dei quali si attribuisce principalmente la propagazione dell'elettricità nei metalli. Anche in tal caso il cambiamento di forma delle traiettorie delle particelle elettrizzate prodotte dal campo fa sì che la pressione sulle molecole e sulla superfice che limita il conduttore (la quale, non permettendo l'uscita degli elettroni, si comporta come la parete del tubo) risulti diversa da zero.

Questa nuova teoria delle forze ponderomotrici elettromagnetiche deve evidentemente applicarsi anche al caso dei liquidi. Esperienze, tanto sem-

[1] Mem. Acc. Bologna, 16 febb. 1913; N. Cimento, luglio 1913.

plici e intuitive che neppur giudico necessario descrivere, permettono di mettere in evidenza gli effetti facili a prevedersi, producentisi su lamine mobili immerse in un elettrolito; e le note correnti liquide, che in certi casi ben conosciuti si producono nella massa di un liquido percorso dalla corrente elettrica e posto in un campo magnetico, possono essere in tal modo interpretate.

La teoria or ora richiamata conduce ad una conseguenza suscettibile di verificazioni sperimentali. Per giungere a queste, furono istituite le esperienze qui descritte.

2. Si supponga di avere un elettrolita, nel quale siano immersi due elettrodi piani verticali AB, CD (fig. 1), il primo dei quali sia il positivo. In assenza di campo magnetico uno ione positivo P acquista, dopo un urto, una componente di velocità, per opera della forza elettrica, diretta secondo

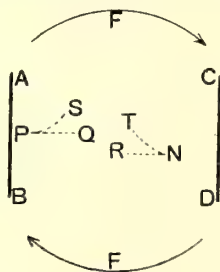



Fig. 1.

PQ, mentre uno ione negativo N l'acquista nella direzione NR. Ma se agisce un campo magnetico diretto perpendicolarmente al piano di figura, per esempio nel senso indicato dalle freccie F (direzione della corrente circolare a cui il campo può essere attribuito), il ione positivo P, astrazione fatta dalla velocità ad esso rimasta dopo l'ultimo urto, tende a muoversi secondo un arco di cerchio PS, e il ione negativo N secondo l'arco di cerchio NT. Entrambi i ioni risultano dunque spostati nel senso da BD verso AC per opera del campo. La naturale diffusione dei ioni tenderà naturalmente a far sparire la variazione di densità in ioni (numero di ioni per cc.), che tenderebbe ad aumentare in modo continuo; ma si raggiungerà presto una condizione permanente, con densità in ioni crescente da BD andando verso AC. Naturalmente, se si supponesse invertita o la direzione del campo o quella della corrente, la detta densità risulterebbe invece crescente da AC verso BD. Siccome poi i ioni, colle direzioni supposte nella figura, esercitano, in virtù dei loro urti, una pressione sulle molecole più grande nel sesso da BD verso AC, che nel senso contrario, così si produrrà un leggiero dislivello del liquido.

La variata distribuzione dei ioni liberi avrà per immediata conseguenza una corrispondente variazione della densità di corrente, tanto che per una

data porzione di area d'un elettrodo passerà nell'unità di tempo più elettricità se quell'area è presa presso A o C che quando è presa presso B o D. In altre parole, deve manifestarsi quell'effetto di spostamento dei filetti di corrente per opera del campo, identico a quello che si produrrebbe su fili metallici percorsi dalle stesse correnti, che il sign. Hall si era proposto di mettere in evidenza, allorchè fu invece condotto a scoprire il fenomeno che porta il suo nome.

La teoria fa dunque prevedere uno spostamento della corrente entro il conduttore, che fino ad ora si è ritenuto non esista Le esperienze seguenti ne dimostrano l'esistenza nel caso degli elettroliti.

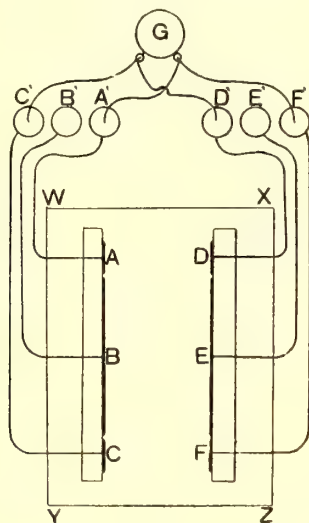



Fig. 2.

3. Temendo varie cause di errore (effetti termoelettrici, galvanomagnetici, ecc.) nell'impiego di sonde collocate secondo le linee di corrente, tentai dapprima di riconoscere se l'intensità di corrente fosse realmente maggiore fra A e C che non fra B e D, pesando, dopo il passaggio della corrente, delle porzioni di area nota tolte dagli elettrodi o presso A e C, o presso B e D. Tali elettrodi erano di rame, ed erano immersi in solfato di rame. Ma, avendo riconosciuto che tale metodo non era suscettibile di sufficiente precisione, son ricorso poscia alla polarizzazione degli elettrodi. Se questi sono di platino ed immersi in acqua acidulata, si prevede una più intensa polarizzazione presso le estremità A e C che non presso B e D. Ecco la disposizione sperimentale adottata:

Esperienza a). Sul polo inferiore della elettrocalamita di Weiss, disposta col suo asse magnetico verticale, è posta una vaschetta rettangolare di vetro WXZY (fig. 2), contenente acqua col 0,5 per cento di acido solforico, nella quale sono immersi gli elettrodi ABC e DEF. Ciascuno di essi è costituito

da una lastra di platino fissata con gomma lacca contro una lastra di vetro, ed è diviso in tre parti mediante sottili tagli verticali. Le parti mediane B ed E sono larghe circa 6 cm., mentre quelle estreme A, C, D, F hanno la larghezza di 1,2 cm ; la distanza fra AC e DF è 0,8 cm., e l'altezza del liquido è di circa un centimetro. Le sei lastrine, che risultano così separate, sono messe in comunicazione coi pozzetti a mercurio A′, B′, C′, D′, E′, F′, che servono per stabilire le necessarie comunicazioni.

L'esperienza consiste nel far passare per un certo tempo la corrente nel liquido, e nel constatare poscia che si ottiene una corrente di polarizzazione più intensa dagli elettrodi A, D, che non dagli elettrodi C, F, o viceversa, secondo la direzione del campo e quella della corrente principale. A tale scopo, si mettono dapprima i tre pozzetti A′, B′, C′, in comunicazione con un polo di una batteria (due elementi) di accumulatori, e i tre altri D′, E′, F′ coll'altro polo: e ciò per un tempo determinato, 30 oppure 60 secondi. Subito dopo, tolte quelle comunicazioni, se ne stabiliscono delle nuove, che sono quelle indicate nella figura. E cioè C′, F′ sono messi in comunicazione coi serrafili di un galvanometro G (modello Siemens a campo fisso, coll'opportuna derivazione per regolarne la sensibilità); ed altrettanto si fa con A′ e D′, coll'avvertenza, però, che la corrente raccolta da A e D circoli nel galvanometro con direzione opposta a quella della corrente ricavata da C e F.

Il risultato è conforme alle previsioni; giacchè, se non esiste campo magnetico, non si osserva deviazione sensibile, mentre questa si produce quando v'è il campo. Per esempio, con campo di circa 6700 gauss e con corrente nel liquido di 0,2 ampère ho osservato una deviazione corrispondente a circa 0,0003 ampère. I valori numerici sono naturalmente diversi secondo le circostanze. In particolare esiste per ogni dato valore dell'intensità della corrente una durata di essa, per la quale l'effetto presenta la massima evidenza.

Molte esperienze si possono fare in successione, senza badare alla polarizzazione che rimane dopo ciascuna; ma si ottengono risultati più regolari lasciando dissipare la polarizzazione stessa dopo ogni esperienza, col tenere per qualche mezz'ora le sei lastrine in reciproca comunicazione metallica.

4. L'esperionza è resa più facile e rapida modificandola come segue:

Esperienza b). Si mantengano stabilmente i pozzetti B′, E′ in comunicazione coi poli della batteria, conservando le altre comunicazioni della figura 2. L'istrumento non darà generalmente che una piccola deviazione, di cui non si deve tener conto; ma, eccitando il campo si ha una deviazione che cangia segno invertendo il campo magnetico.

La corrente principale ha qui per elettrodi B ed E, mentre A, D, F, C, fanno da sonde, le quali, per la simmetria della loro situazione, non

tendono a produrre deviazione. Ma sotto l'azione del campo, che per chiarezza continuerò a supporre diretto in modo che i ioni tendano ad addensarsi verso A e D, le comunicazioni attraverso il liquido di A con B e di D con E divengono più perfette, mentre l'inverso accade per le lastre C ed F. Di qui la deviazione. A rigore, dovrà divenire migliore anche la comunicazione fra A e D, ciò che tenderà ad attenuare l'effetto il quale però resta evidentissimo.

Siccome, per questa seconda esperienza, la polarizzazione degli elettrodi non serve, si possono adoperare elettrodi di rame, e come liquido un qualunque elettrolita, per esempio, solfato di rame.

Una particolarità degna di nota è la seguente. Anche astrazion fatta dalla momentanea deviazione dovuta ad induzione, che accompagna ogni variazione di intensità del campo magnetico (che è facile di evitare chiudendo

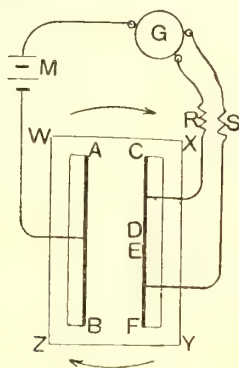



Fig. 3.

la corrente nel liquido soltanto dopo aver stabilito il campo), si osservano dapprincipio irregolari deviazioni, generalmente in senso opposto a quello che si prevede, le quali con una certa lentezza dànno poi luogo ad una deviazione stabile corrispondente alle spiegazioni date. Sembra, cioè, che occorra un certo tempo prima che si stabilisca un regime permanente. Ció non può sorprendere se si pensi all' intervento della diffusione, sia rispetto ai ioni liberi, sia eventualmente rispetto a regioni di variata concentrazione o di variata temperatura. Inoltre possono intervenire delle azioni magnetiche in seguito a variazioni locali della permeabilità magnetica del liquido.

5. L'esperienza precedente me ne ha suggerita un'altra, che ne è in certo qual modo, una semplificazione.

Esperienza c). La vaschetta WXYZ (fig. 3), collocata al posto della precedente, contiene una soluzione salina ed elettrodi, per esempio, di rame. Uno di essi, AB, non ha tagli; l'altro ne ha uno a metà, di modo che esso è in realtà l'insieme di due elettrodi eguali CD, EF. La corrente della sorgente M entra nel liquido dall' elettodo AB e ne esce divisa in due dagli

elettrodi CD, EF. Di qui le due correnti parziali vanno a percorrere in sensi inversi i due circuiti di un galvanometro differenziale (tipo Siemens a campo fisso, il cui equipaggio mobile contiene due avvolgimenti uguali, a ciascuno dei quali si può applicare la necessaria derivazione per regolare la sensibilità).

Regolando, mediante reostati a corsoio R ed S, le due correnti parziali (a rigore, un solo reostata può bastare), in modo che il galvanometro non mostri deviazione quando non esiste il campo magnetico, se ne osserva una se il campo è eccitato. Se, per esempio, AB è l'anodo, e la direzione del campo è quella indicata dalle freccie curve, la densità in ioni entro il liquido sarà crescente andando da BF verso AC (secondo una legge esponenziale), e la corrente uscente da CD sarà più intensa di quella uscente da EF.

I seguenti risultati numerici potranno fornire una nozione sulla entità dei risultati ottenuti. La lastra AB era larga 53 mm.; le due CD ed EF 26 mm., e l'altezza del liquido era 5 mm. Indicando con I l'intensità della corrente totale fornita da M, e con i_1 ed i_2 quelle delle correnti parziali da CD a G e da EF a G, ho avuto, con campo magnetico di circa 8500 gauss,

I in ampères	$(i_1 - i_2)$ in ampères	$(i_1 - i_2)$: I
0,005	0,000017	0,0037
10	50	50
20	170	85
30	350	117

L'effetto prodotto dal campo magnetico diviene grandissimo se si riduce piccolissima l'altezza del liquido; il che è soprattutto dovuto al dislivello del liquido, di cui si è fatto cenno nel n. 2.

Il risultato di questa terza esperienza non muta, se si ricopre con guttaperca la parte superiore degli elettrodi, in modo che la parte nuda inferiore sia interamente sommersa. Se ne deduce che il fenomeno constatato non può essere attribuito alle lievi variazioni di livello provocate dal campo magnetico. D'altra parte, siccome il fenomeno Hall è sensibilmente nullo negli elettroliti, così esso non può avere parte alcuna nella produzione delle deviazioni osservate.

6. Un'ultima esperienza indico qui sommariamente, riservandomi di farne più tardi un esame più completo.

Se nell'esperienza *c*) s'inverte il senso della corrente, non muta perciò il senso della deviazione; il che si spiega riflettendo che, così facendo, s'inverte la direzione delle correnti in ogni parte del circuito, ma in pari tempo diviene più intensa la corrente parziale in quello di due tratti di circuito derivato ove prima passava la corrente parziale più debole; e viceversa. Altrettanto accade per l'esperienza *b*). Ne consegue che le esperienze *b*) e *c*)

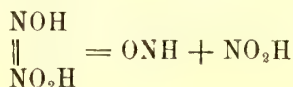
devono riuscire, anche se, invece della corrente continua s'impieghi una corrente alternata. E ciò si è verificato.

Così, lasciate le comunicazioni col galvanometro come nella figura 2, e messi i pozzetti B', E' in comunicazione con una presa della corrente alternata di città (frequenza 42), ho ottenuto una deviazione, la quale cambiava segno invertendo il campo. Del pari ho ottenuto analogo risultato sostituendo la corrente alternata alla continua nella esperienza della figura 3.

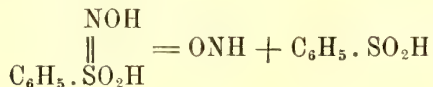
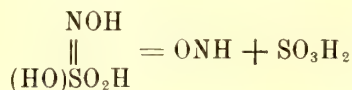
Ma esaminato il fenomeno da presso, mi sono accorto che le deviazioni erano, a parità d'intensità di corrente, assai più piccole nel caso della corrente alternata, ed inoltre che esse erano sempre di senso opposto. Si direbbe dunque che il regime stabile, di cui si è parlato alla fine del n. 4, non faccia a tempo a prodursi. Ma la spiegazione di questo inaspettato fenomeno richiederà ulteriori e, forse, non brevi ricerche. Intanto ho constatato il passaggio graduale tra il fenomeno ottenuto colla corrente continua e quello prodottosi mercè la corrente alternata a 42 periodi. Infatti, avendo disposto i necessarî apparecchi per la produzione di correnti alternate di periodo variabile a piacere, ho riconosciuto che avveniva l'inversione dell'effetto allorchè la frequenza era di circa 2,5 per secondo.

Chimica. — *Sopra le scissioni di alcuni composti dell'azoto* (1). Nota preliminare del Socio A. Angeli.

Ancora molti anni or sono ho dimostrato che la nitroidrossilammina, sotto forma di sale sodico, subisce facilmente la scissione (2)

$$\begin{array}{l} NOH \\ \| \\ NO_2H \end{array} = ONH + NO_2H$$

e che in modo perfettamente simile si comportano i sali dell'acido idrossilamminsolfonico e dell'acido benzolsolfoidrossamico

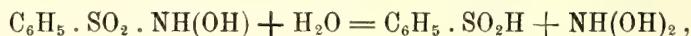
$$\begin{array}{c} NOH \\ \| \\ (HO)SO_2H \end{array} = ONH + SO_3H_2$$

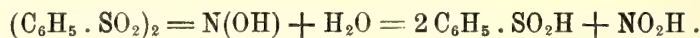
$$\begin{array}{c} NOH \\ \| \\ C_6H_5 . SO_2H \end{array} = ONH + C_6H_5 . SO_2H$$

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto di studi superiori in Firenze.

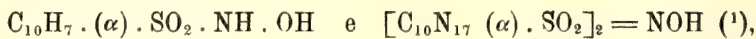
(2) Memorie Lincei, 1905, p. 83; vedi anche H. Wieland, *die Hydrazine* (Stuttgart, 1913), pag. 7.

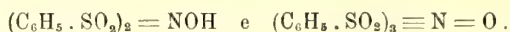
Tutti questi acidi sono derivati dell'idrossilammina, nella quale un atomo di idrogeno è sostituito da un residuo dell'acido nitrico e, rispettivamente, degli acidi solforico e benzolsolfonico: invece nella scissione compariscono al loro posto gli acidi nitroso, solforoso e benzolsolfinico. Scissioni analoghe saranno quindi da aspettarsi dai derivati di quegli acidi che rappresentano due gradi di ossidazione di uno stesso elemento, quali p. es. gli acidi nitrico e nitroso.

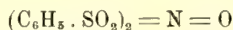
Naturalmente, questo è il modo più semplice per rappresentare queste scissioni; ma con tutta probabilità si tratta di processi di idrolisi,

$$C_6H_5 . SO_2 . NH(OH) + H_2O = C_6H_5 . SO_2H + NH(OH)_2 ,$$

giacchè anche i derivati bisostituiti dell' idrossilammina subiscono nelle identiche condizioni una decomposizione perfettamente analoga, che si può rappresentare solamente nel seguente modo:

$$(C_6H_5 . SO_2)_2 = N(OH) + H_2O = 2\, C_6H_5 . SO_2H + NO_2H .$$

In questo caso insieme con l'acido benzolsolfonico si forma acido nitroso, che si può considerare come triossiammoniaca; e che in entrambi i casi le scissioni avvengano in questo modo, viene anche confermato dal fatto che gli α-derivati della naftalina,

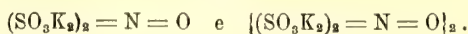
$$C_{10}H_7 . (\alpha) . SO_2 . NH . OH \quad e \quad [C_{10}N_{17}\ (\alpha) . SO_2]_2 = NOH$$ (1),

(1) Come è noto, l'acido benzolsolfoidrossamico viene facilmente ossidato nei due prodotti

$$(C_6H_5 . SO_2)_2 = NOH \quad e \quad (C_6H_5 . SO_2)_3 \equiv N = O .$$

Finora non mi fu possibile di limitare l'ossidazione in modo da ottenere il termine contenente l'azoto tetravalente

$$(C_6H_5 . SO_2)_2 = N = O$$

analogo alla porfiressina di Piloty (Berichte, *34*, 1884, pag. 2354) ed all'ossido di difenilazoto di Wieland) Berichte, *47*, 2111):

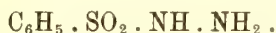
$$(C_6H_5)_2 = N = O .$$

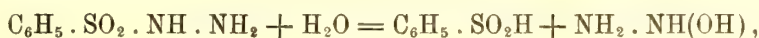
Wieland però dimentica che un prodotto perfettamente analogo, e del pari fortemente colorato, è stato preparato da Fremy ancora nel 1845, e che si ottiene in modo simile a quanto ha fatto Wieland, ossidando cioè i sali dell'acido idrossilammindisolfonico. Ancora 20 anni or sono, Hantzsch e Semple (Beriche, *28*, 2744) lo avevano considerato come un derivato dell'ipoazotide, come la quale può presentarsi nelle due forme molecolari

$$(SO_3K_2)_2 = N = O \quad e \quad \{(SO_3K_2)_2 = N = O\}_2 .$$

Anche il comportamento rispetto all'acido iodidrico è identico a quello che Wieland ha riscontrato per il suo prodotto.

per azione degli alcali e successivo trattamento con acidi minerali diluiti, forniscono entrambi gli acidi β-naftalinsolfinici isomeri. Queste trasformazioni sono tanto più notevoli in quanto avvengono a temperatura ordinaria anche in soluzione acquosa diluitissima.

Date le grandi analogie di comportamento che si riscontrano fra i derivati dell'idrossilammina e dell'idrazina (ed acqua ossigenata), e sulle quali ho richiamato l'attenzione in una Nota pubblicata alcuni anni or sono [1], era prevedibile che una scissione analoga venisse presentata anche da derivati dell'idrazina; e già a suo tempo io aveva studiato l'azione degli alcali sopra la benzolsolfonidrazina

$$C_6H_5 \,.\, SO_2 \,.\, NH \,.\, NH_2 \,.$$

Ma a freddo la reazione non si compie; solamente più tardi F. Raschig, operando a temperatura più elevata, assieme con acido benzolsolfinico, ebbe sviluppo di azoto e di idrogeno [2]. In modo analogo a quanto io aveva ammesso per il caso dell'acido benzolsolfoidrossamico, in cui si ha formazione di biossiammoniaca, Raschig suppone che dalla benzolsolfonidrazina si formi dapprima ossiidrazina,

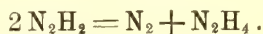
$$C_6H_5 \,.\, SO_2 \,.\, NH \,.\, NH_2 + H_2O = C_6H_5 \,.\, SO_2H + NH_2 \,.\, NH(OH) \,,$$

la quale, perdendo acqua, fornisce la diimmide

$$HN = NH$$

che successivamente si scinde in azoto ed idrogeno. A questo proposito dirò che già Thiele [3] aveva tentato di preparare la diimmide per decomposizione, in soluzione alcalina, dell'acido azodicarbonico

$$COOH \,.\, N = N \,.\, COOH = 2\,CO_2 + N_2H_2 \,;$$

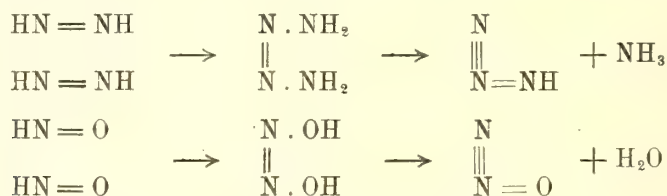
ma non ne ottenne che i prodotti di decomposizione che in questo caso sono azoto e idrazina:

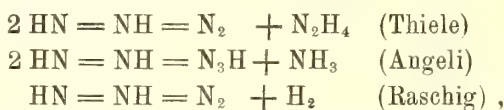
$$2\,N_2H_2 = N_2 + N_2H_4 \,.$$

Operando invece la decomposizione dello stesso acido in presenza di acidi minerali diluiti, io ho notato [4] che la reazione procede in modo del tutto diverso: si ottengono cioè acido azotidrico ed ammoniaca, ed ho altresì posto in rilievo che questo modo di formazione dell'acido azotidrico è perfettamente

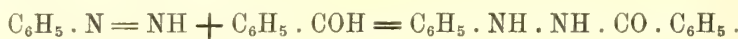
(1) Questi Rendiconti (1910), 2° sem., pag. 94.
(2) Zeit. für angew. Chemie (1910), 972.
(3) Liebig's Annalen *271*, 130.
(4) Questi Rendiconti (1910), 2° sem., pag. 99.

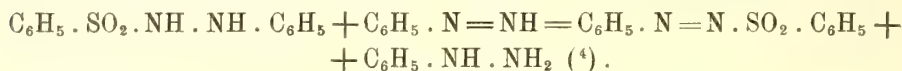
analogo alla formazione dell'acido iponitroso e del protossido di azoto dalla biossiammoniaca:

$$\begin{matrix} HN=NH \\ \\ HN=NH \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} N.NH_2 \\ \| \\ N.NH_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} N \\ ||| \\ N=NH \end{matrix} + NH_3$$

$$\begin{matrix} HN=O \\ \\ HN=O \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} N.OH \\ \| \\ N.OH \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} N \\ ||| \\ N=O \end{matrix} + H_2O$$

Tale interpretazione è stata subito accettata da Diels ([1]) il quale se ne è giovato per spiegare anche altre interessanti scissioni che presentano alcuni composti azotati da lui scoperti. Riassumendo dunque, la diimmide non fu ancora possibile di ottenerla allo stato libero, giacchè tosto si scinde in modi differenti a seconda delle condizioni di esperienza:

$$2\,HN=NH = N_2 + N_2H_4 \quad \text{(Thiele)}$$
$$2\,HN=NH = N_3H + NH_3 \quad \text{(Angeli)}$$
$$HN=NH = N_2 + H_2 \quad \text{(Raschig)},$$

Come ho fatto vedere alcuni anni addietro ([2]), anche la benzolsolfonfenilidrazina perde, per azione degli alcali, acido benzolsolfinico; e la fenildiimmide, che in tal modo si libera, reagisce immediatamente p. es. con l'aldeide benzoica:

$$C_6H_5.N=NH + C_6H_5.COH = C_6H_5.NH.NH.CO.C_6H_5.$$

Se, invece di operare in presenza di aldeide benzoica, si agita il liquido alcalino con etere, essa reagisce sopra il composto solfonico primitivo ancora inalterato, per dare fenilidrazina assieme con un prodotto che si mostrò identico al benzoldiazosolfone ottenuto la prima volta da Koenigs ([3]):

$$C_6H_5.SO_2.NH.NH.C_6H_5 + C_6H_5.N=NH = C_6H_5.N=N.SO_2.C_6H_5 + \\ + C_6H_5.NH.NH_2 \ ([4]).$$

([1]) Berliner Berichte, *46* (1913), 2002.

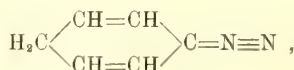
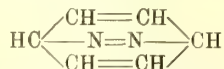
([2]) Questi Rendiconti (1909), 1° sem., pag. 322.

([3]) Berliner Berichte, *10* (1877), 1232.

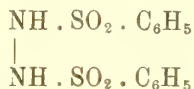
([4]) Secondo W. Vaubel (Berichte, *33*, 1711), la fenildiimmide si può preparare per riduzione del diazoamminobenzolo. A mio avviso, però, le proprietà del composto che così si ottiene non stanno affatto in buon accordo con tale struttura; sarebbe più verosimile la formola

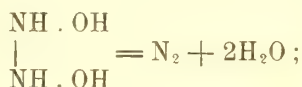
$$H_2C\left\langle\begin{matrix} CH=CH \\ CH=CH \end{matrix}\right\rangle C=N\equiv N\,,$$

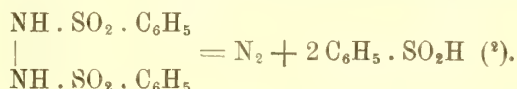
ovvero l'altra

$$HC\left\langle\begin{matrix} CH=CH \\ -N=N- \\ CH=CH \end{matrix}\right\rangle CH$$

che meglio spiegherebbe per quale ragione il prodotto non presenta la reazione dei diazocomposti alifatici. Vedi anche S. Goldschmidt, B. Berichte *46*, 1530.

Dati questi risultati, era da aspettarsi che la reazione procedesse in modo analogo anche con i derivati dell'idrazina che contengono due residui solfonici uniti a due atomi d'idrogeno diversi; il caso più semplice è rappresentato dalla dibenzolsolfonidrazina

$$\begin{array}{l} NH \,.\, SO_2 \,.\, C_6H_5 \\ | \\ NH \,.\, SO_2 \,.\, C_6H_5 \end{array}$$

che venne preparata parecchi anni or sono da Hinsberg ([1]), il quale aveva anche notato che il prodotto può fornire un sale di potassio che per riscaldamento si decompone con formazione di acido benzolsolfinico e sviluppo di azoto. Evidentemente, anche questa reazione entra fra quelle che prima ho esaminate: e, con tutta probabilità, come termine intermedio si forma la biossiidrazina, la quale, perdendo acqua, fornisce azoto:

$$\begin{array}{l} NH \,.\, OH \\ | \\ NH \,.\, OH \end{array} = N_2 + 2H_2O \,;$$

e perciò la reazione finale si potrà esprimere nel seguente modo:

$$\begin{array}{l} NH \,.\, SO_2 \,.\, C_6H_5 \\ | \\ NH \,.\, SO_2 \,.\, C_6H_5 \end{array} = N_2 + 2\, C_6H_5 \,.\, SO_2H \text{ ([2])}.$$

È però chiaro che la decomposizione potrà avvenire anche in modo graduale: vale a dire che in una prima fase venga eliminato un solo residuo solfonico,

$$\begin{array}{l} NH \,.\, SO_2 \,.\, C_6H_5 \\ | \\ NH \,.\, SO_2 \,.\, C_6H_5 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} NH \,.\, OH \\ | \\ NH \,.\, SO_2 \,.\, C_6H_5 \,, \end{array}$$

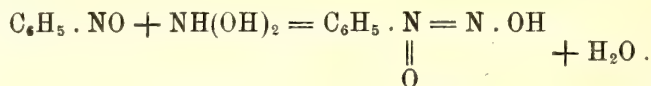
e che il prodotto intermedio così formatosi, per ulteriore azione degli alcali, perda ancora acido benzolsolfinico per dare acqua ed azoto. Per dimostrare questo, mi sono giovato dello stesso artifizio che a suo tempo mi ha permesso di studiare la decomposizione dell'acido benzolsolfoidrossamico. In questo ultimo caso si forma, come ho già più volte detto, acido benzolsolfinico e biossiammoniaca, la quale può fissarsi, p. es., alle aldeidi ([3]) oppure anche

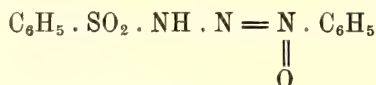
([1]) Berliner Berichte, *27* (1894), 601.

([2]) Ho già iniziato alcune esperienze per vedere se la reazione è anche invertibile, cioè se azoto ed acido benzolsolfinico possono formare dibenzolsolfonidrazina.

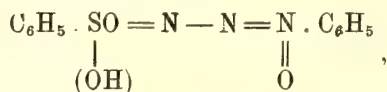
([3]) Come è noto, O. Baudisch (Berichte, *46*, 115) ha spiegato ingegnosamente, per mezzo di questa stessa reazione, il processo di assimilazione dei nitrati che si compie nelle piante sotto l'influenza dei raggi luminosi.

al nitrosobenzolo, per dare la cosiddetta nitrosofenilidrossilammina:

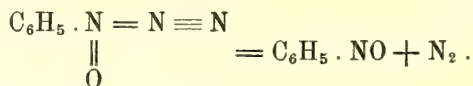
$$C_6H_5 . NO + NH(OH)_2 = \underset{\underset{O}{\|}}{C_6H_5 . N} = N . OH + H_2O .$$

Ed una reazione perfettamente analoga avviene anche quando, nelle opportune condizioni, si faccia reagire il nitrosobenzolo sopra la dibenzolsolfonidrazina, in presenza di alcali: il termine intermedio prima accennato si somma nettamente al nitrosobenzolo e si ottiene il prodotto

$$C_6H_5 . SO_2 . NH . N = \underset{\underset{O}{\|}}{N} . C_6H_5$$

costituito da aghi incolori brillanti. Riscaldato in tubicino, si decompone improvvisamente a 102°; riscaldato invece su lamina di platino, esplode con grande violenza, ed esplode pure per percussione.

La sostanza ha carattere acido, ed i sali, molto probabilmente, derivano dalla forma tautomera:

$$C_6H_5 . \underset{\underset{(OH)}{|}}{SO} = N - N = \underset{\underset{O}{\|}}{N} . C_6H_5 ,$$

Con i sali ferrici e di rame fornisce sali complessi che presentano una grande rassomiglianza con quelli che dà la nitrosofenilidrossilammina (cupferon).

Per ulteriore azione degli alcali perde anche la seconda molecola di acido benzolsolfinico e si forma un prodotto che facilmente si scinde in nitrosobenzolo ed azoto, molto probabilmente l'ossido della fenilazide:

$$C_6H_5 . \underset{\underset{O}{\|}}{N} = N \equiv N = C_6H_5 . NO + N_2 .$$

Continuerò lo studio di queste reazioni.

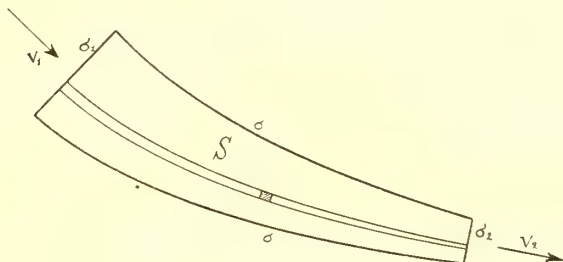
Patologia. — *Etiologia del gozzo.* Nota del Socio B. Grassi.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica matematica. — *Sull'azione dinamica di una corrente fluida sopra pareti rigide.* Nota del dott. ing. CARLO LUIGI RICCI, presentata dal Socio C. SEGRE.

La spinta che un fluido in moto non permanente esercita contro le pareti del vaso nel quale si muove, supposto che nelle superficie piane limitanti la massa fluida all'ingresso (σ_1) ed all'uscita (σ_2) la pressione media sia eguale a quella dell'ambiente esterno, e la velocità del fluido sia normale a dette superficie e costante in tutti i punti di ciascuna di esse ($=$ rispettivamente a $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$), è espressa da

$$\mathbf{R} = \int_S \varrho \mathbf{F} \, dS - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \varrho \mathbf{v} \, dS + Q(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) ,$$

essendo ϱ la densità del fluido, $\mathbf{F}$ il vettore della forza di massa, S lo spazio occupato dal liquido, e Q la portata istantanea espressa in unità di massa.

Questa espressione fu stabilita dal prof. T. Boggio nel suo lavoro: *Calcolo delle azioni dinamiche esercitate da correnti fluide sopra pareti rigide* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1911, Nota II, pag. 908, formula (18)].

Mi propongo di dimostrare in questo breve studio, come il secondo termine dell'espressione di $\mathbf{R}$, nel caso di $\varrho =$ costante (liquido omogeneo), si possa trasformare, e ricondurre alla forma ad esso data dal Masoni, il quale nel suo *Corso di idraulica* (3ª edizione, Napoli 1908, pag. 167), trattando per altra via la questione, aveva già dato agli altri due termini un'espressione identica a quella sopra indicata.

Possiamo immaginare l'intero spazio S come scomposto in tubi di flusso (o di velocità) elementari.

Consideriamo uno di questi tubi: sia $d\omega$ l'area della sezione trasversale infinitesima del tubo in un punto qualunque interno; siano inoltre $d\sigma_1$ e $d\sigma_2$ le due sezioni estreme del tubo, ossia i due elementi delle superficie σ_1 e σ_2 compresi entro il tubo.

Potremo assumere come elemento di volume quello compreso nel tubo tra due sezioni trasversali infinitamente vicine, ossia porre:

$$dS = d\omega \,.\, ds$$

se indichiamo con ds l'elemento d'arco dell'asse del tubo, cioè la distanza delle due sezioni.

Se ϱ è costante, nel secondo termine suddetto dovremo calcolare l' $\int_S \mathbf{v} dS$. Ora si ha:

$$\mathbf{v}\, dS = \mathbf{v}\, d\omega\, ds\,;$$

d'altra parte se diciamo P la particella fluida la cui velocità è $\mathbf{v} = \frac{dP}{dt}$, si ha:

$$\mathbf{v}\, ds = V dP\,,$$

ove V è il modulo della velocità, ed il vettore dP è diretto secondo l'asse del tubo; perciò si potrà porre:

$$\mathbf{v}\, d\omega\, ds = V d\omega\, dP\,.$$

Ora, $V d\omega$ è la portata istantanea, in volume, del tubo elementare, la quale è costante lungo tutto il tubo stesso ed uguale a

$$V_1\, d\sigma_1 = V_2\, d\sigma_2\,.$$

Quindi il contributo che detto tubo porta all' $\int_S \mathbf{v} dS$ è $V_2\, d\sigma_2 \int dP$; ovvero anche $V_1\, d\sigma_1 \int dP$, essendo l' $\int dP$ esteso a tutta lunghezza del tubo.

Tale contributo vale quindi:

$$V_2\, d\sigma_2\,.\,(P_2 - P_1)\,,$$

ove P_1 e P_2 sono i due punti estremi dell'asse del tubo elementare, ossia i centri delle due sezioni estreme $d\sigma_1$ e $d\sigma_2$.

Quindi si avrà:

$$\int_S \mathbf{v}\, dS = \int_{\sigma_2} V_2\, P_2\, d\sigma_2 - \int_{\sigma_2} V_2\, P_1\, d\sigma_2$$

$$= V_2 \int_{\sigma_2} P_2\, d\sigma_2 - V_1 \int_{\sigma_1} P_1\, d\sigma_1\,.$$

Ora se diciamo G_1 e G_2 i baricentri delle sezioni σ_1 e σ_2, si ha, com'è noto,

$$\sigma_1 G_1 = \int_{\sigma_1} P_1 \, d\sigma_1 \quad ; \quad \sigma_3 G_2 = \int_{\sigma_2} P_2 \, d\sigma_2 \, ,$$

e quindi

$$\int_S \mathbf{v} \, dS = V_2 \sigma_2 G_2 - V_1 \sigma_1 G_1$$
$$= V_2 \sigma_2 (G_2 - G_1) \, .$$

Perciò il secondo termine dell'espressione di **R** è:

$$-\varrho \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{v} \, dS = -\varrho (G_2 - G_1) \sigma_2 \frac{\partial V_2}{\partial t} \, ,$$

e si ritrova così l'espressione ad esso data dal Masoni, conforme a ciò che si era più sopra enunciato.

Giova osservare come nella citata espressione di **R**, mentre il primo termine rappresenta l'effetto delle forze di massa, ossia l'azione *statica* del campo di forze, gli altri due termini rappresentano la vera azione *dinamica* del fluido in moto, espressa come la variazione dell'unità di tempo (derivata rispetto al tempo) della quantità di moto; il termine $-\frac{\partial}{\partial t} \int_S \varrho \mathbf{v} \, dS$ rappresenta di questa variazione la parte dovuta al variare della velocità in funzione del tempo (ossia alla non permanenza del moto); ed il termine $Q(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$ — che si ha pure quando il moto è permanente — rappresenta la parte dovuta al passaggio della massa fluida defluente nell'unità di tempo (portata di massa), dalla sezione σ_1 a monte, alla sezione σ_2 a valle.

Matematica. — *Alcune questioni di geometria sopra una curva algebrica.* Nota II di Ruggiero Torelli, presentata dal Socio E. Bertini [1].

§ 3. — Condizioni per l'identità birazionale di due varietà di Jacobi.

9. Passiamo adesso a cercare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè le due curve $C_p \, \overline{C}_p$ (per le quali adoperiamo le solite notazioni del n. 1) abbiano le varietà di Jacobi $V_p \, \overline{V}_p$ birazionalmente identiche. Perciò, detti $Y \, X$ i punti di $V_p \, \overline{V}_p$ immagini delle p-ple $(y' y'' \dots y^p)$ $(x' x'' \dots x^p)$ di punti di $C_p \overline{C}_p$, poniamo

$$V_k(Y) = v_k(y') + \cdots + v_k(y^p)$$
$$U_k(X) = u_k(x') + \cdots + u_k(x^p) \, ;$$

[1] In questa Nota II continua la numerazione della Nota I.

saranno $V_k(Y)$, $U_k(X)$ $[k=1, \ldots, p]$ due p-ple di integrali di 1ª specie, linearmente indipendenti, di $V_p \overline{V}_p$.

Se tra $V_p \overline{V}_p$ intercede una corrispondenza biunivoca, questa sarà rappresentata da relazioni analoghe alle (1), e cioè del tipo

$$V_k(Y) = \sum_i \pi_{ki} U_i(X) + \pi_k ; \tag{7}$$

e si avrà

$$\pi_{kl} = h_{kl} + \sum_i g_{il} \tau_{ki} \quad , \quad \sum_i \pi_{ki} a_{il} = H_{kl} + \sum_i G_{il} \tau_{ki} , \tag{8}$$

$$\Pi \neq 0 ; \tag{9}$$

hgHG essendo numeri intieri, e Π indicando il determinante dei numeri π_{kl}.

Ma se supponiamo viceversa soddisfatte le (8) e (9), le equazioni abeliane (7) definiranno tra $V_p \overline{V}_p$ una corrispondenza che sarà, generalmente, solo *unirazionale* (1).

Noi ci proponiamo appunto di vedere quand'è che le (7) definiscono una corrispondenza birazionale.

Perciò cominciamo a osservare che, se nella corrispondenza (7) i punti X X′ di $\overline{V}_p$ hanno uno stesso omologo, anche due qualunque punti $X_1 X'_1$ omologhi nella trasformazione di 1ª specie definita da X X′, tali cioè che

$$U_k(X_1) - U_k(X'_1) \equiv U_k(X) - U_k(X') \qquad \text{modd. } a_{ik} ,$$

avranno, com'è facile vedere, uno stesso omologo. Segue che la detta trasformazione di 1ª specie è ciclica, e quindi esiste un intiero $\varepsilon > 1$ tale che

$$\varepsilon U_k(X) \equiv \varepsilon U(X') \qquad \text{modd. } a_{ik} .$$

Il problema di vedere se la corrispondenza (7) è plurivoca è quindi ricondotto a quello di vedere se è possibile trovare un intiero $\varepsilon > 1$ e altri $2p$ intieri $m_i n_i$, non tutti divisibili per ε, tali che, presi su $\overline{V}_p$ due punti X X′ soddisfacenti alle relazioni

$$\varepsilon U_k(X) - \varepsilon U_k(X') = m_k + \sum_i n_i a_{ki} , \tag{10}$$

si abbia

$$\sum_i \pi_{ki} U_i(X) \equiv \sum_i \pi_{ki} U_i(X') \qquad \text{modd. } \tau_{ik} .$$

Ora dalle (8) (10) segue

$$\varepsilon \sum_i \pi_{ki} [U_i(X) - U_i(X')] = \sum_i (h_{ki} m_i + H_{ki} n_i) + \sum_{ji} (g_{ji} m_i + G_{ji} n_i) \tau_{kj} ,$$

(1) L'indice > 1 sarà però certamente *finito* per l'ipotesi $\Pi \neq 0$.

e quindi il nostro problema si riconduce facilmente a quello di vedere se si possono determinare un intiero $\varepsilon > 1$ e altri $2p$ intieri $m_i n_i$ (non tutti divisibili per ε), in guisa da avere

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sum_i (h_{ki} m_i + H_{ki} n_i) &\equiv 0 \\ \sum_i (g_{ki} m_i + G_{ki} n_i) &\equiv 0 \end{aligned} \right. \qquad \text{mod. } \varepsilon .$$

Orbene, si vede subito che tal determinazione è possibile se, e solo se, il determinante del sistema (11) è, in valore assoluto, $\neq 1$. Abbiamo così il

TEOREMA III. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè due curve $C_p \bar{C}_p$ di genere p abbiano la stessa varietà di Jacobi, è che fra due loro* [1] *sistemi di periodi normali τ_{ik} a_{ik} intercedano p^2 relazioni*

$$\sum_{ji} g_{ji} \tau_{kj} a_{il} + \sum_i h_{ki} a_{il} - \sum_i G_{il} \tau_{ki} - H_{kl} = 0 ,$$

dove gli interi $h g H G$ soddisfano alla condizione che il determinante

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} h_{11} \cdot\cdot & h_{1p} & H_{11} \ldots & H_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{p1} \ldots & h_{pp} & H_{p1} \ldots & H_{pp} \\ g_{11} \ldots & g_{1p} & G_{11} \ldots & G_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{p1} \ldots & g_{pp} & G_{p1} \ldots & G_{pp} \end{vmatrix}$$

è uguale a ± 1, e all'altra che il determinante dei numeri

$$\pi_{kl} = h_{kl} + \sum_i g_{il} \tau_{ki}$$

é diverso da zero.

10. Da questo teorema deduciamo subito il seguente

COROLLARIO. — *Se le due curve $C_p \bar{C}_p$ hanno la stessa varietà di Jacobi, e una di esse, p. es. C_p, è priva di corrispondenze simmetriche singolari, allora le due curve sono birazionalmente identiche* [2].

Supponiamo, infatti, che siano soddisfatte le relazioni di cui parla il teorema III. Allora, presa una corrispondenza S (fra $C_p \bar{C}_p$) cui competano

[1] Per ciò che riguarda la necessità della condizione, si intenda sistemi *qualunque* (e allora gli intieri $hg H G$, di cui a momenti si parlerà, dipenderanno da essi); per ciò che riguarda la sufficienza, si intenda sistemi *particolari*: cfr. gli enunciati dei teoremi I e II.

[2] Questa proprietà è dovuta a Severi. Cfr. la Nota di Comessatti, citata in prefazione.

gli intieri caratteristici $hgHG$, dovrà la corrispondenza $S^{-1}S$ essere a valenza; detta $-\gamma (< 0$ [1]) questa valenza, dovremo avere, causa le formule (3) del num. 4,

$$\sum_i (h_{ki} G_{ki} - H_{ki} g_{ki}) = \gamma \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_i (h_{ki} G_{li} - H_{ki} g_{li}) = 0 \\ &\sum_i (g_{ki} G_{li} - G_{ki} g_{li}) = 0 \\ &\sum_i (H_{ki} h_{li} - h_{ki} H_{li}) = 0 \end{aligned}\right\} k \neq l . \tag{14}$$

Ma da queste segue facilmente che il determinante (12) ha [2] il valore γ^{2p}: e poichè esso ha, per ipotesi, il valore ± 1 (e $\gamma > 0$), segue $\gamma = 1$. Le (13) (14) allora, in virtù del teorema II, portano alla identità birazionale di $C_p \overline{C}_p$; c. v. d.

§ 4. — Questioni ausiliarie.

11. Consideriamo la varietà $\overline{V}_\rho$ delle ϱ-ple di punti di una curva $\overline{C}_p$. Tra le sue varietà canoniche vi sono quelle aventi per imagine le serie di gruppi di ϱ punti estratti dai gruppi delle $g_{2p-2}^{\varrho-1}$ canoniche di $\overline{C}_p$ [3]. Pertanto, prese, su $\overline{C}_p$, $\varrho - 1$ serie $g_{2p-2}^{\varrho-1}$ canoniche, la serie γ_ρ^1, costituita dagli ∞^1 gruppi di ϱ punti ad esse comuni, è imagine di una curva comune a $\varrho - 1$ varietà canoniche di $\overline{V}_\rho$.

Proponiamoci di *calcolare l'indice e il difetto di equivalenza della serie* γ_ρ^1. Per questo osserviamo che, preso un punto P di $\overline{C}_p$, i gruppi della γ_ρ^1 per esso passanti si ottengono così: si considerino le $\varrho - 1$ serie $g_{2p-3}^{\varrho-2}$ subordinate da P nelle date $g_{2p-2}^{\varrho-1}$; esse hanno a comune un certo numero μ di gruppi di $\varrho - 1$ punti $G_1 G_2 \ldots G_\mu$: saranno $P + G_1$, $P + G_2$, ..., $P + G_\mu$ i gruppi richiesti, e quindi μ l'indice di γ_ρ^1. Ora si ha (Comessatti) [4]

$$\mu = a(2p-3) + b\,\frac{2p-2}{\varrho - 1}\,, \tag{15}$$

[1] R. Torelli, *Sulle varietà di Jacobi*, Nota II [questi Rend., vol. XXII, nov. 1913], n°. 5, A).

[2] Krazer, *Lehrbuch der Thetafunktionen* (Leipzig, 1913), V Kapitel, § 2.

[3] Severi, *Sulle superficie e varietà algebriche irregolari* ecc. [Questi Rendiconti, vol. XX, aprile 1911], n. 5.

[4] *Determinazione dei gruppi di* $r+1$ *punti* ecc. [Atti Istit. Ven., tom. LXIX, an. 1909-10].

dove

$$a = \sum_{k=0}^{\rho-2} \binom{\rho-2}{k} (p-\rho-1)^{\rho-2-k} (p-1)(p-2)\dots(p-k),$$

$$b = -\frac{(\rho-2)(\rho-1)}{2} \sum_{k=0}^{\rho-2} \binom{\rho-3}{k-1} (p-\rho-1)^{\rho-2-k} \times$$
$$\times (p-2)(p-3)\dots(p-k):$$

abbiamo così trovato l'indice di γ_ρ^1.

Si osservi, poi, che (sempre secondo Comessatti, loc. cit.) si ha

$$G_1 + G_2 + \cdots + G_\mu \equiv (a+b) K - a(\rho-1) P.$$

K essendo un gruppo canonico. Adunque la corrispondenza simmetrica che a P fa corrispondere il gruppo $G_1 + \cdots + G_\mu$ ha la valenza

$$(16) \qquad \gamma = a(\rho-1).$$

Ne segue [1] che il difetto d'equivalenza ζ di γ_ρ^1 è dato da

$$(17) \qquad \zeta = p[\mu-(\rho-1)a] = p \sum_{k=0}^{\rho-2} (2p-\rho-2-k) \binom{\rho-2}{k} \times$$
$$\times (p-\rho-1)^{\rho-2-k} (p-1)(p-2)\dots(p-k).$$

Le (15) e (17) sono appunto le formule cercate.

12. Dalla precedente considerazione deduciamo una proprietà di cui faremo uso in fine del n. 15. Si osservi che la serie costituita dalle ρ-ple di punti di C_p, resa di ordine p coll'aggiunta di $p-\rho$ punti fissi, ha per imagine, entro la varietà jacobiana V_p di C_p, una varietà W_ρ (vedi prefazione). Se poi teniamo presente che le W_{p-1} di V_p sono imagini delle serie costituite dalle p-ple di punti estratti dai gruppi delle g_{2p-1}^{p-1} di C_p, vediamo che il difetto d'equivalenza della serie γ_ρ^1, di cui al n°. precedente, rappresenta il *carattere di immersione* (vedi prefazione) delle varietà $\infty^{\rho-1}$ segate su W_ρ dalle W_{p-1}.

Possiamo perciò enunciare il seguente

LEMMA. — *Entro una varietà di Jacobi* V_p, *le varietà* W_{p-1} *segano, su una* W_ρ *varietà* $\infty^{\rho-1}$ *aventi il carattere d'immersione*

$$p \sum_{k=0}^{\rho-2} (2p-\rho-2-k) \binom{\rho-2}{k} (p-\rho-1)^{\rho-2-k} \times$$
$$\times (p-1)(p-2)\dots(p-k).$$

Questo lemma è, in fondo, l'inversa del teorema IV.

[1] Torelli, loc. cit., a pag. 4.

13. *Questione II.* Riprendiamo a considerare le due curve $C_p \overline{C}_p$, e la corrispondenza S, di indici n, ν, di cui si parlava nel n. 1. Supponiamo, poi, che su $\overline{C}_p$ si abbia una serie γ_m^1, di ordine m e indice μ, tale che, chiamando omologhi due punti quando sono in uno stesso suo gruppo, si abbia una corrispondenza simmetrica ϑ a valenza γ.

La corrispondenza S, che intercede fra $\overline{C}_p C_p$, muterà tal γ_m^1 in una serie γ_{mn}^1, di indice $\mu\nu$, su C_p. *Quale sarà il difetto d'equivalenza di questa* γ_{mn}^1?

Tale questione si risolve subito. Infatti la corrispondenza simmetrica, di indici $\nu\mu(mn-1)$, in cui si corrispondono due punti quando sono in uno stesso gruppo della γ_{mn}^1, è data dal simbolo

$$S^{-1}\vartheta S + \mu S^{-1} S - \mu\nu I ,$$

I indicando l'identità su C_p; se ne calcolano quindi facilmente gli intieri caratteristici in funzione di quelli di S e di γ; e, con ragionamento analogo a quello fatto in fine al n. 4, si trova che il difetto d'equivalenza ζ della γ_{mn}^1 è dato da

$$\zeta = (\mu - \gamma) \sum_{ki} (h_{ki} G_{ki} - H_{ki} g_{ki}) , \tag{18}$$

che è la formula cercata.

§ 5. — Sulle serie algebriche più volte infinite.

14. Dimostriamo infine il seguente

Teorema IV*. — *Sopra una curva C_p abbiasi una serie γ_p^ϱ (anche dotata di punti fissi), birazionalmente identica alla varietà delle ϱ-ple di punti di un'altra curva $\overline{C}_p$, e tale che nessun integrale di 1ª specie di C_p dia somma costante lungo i suoi gruppi.*

Se la totalità dei gruppi di p punti, tolti dai gruppi di una generica g_{2p-1}^{p-1} di C_p, sega sulla γ_p^ϱ una $\gamma_p^{\varrho-1}$ avente il carattere di immersione

$$p \sum_{k=0}^{\varrho-2} (2p - \varrho - 2 - k) \binom{\varrho - 2}{k} (p - \varrho - 1)^{\varrho-2-k} \times \\ \times (p-1)(p-2)\dots(p-k) , \tag{17'}$$

allora le due curve $C_p \overline{C}_p$ sono birazionalmente identiche, e la γ_p^ϱ appartiene alla classe individuata dalla serie delle ϱ-ple di punti di C_p.

Adoperiamo per $C_p \overline{C}_p$ le solite notazioni stabilite al n. 1. La nostra serie sarà rappresentata (analogamente a quanto avviene per le serie ∞^1)

da un sistema di equazioni del tipo

$$(19)\qquad v_k(y') + \cdots + v_k(y^p) = \sum_i \pi_{ki} [u_k(x') + \cdots + u_k(x^\rho)] + \pi_k ,$$

$(x' \ldots x^\rho)$ essendo un gruppo di ϱ punti variabili su $\overline{C}_p$. Avremo le solite relazioni

$$\pi_{kl} = h_{kl} + \sum_i g_{il}\, \tau_{ki}$$

$$\sum \pi_{ki}\, a_{il} = H_{kl} + \sum_i G_{il}\, \tau_{ki} ,$$

e il determinante dei numeri π_{kl} sarà, per ipotesi, diverso da zero.

Se al gruppo $(x' \ldots x^\rho)$ facciamo descrivere la serie γ^1_ρ di cui si è parlato al n. 11, il corrispondente gruppo di p punti su C_p [individuato dalle (19)] descrive una serie γ^1_p, il cui difetto di equivalenza ζ è appunto il carattere di immersione delle $\gamma^{\rho-1}_p$ di cui parla l'enunciato.

D'altronde si pensi che la detta γ^1_p appartiene alla stessa classe che la serie $\gamma^1_{\rho p}$, descritta dagli omologhi dei punti del gruppo variabile di γ^1_ρ nella corrispondenza S definita, fra C_p e $\overline{C}_p$, dalle equazioni abeliane

$$v_k(y') + \cdots + v_k(y^p) = \sum_i \pi_{ki}\, u_i(x) + \pi_k .$$

Allora il numero ζ, essendo anche il difetto della serie $\gamma^1_{p\rho}$, può calcolarsi mediante la considerazione del n. 13 e le formule (15) (16); e si trova

$$\zeta = \sum_{ij} (h_{ij}\, G_{ij} - H_{ij}\, g_{ij}) \sum_{k=0}^{\rho-2} (2p - \varrho - 2 - k) \binom{\varrho - 2}{k} \times$$
$$\times (p - \varrho - 1)^{\rho-2-k} (p-1)(p-2) \ldots (p-k) .$$

Se dunque ζ ha il valore (17'), dal confronto di (17') e dall'ultima espressione scritta risulta

$$\sum_{ij} (h_{ij}\, G_{ij} - H_{ij}\, g_{ij}) = p ,$$

e quindi (n. 7) nella classe definita dalla corrispondenza S vi è una corrispondenza biunivoca. Questa indurrà, fra le ϱ-ple di punti di $C_p\, \overline{C}_p$, una corrispondenza biunivoca, rappresentata o dalle

$$v_k(y') + \cdots + v_k(y^\rho) = \sum_i \pi_{ki} [u_i(x') + \cdots + u_i(x^\rho)] + \pi'_k ,$$

oppure dalle

$$v_k(y') + \cdots + v_k(y^\rho) = -\sum \pi_{ki}\left[u_i(x') + \cdots + u_i(x^\rho)\right] + \pi'_k$$

(le π'_k essendo opportunamente scelte); e ciò dimostra il nostro teorema.

Questo teorema è manifestamente equivalente al teorema IV della prefazione.

15. La deduzione dei teoremi V e VI (enunciati in prefazione) dal IV non offre alcuna difficoltà. Infatti:

A) Se fra le varietà di Jacobi $\overline{V}_p\, V_p$ di due curve $\overline{C}_p\, C_p$ intercede una corrispondenza biunivoca che muti una $\overline{W}_\rho$ di $\overline{V}_p$ in una W_ρ di V_p, a quest'ultima W_ρ si può, in virtù del lemma del n. 12, applicare il teorema IV; e ne viene il teorema V.

B) Se la serie γ^ρ_ρ, costituita dalle ϱ-ple di punti di una curva C_p, è birazionalmente identica alla serie analoga di un'altra curva $\overline{C}_p$, alla γ^ρ_ρ, resa di ordine p coll'aggiunta di $p - \varrho$ punti fissi, si può, pel lemma del n. 12, applicare il teorema IV*; e ne risulta il teorema VI.

Matematica. — *Sopra un'operazione funzionale atta a trasformare i potenziali logaritmici in simmetrici.* Nota II della signorina Lina Bianchini, presentata del Socio T. Levi-Civita.

4. — Condizione di realtà. Legame con potenziali associati logaritmici.

Nelle (7) (¹) non è tenuto conto della condizione che u, v risultino reali. Vediamo come debba specificarsi la funzione f affinchè questo abbia luogo, supponendo che la f, considerata come funzione del suo argomento $x + iy\cos\vartheta$, si comporti regolarmente in una certa regione Γ del piano rappresentativo (x, y) (per tutti i valori di ϑ compresi nell'intervallo $0, \pi$). Questo implica manifestamente che la Γ comprenda, insieme con ogni punto (x, y), tutto il segmento $(x, y\cos\vartheta)$ che lo congiunge col suo simmetrico $(x, -y)$. Ciò premesso, ove si scinda in f la parte reale dall'immaginaria, ponendo

$$f = \varphi + i\psi,$$

e più precisamente

$$f(x + iy\cos\vartheta) = \varphi(x, y\cos\vartheta) + i\psi(x, y\cos\vartheta),$$

(¹) Della Nota precedente. Cfr. pp. 1041-1046 di questo volume dei Rendiconti.

dalla prima delle (7) si ha

$$u = \int_0^{\pi} \varphi(x\,, y \cos\vartheta) + i \int_0^{\pi} \psi(x\,, y\cos\vartheta)\, d\vartheta\,.$$

Il coefficiente β di i, scindendo l' intervallo di integrazione nei due tratti $\left(0\,, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}\,, \pi\right)$ (e cambiando in quest' ultimo, ϑ in $\pi - \vartheta$), può essere scritto

$$\beta = \int_0^{\pi} \psi(x\,, y\cos\vartheta)\, d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\psi(x\,, y\cos\vartheta) + \psi(x\,, -y\cos\vartheta)\}\, d\vartheta\,.$$

La condizione che u sia reale, equivale a $\beta = 0$; e questa implica, a sua volta, che si annulli identicamente la funzione sotto il segno [1], ossia, in sostanza, che $\psi(x\,, y)$ sia funzione dispari dell'argomento y.

Viceversa è evidente che, sotto tale ipotesi, $\beta = 0$.

Notiamo, d'altra parte, che, se ψ è funzione dispari di y, essa s'annulla sull'asse reale Ox; la nostra $f(x + iy)$ è quindi vincolata alla condizione di essere reale sull'asse reale (o più precisamente in quella parte di esso che cade entro il campo Γ, cui si riferiscono queste considerazioni).

Con ciò, non solo risulta ψ funzione dispari di y, ma altresì φ pari $[\varphi(x\,, y) = \varphi(x\,, -y)]$, e subito si verifica che anche la seconda delle (7) definisce una funzione reale

$$v = \int_0^{\pi} y\cos\vartheta\, \psi(x\,, y\cos\vartheta)\, d\vartheta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\cos\vartheta\, \psi(x\,, y\cos\vartheta)\, d\vartheta\,.$$

Possiamo quindi concludere: Condizione necessaria e sufficiente per la realtà delle due coniugate $u\,, v$, è che f sia reale sull'asse reale. Complessivamente le dette $u\,, v$ rimangono definite da

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} u = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x\,, y\cos\vartheta)\, d\vartheta\,, \\ v = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\cos\vartheta\, \psi(x\,, y\cos\vartheta)\, d\vartheta\,, \end{cases}$$

[1] Questa affermazione è giustificata dal teorema di Abel, che richiamiamo più innanzi, al n. 5. Dalle due relazioni reciproche ivi esplicitate, appare manifesto che, per $\beta = 0$, α risulta identicamente nullo. Ora la

$$\beta(x, y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\psi(x\,, y\cos\vartheta) + \psi(x\,, -y\cos\vartheta)\}\, d\vartheta$$

è precisamente un caso particolare della prima delle due relazioni suddette, in cui (trattando x come parametro costante) si scriva y al posto di r, e si ponga

$$2\alpha(y\cos\vartheta) = \psi(x\,, y\cos\vartheta) + \psi(x\,, -y\cos\vartheta)\,.$$

nelle quali le funzioni sotto il segno, φ e ψ, costituiscono manifestamente due funzioni associate logaritmiche provenienti da un'arbitraria f reale sull'asse reale. Tale f si dirà l'*assiale* della coppia simmetrica associata (u,v). Dalla nostra indagine risulta altresì che *tutte* le coppie simmetriche si possono pensare generate in questo modo.

5. — Formule inverse.

Secondo una proposizione scoperta da Abel si equivalgono [1] le due relazioni

$$\begin{cases} \psi(r) = \int_0^{\pi} \varphi(r \operatorname{sen} \vartheta)\, d\vartheta, \\ \varphi(r) = \dfrac{d}{dr} \dfrac{r}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(r \operatorname{sen} \vartheta) \operatorname{sen} \vartheta\, d\vartheta, \end{cases}$$

che, chiamando φ e ψ rispettivamente α e β, e ponendo $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \vartheta'$, si possono anche scrivere come segue:

$$\begin{cases} \beta(r) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha(r \cos \vartheta)\, d\vartheta, \\ \alpha(r) = \dfrac{d}{dr} \dfrac{r}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \beta(r \cos \vartheta) \cos \vartheta\, d\vartheta. \end{cases}$$

In base a ciò, le due ultime espressioni trovate per le u e v equivarranno rispettivamente alle

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \varphi(x\,,y) = \dfrac{d}{dy} \dfrac{y}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x\,, y \cos \vartheta) \cos \vartheta\, d\vartheta, \\ y\,\psi(x\,,y) = \dfrac{d}{dy} \dfrac{y}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} v(x\,, y \cos \vartheta) \cos \vartheta\, d\vartheta. \end{cases}$$

6. — Introduzione di argomenti complessi e riduzione ad un'unica relazione funzionale.

Poniamo

$$w = u + iv, \tag{8}$$

[1] Circa tale equivalenza, veggasi Beltrami, loc. cit.

riprendendo anche la combinazione (*monogena*, a differenza della w che, in generale, non lo è)

$$f = \varphi + i\psi\,.$$

Sostituiti per u e v i loro valori forniti dalle (7), la (8) assume l'aspetto

$$w = u + iv = \int_0^\pi (1 + y\cos\vartheta)\, f(x + iy\cos\vartheta)\, d\vartheta\,.$$

Indicheremo brevemente con A l'operazione funzionale definita dal secondo membro dell'equazione testè scritta, la quale fa passare dalla funzione monogena f dell'argomento $x + iy$ (reale sull'asse reale) alla $w = u + iv$, funzione in generale non monogena, ma regolare nello stesso campo in cui tale si suppone f, e reale, al pari di f, sull'asse reale.

Le (II) ci mostrano che, ammesso per u, v il comportamento qualitativo suddetto, rimane univocamente definita anche un'operazione inversa A^{-1}, che fa passare da w ad una funzione *monogena* f.

7. — Gruppo di trasformazioni che conserva le funzioni associate simmetriche.

Le funzioni $f(z)$, reali sull'asse reale, ammettono un gruppo puntuale infinito di trasformazioni in sè, che si ottiene ovviamente ponendo

$$f' = F(f)\,, \tag{9}$$

con F funzione (monogena) arbitraria, perchè anch'essa reale sull'asse reale.

È facile riconoscere che questo gruppo ne subordina uno altrettanto ampio (disgraziatamente però *funzionale*, anzichè *locale*) nei potenziali simmetrici.

Sia infatti $w = u + iv$ il rappresentante complesso di una coppia generica, e sia f l'assiale relativo. Ove si indichi con T una trasformazione del tipo (9), e con w' la coppia simmetrica che corrisponde ad f', avremo manifestamente

$$w = Af \quad , \quad f' = Tf \quad , \quad w' = Af'\,,$$

da cui

$$w' = Af' = ATf = (ATA^{-1})\, w\,.$$

Apparisce, di qui, che i potenziali associati simmetrici ammettono il gruppo la cui operazione generica è ATA^{-1}, gruppo manifestamente simile a quello delle T, ossia al gruppo conforme.

Matematica. — *Una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di soluzioni nell'equazione integrale di prima specie.* Nota di A. VERGERIO, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sulla deformazione di un suolo elastico piano indefinito, omogeneo ed isotropo, nel caso dell'eredità lineare, per dati spostamenti in superficie.* Nota del prof. R. SERINI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. Nel problema elastico con eredità lineare le equazioni indefinite dell'equilibrio (in assenza di forze di massa, al qual caso ci si può sempre ridurre) sono:

$$(1) \qquad \Delta^2 u = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \qquad \Delta^2 v = \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \qquad \Delta^2 w = \frac{\partial \vartheta}{\partial z},$$

dove u, v, w sono le componenti dello spostamento.

La funzione ϑ è legata alla dilatazione cubica θ dalla relazione

$$(2) \qquad \vartheta = (1 - A_1^{-1} A_2)\, \theta,$$

nella quale

$$A_1 f(t) = K f(t) + \int_0^t \psi(t, \tau)\, f(\tau)\, d\tau$$

$$A_2 f(t) = (L + 2K)\, f(t) + \int_0^t [\varphi(t, \tau) + 2\psi(t, \tau)]\, f(\tau)\, d\tau \text{ [1]}.$$

L'operazione $A_1^{-1} f$ si ottiene invertendo $A_1 f$, risolvendo un'equazione integrale di Volterra di seconda specie.

Dalle (1) e (2) si deduce

$$(3) \qquad \Delta^2 \vartheta = 0.$$

Per risolvere il problema che forma l'oggetto della presente Nota, mi servo del teorema dovuto all'Almansi [2], secondo il quale la soluzione del sistema (1), quando θ è armonica, si può porre sotto la forma

$$(4) \qquad u = z \frac{\partial \varphi}{\partial x} + U \qquad v = z \frac{\partial \varphi}{\partial y} + V \qquad w = z \frac{\partial \varphi}{\partial z} + W,$$

[1] V. Volterra, *Leçons sur les fonctions des lignes*, cap. VIII; Acta mathematica, *Sur le équations intégrales* ecc., vol. 35°, articoli 4-7.

[2] E. Almansi, *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta^{2n} = 0$, Annali di matematica.

dove le quattro funzioni U , V , W , φ sono armoniche, e inoltre φ soddisfa alla relazione

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{1}{2}\vartheta\,. \tag{5}$$

2. Le equazioni (4) e (5) si applicano al problema del suolo elastico omogeneo ed isotropo nel caso della eredità lineare. Prendiamo per piano xy il piano delimitante il suolo elastico il quale occupi la regione per cui $z>0$.

Essendo dati gli spostamenti in superficie, saranno determinati i valori di $u\,,v\,,w$ per $z=0$, e quindi, per le (4), i valori di U, V, W che indicheremo con

$$U_\sigma \quad V_\sigma \quad W_\sigma\,.$$

La teoria delle funzioni armoniche ci dà subito U, V, W sotto la forma [1]

$$U=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\sigma\frac{U_\sigma\,d\sigma}{r}\qquad V=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\sigma\frac{V_\sigma\,d\sigma}{r} \tag{6}$$

$$W=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\sigma\frac{W_\sigma\,d\sigma}{r}\,,$$

dove l'integrazione va estesa al piano xy, ed r rappresenta la distanza del punto xyz dal punto $x'y'o$ del piano.

Posto

$$-\frac{1}{2\pi}\int_\sigma\frac{U_\sigma\,d\sigma}{r}=U_1\qquad -\frac{1}{2\pi}\int_\sigma\frac{V_\sigma\,d\sigma}{r}=V_1 \tag{7}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_\sigma\frac{W_\sigma\,d\sigma}{r}=W_1\,,$$

le (4), in virtù delle (6) e (7), diventano

$$u=z\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial U_1}{\partial z}\qquad v=z\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial V_1}{\partial z}\qquad w=z\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial W_1}{\partial z}\,. \tag{8}$$

Per determinare ora la φ, calcoliamo dalle (8) la dilatazione cubica θ.

Essendo

$$\Delta^2\varphi=0\,,$$

avremo

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial V_1}{\partial y}+\frac{\partial W_1}{\partial z}\right).$$

[1] E. Cesàro, *Introduzione alla teoria matematica della elasticità*, IX, 7.

Da quest' ultima e dalle (2) e (5) ricavo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{2}(1 - A_1^{-1} A_2)\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z}\right)\right],$$

ossia, risolvendo rispetto a $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = (1 + A_1^{-1} A_2)^{-1}(1 - A_1^{-1} A_2)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z}\right) \text{ (1)}.$$

Ma i simboli $A_1 f, A_2 f$, e quelli composti con essi, sono permutabili col segno di derivata; quindi, ponendo

$$(1 + A_1^{-1} A_2)^{-1}(1 - A_1^{-1} A_2) f = G . f,$$

avremo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} G\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z}\right).$$

Quest' ultima equazione varrà in particolare pei punti del piano xy; ed allora le due funzioni armoniche

$$\varphi \quad , \quad G\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z}\right),$$

avendo superficie derivata normale eguale, non possono differire che per una costante la quale non ci interessa in quanto che nelle (4) entrano solo le derivate della φ.

Potremo quindi porre

$$\varphi = G\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z}\right).$$

Avendo così determinate le quattro funzioni U, V, W, φ, il problema è risolto.

Per ottenere la soluzione nel caso ordinario, basta porre eguali a zero i coefficienti di eredità

$$\varphi(t, \tau) \qquad \psi(t, \tau)$$

e prendere

$$A_1 = K \qquad A_2 = L + 2K .$$

(1) Secondo la convenzione solita delle due operazioni indicate, quella a destra è da intendersi come eseguita per prima.

I simboli operatori $A_1 A_2$, e le loro composizioni, si considerino come moltiplicazioni. Allora

$$G = (1 + A_1^{-1} A_2)^{-1} (1 - A_1^{-1} A_2) =$$
$$= \left(1 + \frac{L + 2K}{K}\right)^{-1} \left(1 - \frac{L + 2K}{K}\right) =$$
$$= \frac{K}{L + 3K} \cdot \frac{-(L + K)}{K} = - \frac{L + K}{L + 3K} .$$

Se introduciamo, invece delle due costanti d'isotropia L, K, il coefficiente di contrazione definito dalla relazione

$$m = \frac{1}{2} \frac{L}{L + K} ,$$

ritroviamo

$$G = - \frac{1}{3 - 4m}$$

che è il risultato cui giunge l'Almansi [1].

Astronomia. — *La latitudine di Roma negli anni 1912-13, e l'ipotesi dell'Hirajama.* Nota di E. Bianchi, presentata dal Socio E. Millosevich.

1. In un breve appunto da me pubblicato nella « *Rivista d'astronomia* [2] » esprimevo il voto che anche in Italia, con osservazioni indipendenti da quelle del servizio internazionale, si portasse un qualche contributo alla questione del così detto terzo termine del Kimura nel problema generale della variazione delle latitudini. Ricordavo che, essendo noi posti all'incirca sullo stesso parallelo delle Stazioni internazionali, in nulla potevamo concorrere per la decisione se, o meno, detto termine dovesse affermarsi come dipendente dalla latitudine e quindi esprimente un moto oscillatorio annuo del centro di gravità terrestre. Dicevo però ancora che, se in nulla potevamo contribuire allo studio della questione da questo punto di vista (da ritenersi riservato a misure fatte in stazioni equatoriali e boreali alte), ben potevamo invece cooperare per decidere dell'attendibilità o meno della ipotesi dell'Hirajama; per decidere cioè se o meno detto termine z fosse la manifestazione di un vizio insito nelle osservazioni internazionali in causa del tipo di programma che colà si svolge nelle misure di latitudine.

Riportandomi poi ad una Nota sull'argomento pubblicata da me nei *Rendiconti* di quest'Accademia [3], ripetevo che un contributo in questo senso doveva attendersi da osservazioni fatte su zenitali assolute, opportunamente

[1] Nella citata Memoria dell'Almansi è sfuggito un errore nel calcolo di G [formula (58)]. Rettificando il risultato, si trova per G il valore da me dato.

[2] Volume VI, 1912, pag. 801-804.

[3] Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, I semestre, 1909, n. 3.

concatenate fra loro in modo da rendere possibile l'attenta sorveglianza del moto del polo nel corso dell'anno, con programma cioè obbediente in tutto alle conclusioni dell' Hirajama per giungere eventualmente ad un termine z nullo nel corso dell'intiero anno.

Avendo ultimati il calcolo e la discussione di una lunga serie di osservazioni di latitudine da me fatte all' Osservatorio al Collegio romano secondo le direttive ora specificate, riporto qui i risultati ottenuti poichè parmi che essi possano considerarsi come un modesto ma coscienzioso e forse non inutile contributo allo studio della questione.

Tutti i particolari del lavoro appariranno nel prossimo volume delle *Memorie dell' Osservatorio.*

2. L'ipotesi dell' Hirajama, sopra ricordata, dice sostanzialmente che il termine z dovrebbe risultare nullo nel corso dell'anno per osservazioni fatte col metodo di Talcott su coppie così costituite che:

a) sia nulla la distanza zenitale media della coppia;

b) sia nulla la differenza d'ascensione retta delle due stelle costituenti la coppia;

c) sia intorno alla 7ª la grandezza delle due stelle.

Dipendentemente da tali premesse, il programma d'osservazione fu costituito da zenitali assolute, in numero di 50, divise in 12 gruppi; ciascuna di esse forniva un valore della latitudine, osservata com'era, invertendo durante il suo passaggio; ci si trovava così nel caso di coppie *ideali* in tutto obbedienti alle condizioni volute dall' Hirajama per la nullità del termine del Kimura.

I 12 gruppi furono osservati in catena dal 1 dicembre 1911 al 24 ottobre 1913.

Lascio da parte tutto il lato strettamente tecnico del lavoro, sia per quanto riguarda la discussione delle declinazioni delle stelle e del loro moto proprio, sia per quanto riguarda lo studio dello strumento usato (un ottimo *Bamberg* dei passaggi), sia infine per quanto riguarda la compensazione delle declinazioni e la conseguente deduzione dei valori definitivi della latitudine. Questo dirò soltanto: che un primo risultato assai confortante lo si ebbe al momento di concludere l'*errore di chiusura* della compensazione dei gruppi stellari; esso infatti risultò di appena:

$$-0''.08\ .$$

Noterò, ancora, che il numero delle osservazioni concluse risultò notevolmente inferiore a quanto sarebbe stato desiderabile, in causa sopratutto delle poco felici vicende atmosferiche durante il periodo delle osservazioni ed in causa anche della natura stessa del programma di zenitali assolute.

3. Ecco senz' altro i valori medî conclusi per la latitudine istantanea:

TABELLA I.

EPOCA	φ oss.	n
	41° 53′	
1911.95	53″.749	47
1912.04	.737	30
.17	.482	18
.24	.379	24
.32	.268	38
.46	.341	17
.50	.377	20
.67	.471	56
.78	.498	69
.90	.551	39
1913.03	.597	39
.13	.536	43
.38	.499	29
.63	.590	25
.73	.490	27
1913 80	53.466	32

Se dei precedenti valori si fa una perequazione grafica, si ottengono di decimo in decimo d'anno le latitudini istantanee della colonna 2ª della tabella II.

TABELLA II.

EPOCA	φ istantanea osservata	$-\Delta\varphi$ inter.ᵉ		φ_0	φ_0 media	
1911.95	53″.75	— 0″.29		53″.46		
1912.0	.73	— .28		.45		
.1	.62	— .19		.43		
.2	.46	— .08		.38		
.3	.30	+ .08		.38		φ_0 definitivo
.4	.31	+ .16	Σ	.47	53″.468	
.5	.37	+ .13	$\Delta\varphi = 0$	.50		53″.47
.6	.43	+ .09		.52		
.7	.48	+ .06	Σ	.54	53″.469	
.8	.52	+ .02	$\Delta\varphi = 0$	.54		
.9	.55	— .03		.52		
1913.0	.56	— .09		.47		
.1	.56	— .14		.42		
.2	.56	— .17		.39		
.3	.55	— .14		.41		
.4	.54	— .11		.43		
.5	.53	— .07		.46		
.6	.52	— .04		.48		
.7	.50	— .01		.49		
1913.8	53.48	+ 0.02		53 50		

Dai valori della colonna 2ª si trattava anzitutto di dedurre il più probabile valore della latitudine *media* corrispondente al sistema delle declinazioni stellari concluse.

A tale scopo si applicarono a dette latitudini istantanee le riduzioni al polo medio (colonna 3ª) in base ai valori di x, y, z del servizio internazionale; se ne ricavarono così i valori φ_0 che sono riportati nella colonna 4ª.

Un semplice sguardo a tali valori convince ch'essi dimostrano un andamento di periodo pressochè annuo con differenze reciproche che non possono assolutamente spiegarsi colle inevitabili, ma di necessità piccole, incertezze residue nei valori istantanei osservati e perequati.

Ciò sarà messo in luce e discusso con procedimento apparentemente diverso, ma sostanzialmente identico, come si vedrà in un'altra mia Nota.

Intanto si ritenne, come più attendibile valore della latitudine media, il medio dei valori φ_0 ai quali corrisponde una somma di riduzioni internazionali al polo medio eguale a zero; poichè evidentemente tale non poteva ritenersi nè il medio dei valori istantanei osservati, nè quello di tutti i valori φ_0, in quanto gli uni e gli altri non abbracciano un periodo con egual numero di massimi, minimi e rispettive fasi complete.

Come è indicato nella tabella II, i valori di φ_0 da 1912,0 a 1912,8, e quelli da 1912,3, a 1913,3 dànno rispettivamente

$$\varphi_0 \text{ media} = 53''.468$$
$$\text{"} \quad \text{"} \quad = 53''.469\,;$$

si ritenne:

$$\varphi_0 = 41^\circ\, 53'\, 53''.47$$

4. Se a questo valore di φ_0 si applica il solo binomio

$$x \,.\, \cos\lambda + y \,.\, \sin\lambda\,,$$

in base agli x, y forniti dal servizio internazionale delle latitudini, si ottengono i dati della colonna 2ª della tabella III; questi, paragonati colle latitudini istantanee osservate e perequate (colonna 3ª), dànno i valori del *termine z osservato* contenuti nella colonna 4ª.

TABELLA III.

EPOCA	$\varphi_0 +$ $(x \cdot \cos\lambda + y \sin\lambda) = \varphi_1$	φ_{oss}	$\varphi_{oss} - \varphi_1$ $= z$ *osservato*
	41° 53′		
1911.95	53″.71	″.75	+ 0″ 04
1912.0	.69	.73	+ .04
.1	.62	.62	.00
2	52	.46	— .06
3	.40	.30	— .10
.4	.35	.31	— .04
5	33	.37	+ .04
6	.34	.43	+ .09
.7	.37	.48	+ .11
.8	.41	.52	+ .11
.9	.48	.55	+ .07
1913 0	.53	.56	+ .03
.1	.57	.56	— .01
.2	.60	.56	— 04
.3	.61	.55	— .06
.4	.59	.54	— .05
.5	.54	.53	— .01
6	.48	.52	+ .04
.7	.43	.50	+ .07
1913.8	53 38	.48	+ 0.10

Si giunge così ad un sistema di z *osservati* che ha periodo annuo, con ammontare all'incirca eguale a quello degli z forniti dal servizio internazionale.

Riservandoci di discutere nell'altra Nota questi due sistemi di z, con che potremo aggiungere un secondo risultato non meno notevole del presente lavoro, possiamo intanto trarre questa prima conclusione:

Le osservazioni di latitudine fatte con programma obbediente in tutto a quelle condizioni che, secondo l'ipotesi dell'Hirajama, dovrebbero portare alla nullità del termine z, conducono invece a confermare all'incirca, così per l'andamento come per l'ammontare, i valori z internazionali, con che è dimostrata l'inattendibilità dell'anzidetta ipotesi dell'Hirajama.

Questo primo risultato del lavoro che qui si riassume libera così il campo, entro il quale da troppi anni va dibattendosi la ormai famosa questione del termine z, da una delle ipotesi avanzate in proposito; noi ci lusinghiamo di dimostrare, poi, che il paragone degli z osservati cogli z internazionali permette di trarre conclusioni che, a parer nostro, consigliano di impostare ormai il problema in parola secondo direttive diverse da quelle fino ad ora seguìte.

Astronomia. — *Sui valori del termine z nel problema della variazione delle latitudini.* Nota di E. BIANCHI, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meteorologia. — *Analisi armonica dei barogrammi, e previsione della pressione barometrica.* Nota di FRANCESCO VERCELLI, presentata dal Socio C. SOMIGLIANA.

I. — *Oscillazioni barometriche; metodi di studio.*

Le oscillazioni della pressione barometrica constano di onde che si presentano e si succedono in modo estremamente complesso. Se viene fatta astrazione dalle piccole ondulazioni regolari in relazione col periodo diurno della rotazione terrestre, le oscillazioni barometriche, nel loro complesso, sono considerate generalmente come ondulazioni irregolari, che si presentano, usando una immagine di J. von Hann ([1]), come dovute a onde di aria, simili a onde marine, passanti in una data località incessantemente inseguendosi e sempre mutando lunghezza e durata.

Lo studio di queste oscillazioni irregolari è stato finora condotto con questo solo criterio: di studiare la durata media delle onde che sorpassano una certa ampiezza.

I risultati, così ottenuti, sono di scarso interesse ([2]) e neppure confrontabili fra loro per il modo arbitrario con cui vengono trascurate le minori oscillazioni ([3]).

Tale procedimento, per quanto grossolano, è però ispirato alla giusta tendenza di svincolare la meteorologia dal metodo puramento statistico ([4]).

([1]) Dott. J. von Hann, Lehrbuch der Meteorrologie. Leipzig, 1915, pag. 204.

([2]) Ibid., pag. 204: « Der natürlichste Vorgang, die einzelnen Druckwellen auf Grund der Barometeraufzeichnungen zu verfolgen, in bezug auf ihre Länge (Dauer in Stunden) und Höhe (Amplitude), ist bisher wohl wegen der damit verbundenen Mühe bei *scheinbar geringem Interesse* selten eingeschlagen worden ».

([3]) Ved. bibliografia e risultati nel citato trattato di J. von Hann, IV. Kapitel: *Die unregelmäbigen Luftdruckschwankungen.*

([4]) « Les météorologistes, statisticiens surtout, ont cherché uniquement à compiler des moyennes générales dans la superposition desquelles disparaissent les ondes cherchées ». A. Berget, *Problèmes de l'atmosphère,* Paris 1914.

La generale convinzione, che nulla di regolare possa esistere nei complicati diagrammi barometrici, ritenne forse i meteorologi dall'applicare l'analisi armonica.

Pure, l'analogia che mi parve scorgere fra qualche barogramma e i diagrammi limnimetrici mi indusse a tentare lo studio col metodo del Chrystal, quale è usato nell'analisi delle sesse [1].

Il procedimento del Chrystal è essenzialmente grafico: non mira a rappresentare una curva con serie di Fourier, in cui i diversi armonici abbiano periodi prefissati; ma tende a determinare con approssimazione *i periodi, le ampiezze e le fasi* delle onde semplici (in numero limitato) che costituiscono la curva fondamentale. Esso è basato su questo principio: sovrapponendo un diagramma al diagramma stesso, in guisa che la differenza di fase sia eguale al semiperiodo $\frac{T}{2}$ di una delle onde semplici componenti, e facendo la semisomma delle ordinate, si ottiene una nuova curva, priva dell'onda di periodo T e in cui le rimanenti onde semplici sono spostate di fase e ridotte in ampiezza secondo rapporti noti. Siccome non si conosce *a priori* nessuno dei periodi T, occorrono alcuni tentativi preliminari; con successive approssimazioni si giunge ad avere uno e poi gli altri valori dei periodi.

Questo metodo, già ripetutamente usato nello studio delle sesse, mi condusse a risultati di notevole semplicità. Sebbene non sia possibile ancora fare alcuna generalizzazione, mi pare conveniente di dare una prima notizia delle osservazioni fatte, riservandomi di estendere maggiormente le ricerche, considerando anche il problema sotto l'aspetto teorico della meccanica atmosferica. Ad ogni modo, i risultati enunciati nel n. 2 sono stati verificati con ogni cura e hanno consentito di tentare per la prima volta, credo, con procedimento razionale, il difficile còmpito della previsione della pressione barometrica (n. 3).

2. — *Analisi dei barogrammi.*

I diagrammi barometrici, presi in esame in questa Nota, si riferiscono alle stazioni ed epoche seguenti:

Bologna (1910), Torino (1912-13), Ginevra (1913-14), Gran S. Bernardo (1913-14), Milano (1914), Messina (1907), Parigi (1854) e alcune stazioni giapponesi. Mi valsi di diagrammi costruiti tenendo conto delle tre osservazioni diurne pubblicate dai bollettini dei rispettivi osservatori [2].

[1] G. Chrystal, *On the hydrodynamical theory of seiches.* (Trans. R. S. of Edinburgh, XLI, parte III, 1905); F. Vercelli, *Le teorie idrodinamiche delle sesse,* ecc., (Memorie Ist. lomb., XXI, parte III, 1909).

[2] Cioè delle osservazioni fatte alle ore 9, 15, 21 per le stazioni italiane; e delle ore 7, 13, 21 per le svizzere, ecc. Ved. C. Chistoni, *Il codice meteorologico internazionale,* (Boll. Soc. met. ital., 1913).

Questo piccolo numero di osservazioni mi pare sufficiente allo scopo, trattandosi di studiare onde con periodi di parecchi giorni.

Nella tavola annessa è riportato, in scala ridotta e parzialmente, il lavoro occorrente per una analisi completa. Molti di tali esempi potrei riferire, e con risultati del tutto concordi; ma ora devo limitarmi, per ragioni di spazio, a questo solo esempio.

Costruito il diagramma delle pressioni osservate (I), vengono successivamente dedotte col metodo del Chrystal le curve seguenti:

a) eliminando le onde di periodo 1 giorno e poi quelle di periodo 4 giorni, che nella I sono predominanti. Vi si vedono nettamente onde con periodi di 2 e 16 giorni;

b) eliminando dalla I successivamente le onde di 1 e 2 giorni. Restano onde con periodi di 4, 8, 16 giorni. Fra tutte prevale quella di quattro giorni;

c) eliminando le onde di 1, 2, 4, 8 giorni. È un onda di periodo 16 giorni;

d), *e*) sono onde di 4, 8 giorni ottenute eliminando successivamente tutte le altre.

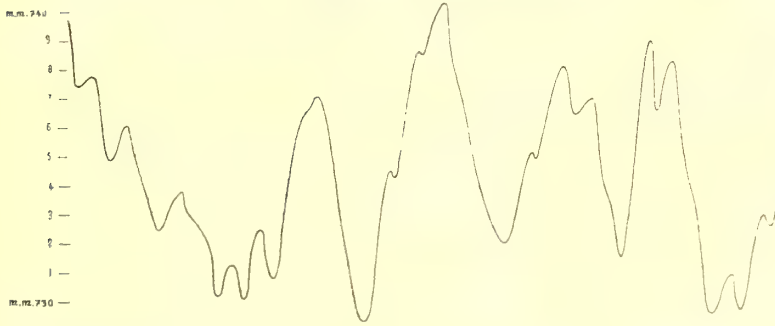
In conclusione, questo barogramma che si riferisce a Torino, luglio 1913, consta di cinque onde principali, i cui periodi sono di 1, 2, 4, 8, 16 giorni, ma le cui ampiezze non sono costanti. Quelle di 4 giorni hanno una spiccata tendenza allo smorzamento; quelle di 8 pare invece tendano ad aumentare: quelle di 2 e di 1 giorno sono più variabili ancora, ma hanno ampiezze piccole in confronto a quelle delle altre onde di maggiore periodo.

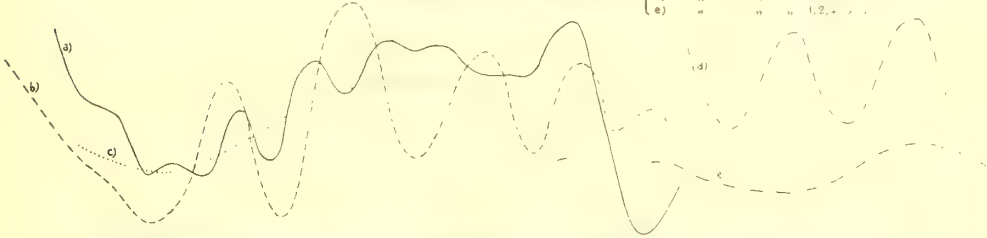
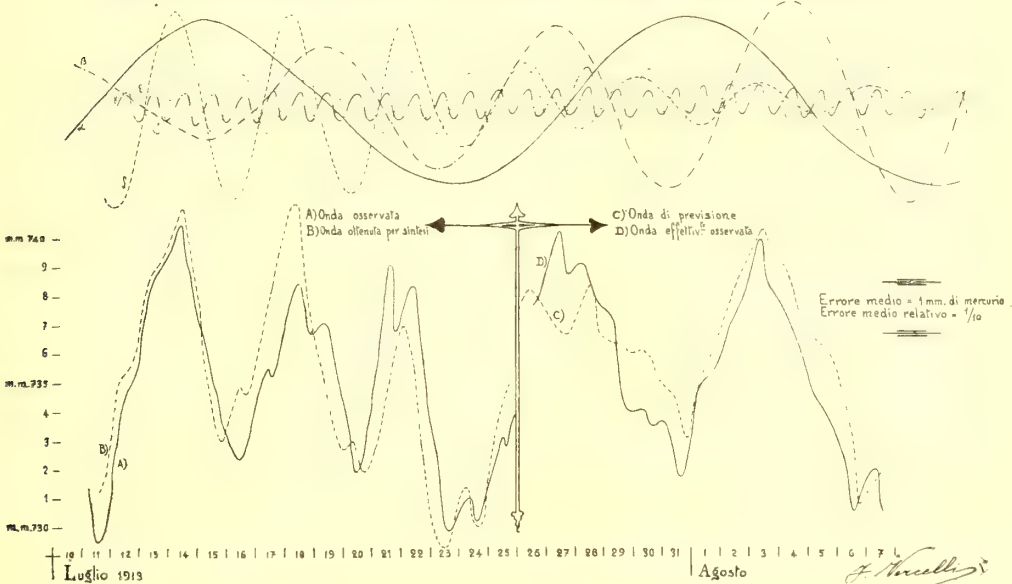
Come dissi, analogo risultato e gli stessi periodi trovai negli altri casi presi in esame; anzi osservai più volte anche un'onda di periodo 32 giorni e anche onde di maggiore durata, ma che per difficoltà grafiche e per la loro piccola ampiezza non ho potuto ancora bene individuare ([1]).

Secondo questi primi tentativi, *le oscillazioni barometriche, per le stazioni ed epoche considerate, risulterebbero di un certo numero di oscillazioni armoniche di carattere smorzato, aventi periodi costanti e indipendenti dal luogo e dal tempo di osservazione, come se fossero dovute a vibrazioni libere di tutta l'atmosfera* ([2]).

([1]) Il sismologo F. Omori, studiando le durate medie di alcuni barogrammi, aveva osservato valori prossimi a quelli da me trovati, e cioè 4·6, 9·3, 33 giorni. « It is quite possible that there exist many others of longer or shorter duration which are probably the multiples of the 1st period ». (Bull. of Earthq. inv. Com., Tokyo, 1908).

([2]) Se le oscillazioni barometriche osservate fossero dovute a vibrazioni libere dell'intera atmosfera, i risultati ottenuti sarebbero in palese contraddizione coi calcoli fatti da taluni autori. Discuterò a suo tempo questa divergenza; ora basti ricordare che quei calcoli sono basati sopra una teoria elaborata dal Margules (Sitz. Wien, 1890-92-93) e

SAGGIO DI ANALISI E SINTESI DI UN BAROGRAMMA

I - Curva osservata

II - Curve derivate

III - Onde componenti e Sintesi del barogramma

Però, a differenza di quanto avviene nei fenomeni di marea, le onde componenti non hanno necessariamente esistenza simultanea e duratura, ma, indipendentemente le une dalle altre, sorgono e lentamente si estinguono per poi ricomparire con mutate ampiezze e fasi.

Questa complicata vicenda di oscillazioni ha una certa corrispondenza col moto ondulatorio dei laghi, in cui un piccolo numero di oscillazioni libere, indipendenti, smorzate (lentissimamente) e con periodi costanti (nel tempo, ma diversi da lago a lago), costituiscono complessivamente il fenomeno ormai noto col nome di *sesse* dei laghi.

Però il moto oscillatorio dei laghi è, in generale, più semplice: talora vi esiste una sola onda semplice, pura, che si ripete inalterata per un numero considerevole di volte, mentre ciò non ho potuto ancora osservare per le oscillazioni barometriche. Ma questa differenza è molto ovvia. Le perturbazioni atmosferiche si succedono ad intervalli che sono generalmente molto grandi rispetto ai periodi delle sesse, e perciò queste possono durare giornate intere senza che sopraggiungano altre onde a complicare il moto. Per la pressione barometrica, invece, i periodi delle oscillazioni sono così grandi (giorni, settimane, mesi) che difficilmente possono trascorrere interi senza che nuove onde sorgano e si sovrappongano alle prime, dando ai diagrammi l'aspetto complesso che osserviamo.

3. — *Sintesi dei diagrammi e previsione della pressione barometrica.*

Una verifica sicura dell'analisi di un diagramma si ottiene ricomponendo, per sintesi dalle onde semplici, il diagramma stesso. Occorre determinare, per ogni onda, l'ampiezza e la fase; questo sarebbe agevole se i moti fossero semplici: ma, in causa dello smorzamento, una determinazione analitica esatta delle ampiezze riuscirebbe assai complicata. Ed allora si fa uso di un criterio personale nel giudicare il rapporto fra le ampiezze ottenute nell'analisi grafica e quelle effettive: criterio che deve poi essere controllato dal fatto che l'onda avuta per sintesi debba essere molto prossima a quella originale osservata.

Quando l'accordo così ottenuto sia giudicato sufficiente, pare logico di ammettere la seguente deduzione:

Se nell'intervallo di tempo, che segue a quello preso in esame, non interviene uno squilibrio atmosferico che provochi nuove oscillazioni sovrapponentisi alle preesistenti, la curva barometrica sarà ancora somma delle sole onde semplici componenti il diagramma analizzato; la sintesi di tali

---

accettata da Hann, Trabert, De Marchi, ecc.; ma che poi fu confutata dal Jaerisch (Met. Zeit., 1907). Per cui la questione delle oscillazioni libere atmosferiche si può ritenere come non ancora teoricamente risolta.

onde deve quindi dare la curva delle pressioni che si dovrebbe poi avere in tale intervallo di tempo.

Si ottiene così un metodo di previsione della pressione barometrica, e, indirettamente, una via veramente suggestiva per giungere a dare un nuovo contributo al complesso problema della previsione del tempo (¹).

Alcuni tentativi fatti in questo senso diedero buoni risultati. Nella figura annessa, l'onda di previsione e quella effettivamente osservata differiscono tra loro (per un intervallo di 13 giorni) di solo 1 mm. di mercurio in media.

In pochi casi la divergenza fu invece notevole, perchè si verificò il fatto sopra escluso, del sopraggiungere di nuove onde molto ampie.

Pure con tale limitazione questo modo di prevedere le pressioni mi pare sia di notevole interesse e tale da essere forse preso in considerazione nelle stazioni meteorologiche. Se anche venisse dimostrato, in avvenire, che i caratteri delle onde componenti i barogrammi non sono eguali per tutte le stazioni e per tutti i tempi, ma sono invece mutevoli da regione a regione e da epoca ad epoca, il metodo di previsione ora esposto nulla perderebbe della sua validità e generalità.

Patologia. — *Sul valore dei composti di aminoacidi con formaldeide per il ricambio azotato degli animali* (²). Nota del dott. Azzo Azzi, presentata dal Corrispondente G. Galeotti.

Dalle ricerche chimiche del Galeotti (³) sugli amino-acidi, sottoposti all'azione della formaldeide, è risultato, che molte proprietà di queste sostanze vengono profondamente modificate, in ispecie per riguardo ai caratteri del gruppo NH_2, il quale, per es., non reagisce più con la ninidrina, nè con l'acido nitroso.

Con i procedimenti descritti dal Galeotti si ottengono sostanze al tutto caratteristiche, degne di studio dal punto di vista biologico.

A tale fine in un mio primo lavoro sperimentale (⁴) mi proposi di vedere, se i composti di alcuni amino-acidi (glicocolla, alanina, acido asparaginico) con la formaldeide, introdotti per il tubo gastro-enterico, potessero venire utilizzati, in modo, che il loro azoto servisse per il bilancio organico.

(¹) « La météorologie ne passera à l'état de science que le jour où elle pourra prédire longtemps à l'avance la hauteur de la colonne barométrique » (*Le Verrier*).

(²) Lavoro eseguito nell'Istituto di Patologia generale della R. Università di Napoli, diretto dal prof. Gino Galeotti, 11 maggio 1915.

(³) Bioch. Zeitschr., 53, 6, pag. 474, a. 1913.

(⁴) Lo Sperimentale, fasc. I, pag. 1, gennaio-febbraio, 1915.

Esperimentai su cani e su galli, tenuti privi di ogni altro cibo, ai quali però somministravo, oltre i suddetti composti, modiche quantità di amido. In questi animali stabilivo poi il bilancio dell'azoto, tenendo sovratutto conto dei rapporti *azoto ureico-ammoniacale*: *azoto totale* nei cani, *azoto-urico*: *azoto totale* nei galli, poichè questi rapporti sono veramente gli indici dell'utilizzazione della sostanza azotata per parte dell'organismo.

Da questi esperimenti giunsi alle seguenti conclusioni:

1°) i composti degli amino-acidi con la formaldeide, introdotti nel tubo gastro-enterico di polli o di cani, vengono facilmente riassorbiti;

2°) dopo la loro ingestione, aumenta in modo evidente l'azoto dell'acido urico nei galli e l'azoto ureico-ammoniacale nei cani;

3°) il rapporto fra azoto ureico-ammoniacale e azoto totale nei cani si mantiene nei limiti normali, quello fra azoto urico e azoto totale nei galli discende spesso alquanto sotto alla norma.

Quantunque nei galli questo rapporto offrisse dati un po' incerti, pure sulle linee generali potei concludere, che nelle sostanze da me sperimentate, le proprietà speciali, che acquista il gruppo NH_2, non sono tali da impedire la disamidazione fisiologica, e che i composti degli amino-acidi con la formaldeide, sebbene per molte ragioni così diversi dagli amino-acidi puri, possono servire ancora per il ricambio degli animali superiori.

Ho adesso proseguito queste ricerche, cercando di stabilire, se con questi composti degli amino-acidi con la formaldeide si possano mantenere in vita per molto tempo gli animali; e a tal fine per molte ragioni, che sarebbe troppo lungo esporre, mi sono servito dei galli.

Ho usato miscele di amino-acidi, risultanti dall'idrolisi dell'ovo-albumina, perchè all'animale non mancasse alcuno dei gruppi fondamentali delle proteine, necessarî all'assimilazione, e queste miscele venivano poi trattate con la formaldeide, come fu fatto per gli amino-acidi puri.

Le sostanze così risultanti erano impastate con amido e imbeccate ai galli.

Esper. I e II. — Anzitutto riferirò due esperimenti di controllo, fatti per vedere, quanto può vivere un gallo nutrito con soli idrati di carbonio e sali minerali. Gli animali ricevevano giornalmente, per kg. del peso del corpo, il cibo seguente: amido gr. 30; zucchero gr. 4; gomma arabica gr. 5, carbonato di sodio 0,5; cloruro di sodio 0,25; fosfato di K gr. 0,25; sali di magnesio o di calcio gr. 0,25.

Giorni di esperimento	Peso degli animali	
	1°	2°
1°	1310	870
2°	1300	850
3°	1270	812
4°	1270	820
5°	1260	800
6°	1225	770
7°	1200	770
8°	1190	770
9°	1180	770
10°	1180	muore
11°	muore	

Si vede quindi, che i galli, tenuti a dieta di soli idrati di carbonio e sali (senza sostanze azotate) diminuiscono gradatamente di peso e muoiono tra il 10° e l'11° giorno [1].

Esper. III e IV. — In questi esperimenti furono somministrati ai galli gli amino-acidi combinati con la formaldeide, risultanti dall'idrolisi dell'ovo-albumina per mezzo di HCl.

gr. 600 di albumina d'uovo secca e polverizzata sospesa in due litri di una soluzione di acido cloridrico al 50 %, furono tenuti nell'autoclave a 1 atmosfera per 2 ore, dopo di che il liquido non dava più la reazione del biureto.

L'acido cloridrico fu, in massima parte, tolto nel vuoto a 100° e il rimanente neutralizzato con soluzione di soda. Gli idrolizzati, così ottenuti, furono trattati per 8 ore a bagno-maria con 200 cc. di formaldeide. La formaldeide fu tolta in una corrente di vapor d'acqua, e, per accertarmi della sua scomparsa, mi servii della sensibilissima reazione di Schiff (fucsina decolorata con acido solforoso). Il liquido risultante era assai ricco di Na Cl. Con esso feci una pasta di amido, zucchero e sali minerali e la somministrai agli animali in modo, che ciascuno riceveva giornalmente quanto segue: composti degli amino-acidi, contenenti tanto azoto, quanto ne conteneva l'alimento abituale necessario per mantenerli in bilancio; amido gr. 30; zucchero 4, carbonato di sodio 0,70; fosfato di potassio 0,30; sali di magnesio e di calcio 0,30, lattato di ferro 0,025, gomma arabica 5.

[1] In alcuni esperimenti sul digiuno completo dei galli mi è risultato che questi animali muoiono in genere entro una settimana; soltanto uno è vissuto 11 giorni.

Giorni di esperimento	Peso dei galli III	IV
1°	1170	1210
2°	1130	1190
3°	1090	1190
4°	1090	1190
5°	1100	1190
6°	1070	1190
7°	1070	1170
8°	1100	1195
9°	1100	1175
10°	1050	1170
11°	1070	1150 muore
12°	1000	
13°	1050	
14°	950 muore.	

L'esame macro- e microscopico dei varî organi non offre alterazioni degne di nota.

Questi esperimenti non mi sembrarono convincenti, perchè mi parve di notare, che la quantità di azoto, somministrata nella forma da me sperimentata, fosse eccessiva, e, sopratutto, che gli animali soffrissero per il troppo cloruro di sodio, inevitabile con la tecnica usata per la preparazione dell'idrolizzato. Per ciò modificai la tecnica, come segue:

Esper. V. — In questo cercai di ottenere un idrolizzato di ovo-albumina, privo di cloruro di sodio. Per ciò usai l'acido solforico per l'idrolisi dell'ovo-albumina. 500 gr. di ovo-albumina secca vengono messi in 2 litri di H_2SO_4 al 25 %. Si tiene la miscela per 2 ore nell'autoclave fino a scomparsa della reazione del biureto. L'acidità viene neutralizzata in buona parte con latte di calce e poi con una soluzione di idrato di bario. I rispettivi sali formatisi possono facilmente essere raccolti e quindi eliminati con doppia filtrazione. Prima della filtrazione del liquido, contenente i sali di bario, si fa gorgliare in esso dell'anidride carbonica. La reazione con la formaldeide fu fatta prima della filtrazione, a fine di non perdere la tirosina precipitata, poichè essa si ridiscioglie a caldo per il trattamento con la formaldeide.

Fu preparata una pasta, di cui una razione giornaliera aveva la seguente composizione: Composti con la formaldeide con un contenuto di gr. 0,25 di N; amido gr. 30; zucchero gr. 4; carbonato di Na 0,1; cloruro di Na 0,05; fosfato di K 0,15; sali di magnesio e di calcio gr. 0,1, gomma arabica 5. Oltre a ciò al gallo venivano somministrate pietruzze, al fine di favorire i processi digestivi.

Giorni di esperimento	Peso del gallo	Giorni d'esperimonto	Peso del gallo
1°	1018	19°	900
2°	975	20°	940
3°	985	21°	915
4°	975	22°	920
5°	965	23°	920
6°	950	24°	910
7°	920	25°	910
8°	935	26°	910
9°	920	27°	910
10°	915	28°	920
11°	900	29°	890
12°	880	30°	870
13°	890	31°	870
14°	895	32°	840
15°	905	33°	860
16°	885	34°	840
17°	920	35°	(l'animale improvvisamente muore).
18°	910		

Quest'ultimo esperimento, confrontato con i primi due esperimenti di controllo, dimostra, che i composti degli amino-acidi con la formaldeide possono servire a conservare in vita per parecchio tempo gli animali, il che conferma, quanto trovai nelle mie precedenti ricerche, che cioè tali sostanze valgono a mantenere il ricambio azotato degli animali.

Non deve però sorprendere, che questi animali finiscano col morire, poichè il cibo azotato, costituito da queste sole sostanze, è troppo diverso dal nutrimento normale per pensare, che col tempo non insorgano lesioni degli organi digerenti e degli emuntorî.

Patologia. — *Sulla formazione di acido ippurico dal composto di glicocolla con formaldeide* (¹). Nota di Gaetano Cicconardi, presentata dal Corrispondente G. Galeotti.

Nella Nota precedente il dott. A. Azzi ha esposto i resultati delle sue ricerche, i quali dimostrano che i composti degli amino acidi con la formaldeide sono utilizzati dagli organismi animali di guisa che si può concludere, che le proprietà biologiche fondamentali degli aminoacidi non si perdono durante le modificazioni, abbastanza profonde, che queste sostanze subiscono per opera della formaldeide. Il dott. Azzi ha trovato, che una buona parte dell'azoto di questi composti, introdotti nel tubo digerente di cani o di galli, ricompare nelle escrezioni sotto la forma normale di azoto ureico-ammoniacale (nei cani) o di azoto urico (nei galli).

Proseguendo in questo ordine di idee, per consiglio del prof. Galeotti, ho studiato il comportarsi del composto di glicocolla per rispetto alla formazione di acido ippurico.

Come è noto, anche per le recenti ricerche di Abderhalden e Strauss, la quantità di acido ippurico eliminata aumenta considerevolmente, se al cibo si aggiunge acido benzoico, e aumenta ancora se si aggiunge pure glicocolla.

Nelle ricerche da me fatte, a fine di rendere più netta l'influenza della somministrazione di glicocolla, o del composto da me studiato, per la eliminazione dell'acido ippurico, ho creduto opportuno di tenere l'animale in esperimento, ad una dieta priva di azoto, la quale si è mostrata sufficiente per conservare il cane in buone condizioni durante tutto l'esperimento.

Il cibo era così costituito:

amido gr. 19;
zucchero gr. 15;
grasso di porco (strutto) gr. 6,5.

Il peso del cane era kgr. 4.600.

L'esperimento si può dividere in 4 periodi:

1° periodo di due giorni, in cui il cane, nutrito col cibo suddetto, si trova in condizioni normali;

2° periodo di due giorni, in cui il cane riceve col pasto gr. 3 di benzoato di soda (gr. 2,85 di acido benzoico);

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto di Patologia generale della R. Università di Napoli, diretto dal prof. Gino Galeotti.

3° periodo di tre giorni, in cui il cane riceve ogni giorno, col pasto, gr. 3 di benzoato sodico e gr. 6 di glicocolla;

4° periodo di due giorni, in cui il cane riceve ogni giorno gr. 3 di benzoato sodico, e gr. 10 circa del composto di glicocolla con formaldeide.

Debbo qui espressamente notare, che, per prove precedenti, i cani rifiutano il cibo mescolato al composto di glicocolla, e che è inutie introdurre loro nello stomaco queste sostanee mediante la sonda, perchè gli animali quasi sempre lo vomitano. Perciò sono dovuto ricorrere all'artifizio già usato da Azzi, quello cioè di introdurre la sostanza, con una siringa *Record*, in un'ansa intestinale, mediante una piccola ferita laparatomica. Questa piccola operazione, fatta con càutele antisettiche, non altera troppo le condizioni degli animali in esperimento, anche se ripetuta per due giorni di seguito, come io appunto ho fatto.

Il composto di glicocolla e formaldeide fu così preparato:

20 gr. di glicocolla sono sciolti in circa 200 gr. di acqua, e ad essi si aggiungono 100 cc. di formalina ridistillata a circa il 40 %. Si tiene la miscela a bagnomaria a 60° per 5 giorni. Il liquido diventa giallo scuro, e mostra leggeri riflessi verdastri di fiuorescenza. Si toglie tutta la formaldeide mediante una corrente d'aria alla temp. di 60°, fino a scomparsa della reazione di Schiff. Si evapora nel vuoto, e si ottengono così circa 30 gr. di una massa resinosa, solubilissima in acqua.

Per le determinazioni dell'acido ippurico, dopo avere sperimentato altri metodi, fra cui quello di Wiechowski, ho dato la preferenza al metodo più recente del Folin, che così ho eseguito:

Si acidificano 100 cc. di urina con HCl e si trattano cinque volte con etere di petrolio in un imbuto a separazione a fine di togliere l'acido benzoico libero e altri acidi, che poi si scioglierebbero nel cloroformio: come è noto l'acido ippurico è insolubile nell'etere di petrolio. 20 cc. dell'urina così trattata, previa alcalinizzazione con 2 cc. di NaOH 5 %, vengono evaporati a bagnomaria fino a secchezza; in tal modo si scinde l'acido ippurico in acido benzoico e glicocolla. Il residuo, sciolto in 25 cc. di acqua e altrettanti di HNO_3 concentrato, si versa in un pallone Kjeldahl da 500 cc., e si fa bollire per quattro ore e mezzo con l'aggiunta di 20 ctgr. di nitrato di Cu. Dopo raffreddamento, si versa in un imbuto a separazione da 500 cc., si aggiunge alla soluzione una quantità di solfato di ammonio sufficiente per saturarla (circa 55 gr.) e si estrae con cloroformio, adoperando 50, 35, 25, 25 cc. di questo. Il cloroformio, raccolto in un altro imbuto a separazione da 500 cc., viene agitato con 100 cc. di una soluzione satura di NaCl, che contiene per ogni litro cc. 0,5 di HCl concentrato. L'acido benzoico, che è contenuto nel cloroformio così trattato, è versato in un Erlenmeyer da 500 cc. e viene dosato mediante una soluzione $\frac{N}{10}$ di etilato

sodico. Dall'acido benzoico, determinato così, si calcola facilmente l'acido ippurico contenuto nei 20 cc. di urina analizzata e quindi nell'urina totale delle 24 ore.

Riassumo i dati delle mie determinazioni nella seguente tabella.

Giorni di esperimento	Quantità dell'orina in 24 ore c. c.	Acido benzoico risultante dalla determinazione gr.	Acido ippurico corrispondente gr.	Aumento dell'acido ippurico sulla quantità eliminata in condizioni normali
1° condizioni normali	155	0.671	0.984	—
2° condizioni normali	180	0.732	1.074	—
3° somministrazione di gr. 2.85 di acido benzoico	120	1.398	2.051	1.042
4° somministrazione di gr. 2.85 di ac. benzoico	200	1.403	2.058	1.029
5° somministrazione di gr. 2.85 di ac. benzoico e di gr. 6 di glicocolla	155	1.636	2 400	1.371
6° somministrazione di gr. 2.85 di ac. benzoico e di gr. 6 di glicocolla	140	1 684	2 480	1.451
7° somministrazione di gr. 2.85 di ac. benzoico e di gr. 6 di glicocolla	160	1 756	2.577	1 548
8° somministrazione di gr. 2.85 di ac. benzoico e di gr. 10 di composto di glicocolla e formaldeide	215	2.000	2.935	1.906
9° somministrazione di gr. 2.85 di ac. benzoico e gr. 10 di composto di glicocolla e di formaldeide	170	2.147	3.150	2.121

Esaminando questi dati si vede:

1°) Che nel cane privo di cibo proteico l'introduzione di acido benzoico fa aumentare abbastanza la eliminazione di acido ippurico (questo

aumento importa in media gr. 1.03 corrispondentemente a gr. 2.85 di acido benzoico introdotto). Quindi non tutto l'acido benzoico trova glicocolla sufficiente con cui coniugarsi;

2°) Ma se contemporaneamente si somministra al cane una certa quantità di glicocolla (gr. 6), l'aumento dell'acido ippurico è maggiore (gr. 1.46);

3°) Questo aumento è pure maggiore se si somministra al cane, oltre che l'acido benzoico, il composto di glicocolla e formaldeide. L'aumento è stato in media gr. 2.05.

Questo ultimo resultato è quello che interessa per l'argomento da me impreso a trattare, in quanto che si vede così, che l'organismo del cane può utilizzare il composto di glicocolla con formaldeide per la sintesi dell'acido ippurico.

Chimica fisica. — *Densità delle fasi coesistenti del metano e dell'ossido di carbonio* [1]. Nota di Ettore Cardoso, presentata dal Socio E. Paternò.

1) Nella Nota precedente ho dato qualche indicazione sommaria sul metodo sperimentale che mi ha permesso di determinare le costanti critiche di qualche gas permanente. Impiegando gli stessi apparecchi, un poco modificati, e servendomi di un tubo-laboratorio la cui estremità capillare era graduata e calibrata, ho potuto effettuare delle misure molto più delicate e sono riuscito a determinare la densità delle fasi coesistenti del metano e dell'ossido di carbonio, dalle quali poi ho dedotto le rispettive densità critiche applicando la legge di Cailletet e Mathias.

2) La purezza dei campioni gassosi è stata provata applicando il metodo descritto nella Nota precedente.

Il peso del gaz sul quale operavo era calcolato, partendo dai dati di temperatura e pressione relativi al riempimento del tubo laboratorio. Ho tenuto conto, in questi calcoli, della deviazione alla legge di Gay-Lussac, tralasciando quella alla legge di Boyle che era debolissima nelle condizioni sperimentali in cui mi ero posto.

3) Le misure dei volumi rispettivi del liquido e del vapore saturo che sono necessarie per il calcolo delle densità delle due fasi erano effettuate facendo pescare la parte capillare graduata del tubo-laboratorio nel criostato in modo tale che il mercurio rimanesse immerso e quindi gelato per una lunghezza di 5 centimetri circa. Operando in questo modo, riuscivo a rac-

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di fisica dell'Università di Ginevra, maggio 1913-ottobre 1914.

chiudere tutto il gas del tubo-laboratorio in una porzione qualunque della parte capillare che termina il tubo stesso; in altri termini, potevo, in questo modo, realizzare un tubo di Natterer il cui riempimento era regolabile a volontà.

4) Ho avuto cura di agitare, per mezzo di un agitatore elettromagnetico di Kuenen, colle dovute precauzioni, la fase liquida perchè ricerche precedenti [1] mi avevano dimostrato che ciò è indispensabile per ottenere, in modo sicuro e relativamente rapido, l'equilibrio termodinamico delle due fasi.

5) Le misure della densità che ho effettuato sino nelle vicinanze del punto critico hanno dato delle curve molto regolari e dei *diametri rettilinei* sia per il metano che per l'ossido di carbonio.

Le misure effettuate su due campioni differenti di metano hanno dato esattamente la stessa densità critica, cioè $d_c = 0{,}1623$ [2]. Per l'ossido di carbonio ho ottenuto $d_c = 0{,}3110$.

A suo tempo pubblicherò i dettagli di queste esperienze ed anche alcune considerazioni teoriche ispirate da questi studî sperimentali.

Chimica. — *Nuove ricerche sulle combinazioni inferiori di alcuni elementi*. Nota di L. Marino, presentata dal Socio R. Nasini.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

[1] Archives de sc. phys. et nat., 1912.

[2] La prima serie di ricerche fu fatta nel giugno 1913 ed ha fornito l'argomento di una pubblicazione (Arch. des sc. phys. et nat., agosto 1913); la seconda serie fu effettuata un anno dopo. La concordanza notevole (per questo genere di misure) delle due serie è certamente dovuta al caso, perchè non credo che il mio metodo sperimentale possa dare una precisione superiore a $\frac{1}{600}$ per le densità critiche.

Chimica. — *Sulle ossime stereoisomere del β-naftil-fenil-chetone* (1). Nota di PASQUALE POCCIANTI, presentata dal Socio A. ANGELI.

In una Nota precedente (2), M. Betti ed io abbiamo dimostrato l'esistenza delle due ossime stereoisomere dell'α-naftil-fenil-chetone, l'una fusibile a 127°, l'altra a 161°, delle quali la prima si può trasformare nella seconda. Nella presente Nota riferisco una ricerca sulle ossime del β-chetone.

Fino dal 1888 O. Kegel (3) descrive un'ossima del β-naftil-fenil-chetone, ottenuta riscaldando questo a 100°-110° con cloridrato di idrossilamina in soluzione alcoolica, ossima che cristallizza in aghi fondenti a 174°-176°.

Perrier e Caille (4), senza citare Kegel, accennando solo a un tentativo, non riuscito, di Rousset (5), parlano invece di un'ossima ottenuta scaldando un quarto d'ora a bagno-maria un miscuglio di chetone, cloridrato di idrossilamina e acetato sodico in soluzione acquoso-alcoolica: quest'ossima, secondo gli autori, si ottiene pura dopo una sola cristallizzazione dall'alcool, e allora si presenta in cristalli bianchi, setacei, fusibili a 133°.

Nelle mie ricerche ho potuto stabilire che il β-naftil-fenil-chetone, analogamente al composto α-, fornisce due ossime stereoisomere: delle quali una cristallizza dall'alcool in *piccoli romboedri regolari* fusibili a 157°; l'altra cristallizza in *ciuffi di lunghi aghi setacei* e fonde a 174°. Questa ultima corrisponde all'ossima di Kegel, per quanto nelle condizioni da lui descritte non abbia potuto ottenerla in modo esclusivo ma sempre mescolata con una piccola quantità dell'altra. Invece non mi è stato possibile ottenere l'ossima p. f. 133° descritta da Perrier e Caille, nè agendo nelle condizioni da loro indicate, nè in altre alquanto modificate. Ho ottenuto bensì in qualche caso un prodotto che fondeva poco nettamente intorno a 135°, ma che, dopo ripetute cristallizzazioni dall'alcool, risultava un miscuglio delle due ossime stereoisomere fusibile a 140°-145°, e di chetone inalterato che fonde a 82°.

In confronto di ciò che avviene per l'α-chetone (I), l'idrossilamina agisce sul β-naftil-fenil-chetone (II)

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale del R. Istituto di studî superiori di Firenze.

(2) Questi Rendiconti, vol. XXIII (1914), 1° sem., fasc. 5, pag. 340.

(3) Ann. *247*, 181; Ber. *21*, III, R. 723 (1888).

(4) Bull. Soc. Chim. [4], III, 738 (1908).

(5) Thèse de Lyon, 1896.

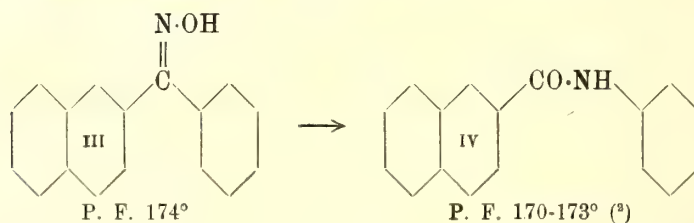
con una facilità molto più grande; il che era prevedibile, perchè con l'attacco del gruppo carbonilico in posizione β viene a mancare l'impedimento sterico esercitato dal secondo anello della naftalina [1].

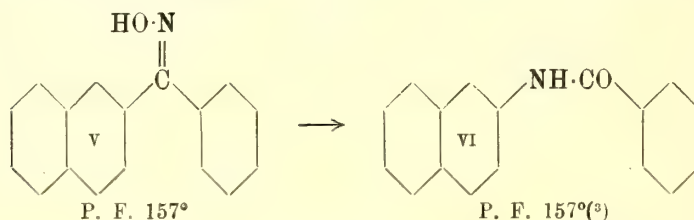
Inoltre, nel caso delle ossime ottenute dal β-chetone, la trasformazione di una nell'altra è assai più difficile, tantochè non sono riuscito a realizzarla. A conferma di ciò, ho ottenuto due derivati benzoilici distinti, mentre la benzoilazione delle ossime dell'α-chetone conduceva ad un unico derivato. Il derivato dell'ossima p. f. 174° fonde a 168°; quello dell'ossima p. f. 157° fonde a 172°.

Anche con l'isocianato di fenile si ottengono due prodotti di addizione differenti, che ho analizzato.

Questa maggiore stabilità delle ossime è probabilmente la causa del fatto che esse non si formano isolate facilmente come le ossime, dell'α-chetone: infatti in soluzione alcalina si ottiene sempre un miscuglio pressochè a parti uguali delle due; soltanto in soluzione acida si ottiene in prevalenza l'ossima fusibile a 174°.

Per stabilire la configurazione delle due ossime, sono ricorso alla trasposizione di Beckmann con pentacloruro di fosforo; e poichè l'ossima p. f. 174°, mediante detta trasposizione, dà origine all'*anilide dell'acido β-naftoico* (IV), risulta per essa la formula III:

N·OH ‖ C — III — P. F. 174° → CO·NH — IV — P. F. 170-173° [2]

mentre all'ossima fusibile a 157°, da cui ho ottenuto la *β-naftalide dell'acido benzoico* (VI), spetta la formula V:

HO·N ‖ C — V — P. F. 157° → NH·CO — VI — P. F. 157° [3]

Infine ho verificato che la riduzione di queste due ossime avviene con maggiore difficoltà che non quella dei derivati analoghi dell'α-chetone; e

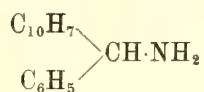
[1] V. Meyer e Sudborough, Ber. *27*, 1580 (1894); V. Meyer, ibid. *28*, 182 (1895).

[2] Vieth, Ann. *180*, 323.

[3] Klopsch, Ber. *18*, 1585 (1885).

conduce ad una base oleosa che attira facilmente l'anidride carbonica del l'aria, e della quale ho preparato e analizzato i seguenti derivati: il *cloridrato*, che cristallizza in rosette bianche, fusibili, con decomposizione, a 265°-270°; l'*acetato*, che si presenta in ciuffi di aghi bianchi, setacei, e fonde a 127°; e il *derivato benzoilico*, che cristallizza in piccoli aghetti fusibili a 182°.

Per l'analisi di questi composti, la base anzidetta corrisponde ad un'amina, la cui struttura è rappresentata dalla formula

$$\begin{matrix} C_{10}H_7 \searrow \\ \quad\quad\quad CH{\cdot}NH_2 \\ C_6H_5 \nearrow \end{matrix}$$

e che può chiamarsi *β-naftil-fenil-amino-metano*. Questo composto, di cui non si trova menzione nella letteratura, è analogo all'α-naftil-benzil-amina ottenuta dalle ossime dell'α-chetone.

In seguito a questa ricerca, viene completata la serie delle ossime stereoisomere dei naftilfenilchetoni, intorno alle quali si avevano nella letteratura notizie incerte e contradittorie.

Le esperienze che si riferiscono alla presente Nota verranno pubblicate per esteso nella Gazzetta chimica italiana.

Chimica. — *Sui borati*: *sistema* $(NH_4)_2O - B_2O_3 . H_2O$ a 60°. Nota III di U. Sborgi e F. Mecacci, presentata dal Socio R. Nasini.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Sopra una reazione del diamante.* Nota di Luigi Colomba [1], presentata dal Socio C. Viola.

Nelle sue ricerche sulla costituzione e sul comportamento chimico del diamante. Moissan [2] accennò ad una reazione, da lui indicata coll'epiteto di curiosa, secondo la quale il diamante, scaldato con una miscela di carbonati alcalini portati alla fusione, scomparisce rapidamente trasformandosi completamente in ossido di carbonio.

Il dispositivo adottato da Moissan era il seguente: una navicella di platino, contenente il carbonato alcalino assolutamente secco ed il diamante, fu collocata in un tubo di porcellana verniciato esternamente ed internamente, nel quale era stato fatto il vuoto, dopo averlo prima interamente riempito di anidride carbonica; il detto tubo comunicava con una serie di bolle contenenti soluzioni di idrato potassico e di cloruro ramoso, rispettivamente

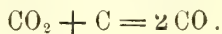
[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di mineralogia della R. Università di Modena.

[2] Comptes rendus de l'Académie de France (1893), CXVI, part. I, pag. 460.

destinate a fissare l'anidride carbonica e l'ossido di carbonio svolgentisi nella reazione; il tubo venne portato ad una temperatura compresa fra 1100° e 1200°.

Questa esperienza era stata fatta da Moissan per uno scopo essenzialmente diverso, volendo egli stabilire con essa se nel diamante sia o no contenuto idrogeno libero. Ma poichè le condizioni di essa erano tali da eliminare in modo assoluto la possibilità che l'ossidazione del carbonio adamantino potesse essere dovuta all'intervento di agenti esterni, essa acquista un interesse assai grande, anche quando venga considerata indipendentemente dallo scopo prefissosi da Moissan, poichè i risultati in essa ottenuti possono essere molto importanti per la questione riguardante il modo di comportarsi del diamante in presenza dell'anidride carbonica portata ad elevata temperatura.

È noto come in generale le diverse varietà di carbonio, sebbene in grado molto differente e col concorso di temperature più o meno elevate, abbiano tendenza a ridurre parzialmente l'anidride carbonica con produzione di ossido di carbonio, secondo la semplice reazione:

$$CO_2 + C = 2\,CO\,.$$

Anche nel caso del carbonio adamantino si può avere una reazione di tale tipo. Esistono però, fra i varii autori, delle divergenze rispetto al modo nel quale la detta reazione avverrebbe; invero, mentre alcuni, come Jaquelain e Baumhauer [1], ammisero che si trattasse, anche nel caso del diamante, di una vera riduzione dell'anidride carbonica, analogamente a quanto avviene per le altre varietà di carbonio, invece Doelter [2], partì da un'altra interpretazione e precisamente ammise che la ossidazione del diamante non avvenga se non in seguito ad una dissociazione, anche solo parziale, dell'anidride carbonica, poichè l'agente capace di ossidare il carbonio adamantino sarebbe appunto rappresentato dall'ossigeno atomico che si svolge durante la detta dissociazione.

Ora, se si considera la reazione di Moissan, io credo che non sia difficile di dimostrare come essa, non ostante la presenza dei carbonati alcalini, non solo sia da riferirsi ad uno dei tipi precedentemente accennati, ma pur anche possa servire per stabilire quale fra le interpretazioni di Jacquelain e Baumhauer o di Doelter sia da preferirsi.

Innanzi tutto si può molto facilmente constatare che la temperatura richiesta puramente per portare alla semplice fusione la miscela dei carbonati alcalini, non è sufficiente perchè il diamante sia in qualche modo in-

(1) Ann. d. Phys. N. F. (1877), I, pag. 173.
(2) Handbuch der Mineralchemie (1912), Bd. I, pag. 37.

taccato da detta miscela. Io sono giunto a questa conclusione in conseguenza di una esperienza molto semplice ma molto convincente.

In un crogiuolino di platino contenente una certa quantità di carbonato sodico potassico purissimo, perfettamente secco, collocai alcuni frammenti di cristalli di diamante perfettamente incolori e che avevo prima esattamente pesati ed accuratamente esaminati al microscopio per esser certo che non contenessero qualche impurezza.

Allo scopo di evitare la possibilità di una qualche influenza dipendente dall'ossigeno atmosferico, collocai il detto crogiolino, accuratamente chiuso, in un altro crogiuolo, pure di platino ma molto più grande, e riempii gli interspazî esistenti fra i due crogiuoli mediante polvere di carbone, con la quale riempii pure completamente il crogiuolo maggiore, in modo che quello più piccolo ne fosse completamente coperto.

Ciò fatto chiusi il crogiuolo maggiore e scaldai il tutto per qualche ora ad una temperatura tale che, pur essendo abbastanza alta per mantenere il carbonato sodico potassico alla fusione, non era però sufficiente perchè esso potesse, anche in minima parte, dissociarsi.

Il risultato di questo prolungato riscaldamento del diamante in presenza del carbonato sodico potassico fuso, fu completamente negativo; infatti, non solo non potei constatare la minima perdita di peso nei frammenti di diamante, ma pur anche, avendoli in seguito esaminati attentamente al microscopio, non potei determinare in essi alcuna traccia di figure di corrosione.

Da questa esperienza si deduce che la semplice temperatura di fusione dei carbonati alcalini non è sufficiente perchè la reazione di Moissan avvenga, per cui si deve ammettere che siano necessarie le maggiori temperature, a cui giunse Moissan; ma siccome tali temperature — comprese, come già ho detto, fra 1100° e 1200° — sono sufficienti perchè i detti carbonati si dissocino, non è possibile di escludere che nella ossidazione del carbonio adamantino intervenga l'anidride carbonica proveniente da detta dissociazione; fatto, questo, ammesso dallo stesso Moissan, dal momento che egli stesso accenna alla interposizione, lungo il percorso dei prodotti della reazione, di bolle contenenti idrato potassico, destinato appunto a fissare l'anidride carbonica proveniente indubbiamente dalla dissociazione dei carbonati alcalini da lui adoperati.

Però, anche giungendo a tali conclusioni, rimane ancora sempre il dubbio se la ossidazione del carbonio adamantino sia avvenuta nel modo ammesso da Jacquelain e da Baumhauer oppure in quello ammesso da Doelter.

Ora io credo che, dalle cose dette più sopra, si possa dedurre che la prima delle dette ipotesi sia molto più probabile della seconda.

Infatti, se si ammette, con Doelter, che il diamante non sia capace di ridurre direttamente la anidride carbonica e che, per conseguenza, solo possa ossidarsi quando quest'ultima, dissociandosi, metta in libertà una parte del

suo ossigeno, si giungerebbe alla conclusione che in tali condizioni la resistenza del carbonio adamantino alla ossidazione divenga estremamente piccola, essendo molto facile di stabilire che nelle condizioni richieste per la esperienza di Moissan la dissociazione dell'anidride carbonica doveva essere estremamente limitata.

Dalle tabelle riportate dal Nernst [1] si hanno, per la dissociazione dell'anidride carbonica, a pressioni non superiori ad una atmosfera ed in temperature assolute, i seguenti valori su cento parti di CO_2:

T	P = 1 atm.	P = 0.1 atm.	P = 0.01 atm.
1000	$1.58 \cdot 10^{-5}$	$3.40 \cdot 10^{-5}$	$7.31 \cdot 10^{-5}$
1500	$4.06 \cdot 10^{-2}$	$8.72 \cdot 10^{-2}$	0.188
2000	1.77	3.73	7.88
2500	15.8	30.7	53

Da essi si deduce come anche per pressioni estremamente ridotte, di un centesimo di atmosfera, alle massime temperature impiegate da Moissan, corrispondenti, in temperature assolute, a meno di 1500 gradi, la dissociazione dell'anidride carbonica si mantenga molto limitata, raggiungendo appena un massimo di 0,188 °/₀ con una percentuale d'ossigeno libero non superiore a 0,068, e la cui energia chimica verrebbe ad essere di molto diminuita, per il fatto di essere esso disciolto in una grande quantità di anidride carbonica proveniente dalla dissociazione del carbonato alcalino, molto grande alla detta temperatura assoluta di 1500 gradi. Si potrebbe però per un lato obbiettare che la concentrazione dell'ossigeno doveva essere maggiore, per il fatto che tanto l'anidride carbonica quanto l'ossido di carbonio sviluppantisi durante le due distinte fasi di dissociazione tendevano ad eliminarsi mediante le bolle contenenti le soluzioni capaci di assorbirli; mentre per altro lato si potrebbe pure obbiettare che il detto ossigeno, essendo allo stato atomico, doveva possedere una energia chimica maggiore.

Ma tanto l'una quanto l'altra di dette obbiezioni non sono affatto sostenibili.

Invero, per quanto riguarda la prima è degno di nota il fatto che lo stesso Doelter [2] ha osservato che i cristalli di diamante scaldati in una corrente di anidride carbonica e ad una temperatura di 1200°, pari quindi approssimativamente ad una temperatura assoluta di 1500, perdono gradualmente di peso; per cui è necessario di ammettere come anche in presenza di un eccesso di anidride carbonica, e ad una temperatura alla quale la dissociazione di quest'ultima in ossido di carbonio ed in ossigeno è minima

[1] Theoretische Chemie, 5 Aufl. (1907), pag. 680.
[2] loc. cit.

alla pressione ordinaria (essendo essa pari a 0,0400 %, con una percentuale di ossigeno libero pari a m. 0,015), il diamante si ossidi con relativa facilità.

Inoltre è anche da ricordare che nella esperienza di Moissan i cristalli di diamante erano direttamente stati collocati nella miscela dei carbonati alcalini, per cui essi venivano a trovarsi in un ambiente in cui la produzione dell'anidride carbonica doveva essere massima e continua.

Per quanto si riferisce alla seconda obbiezione, è pure assolutamente da escludersi che l'aumento di energia chimica dell'ossigeno in causa del suo speciale stato atomico possa rendere più facile l'ossidazione del carbonio adamantino, per il fatto che lo stesso Moissan [1] ha dimostrato che il diamante incoloro non è per nulla intaccato dal clorato potassico e dal nitrato potassico, portati alla fusione, sebbene questi due composti, in tali condizioni, svolgano grandi quantità di ossigeno atomico.

In base a queste osservazioni, io credo logico di ammettere che la ossidazione del carbonio adamantino in ossido di carbonio debba riferirsi, secondo quanto fu ammesso da Jacquelain e da Baumhauer, ad un fenomeno di riduzione dell'anidride carbonica e che a questa stessa reazione debba riferirsi quella di Moissan sull'azione dei carbonati alcalini alla fusione sul diamante.

Mineralogia. — *Sopra la petalite elbana* [2]. Nota del dottor Probo Comucci, presentata dal Corrisp. Federico Millosevich.

Nel museo di Mineralogia di Firenze esiste un numero ragguardevole di campioni di petalite dell'Elba, dei quali in occasione del riordinamento generale del Museo Elbano, per consiglio del prof. Millosevich, ho creduto non inutile uno studio particolareggiato. A ciò m'indusse ancora la considerazione che di questo minerale elbano esistono due sole analisi, una di Plattner del 1846 [3] e una di Rammelsberg, la quale data dal 1878 [4]: quindi essa pure abbastanza antica.

L'abito dei cristalli di petalite elbana è bene indicato dal prof. Millosevich [5] il quale, dopo avere elencato le forme osservate, soggiunge: « La « maggior parte di queste combinazioni non sono complete perchè quasi tutti

[1] loc. cit.

[2] Lavoro eseguito nel Laboratorio di mineralogia del R. Istituto di studî superiori di Firenze.

[3] Pogg. Ann. 1846, *69*, pag. 443.

[4] Rammelsberg, Monatsber. Akad. Berl. 1878, pag. 13.

[5] Millosevich, *I 5000 Elbani del Museo di Firenze.* Firenze, 1914.

« i pochi cristalli misurabili presentano facce distinte solamente in qualche « zona. Bene sviluppata e con ottime facce è la zona degli emidomi ». Io aggiungerò che per la mancanza di sviluppo della zona dei prismi non mi è stato possibile di controllare il rapporto assiale, già calcolato della petalite.

Le forme da me osservate nella zona degli emidomi sono le seguenti:

{001} {203}* {101} {403} {302}* {201} {10·0·3}* {401}*

e faccio seguire le misure che mi hanno servito a dedurle:

10.0.3:201	8° 53′	8° 53′	8° 53′
10.0.3:301		13° 42′	
10.0.3:403	16° 35′	16° 33′	
10.0.3:101	21° 56′ 1/2	21° 55′	
10.0.3:203	28° 44′	28° 42′ 1/2	
10.0.3:001	47° 30′	47° 30′	
001:201	38° 43′	38° 41′	38° 41′
001:101	25° 35′	25° 34′	25° 35′
001:403	31°	30° 58′	30° 57′
001:201		38° 36′	38° 36′
001:203	18° 45′	18° 44′	18° 45′
001:101	25° 33′ 1/2	25° 33′	25° 35′
001:201	38° 38′ 1/2	38° 37′ 1/2	
001:401	50° 16′	50° 17′	
001:x	51° 29′ 1/2	51° 34′	51° 35′

È una faccia nuova 203, inclinata di 18° 45′ su 001; inoltre anche 302, inclinata di 33° 48′ su 001 (questa faccia, incontrata in un solo cristallo, non era molto nitida); ed ancora 401 inclinata di 50° 16′ su 001. Questa faccia è certamente quella osservata da Strüver [1] nelle petaliti dell'Elba e non potuta esattamente determinare; questa faccia, secondo l'autore, dovrebbe essere inclinata di circa 50° su 001.

Nel medesimo cristallo, in cui era visibile 401, ho notato anche una altra faccia vicinale inclinata di 51° 30′ circa su 001, il cui simbolo non ho determinato perchè non si prestava ad una esatta determinazione.

Finalmente la faccia inclinata di 47° 30′ su 001 è presentata da un solo cristallo. Piuttosto che corrispondere al simbolo semplice 301, si avvicina di più al simbolo 10.0.3; ma così l'uno come l'altro simbolo non sono stati dati mai per forma della petalite.

[1] Zeitschr. d. geol. Ges., 1870, *22*, pag. 668.

L'analisi chimica del minerale fu condotta secondo le regole dell'analisi dei silicati. Il Litio fu, nella separazione degli alcali, determinato per ultimo con il metodo dell'alcool amilico; e non essendosi presentato residuo insolubile nell'alcool stesso, è da escludere quantità determinabile di sodio. Del manganese esistono tracce, apprezzabili solo per una leggerissima colorazione verde durante la disgregazione. Il ferro è in quantità modestissima, in accordo con le precedenti determinazioni di questo minerale. Il titanio fu espressamente ricercato nel prodotto della disgregazione con bisolfato potassico, durante la determinazione del ferro, ma con esito negativo.

I resultati dell'analisi sono i seguenti:

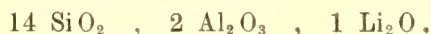
SiO_2	77,58
Al_2O_3	18,25
Fe_2O_3	0,58
Li_2O	3,08
K_2O	0,83
	100,32

Ritenendo il ferro come sostituente isomorficamente l'alluminio, si può calcolare la quantità di ossido d'alluminio che corrisponde a 0,58 di Fe_2O_3. Il calcolo dà 0,37; e quindi la proporzione di Al_2O_3, contro le quantità sopra espresse degli altri costituenti, diverrebbe 18,62.

Considerando solo la silice, l'ossido di alluminio e di litio, i quozienti molecolari sono dati come segue:

	°/o	Quozienti molecolari
SiO_2	77,58	1,29
Al_2O_3 . . .	18,62	0,182
Li_2O	3,08	0,10

Riferendo tali proporzioni a 14 molecole di SiO_2, le molecole corrispondenti di Al_2O_3 divengono 1,95 e quelle di Li_2O 1,07. Si potrebbe dunque ritenere la composizione della petalite espressa da:

$$14\ SiO_2\ ,\ 2\ Al_2O_3\ ,\ 1\ Li_2O\ .$$

Le percentuali secondo questa proporzione, in raffronto con le proporzioni trovate con l'analisi, sono:

	Trovato	Calcolato
SiO_2	77,58	78,29
Al_2O_3	18,62	18,92
Li_2O	3,08	2,77

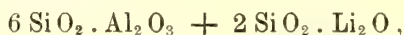
Mentre l'accordo per SiO_2 e Al_2O_3 è soddisfacente, l'ossido di litio dà un valore alquanto più basso; ma non è da escludere un errore più grave nella determinazione del litio, sia per la piccola quantità di esso presente nel minerale, sia per la difficoltà tecnica della manipolazione.

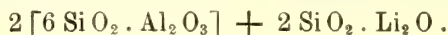
La formula ordinaria della Petalite è $Si_4O_{10}AlLi$, ossia:

$$8\ SiO_2\ ,\ 1\ Al_2O_3\ ,\ 1\ Li_2O$$

È da notare che la proporzione dell'ossido di alluminio a quello di litio è 1:1 per la petalite ordinaria; per quella dell'Elba è 2:1.

Per rischiarare questo fatto, si può pensare che nella petalite esistano due silicati, uno contenente l'alluminio, l'altro il litio, e che nella petalite elbana sia doppia la proporzione del silicato di alluminio. Infatti, quando si consideri la petalite ordinaria,

$$6\,SiO_2\,.\,Al_2O_3 + 2\,SiO_2\,.\,Li_2O\,,$$

la petalite elbana viene espressa molto soddisfacentemente da

$$2\,[6\,SiO_2\,.\,Al_2O_3] + 2\,SiO_2\,.\,Li_2O\,.$$

in accordo con Rammelsberg, che trovava presso a poco le mie medesime percentuali (1).

Ricordo, a questo punto, che l'identità fra la petalite elbana o castore e la petalite d'America e di Svezia è stata oggetto di controversia già da lungo tempo fra Rose (2), Des Cloizeaux (3) e Rammelsberg (4).

Rose portava in favore dell'identità fra i due minerali la coincidenza degli angoli e dei piani di sfaldatura; Des Cloizeaux, confermando le osservazioni di Rose, trovava accordo anche nelle proprietà ottiche.

Rammelsberg opponeva che nel Castore mancava il sodio, presente nelle altre petaliti, e che la quantità di litina del castore era minore della quantità complessiva di litina e di soda dell'altra varietà. È da aggiungere che il peso specifico del castore è 2,38 - 2,40, mentre la petalite, secondo le osservazioni di Arfverdson e Gmelin (5), avrebbe la densità 2,42 - 2,426.

Però la soda è stata trovata da Rammelsberg stesso nel castore nell'analisi del 1878. Dall'analisi di Rammelsberg e dalla mia risulta che le varie petaliti si debbono considerare come il prodotto di combinazione di due silicati, uno di alluminio ed uno di litio, aventi a comune il medesimo acido dimetasilicico, ma per i quali può variare la proporzione relativa. In base a questa considerazione, non si può escludere la identità mineralogica

(1) Rammelsberg, *Handbuch der Mineralchemie*, II, pag. 424 (1875).

(2) Rose, Pogg. Ann., 1850, *79*, pag. 162.

(3) Des Cloizeaux, Compt. rend., 1863, *56*, pag. 488.

(4) Rammelsberg, Pogg. Ann., 1852, *85*, pag. 544.

(5) Rose, Memoria citata.

fra i due minerali, confermata da tutte le altre proprietà: anzi nella diversa proporzione dei due silicati può trovarsi una plausibile ragione della leggermente differente densità.

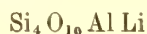
La petalite, da Rammelsberg [1], è stata ritenuta isomorfa con lo spudomene, in base alla somiglianza cristallina. Dal lato chimico, le due formule

$(Si_2O_6)\ Al\,Li$	Spudomene
$(Si_4O_{10})\ Al\,Li$	Petalite (America e Svezia)

permettono un certo isomorfismo, in quanto che la differenza sta nei gruppi Si_2O_6 e Si_4O_{10} i quali sono ambedue tetravalenti.

Come i gruppi SiO_4 e Si_3O_8 da Clarke si ritiene che possano sostituirsi isomorficamente nelle miche e in altri silicati, in quanto sono ambedue tetravalenti, per il principio della sostituzione per valenze uguali, così potrebbe Si_4O_{10} entrare in luogo di Si_2O_6. Ma tale isomorfismo è escluso per la diversità dei volumi molecolari, perchè lo spudomene, con il peso molecolare 186 e la densità, 3.5, dà, per il volume molecolare, 58, mentre la petalite, con il peso molecolare 307.2 e la densità 2.4, dà 128.

Peraltro si potrebbe ricorrere al criterio del numero uguale di atomi; e niente impedisce di supporre che la molecola cristallina consti di aggregazioni di molecole chimiche fino ad avere un numero uguale di atomi. Prendendo per la petalite la formula

$$Si_4O_{10}Al\,Li$$

con 16 atomi, mentre lo Spudomene $Si_2O_6Al\,Li$ ne ha soltanto 10, si potrebbero supporre nella petalite aggruppamenti di 5 molecole e nello spudomene di 8 in modo da ottenere 80 atomi in ambedue i casi. Allora si ricavano i volumi molecolari:

Petalite	614
Spudomene	465

e per i parametri topici si hanno i valori

	χ	ψ	ω
Petalite	10,59	9,18	6,82
Spudomene . . .	10,84	9,61	4,76

Se invece usiamo la formula proposta per la petalite elbana:

$$14\,SiO_2\ ,\ 2\,Al_2O_3\ ,\ 1\,Li_2O$$

[1] Rammelsberg, *Handbuch der Mineralchemie* (1875), II, pag. 424.

con 55 atomi, bisogna supporre aggregati di 2 molecole di petalite e 11 molecole di spudomene, in modo da avere 110 atomi nel primo e nel secondo caso.

Si ottengono i valori seguenti:

	Volumi molecolari
Petalite	862,5
Spudomene	639,7

	Parametri topici		
	χ	ψ	ω
Petalite	11,86	10,28	7,64
Spudomene . . .	11,16	9,90	6,17

Mentre questi dati non parlano in favore dell' isomorfismo, è però degno di nota come due parametri risultino assai vicini e nel terzo solamente si abbia uno scarto.

Come conclusione di questa ricerca ho confermato che la petalite elbana ha una costituzione chimica alquanto diversa dalle altre petaliti nel senso di essere più povera di litio, in accordo con la analisi e le osservazioni di Rammelsberg, mentre da altra parte non posso confermare il preteso isomorfismo fra petalite e spudomene.

Botanica. — *Nuove ricerche intorno alla filogenesi della N. Tabacum*, L. Nota del dottor G. E. Anastasia, presentata dal Socio R. Pirotta.

Come ognuno sa, le *Nicotianae* sono state comprese in tre distinti gruppi (1), e cioè:

1°) *N. tabacum*, L.; 2°) *N. rustica*, G. Don; 3°) *N. petunioides*, G. Don.

Il prof. Comes, nel suo lavoro *Nicotiana* (2), cercò, con eliminazione, riduzione e migliore aggruppamento, di ordinare il gran numero di specie annoverate dai predecessori.

Tralasciando le due ultime sezioni, egli divise la *N. tabucum*, L. in sei varietà, e cioè:

fruticosa, *lancifolia*, *brasiliensis*, *virginica*, *havanensis*, *macrophylla*.

(1) È escluso il 4° gruppo (*N. polidiclia*, G. Don.) perchè in esso sono comprese forme chiaramente ibride, col carattere specifico della capsula quadrivalve, carattere accennato ed esistente in *rustica*.

(2) O. Comes, *Nicotiana*, 1899, Napoli.

E, seguendo la concezione Lamarckiana, ritenne esse varietà formatesi per miglioramenti graduali e successivi di una primitiva forma (e proprio della *fruticosa*); miglioramenti dovuti all'ambiente, alla cultura e alla concimazione [1].

Nel 1906, col mio lavoro *Le varietà tipiche della « N. tabacum,* L. », cercai di portare a luce come la *N. t.* v. *fruticosa* e la *N. t.* v. *macrophylla*, i due anelli estremi della catena suddetta, fossero il frutto d'ibridazione fra *tabacum* e una *specie ignota*, la quale risultava costituita di *rustica* e *petunioides*.

La mia era una intuizione, avvalorata, è vero, da non poche osservazioni, ma non dimostrata sicuramente e in aperta contraddizione con secoli di scienza.

Occorreva perciò che continuassi a investigare e a sperimentare, per fugare incertezze e dubbî.

Riassumo qui brevemente il frutto di questa successiva investigazione che ampiamente espongo in un lavoro intitolato *Araldica Nicotianae*, corredato di numerose tavole illustrative.

Mi occupai anzitutto di estendere le ricerche compiute per la dimostrazione della impurità della *N. tabacum.*

Studiati attentamente i caratteri di *rustica* e di *petunioides*, andai alla ricerca di tali caratteri nelle varietà della *tabacum.*

Dopo questo esame, eseguito nel 1907, entrai nella piena convinzione non esservi varietà di *tabacum* senza macula di *rustica* e di *petunioides*; anzi, ritenni *tabacum*, addirittura, una delle risultanti del connubio fra *rustica* e *petunioides*.

Lo studio della fauce fiorale dimostra chiaramente l'intervento della *petunioides* e della *rustica* nella *tabacum.* La *petunioides* ha fiore a fauce pentagonale; la *rustica* ha fiore a fauce rotonda. Molte razze *tabacum*, come la *rustica*, hanno fauce rotonda od ovale; mentre le razze *macrophylla* presentano fauce pentagonale, come la *petunioides*.

L'indice di fillotassi dimostra anch'esso la presenza della *rustica* e della *petunioides* in *tabacum*. La *rustica* ha indice 3/8; la *petunioides* ha indice 2/5. Le razze *fruticosa* e quelle con accumulo di energia *rustica* (come alcune *brasiliensis* e alcune *macrophylla*) presentano indice 3/8; mentre molte *macrophylla*, *havanensis* e *virginica* hanno indice 2/5, come le *petunioides*. Spesso l'indice, da 2/5, passa a 3/8 nello stesso individuo, e tutto ciò per la sua origine ibrida.

Le foglie picciuolate della *N. rustica* hanno nervi secondarî basilari molto accostati fra loro e ricurvi. In generale, tale carattere è riprodotto nelle foglie delle razze *fruticosa*: ma, ogni tanto, anche qualche foglia sessile

[1] O. Comes, *Le varietà della « N. tab. » : note critiche*, 1908. Boll. tecn. - Scafati, n. 1.

di razza *macrophylla*, per azione di *rustica*, in un punto vicino alla base (laddove cioè la foglia si sarebbe picciuolata, se maggiore fosse stata l'azione di *rustica*) presenta nervi accostati.

La foglia della *rustica* ha lamina non pianeggiante; verso la base essa lamina si solleva a forma come di gola. Oltre a ciò, per la conformazione speciale del picciuolo, la *rustica*, negl'incroci con Nicoziane a foglie sessili, dà luogo a individui con foglia ad ala sollevata, o addirittura ripiegata sulla faccia superiore del picciuolo stesso. Tale sollevamento di lamina e tale ripiegamento di ala sono stati riscontrati nelle foglie delle *tabacum* contenenti energia di *rustica*. Dove predomina *petunioides*, le foglie sono a lamina pianeggiante.

Lo studio delle capsule, nella loro forma (dal ventre e dal dorso, e denudate del calice persistente e mascherante), porta alla conclusione esservi, in *tabacum*, e *rustica* e *petunioides*. Così lo studio delle logge capsulari disseccate.

Anche l'odore ircico delle *petunioides* si notava nelle forme *tabacum* con molta energia *petunioides*, ossia nelle *macrophylla*; mentre le altre *tabacum* hanno odore acidulo-viroso, come la *rustica*.

Con tutto ciò, giunsi al 1912 insodisfatto. Chiedevo di più. Mi occorreva qualcosa di più sintetico e decisivo — fatto di linee e di segni, come un marchio: — qualcosa che senza parole mettesse a luce la verità.

Poco o nulla s'era trovato nei semi [1]; poco o nulla nel polline.

Non restava che l'esame degli organi riproduttivi. E mi accinsi a questa ricerca, più per scrupolosità di studioso che non con speranza di successo. Quanti occhi, e di grandi ricercatori, non si erano posati su tali organi, senza rilevarne un che?

Benchè quelli della riproduzione fossero gli organi essenziali della vita, che cosa di specifico potevano contenere, data la loro minuzia?

***

Ho quindi studiato appunto, gli organi riproduttivi di *rustica*, *petunioides* e *tabacum*.

Lasciando da un canto gli stami (che pur raccolgono elementi specifici notevoli), nel pistillo e, proprio, sulla faccia superiore dello stigma, si trovano raccolti linee e segni distintivi, si ritrova quel marchio di cui invano ero andato in cerca per sette lunghi anni.

E gli stigmi delle diverse Nicoziane, e delle relative varietà, costituiscono un'araldica naturale incancellabile.

Riassumo:

La *rustica* ha stigma rettangolare ad angoli arrotondati (come un

[1] A. Splendore, *Sinossi descrittiva e iconografia dei semi delle Nicoziane.*

cuscinetto), a lati alquanto incavati, con una mediana fessura trasversa biarcuata.

La *petunioides* ha stigma più alto che largo, ovale quasi, con due rilievi secondo l'asse antero-posteriore, e fra questi una mediana fessura trasversa, terminante in due fosse, come due occhi, a mo' di maschera.

La *tabacum* (alcune razze *havanensis*, *virginica* e *lancifolia*) ha stigma circolare quasi, con nel centro un punto infossato.

Le razze *macrophylla*, però (ossia razze *tabacum* con molta energia *petunioides*), presentano nello stigma la tipica maschera dello stigma *petunioides*, e quelle *fruticosa* (ossia razze *tabacum* con molta energia *rustica*) presentano stigma rettangolare, a cuscinetto, di *rustica*, o stigma in cui si leggono altri caratteri che si rinvengono in forme speciali di *rustica*, o in forme incrociate con *rustica*.

Ma i segni (scultura) dello stigma di *petunioides* e di *rustica* si scorgono di leggieri anche nello stigma della *brasiliensis*, della *lacinfolia*, della *virginica* e dell'*havanensis*. Tutte le varietà contengono razze con stigma rapportabile a quello *rustica*, e razze con stigma rapportabile a quello *petunioides*.

Ma le razze *tabacum* a stigma circolare con punto centrale, dianzi ricordate, oltre a presentare nella loro mutazione forme a stigma con marcati segni o *rustica*, o *petunioides*, a principio e a fine stagione presentano stigma che va o verso *rustica*, o verso *petunioides*.

Ciò fa veramente concludere essere *tabacum* una specie immaginaria, inesistente. Essa, come tutte le altre forme di Nicoziane, non sarebbe che un discendente del primitivo incrocio fra *rustica* e *petunioides*.

Se nello stigma delle Nicoziane sono raccolti i segni della loro indistruttibile origine, io credo che ciò debba avverarsi in molte specie coltivate e selvatiche. E interessante sarebbe che altri studiosi seguissero questa via nella filogenesi delle piante.

***

Accennato all'origine ibrida delle specie elementari *rustica* e di quelle *petunioides*; passo a rilevare la differenza, la distanza che corre fra *rustica* e *petunioides*, per venire alla conclusione che *rustica* rappresenta *Nicotiana*, e *petunioides* una specie vicina ma diversa da *Nicotiana*. Dalla lontana unione fra quelle due specie primitive sarebbero derivate, attraverso il tempo e lo spazio, le forme conosciute di *rustica*, *tabacum* e *petunioides*.

Come già s'è detto, tutte le *rustica* contengono elementi *petunioides*; tutte le *petunioides* contengono energia *rustica*; *tabacum* non è che un miscuglio di *rustica* e di *petunioides*.

Quindi le specie linneane, che, giustamente, il De Vries ritiene forme complesse, dovrebbero la loro complessità a incroci fra specie elementari pri-

mitive. I descrittori non avrebbero avuto davanti che una prole multiforme e impura. E la mutazione, questa forza cieca, ignota, che istantaneamente fa variare i vegetali, troverebbe la sua spiegazione nella fecondazione incrociata, dalla quale penso anche debba dipendere la produzione delle nuove forme vegetali.

Teratologia. — *Di alcune anomalie nella Beta vulgaris L.* Nota di O. Munerati e T. V. Zapparoli, presentata dal Socio R. Pirotta.

La necessità di seguire, in linee distinte, i discendenti di diverse centinaia di individui autofecondati ci portava ad osservare, in un certo numero di soggetti appartenenti ad alcune famiglie, delle deviazioni di natura morfologica non riscontrate, o almeno non segnalate sino ad oggi, dai botanici e dai selezionatori. La *Beta vulgaris* L., nella sua pur grande e sorprendente facilità alle variazioni, non è annoverata che fra le specie poco suscettibili di dare delle forme teratologiche: all'infuori della fasciazione e torsione degli steli [1], anomalia comune ad un grandissimo numero di specie erbacee e legnose, e di anomalie nei fiori (da noi non presi sinora in considerazione), nessun accenno abbiamo trovato, nelle opere speciali o in appo-

[1] Da citarsi, oltrechè quelli elencati da Penzig (Pflanzenteratologie, II, pag. 260) i seguenti lavori:

Briem H., *Die Verbänderung beim Rübensamenstengel*, Oe. U. Zeitschrift für Zuckerindustrie und Landwirtschaft, XXXIII Jahrg., 1894, Heft II, pag. 223; Hoffmann M., *Teratologische und korrelative Beobachtungen an landw. Kulturpflanzen*; *die Fasciation.*, Deut., Landw. Presse, XXX Jahrg. (1903), n. 3, pag. 17; Horecki, *Verbänderung bei Samenrüben*. Deut. Landw. Presse, XXXIII Jahrg. (1906) n. 91, pag. 720; Hoffmann M., *Ueber Verbänderung* (*Fasciation*) *bei Rübensamen*. Deut. Landw. Presse, XXXIII Jahrg. (1906), n. 95, pag. 749; Gutzeit E., *Zur Verbänderung der Runkelrüben*. Naturwiss. Zeitschrift für Forst-und Landwirtschaft, V Jahrg. (1907), Heft I, pag. 75; Kajanus B., *Ueber Verbänderung bei Beta vulgaris L.* Bot. Notiser, III Jahrg. (1912), n. 3, pag. 145 (Ref. in Bot. Centralblatt, Band 120, 1912, n. 5, pag. 118); Schubart P., *Fasciation*, Blätter für Zuckerrübenbau, XIX Jahrg (1912), n. 16, pag. 249.

Nel 1912, anno nel quale apparvero le comunicazioni di Kajanus e Schubart, nelle culture di bietola porta seme della media Europa fu segnalata una vera « epidemia » di fasciazioni: nella provincia Sassone, lo Schubart notò in certe zone fino all'8,6 per cento di piante fasciate. Avrebbe osservato lo Schubart una più forte comparsa di fascie in bietole che, già erose da insetti o da arvicole più o meno profondamente nella zona del colletto lungo il loro primo anno di vita, avevano inoltre sofferto durante la loro conservazione in silos. Aggiunge l'A. che quella del 1911 era stata un'annata di eccezionale siccità che ingenerò una sofferenza d'ordine fisiologico nelle piante. La fasciazione avrebbe dunque costituito, in questo caso, la conseguenza di uno stato patologico. Anche lo Schubart, come la maggior parte degli studiosi che si occuparono del fenomeno, am-

site comunicazioni, sulla gran parte delle deviazioni da noi riscontrate sia nella parte aerea, sia nelle radici.

Riservandoci di riferire in una prossima Nota intorno alle anomalie della parte ipogea, nella odierna comunicazione prendiamo in esame le diverse manifestazioni teratologiche che nel 1914 ci occorse di rilevare nelle foglie.

Anomalie nelle foglie cotiledonari. — Osservazioni puramente casuali e incidentali sulla comparsa di tricotili, sincotili, emisincotili ed emitricotili ha compiuto Janasz [1]; de Vries non aveva invece precedentemente annoverato la barbabietola tra le specie che possono presentare anomalie nel numero e nella eventuale sinfisi dei cotiledoni.

Un po' in tutte le razze di bietola, e soprattutto tra i discendenti di molte madri autofecondate, occorse a noi di riscontrare l'anomalia con le varie gradazioni figurate da de Vries per la *Oenothera hirtella* e per le altre numerose specie considerate dall'eminente botanico olandese [2].

In aggiunta alle forme riscontrate da Janasz, noi osservammo in qualche caso i cotiledoni fusi ad ascidio ed altre non meno strane deviazioni morfologiche anche nelle prime foglie vere: di esse ci occuperemo in apposita Nota.

Saldatura. — I fenomeni di sutura dei picciuoli, interessanti anche una maggiore o minore parte dei lembi (fig. 1), sono relativamente abbastanza frequenti. Noi abbiamo anche notato un caso di sola sinfisi dei lembi.

Formazioni ascidiali. — Le riscontrammo in alcuni soggetti di una sola famiglia (O - 213) e con degradazioni da soggetto a soggetto. In uno degli individui tutte le foglie della rosetta formavano un ascidio unico, di aspetto singolarissimo (fig. 2): la pianta offriva una stretta rassomiglianza con quella di *Dipsacus silvestris* Mill. raffigurata da de Vries nel 1899 [3]; in altri, invece, ciascuna foglia formava un ascidio a sè (fig. 3 e 4).

Le radici corrispondenti erano di limitato sviluppo in confronto con quelle di soggetti normali, certo per una minore superficie complessiva assimilante; quanto alla composizione, non ne facemmo un'analisi per non sciupare i soggetti stessi. Le radici normali della stessa famiglia presentavano un peso e un tenore zuccherino non scostantisi dal consueto, come risulta dal seguente specchietto (an. Mezzadroli):

---

mette che la fasciazione si abbia in una maggior copia di individui quando le piante siano intensamente alimentate.

Mancano, però, per la barbabietola, osservazioni sulla trasmissione della anomalia desunte da indagini metodiche, come quelle compiute, su specie diverse, da de Vries, Blaringhem, Pirotta e Puglisi, ecc.

[1] Janasz S., *Beschreibung einiger Zuckerrübenrassen.* Mitteilungen der Landwirtschaftlichen Institute der Königlichen Universität Breslau, Zweiter Band, 1904, pag. 913.

[2] de Vries H., *Die Mutationstheorie.* Zweiter Band, pag. 212 e segg. Leipzig, 1900.

[3] de Vries H., *Ueber die Erblichkeit der Zwangsdrehung.* Berichte der Deutschen botanischen Gesellschaft, VII (1899), 37, pag. 291 (confr. tav. XI, figg. 3 e 4).

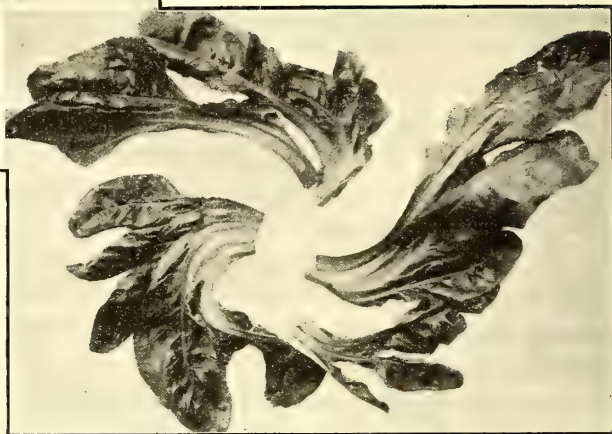



Fig. 1. — Bietola a foglie saldate per gruppi; di fianco, la rosetta delle stesse foglie staccate.

Fig. 2. — Unico grande ascidio.

Fig. 3. — Foglie ascidiali (veggasi nella fig. 5 la sezione del picciuolo in A B).

Fig. 4. — Sezione in AB del picciuolo di una delle foglie ascidiali della bietola fig. 4.

Esame 19 Agosto 1914.

Numero	Peso gr.	Saccarosio °/₀ [1]
O-213-1	1070	13.6
2	950	12.2
3	770	12.4
4	890	13.0
5	790	13.0
6	670	13.2
7	940	13.2
8	620	12.0

Dissociazione del nervo mediano. Neurochorisis. — Così i maestri Penzig e Pirotta suggeriscono di chiamare questa strana anomalia, che noi rilevammo in diverse piante di due famiglie (B-2013, B-2179). Il fenomeno presenta una lontana affinità con quelli di biforcazione della nervatura mediana segnalati tra gli altri anche da Massalongo [2] e da Abbado [3] per il *Buxus sempervirens* L., da Massalongo per l'*Evonimus japonicus* L. [4], da Puglisi per la *Bunias orientalis* L. [5], ecc.

Dobbiamo riferire che ad uno di noi, in occasione di una sua visita, nell'autunno del 1913, delle culture sperimentali dei produttori di seme bietola Buszczynski e C. di Gorka Narodowa, presso Cracovia, veniva mostrata dal direttore dello stabilimento, ing. Zaleski, una famiglia che presentava appunto in molti individui il carattere della disgiunzione del nervo mediano. Le foglie erano più allungate delle normali e strette all'apice e alla base sì da rassomigliare in distanza a foglie di *Plantago lanceolata* L.; l'ing. Zaleski chiamava appunto la nuova forma col nome di *Beta plantaginifolia*, dichiarando che in un paio di generazioni egli ne aveva fatto una razza ricca, con percentuale ereditaria che si aggirava tra il 30 e il 40. Non sappiamo se l'egregio direttore delle culture della Casa Buszczynski, favorevolmente noto nel mondo scientifico della media Europa, abbia fatto ulteriormente una comunicazione in proposito. Era ad ogni modo doveroso per noi di attribuire a lui la priorità della osservazione.

[1] Nel 1914 le bietole palesarono un titolo relativamente molto basso in agosto, ma il titolo si accrebbe in seguito, contrariamente a quanto si verifica normalmente in Italia.

[2] Massalongo C., *Contribuzione alla teratologia vegetale.* Nuovo Giornale Botanico Italiano, vol. XX (1888), pag. 283 (Tav. XVI, figg. 3, 4 e 5); *Note teratologiche*, ibidem, vol. XXII (1890), pag. 13 (Tav. I, fig. 13).

[3] Abbado M., *Divisione della nervatura e della lamina in alcune foglie di Buxus sempervirens* L. Bullettino della Società Botanica Italiana, 1895, pag. 179.

[4] Massalongo C., Mem. cit., vol. XX, pag. 283 (Tav. XVI, fig. 1).

[5] Puglisi, M., *Contributo alla teratologia vegetale.* Annali di Botanica, vol. IV (1906), pag. 347.

Fig. 5. — Foglie con disgiunzione del nervo mediano.

Fig. 6. — Foglie con enazioni.

Fig. 7. — Piccoli lembi derivati da enazioni.

FIG. 8. — Bietola portante insieme una foglia docciforme e piccole foglie derivate da enazioni, conservatesi dopo la caduta del lembo.

FIG. 9. — Bietola con foglie docciformi.

FIG. 10. — Enazioni a cornetto.

FIG. 11. — Altro tipo di enazioni.

Gli individui con foglie presentanti disgiunzione del nervo mediano (fig. 5) non palesarono, nei nostri saggi, una ricchezza diversa da quelli normali delle rispettive famiglie e per brevità non riporteremo prospetti analitici.

Enazioni. — Questa forma di anomalia fu da noi riscontrata in numerose famiglie, ma con manifestazioni molto diverse da famiglia a famiglia.

Nei soggetti anomali delle famiglie B-43, B-295, B-812, O-140, M-324, le foglie nel loro stadio iniziale si presentavano con i lembi fortemente increspati e bollosi, foggiati a doccia o a ventaglio, mentre, dopo qualche tempo, in corrispondenza al punto d'inserzione del picciuolo con la lamina apparvero delle appendici filamentose, (fig. 6), che in parte, più tardi, si trasformarono in altrettante piccole foglie (fig. 7) (fillocollia). Col procedere del tempo, o il lembo propriamente detto perdette la sua turgescenza sino ad appassire e scomparire, rimanendo all'estremità del picciuolo le appendici fogliari più o meno sviluppate (fig. 8), oppure, scomparse le vecchie foglie, ne apparvero altre caratteristicamente docciformi (fig. 9).

Nei soggetti anomali delle famiglie B-304 e B-1861 si ebbe l'apparizione di escrescenze allungate a cornetti (fig. 10), curvi in alto, presentanti quasi sempre la sommità un po' clavata, rosea, e secernente un liquido leggermente attaccaticcio; nelle famiglie B-427, B-1009, B-1682, B-1748, infine, le escrescenze tozze, raccorciate, schiacciate lateralmente, terminanti a punta rivolta in alto, uscivano non solo nella zona ingrossata di inserzione del picciuolo col lembo, ma ancora da varî punti della nervatura principale e delle secondarie (fig. 11).

Anche per queste famiglie con enazioni, la ricchezza in zucchero poteva ritenersi normale.

Nematofillia. — In una sola famiglia (B-2069) alcuni soggetti presentavano foglie lineari, allungatissime, nastriformi, da spiccare nettamente tra le altre normali della medesima famiglia. Penzig, per il fenomeno in parola, suggerisce il termine *nematofillia* (o *stenofillia* secondo Béguinot). La fotografia qui riprodotta (fig. 12), fatta su una pianta tolta dal terreno nell'autunno, non dà però una idea esatta della vera fisonomia dei soggetti anomali così come apparivano sul terreno in estate. L'aspetto loro si ravviserebbe piuttosto nella forma a foglie lineari tra piante normali della *Capsella* descritta e raffigurata recentemente da Hus [1].

Osservazioni generali. — Come appare dalle riproduzioni fotografiche, alcune delle anomalie da noi registrate (saldatura dei picciuoli con tendenza alla torsione, forme ascidiali, dissociazione del nervo mediano) per quanto similari negli individui di una data famiglia e nettamente diverse

[1] Hus H., *The origin of × Capsella Bursa pastoris arachnoidea.* The American Naturalist, vol. XLVIII (1914), n. 568, April, pag. 193.

negli individui di altre famiglie, presentavano però fra loro un evidente legame, apparivano come termini di passaggio o progressivi di un'unica tendenza: varie delle produzioni teratologiche da noi segnalate dovrebbero, in altre parole, ritenersi forme collegate e graduali di fasciazione, interpretazione questa che sarebbe avvalorata dalle osservazioni di varî studiosi, e tra esse dalle recenti di Kajanus sul *Trifolium pratense* L. (1).

Fig. 12. — Bietola nematofilla.

Quali cause possono avere comunque concorso alla produzione dei fenomeni qui registrati? Noi crediamo di potere escludere, o riteniamo poco probabile, che le manifestazioni teratologiche apparse nelle nostre « linee » siano da riferirsi alla categoria delle anomalie per traumatismi, secondo la concezione di Blaringhem (2). Infatti è presumibile ammettere che per le numerose circostanze casuali o colturali che portano ad una perdita graduale, oppure brusca, della parte aerea delle piante (distruzione parziale o totale del fogliame e lesioni più o meno profonde della testa per opera di insetti,

(1) Kajanus B., *Polyphyllie und Fasziation bei Trifolium pratense* L. Zeitschrift für Induktive Abstammungs- und Vererbungslehre, Bd. VII, Heft I, pag. 63; *Ueber einige vegetative Anomalien bei Trifolium pratense*, ibidem, Bd. IX, Heft 1-2, pag. 111.

(2) Confrontisi: Comunicazioni varie in « Compt. Rend. Académie Sciences », anni 1905 e 1906; *Mutation et traumatismes, Étude sur l'évolution des formes végétales*, Paris, 1908; *Les transformations brusques des êtres vivants*. Paris, 1911; *L'hérédité des maladies des plantes et le Mendélisme*. Rapport au premier Congrès international de Pathologie comparée. Paris, 1912, tome premier, pag. 259.

di grandinate, di lavori culturali, ecc.), i fenomeni di cui sopra avrebbero dovuto apparire con una certa frequenza e conseguentemente richiamare per la loro grande singolarità l'attenzione di qualcuno degli studiosi che da oltre un secolo si occupano dei problemi bieticoli.

Oppure il trauma può provocare, in un limitato numero di bietole, un perturbamento, cui corrisponda l'originarsi di una tendenza capace di rendersi manifesta in conseguenza del processo di autofecondazione alla quale siano sottoposte, come nel caso nostro, le bietole stesse? Certo è, ad ogni modo, che l'autofecondazione induce frequentemente nelle bietole la comparsa di caratteri, che dalla maggioranza dei botanici vanno considerati come dei ritorni atavici.

Sarebbe inutile il dire che è nostro intendimento di seguire i varî soggetti teratologici del 1914 per accertare:

a) se con l'allevamento in culture separate le anomalie si trasmettano con una certa fissità, se se ne ottengano cioè delle varietà *costanti* o si abbia invece, com'è presumibile per quel che è apparso nello studio della discendenza di soggetti anomali di altre specie, una trasmissione solo parziale (varietà instabili o intermedie o *eversporting varieties* secondo la pittorica definizione di de Vries);

b) se la brusca comparsa di individui aberranti possa trovare la sua determinante in traumatismi;

c) se in ambiente scostantesi dal normale (per eccesso o difetto di alimentazione, natura del terreno, abbondanza o scarsità d'acqua, ecc.) vada a ridursi o ad accrescersi la percentuale dei soggetti teratologici derivanti da uno stesso stipite;

d) se con l'ibridazione con individui normali il fattore determinante l'anomalia appaia dominante o recessivo.

e) se e come vari la composizione delle bietole anomale rispetto ai soggetti normali delle rispettive famiglie.

Fisiologia. — *Ricerche sugli effetti dell'alimentazione maidica. Valore nutritivo delle farine di grano, di mais e dell'uovo nei ratti albini.* Nota VII di S. Baglioni [1], presentata dal Socio L. Luciani.

Gli esperimenti furono eseguiti dai dott. G. Amantea e M. Maurizi per stabilire se le differenze, dimostrate nella precedente Nota VI [2], tra i valori nutritivi della zeina, gliadina e ovoalbumina, fossero specifiche di queste proteine, oppure si estendessero anche alle rispettive sorgenti (farine di mais, di frumento e uova), in cui si trovano mescolate ad altre proteine. Anche per queste ricerche servirono ratti albini adulti o in via di sviluppo, tenuti nelle gabbie di cui è cenno nella precedente Memoria.

[1] Ricerche eseguite nel Laboratorio fisiologico di Roma.

[2] Questi Rendiconti, vol. XXVI, 2° sem., 1913, pp. 721-728.

I.

In una prima serie di ricerche si studiarono le variazioni di peso del corpo e del ricambio azotato di un ratto adulto alimentato per sei settimane (26 gennaio - 9 marzo 1914) con una miscela di farine di mais o di frumento, seccate previamente a 100° C., o di polvere d'uovo (albume e tuorlo uniformemente mescolati e disseccati pure a 100° C), cui si aggiungevano quantità opportune di grasso di maiale, di cellulosa (carta da filtro) e d'idrati di carbonio. Nelle seguenti tabelle I-VI sono riassunti i risultati ottenuti.

TABELLA I. — **Mais.**

Alimento: farina di mais gr. 40; grasso di maiale gr. 19; cellulosa gr. 1.
Totale gr. 60.

Giorni	Temperatura media ambiente °C.	Alimento assunto gr.	N ingerito gr.	N emesso colle fecce gr.	N assorbito gr.	N emesso colle urine gr.	N bilancio giornaliero gr.	Peso dell'animale gr.	*Osservazioni*
1	10	12.63	0.1742	0.0376	0.1366	0.0888	+ 0.0478	228.90	
2	12	12.65	0.1745	0.0462	0.1383	0.1120	+ 0.0263		
3	11	14.10	0.1945	0.0334	0.1611	0.1181	+ 0.0430		
4	10	19.95	0.2753	0.0462	0.2291	0.1000	+ 0.1291		
5	10	12.05	0.1662	0.0459	0.1203	0.0938	+ 0.0265		
6	10	10.15	0.1400	0.0176	0.1224	0.0819	+ 0.0405		
7	10	10.30	0.1421	0.0526	0.0895	0.0844	+ 0.0051	218.00	
TOTALE...		**91.83**	**1.2668**	**0.2797**	**0.9973**	**0.6890**	**+ 0.3183**	**— 10.90**	
Media *pro die*		13.11	0.1809	0.0399	0.1396	0.0984	+ 0.0454		

TABELLA II. — **Frumento.**

Alimento: farina di frumento gr. 40; grasso di maiale gr. 19; cellulosa gr. 1.
Totale gr. 60.

Giorni	Temperatura media ambiente °C.	Alimento assunto gr.	N ingerito gr.	N emesso colle fecce gr.	N assorbito gr.	N emesso colle urine gr.	N bilancio giornaliero gr.	Peso dell'animale gr.
8	10	13.10	0.1545	0.0070	0.1475	0.0658	+ 0.0817	218.00
9	10	11.60	0.1368	0.0277	0.1091	0.0916	+ 0.0175	
10	10	11.10	0.1309	0.0149	0.1160	0.1014	+ 0.0146	
11	10	11.60	0.1368	0.0218	0.1170	0.0926	+ 0.0244	
12	11	9.90	0.1168	0.0114	0.1054	0.1043	+ 0.0011	
13	11	10.75	0.1268	0.0184	0.1084	0.0776	+ 0.0308	
14	12	13.15	0.1541	0.0219	0.1322	0.0895	+ 0.0427	215.50
TOTALE...		**81.20**	**0.9567**	**0.1231**	**0.8356**	**0.6228**	**+ 0.2128**	**— 2.50**
Media *pro die*		11.60	0.1366	0.0175	0.1193	0.0889	+ 0.0304	

Tabella III. — **Uovo.**

Alimento: polvere d'uovo gr. 34; grasso di maiale gr. 28; amido gr. 40; zucchero gr. 16; cellulosa gr. 2. Totale gr. 120.

Giorni	Temperatura media ambiente °C.	Alimento assunto gr.	N ingerito gr.	N emesso colle fecce gr.	N assorbito gr.	N emesso colle urine gr.	N bilancio giornaliero gr.	Peso dell'animale gr.	*Osservazioni*
15	12	14.00	0.3738	0.0261	0.3477	0.1047	+ 0.2430	215.50	
16	12	14.20	0.3811	0.0686	0.3125	0.1043	+ 0.2082		
17	11	12.30	0.3284	0.0692	0.2592	0.1031	+ 0.1561		
18	12	12.25	0.3270	0.0304	0.2966	0.1008	+ 0.1958		
19	10	15.85	0.4281	0.0566	0.3665	0.1359	+ 0.2306		
20	13	14.15	0 3780	0.0525	0.3255	0.1109	+ 0.2146		
21	13	12.20	0.3257	0.0661	0.2596	0 0878	+ 0 1718	228.10	
Totale...		**94.95**	**2.5371**	**0.3695**	**2.1676**	**0.7475**	**+ 1.4201**	**+ 12.60**	
Media *pro die*		13.56	0.3624	0.0527	0.3096	0.1067	+ 0.2028		

Tabella IV. — **Frumento.**

Alimento: farina di frumento gr. 40; grasso di maiale gr. 19; cellulosa gr. 1. Totale gr. 60.

Giorni	Temperatura media ambiente °C.	Alimento assunto gr.	N ingerito gr.	N emesso colle fecce gr.	N assorbito gr.	N emesso colle urine gr.	N bilancio giornaliero gr.	Peso dell'animale gr.	*Osservazioni*
22	13	12.40	0.1463	0.0283	0.1180	0.1003	+ 0 0177	228.10	perdita di pelo
23	13	11.90	0.1404	0.0301	0.1103	0.0846	+ 0.0257		»
24	12	13.40	0.1581	0.0208	0.1373	0.0912	+ 0.0461		»
25	14	11.40	0.1545	0.0170	0.1174	0.0986	+ 0 0188		»
26	13	11.50	0.1357	0.0285	0.1072	0.1153	— 0.0081		»
27	14	12.25	0.1445	0.0170	0 1275	0.0679	+ 0.0596		»
28	13	11.50	0.1357	0.0298	0.1059	0.0983	+ 0.0076	229.10	»
Totale...		**84.35**	**0.9952**	**0.1715**	**0.8236**	**0.6562**	**+ 0.1574**	**+ 1.00**	
Media *pro die*		12.05	0.1421	0.0245	0 1176	0.0937	+ 0.0224		

Tabella V. — Mais.

Alimento: farina di mais gr. 40; grasso di maiale gr. 19; cellulosa gr. 1. Totale gr. 60.

Giorni	Temperatura media ambiente °C.	Alimento assunto gr.	N ingerito gr.	N emesso colle fecce gr.	N assorbito gr.	N emesso colle urine gr.	N bilancio giornaliero gr.	Peso dell'animale gr.	*Osservazioni*
29	12	12.85	0.1773	0.0256	0.1517	0.1176	+ 0.0341	229.10	continua la perdita di pelo
30	12	11.50	0.1587	0.0277	0.1310	—	—		»
31	13	8.25	0.1138	0.0049	0.1089	0.0734	+ 0.0355		»
32	13	15.65	0.2159	0.0385	0.1774	0.0942	+ 0.0302		»
33	13	12.00	0.1656	0.0439	0.1217	0.0909	+ 0.0308		»
34	12	10.90	0.1414	0.0128	0.1286	0.0504	+ 0.0782		»
35	13	10.00	0.1380	0.0236	0.1144	0.0477	+ 0.0667	222 90	»
Totale...		**81.15**	**1.1107**	**0.1170**	**0.9337**	**0.4743**	**+ 0.3285**	**— 6.20**	
Media *pro die*		11.59	0.1586	0.0252	0.1333	0.0677	+ 0.0469		

Tabella VI. — Uovo.

Alimento: polvere di uovo gr. 16; grasso di maiale gr. 37; amido gr. 75; cellulosa gr. 2. Totale gr. 120.

Giorni	Temperatura media ambiente °C.	Alimento assunto gr.	N ingerito gr.	N emesso colle fecce gr.	N assorbito gr.	N emesso colle urine gr.	N bilancio giornaliero gr.	Peso dell'animale gr.	*Osservazioni*
36	12.50	10.00	0.1500	0.0128	0.1372	0.0725	+ 0.0775	222.90	continua la perdita di pelo
37	13	10.10	0.1515	0.0486	0.1029	0.0561	+ 0.0468		»
38	13	10.60	0.1590	0.0327	0.1263	0.0683	+ 0.0580		»
39	13	10.75	0.1612	0.0224	0.1388	0.0693	+ 0.0695		»
40	14	11.70	0.1755	0.0397	0.1358	0.0948	+ 0.0410		»
41	13	10.75	0.1612	0.0374	0.1238	0.0530	+ 0.0708		»
42	13.50	11.60	0.1740	0.0092	0.1648	0.0843	+ 0.0805	212.10	»
Totale...		**75.50**	**1.1324**	**0.2028**	**0.9296**	**0.4983**	**+ 0.4441**	**— 10.80**	
Media *pro die*		10.78	0.1617	0.0289	0.1328	0.0711	+ 0.0634		

Per una successiva settimana (10-17 marzo 1914) si somministrò alimento: polvere d'uovo gr. 34; grasso di maiale gr. 28; amido gr. 56; cellulosa gr. 2 (totale gr. 120). Ne consumò in media gr. 9,57 al giorno. Alla fine della settimana il peso era cresciuto di gr. 1.20.

Da queste tabelle risulta:

a) Tanto la farina di mais quanto quella di frumento e la polvere di uovo sono capaci non solo di mantenere l'equilibrio, ma puranche di produrre un apparente immagazzinamento di azoto. Questo, tuttavia, fu massimo nella terza settimana (gr. 1.4201) di alimentazione coll'uovo, in cui però fu massima anche la quantità di azoto ingerito (gr. 2.5371); minimo nella quarta settimana (gr. 0,1574) di alimentazione con farina di frumento, in cui fu pure molto piccola la quantità di azoto ingerito (gr. 0,9952).

L'introito di azoto, che apparentemente si verificò in tutti i periodi sperimentali, non significa, però, che esso si sia totalmente immagazzinato nel corpo in forma di sostanze proteiche. Una gran parte di esso fuoriuscì dall'organismo per vie diverse dal rene. Infatti, specialmente nelle tre ultime settimane, l'animale perdeva continuamente pelo. Anche nelle ricerche di ricambio materiale azotato negli animali superiori (l'uomo compreso) è stato recentemente ben dimostrato che una non trascurabile quantità di azoto abbandona l'organismo per le vie cutanee.

b) Ben diverso fu il comportamento del peso del corpo; diminuì sempre, e fortemente, nelle due settimane di alimentazione maidica (rispettiv. di gr. 10,9 e 6,20); diminuì molto meno (di gr. 2,50) e, rispettivamente, aumentò lievemente (di gr. 1) nelle due settimane di alimentazione frumentaria. Aumentò fortemente nella prima settimana (di gr. 12,60), mentre diminuì fortemente nella seconda settimana di alimentazione con uovo (di gr. 10.80), per tornare ad aumentare lievemente nella terza settimana (di gr. 1.20).

La diminuzione di peso nella seconda settimana di alimentazione con uovo fu probabilmente conseguenza del fatto che minore fu la quantità percentuale della polvere d'uovo nell'alimento, e del fatto che l'animale ingerì una minore quantità di cibo. Forse vi contribuì anche, come effetto postumo, l'azione della precedente alimentazione maidica.

II.

In una seconda serie di ricerche si alimentarono sette ratti adulti e quattro in via di sviluppo, dei due sessi, per parecchie settimane con alimento a base di polvere di uovo, di farine di mais o di frumento, disseccate a 100° C., tenendo conto delle variazioni del loro peso corporeo e della quantità di cibo assunto giornalmente. Le miscele alimentari erano:

a)	polvere d'uovo	gr.	17.00
	grasso di maiale . . .	"	32.50
	amido	"	68.00
	NaCl	"	0.50
	cellulosa	"	2.00
	totale . . .	gr.	120.00

b)	farina di mais	gr.	80.00
	grasso di maiale . . .	"	37.00
	Na Cl	"	1,00
	cellulosa	"	2.00
	totale . . .	gr.	120.00

c)	farina di frumento . .	gr.	80.00
	grasso di maiale . . .	"	37.00
	Na Cl	"	1.00
	cellulosa	"	2.00
	totale . . .	gr.	120.00

Per brevità riassumo i risultati complessivi ottenuti. Coll'alimentazione *a*) si osservò sempre un forte aumento del peso del corpo; con le alimentazioni *b*) e *c*) si osservò in alcuni animali lieve aumento, in altri diminuzione del peso del corpo.

Risulta pertanto, così dalla prima come dalla seconda serie di ricerche, che l'*inferiorità del valore nutritivo della zeina e della gliadina rispetto a quello dell'ovoalbumina, dimostrata dalle precedenti ricerche, si manifesta anche quando si usano le farine di mais e di frumento in confronto colla polvere d'uovo*. Si nota tuttavia una diversità di comportamento, nel senso, che *il valore nutritivo azotato della sola zeina o della sola gliadina è relativamente minore di quello delle farine in « toto »*. Ciò deve attribuirsi probabilmente al fatto che in queste esistono altre proteine di valore nutritivo maggiore di quello della zeina e della gliadina.

Zoologia. — *Correlazione e differenziazione. Ricerche sullo sviluppo degli Anfibi Anuri.* Nota di Giulio Cotronei, presentata dal Socio B. Grassi.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Parassitologia. — *Ricerche sperimentali su Lamblia intestinalis.* Nota del dott. Carlo Basile [1], presentata dal Socio B. Grassi.

Il fatto che l'*Entamoeba dysenteriae* (Councilman e Lafleur, 1893) può invadere il fegato e determinarvi degli ascessi mi aveva già da gran tempo indotto a ricercare se anche altri protozoi, frequenti anche essi nell'intestino dei vertebrati, possano comportarsi nello stesso modo.

In questa Nota mi occuperò particolarmente di *Lamblia intestinalis.*

Il Grassi (1881) segnalò nelle feci umane, in tre casi di diarrea studiati in Italia ed anche nello intestino di topi e di gatti un protozoo di cui diede i caratteri e che denominò *Megastoma entericum* [2].

Successivamente il Bütschli trovò che con le forme di *Megastoma entericum* studiato dal Grassi si potevano identificare certe forme accennate e figurate dal Lambl (1859) e da questo autore non affatto distinte dal *Cercomonas* (*Trichomonas*) *intestinalis* insieme al quale le aveva trovate nel muco intestinale di bambini; di queste forme il Lambl non aveva notati neppure i flagelli. È da notare che lo stesso Lambl più tardi trovava i *Cercomonas* (*Trichomonas*) *intestinalis* anche in una cisti di echinococco del fegato senza più ritornare sulle forme sudette; del resto i dati di questo autore intorno ad esse erano così insufficienti che competentissimi ricercatori che a lui seguirono quali lo Stein, il Leückart, il Davaine non vi avevano dato alcun valore e le attribuivano a inesatte osservazioni. Ciò nonostante il Blanchard (1888) propose, in onore del Lambl, per questo protozoo, denominato dal Grassi *Megastoma entericum*, la denominazione di *Lamblia intestinalis*; questa denominazione è ormai adottata dalla maggior parte degli autori, ed il nome e gli studî del Grassi, al quale in realtà si deve la vera scoperta di questo parassita, sono ormai dimenticati nella letteratura contemporanea.

Io, sin dal 1912, con ricerche sistematiche, ho esaminato il fegato di molti cani, gatti, topi, naturalmente infetti nel loro intestino da *Lamblia intestinalis.*

Ma il più minuzioso esame dei preparati per strisciamento del fegato di questi animali, è stato sempre negativo. Soltanto recentemente, eseguendo l'autopsia di un topo (*Mus musculus*), notai che il fegato era ingrandito e

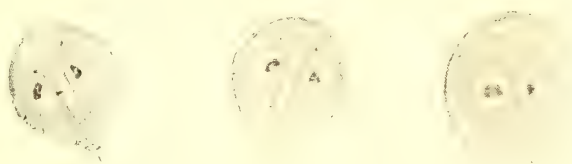
[1] Dall'Istituto di anatomia comparata della R. Università di Roma.

[2] Grassi B., *Intorno ad alcuni protisti endoparassitici.* Memoria di Parassitologia comparata, in Atti della Società Italiana di scienze naturali, vol. XXIV.

che mostrava delle cisti delle dimensioni di un piccolo cece contenenti un liquido chiaro.

Mediante una pipetta Pasteur, ho aspirato il liquido in esse contenuto e l'ho inoculato per via peritoneale, in modo asettico, in un secondo topolino (*Mus musculus*).

Dal materiale raccolto dalle pareti delle stesse cisti epatiche ho eseguito dei preparati a fresco nei quali ho osservato dei protozoi mobilissimi che però, data la loro notevole rarità, non ho potuto specificare.

Il topolino, inoculato per via peritoneale col liquido contenuto nelle cisti epatiche suddette, è vissuto per 16 giorni dopo la inoculazione; in questo periodo di tempo esso non ha dimostrato alcun sintomo morboso.

La sera del 16° giorno dall'inoculazione, esso fu trovato molto sofferente; dopo qualche ora, essendo ancor più aggravato, venne da me sacrificato.

Nulla di rilevante al cuore ed ai polmoni. Aperta la cavità peritoneale, ho notato subito un notevole ingrandimento delle glandole linfatiche mesenteriche e del fegato; anche la milza era lievemente ingrossata e di colorito rosso-cupo; nulla di rilevante a carico della sierosa peritoneale.

L'esame dei polmoni, della milza e del midollo osseo tibiale non rivelò alcun parassita; però nei preparati eseguiti per strisciamento del fegato ed in quelli eseguiti dalle glandole linfatiche mesenteriche, io ho osservato dei protozoi, che, per le loro caratteristiche morfologiche, ho identificato colla *Lamblia intestinalis*.

Il parassita si presenta o con flagelli più o meno visibili (forme a pera), o in via di incistamento (forme ovali o rotondeggianti). Le forme incistate sono state segnalate dal Perroncito [1]; esse in natura sono eliminate colle feci e per come ha dimostrato sperimentalmente lo stesso Perroncito servono a mantenere viva e diffondere la specie.

L'esame microscopico del sangue aspirato dal cuore mostrò la presenza di forme, che possono ritenersi protozoi. Per accertare la loro natura ed il loro significato, io ho inoculato un cmc. di sangue, aspirato dal cuore, in un terzo topolino che è tuttora in osservazione.

La questione della patogeneità della *Lamblia intestinalis* è tutt'oggi controversa. Il Perroncito ebbe più volte occasione di assicurarsi dell'azione

[1] Perroncito E., Regia Accademia di Medicina di Torino, anno 1887.

patogena di questo protozoo nell'uomo. Tutt'oggi tale questione può riassumersi nelle seguenti parole scritte dal Grassi sin dal 1888 ([1]): « Se certe diarree croniche accompagnate da anemia appaiono indubitatamente riferibili al Megastoma, vi sono per contrario individui, e non pochi, i quali pur ospitando questo parassita, anche in gran numero, godono di salute perfetta ».

Io ho voluto comunicare la mia osservazione ed il mio esperimento sopracennati, certamente non privi di interesse, perchè essi dimostrano che la *Lamblia intestinalis* può trovare nel fegato e nelle glandole linfatiche mesenteriche un ambiente adatto alla sua vitalità ed è probabile che in questo ambiente sia patogena.

Fisiologia. — *Sul metabolismo degli aminoacidi nell'organismo: Azione del tessuto epatico sugli aminoacidi aggiunti al sangue circolante.* Nota VII del dott. Ugo Lombroso e di Camillo Artom, presentata dal Socio prof. L. Luciani.

Numerose ricerche sono state eseguite per determinare l'azione del fegato sugli aminoacidi. Ma la maggior parte di esse furono limitate alla indagine di alcune sostanze (corpi acetonici, acido lattico, urea, ammoniaca ecc.) che si supponeva avessero origine dagli aminoacidi; e gli autori appoggiavano o escludevano questa ipotesi, a seconda che tali sostanze aumentavano o no nel liquido circolante.

A noi sembra, per altro, che un giudizio, basato unicamente sull'esame del liquido circolante, non sia sufficientemente attendibile, trattandosi di sostanze che si trovano depositate, in copia più o meno notevole, nel tessuto epatico, e vengono facilmente riversate da questo nel liquido circolante.

Ma, astraendo da questa obbiezione, dalla lettura dei precedenti autori emerge che nessuno ancora si è proposto lo studio *ex-professo* del comportamento degli aminoacidi circolanti nel fegato, e del loro definitivo destino: determinando a questo scopo le percentuali che vengono semplicemente depositate nel tessuto, le percentuali che vengono utilizzate per processi sintetici, e finalmente quelle che vengono effettivamente disaminate.

Frazionatamente si può ritrovare qualche indicazione, nei precedenti lavori, sui quesiti ora enunciati: ma per l'incompiutezza delle indagini, non si può giungere neppure ad una sicura interpretazione dei dati ottenuti.

Come potrebbesi, ad esempio, interpretare la scomparsa, anche elevatissima, di aminoacidi circolanti nel fegato, senza determinare almeno il loro quantitativo nell'organo, prima e dopo l'esperimento, dato che proprio il fegato è atto a trattenerli in grande quantità?

([1]) Grassi, *Significato patologico dei protozoi parassiti dell'uomo.* R. Acc. Lincei, Classe di scienze morali, storiche, filologiche, 1888, 22 gennaio.

Van Slyke [1] ed allievi, studiando il destino degli aminoacidi iniettati direttamente nel sangue, affermarono che essi scompaiono perchè si depositano nei varii tessuti e prevalentemente nel fegato: ma mentre negli altri tessuti rimangono inalterati, nel fegato sono rapidamente scomposti dando luogo ad urea ed ammoniaca.

Il fegato inoltre distrugge successivamente gli aminoacidi depositati negli altri tessuti, man mano che si riversano nel torrente sanguigno.

Le osservazioni del van Slyke sono state però eseguite *in vivo*, nel qual caso troppi fattori si intersecano e si sovrappongono, rendendo difficile il localizzare i varî fenomeni nell'uno o nell'altro tessuto. Diveniva quindi necessaria, prima di accettare le conclusioni di van Slyke, una più diretta indagine. Tanto più che le ricerche di Fiske e Sumner [2] non paiono confermare le affermazioni di van Slyke.

Infatti questi autori, occupandosi del comportamento della glicocolla nel fegato, constatarono che non vi era aumento di urea dopo circolazione di Ringer con glicocolla nel fegato isolato.

In base ad esperienze eseguite con estratti epatici, G. Bostock [3] concluse per la presenza, nel fegato, di enzimi disaminanti; ma le sue affermazioni vennero contraddette da Levene e Meyer [4] in ricerche di controllo eseguite con una disposizione analoga.

Così pure dalle indagini di Buglia e Costantino [5] sull'azione del fegato di *scillius catulus* in purea di fronte alla glicocolla, risulterebbe la mancanza di enzimi disamidanti nel fegato. Infatti essi osservarono che non si modificava il quantitativo di aminoacidi in una mescolanza di purea di fegato con glicocolla, nel senso di una loro distruzione, facendo gorgogliare o no l'ossigeno.

Embden [6] ed allievi hanno dimostrato che condizionatamente alla presenza di alcuni aminoacidi (tirosina, leucina, fenilalanina, ecc.) si poteva ottenere, nella circolazione di fegato di cane, la produzione di corpi acetonici. Altri aminoacidi, ad esempio l'alanina, darebbero invece luogo alla produzione di acido lattico.

Riconosciamo attendibile la presunzione che tali corpi abbiano origine dagli aminoacidi. Però, mancando in queste ricerche il diretto controllo sul comportamento dell'aminoacido nel sangue e nel fegato, rimane sempre il dubbio che esso abbia agito semplicemente da catalizzatore per un processo che si compia a spese di altre sostanze che si trovano nel fegato stesso e sono capaci di compiere tale funzione.

[1] Journ. of. biol. chem., XVI, 187, an. 1913.
[2] Journ. of Biol. Chem. XVIII, 285, an. 1914.
[3] Biochem. Journ. VI, pag. 48, an. 1912.
[4] Journ. of biol. chem., XV, pag. 475, an. 1913.
[5] Zentralbl. Physiol. 26, H. 24, 1178, an. 1913.
[6] Biochem. Zeitschr. 38, 393, an. 1912; 55, 301, an. 1913 ecc.

Esperimento	Aminoacidi aggiunti al sangue	Quantità cm³	Sangue: Aminoacidi NaOH $^{1}/_{10}$ n cm³ — Prima	Dopo	Differenza Assol.	Differenza %	Ammoniaca H_2SO_4 $^{1}/_{50}$ n cm³ — Prima	Dopo	Differenza	Urea mmgr. N-ureico — Prima	Dopo	Differenza	Corpi acetonici I $^{1}/_{10}$ n cm³ — Prima	Dopo	Differenza
I	—	600	21	49,4	+ 28,4	135,2	11,5	12,5	+ 1	117	200,3	+ 83,3	28	12,5	— 15,
II	—	450	16,2	111,8	+ 95.6	590,1	13	42,8	+ 29,8	264,5	335,4	+ 70,9	13,5	5,7	— 7,
III	α-alanina gr. 3	400	211	142,3	— 68,7	32.5	20	21	+ 1	95,4	106	+ 10,6	8	12,8	+ 4,
IV	α-alanina gr. 3	400	194,7	130,7	— 64,0	32,9	10	8,8	— 1,2	57,8	80	+ 22,2	4	14	+ 10
V	α alanina gr. 2,1	350	182	156,3	— 25,7	14,1	11,6	9	— 2,6	102,8	158,3	+ 55,5	. .	. .	. .
VI	glicocolla gr. 2,5	350	198,6	147	— 51,6	26	11	7,9	— 4,1	35,9	40,1	+ 4,3	. .	. .	. .
VII	glicocolla gr. 2,5	300	187,5	152,6	— 34,9	18,6	. .	. .	. .	43	83	+ 40	. .	. .	. .
VIII	leucina gr. 2,5	400	92	88,5	— 3,5	3,8	. .	8	. .	61,8	75,5	+ 13,7	8	8,8	+ 0,
IX	leucina gr. 2,5	400	104	114	+ 10	9,7	12,5	57,8	+ 45,3	91.1	117,2	+ 26,1	6,7	7,7	+ 1
X	asparagina gr. 3 neutralizzata	400	118,4	72,8	— 45,6	38,5	16	74	+ 48	31,3	42,5	+ 11,2	. .	. .	. .
XI	asparagina gr. 3,5 neutralizzata	400	177,6	98,9	— 78.7	44,2	14	112	+ 98	33,2	50,2	+ 17,0	. .	. .	. .

(1) Cane maschio kg. 19,5. Pressione Hg mm. 40-60. Velocità di circolazione cm³ 42 al minuto.

(2) Cane maschio kg. 18. Pressione Hg mm. 10-20. Velocità cm³ 60 per minuto. Durata della

(3) Cane maschio kg. 7. Pressione Hg mm. 10-20. Velocità cm³ 45 per minuto. Durata della

(4) Cane maschio kg. 8,9. Pressione Hg mm. 30-50. Velocità cm³ 38. Durata della circolazione

(5) Cane maschio kg. 28. Pressione Hg mm. 20-30. Velocità cm³ 64. Durata della circolazione

(6) Cane maschio kg. 3,4 digiuno da 47 ore. Pressione Hg mm. 15-20. Velocità media 45 cm³ al

(7) Cane femmina kg. 3 digiuno da 48 ore. Pressione Hg mm. 20-40. Velocità media cm³ 40 al

(8) Cane femmina kg. 3,2 digiuno da 96 ore. Sangue diluito $^{1}/_{5}$ con Ringer. Pressione Hg mm.

(9) Cane maschio kg. 4,2 digiuno da 6 giorni. Pressione media Hg mm. 20-30. Velocità 40 cm³ al

(10) Cane maschio kg. 5,5 digiuno da 6 giorni. Pressione Hg mm. 25-40. Velocità cm³ 50 al minuto.

(11) Cane maschio kg. 9,1 digiuno da 6 giorni. Pressione Hg mm. 20-80. Velocità cm³ 60 al minuto.

ORGANO															BILANCIO COMPLESSIVO	OSSERVAZIONI
Peso gr.			Aminoacidi NaOH $^1/_{10}$ n cm³				Ammoniaca H_2SO_4 $^1/_{50}$ n cm³			Corpi acetonici I $^1/_{10}$ n cm³					Aminoacidi (nel sangue e nell'organo) NaOH $^1/_{10}$ n cm³	
Prima	Dopo	Differenza	Prima	Dopo	Differenza Assol	Differenza %	Prima	Dopo	Differenza	Prima	Dopo	Differenza				
450	580	+ 130	243	150,8	— 92,2	37,9	90	109,3	+ 19,3	31	23,2	— 7,8			Diminuzione 63. 8	(1)
330	350	+ 20	206,8	182	— 24,8	12	121	70	— 51	46.2	28	— 18,2			Aumento 70.8	(2)
170	220	+ 50	12,2	14,5	+ 2,3	18,8	68	11	— 57	156,4	28,6	— 127,8			Diminuzione 66.4	(3)
210	260	+ 50	16	18,4	+ 2,4	15	245	. .	. .	. .	. .	. .			Diminuzione 61.6	(4)
80	95	+ 15	40,8	36,1	+ 4,7	11,5	34,0	57,5	+ 23,5	. .	. .	. .			Diminuzione 21.0	(5)
95	130	+ 35	39,9	90,7	+ 50,8	127,5	26,6	42,6	+ 16,0	. .	. .	. .			Diminuzione 0.8	(6)
75	105	+ 30	28,5	59,3	+ 30,8	108	. .	. .	. .	. .	. .	. .			Diminuzione 4.1	(7)
110	125	+ 15	44	50	+ 6	13,6	22	56,3	+ 34,3	33	5	— 28			Aumento 2.5	(8)
95	110	+ 15	38	39,6	+ 1,6	4,2	64,3	105,6	+ 41,3	2,7	18,9	+ 16,2			Aumento 11.6	(9)
130	150	+ 20	53,3	69	+ 15.7	29.4	. .	. .	. .	. .	. .	. .			Diminuzione 29.9	(10)
195	305	+ 110	84,5	113,8	+ 29.3	34,6	65	160	+ 95	. .	. .	. .			Diminuzione 49.4	(11)

Durata della circolazione 1 ora.
circolazione 1 ora.
circolazione 50′.
1 ora e 10′.
1 ora.
minuto. Durata della circolazione 1 ora.
minuto. Durata della circolazione 1 ora.
40-50. Velocità cm³ 55 al minuto. Durata della circolazione 1 ora.
minuto. Durata della circolazione 1 ora.
Durata della circolazione 50′.
Durata della circolazione 1 ora e $\frac{1}{2}$.

Esperimento	Aminoacidi aggiunti al sangue	Quantità cm³	SANGUE — Aminoacidi NaOH $^1/_{10}$ n cm³ — Prima	Dopo	Differenza Assol.	Differenza %	Ammoniaca H_2SO_4 $^1/_{50}$ n cm³ — Prima	Dopo	Differenza	Urea mmgr. N-ureico — Prima	Dopo	Differenza	Corpi acetonici I $^1/_{10}$ n cm³ — Prima	Dopo	Differenza
I	—	600	21	49,4	+ 28,4	135,2	11,5	12,5	+ 1	117	200,3	+ 83,3	28	12,5	— 15,5
II	—	450	16,2	111,8	+ 95.6	590,1	13	42,8	+ 29,8	264,5	335,4	+ 70,9	13,5	5,7	— 7,8
III	α-alanina gr. 3	400	211	142.3	— 68,7	32.5	20	21	+ 1	95,4	106	+ 10,6	8	12,8	+ 4,8
IV	α-alanina gr. 3	400	194,7	130,7	— 64,0	32,9	10	8,8	— 1,2	57,8	80	+ 22,2	4	14	+ 10
V	α alanina gr. 2,1	350	182	156,3	— 25,7	14,1	11,6	9	— 2,6	102,8	158,3	+ 55,5	..	..	..
VI	glicocolla gr. 2,5	350	198.6	147	— 51,6	26	11	7,9	— 4,1	35,8	40,1	+ 4,3	..	..	..
VII	glicocolla gr. 2,5	300	187,5	152,6	— 34,9	18,6	..	..	..	43	83	+ 40	..	..	..
VIII	leucina gr. 2,5	400	92	88,5	— 3,5	3,8	..	8	..	61,8	75,5	+ 13,7	8	8,8	+ 0,8
IX	leucina gr. 2,5	400	104	114	+ 10	9,7	12,5	57,8	+ 45,3	91.1	117,2	+ 26,1	6,7	7,7	+ 1
X	asparagina gr. 3 neutralizzata	400	118,4	72,8	— 45,6	38,5	16	74	+ 48	31,3	42,5	+ 11,2	..	..	..
XI	asparagina gr. 3,5 neutralizzata	400	177,6	98,9	— 78,7	44,2	14	112	+ 98	33,2	50,2	+ 17,0	..	..	..

Esperimento	ORGANO — Peso gr. — Prima	Dopo	Differenza	Aminoacidi NaOH $^1/_{10}$ n cm³ — Prima	Dopo	Differenza Assol	Differenza %	Ammoniaca H_2SO_4 $^1/_{50}$ n cm³ — Prima	Dopo	Differenza	Corpi acetonici I $^1/_{10}$ n cm³ — Prima	Dopo	Differenza	Bilancio complessivo Aminoacidi (nel sangue e nell'organo) NaOH $^1/_{10}$ n cm³	Osservazioni
I	450	580	+ 130	243	150,8	— 92,2	37,9	90	109,3	+ 19,3	31	23,2	— 7,8	Diminuzione 63, 8	(1)
II	330	350	+ 20	206,8	182	— 24,8	12	121	70	— 51	46,2	28	— 18,2	Aumento 70.8	(2)
III	170	220	+ 50	12,2	14,5	+ 2,3	18,8	68	11	— 57	156,4	28,6	— 127,8	Diminuzione 66.4	(3)
IV	210	260	+ 50	16	18,4	+ 2,4	15	245	..	..	..	..	..	Diminuzione 61.6	(4)
V	80	95	+ 15	40,8	36,1	+ 4,7	11,5	34,0	57,5	+ 23,5	..	..	..	Diminuzione 21,0	(5)
VI	95	130	+ 35	39,9	90,7	+ 50,8	127,5	26,6	42,6	+ 16,0	..	..	..	Diminuzione 0,8	(6)
VII	75	105	+ 30	28,5	59,3	+ 30,8	108	..	..	..	..	..	..	Diminuzione 4.1	(7)
VIII	110	125	+ 15	44	50	+ 6	13,6	22	56,3	+ 34,3	33	5	— 28	Aumento 2,5	(8)
IX	95	110	+ 15	38	39,6	+ 1,6	4,2	64,3	105,6	+ 41,3	2,7	18,9	+ 16,2	Aumento 11,6	(9)
X	130	150	+ 20	53,3	69	+ 15,7	29.4	..	..	..	..	..	..	Diminuzione 29.9	(10)
XI	195	305	+ 110	84,5	113,8	+ 29,3	34,6	65	160	+ 95	..	..	..	Diminuzione 49.4	(11)

(1) Cane maschio kg. 19,5. Pressione Hg mm. 40-60. Velocità di circolazione cm³ 42 al minuto. Durata della circolazione 1 ora.
(2) Cane maschio kg. 18. Pressione Hg mm. 10-20. Velocità cm³ 60 per minuto. Durata della circolazione 1 ora.
(3) Cane maschio kg. 7. Pressione Hg mm. 10-20. Velocità cm³ 45 per minuto. Durata della circolazione 50′.
(4) Cane maschio kg. 8,9. Pressione Hg mm. 30-50. Velocità cm³ 38. Durata della circolazione 1 ora e 10′.
(5) Cane maschio kg. 28. Pressione Hg mm. 20-30. Velocità cm³ 64. Durata della circolazione 1 ora.
(6) Cane maschio kg. 3,4 digiuno da 47 ore. Pressione Hg mm. 15-20. Velocità media 45 cm³ al minuto. Durata della circolazione 1 ora.
(7) Cane femmina kg. 3 digiuno da 48 ore. Pressione Hg mm. 20-40. Velocità media cm³ 40 al minuto. Durata della circolazione 1 ora.
(8) Cane femmina kg. 3,2 digiuno da 96 ore. Sangue diluito $^1/_5$ con Ringer. Pressione Hg mm. 40-50. Velocità cm³ 55 al minuto. Durata della circolazione 1 ora.
(9) Cane maschio kg. 4,2 digiuno da 6 giorni. Pressione media Hg mm. 20-30. Velocità 40 cm³ al minuto. Durata della circolazione 1 ora.
(10) Cane maschio kg. 5,5 digiuno da 6 giorni. Pressione Hg mm. 25-40. Velocità cm³ 50 al minuto. Durata della circolazione 50′.
(11) Cane maschio kg. 9,1 digiuno da 6 giorni. Pressione Hg mm. 20-80. Velocità cm³ 60 al minuto. Durata della circolazione 1 ora e ½.

***

Le presenti ricerche sono state iniziate per giungere ad una più esatta valutazione dei risultati ottenuti dai precedenti autori, risultati in alcuni casi contradditorî, e per contribuire allo studio dell'azione del fegato sugli aminoacidi. Studio tanto più interessante, data la grande importanza che *a priori* si può supporre abbia il fegato nel ricambio intermedio delle sostanze proteiche, in analogia all'importanza che ad esso è già riconosciuta a proposito delle altre sostanze alimentari.

Bisognava determinare anzitutto se gli aminoacidi giunti al fegato vengano distrutti e quindi resi inutilizzabili dagli altri tessuti, oppure se, per opera del fegato, si inizii una ricostruzione di più complesse sostanze, similmente a quanto avviene per il glucosio ecc. ecc.

Il cane veniva ucciso per dissanguamento rapido dalla carotide: quindi, dopo abbondante lavaggio del sistema vasale con soluzione fisiologica, si asportava il fegato e lo si poneva a circolare nell'apparecchio di Lind, ad eccezione di uno o due lobi che venivano separati per servire come campioni dell'organo prima della circolazione. Il sangue defibrinato dello stesso animale, in quantità variabile da 300 a 600 $cm.^3$ secondo il volume dell'organo, entrava per la vena porta e fuoriusciva per le vene sovraepatiche: il coledoco e l'arteria epatica venivano legati. Dopo la circolazione, della durata di 1 ora circa, il fegato era aumentato di peso; e l'aumento in peso si assumeva come indice della quantità di sangue che rimaneva nell'organo, e che quindi doveva sottrarsi dalla quantità iniziale di sangue, nei calcoli sopra il sangue residuante dopo la circolazione. Il dosaggio degli aminoacidi nel sangue era eseguito col metodo del Sörensen, dopo eliminazione dell'NH_3 e precipitazione con ferro colloidale; il dosaggio dell'ammoniaca si eseguiva col metodo di Folin della corrente d'aria; quello dell'acetone, col metodo di Messinger Huppert; quello dell'urea, col metodo dell'ipobromito.

Nell'organo i dosaggi si eseguivano con gli stessi metodi sulla poltiglia fresca per l'acetone e l'ammoniaca, e sull'estratto idroalcoolico per gli aminoacidi.

Riassunto e conclusioni.

Dalle presenti ricerche risulta che:

1°) facendo circolare nel fegato isolato di cane aminoacidi sciolti nel sangue, si avverte sempre una loro notevole diminuzione, ad eccezione delle esperienze eseguite colla leucina;

2°) la diminuzione degli aminoacidi nel sangue circolante non è giustificata da un corrispondente aumento del loro contenuto nell'organo.

In qualche caso si avverte che gli aminoacidi nell'organo sono rimasti pressochè invariati quantitativamente;

3°) facendo circolare nel fegato sangue senza aggiunta di aminoacidi, si avverte un loro aumento nel sangue: aumento tanto più notevole, se si considera da un punto di vista comparativo e non assoluto, perchè supera di molto il $^{100}/_{100}$;

4°) sia facendo circolare sangue con aminoacidi, sia facendo circolare sangue senza aggiunta di aminoacidi, si osserva talora un aumento nel contenuto dell'NH_3 nel sangue e sempre nell'organo circolato. Ma tale aumento fu assai inferiore a quello che potevasi attendere considerando il quantitativo di aminoacidi scomparsi, ad eccezione delle esperienze con asparagina, nelle quali l'aumento nel sangue fu assai notevole. A somiglianza dell'NH_3 si comporta l'urea del sangue, che aumenta però sempre considerevolmente in confronto all'aumento dell'NH_3;

5°) il contenuto in corpi acetonici nel sangue aumentò in quasi tutte le esperienze; in tutte poi diminuì notevolmente il contenuto di detti corpi nel tessuto epatico. Non si può quindi escludere che l'aumento dei corpi acetonici nel sangue non dipenda da un semplice riversamento. Ma d'altra parte, data l'attitudine del fegato di consumare rapidamente tali sostanze, non si può nemmeno escludere ch'esse si siano formate, ed in copia notevole, senza essere rilevabili all'esame perchè man mano bruciate.

Il maggior aumento in corpi acetonici si ottenne nelle esperienze con leucina, in una delle quali si avvertì pure un aumento nel tessuto epatico.

*
* *

Se prendiamo in esame il complesso dei risultati ottenuti, si rileva anzitutto che due opposti processi si svolgono simultaneamente, mascherandosi a vicenda. E cioè da un lato la diminuzione degli aminoacidi aggiunti al sangue; e d'altro lato la formazione di aminoacidi nel fegato stesso.

Nelle indagini da noi eseguite si è potuto determinare soltanto il processo preponderante nella limitata misura con cui oltrepassa l'altro: una più esatta valutazione dei due processi sarebbe soltanto possibile di ottenere con ricerche di ordine qualitativo oltre che quantitativo: ricerche che non abbiamo eseguite, per le difficoltà tecniche che presentano.

Nelle esperienze eseguite con leucina i due opposti processi tendono ad equilibrarsi, e solo l'aumento specifico delle sostanze cetogene permette di affermare la distruzione di leucina.

Nei casi nei quali la diminuzione degli aminoacidi si dimostrò preponderante, essa non può spiegarsi come dovuta esclusivamente ad una combustione, poichè l'aumento di urea e di NH_3 è proporzionalmente scarso ed un loro aumento eguale, ed anche superiore, si riscontrò pure senza l'aggiunta di aminoacidi. Perciò devesi ammettere che una parte degli ami-

noacidi scomparsi abbia servito alla formazione di complessi più o meno elevati. Il fegato si comporterebbe con gli aminoacidi assai similmente, sotto un certo aspetto, a come si comporta con gli idrati di carbonio, che ad esso giungono sotto forma di glucosio; una parte brucia direttamente, un'altra sintetizza per riversarla poi di nuovo successivamente nel sangue, in forma di glucosio.

Sull' intimo meccanesimo di queste due opposte funzioni del fegato, sintesi e liberazione di aminoacidi, non è ancor possibile di formulare alcuna ipotesi. Ci troviamo forse di fronte a quella singolare attitudine, che già in altri campi abbiamo studiato [1], per cui un tessuto, un secreto dell'organismo, compie due opposti fenomeni, o per opera di due enzimi di funzione antagonista, o per la modificazione dell'attività di uno stesso enzima, a seconda delle differenti condizioni iniziali in cui vien posto ad agire.

Comunque sia, nel valutare l'azione del fegato nel ricambio delle sostanze proteiche si deve attribuire una grande importanza al fatto che esso non esplica soltanto un'azione distruggitrice sugli aminoacidi, con produzione di di NH_3 ed urea, come affermavano Van Slyke ed allievi: ma, come abbiamo dimostrato, esso è pure capace, ed in grado notevole, di sintetizzare e di produrre nuovi aminoacidi.

Ed è probabilmente con l'intrecciarsi di queste varie attitudini che il fegato riesce a compiere quelle complesse ed ancora oscure funzioni, che permettono di raggiungere l'equilibrio azotato, anche nelle più disparate condizioni iniziali.

Chimica fisiologica. — *Microtitolazione alla formaldeide per la determinazione quantitativa degli aminoacidi e le sue applicazioni in fisiologia.* Nota I. *Generalità sulla microtitolazione alla formaldeide e sua prima applicazione nello studio dei fermenti peptidolitici.* Nota di Antonino Clementi, presentata dal Socio L. Luciani.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

[1] U. Lombroso, Archivio di farmacologia e scienze affini, vol. XIV, pag. 429, 1912.

Fisica. — *Persistenza delle correnti nelle cellule fotoelettriche dopo la soppressione della luce eccitatrice.* Nota II di O. M. Corbino e G. C. Trabacchi, presentata dal Socio P. Blaserna.

Come annunziammo nella Nota I, procediamo alla descrizione dei particolari della disposizione sperimentale adottata.

Parte elettrica — Essendo in giuoco resistenze elettriche molto grandi e tensioni piuttosto alte, fino a 70 volts, si imponeva la maggior cura per garentire lo isolamento delle varie parti del circuito, specialmente nei casi in cui, utilizzandosi un galvanometro ad alta resistenza interna, le minime correnti di dispersione avrebbero determinato deviazioni notevoli e incostanti. Fu perciò necessario di ricorrere, come sorgente, a una batteria di piccole pile a secco affondate in una scatola contenente paraffina; evitare, lungo lo intero

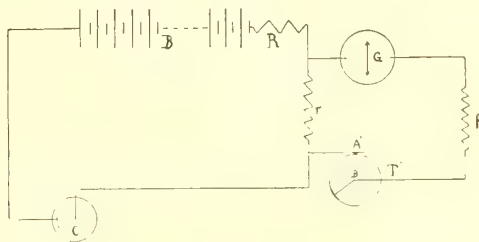



Fig. 1.

circuito (connessioni, resistenze, apparecchi di misura), ogni possibile derivazione di corrente a terra; e tenere in buona connessione permanente col suolo la sola parte che non poteva essere bene isolata: l'interruttore rotante. In tal modo correnti di dispersione si producevano solo quando nelle manovre preparatorie qualche parte del circuito veniva toccata dalla mano dell'operatore; ma ogni disturbo cessava durante le esperienze per le quali, come vedremo, la manovra si riduceva solo alla interposizione di uno schermo nel tragitto della luce. Lo schema dei circuiti, già descritto nella prima Nota, è riprodotto nella fig. 1.

Interruttore rotante — Come abbiamo detto, ci siamo serviti dell'apparecchio del prof. Blaserna, esistente in questo Istituto, e che consente la realizzazione delle combinazioni più svariate.

Su un unico asse robusto (fig. 2), messo in rotazione da un sistema di ruote a ingranaggi, sono disposti, l'uno dopo l'altro, due tamburi T T′, cilindrici, identici, di materia isolante: di essi il primo è stabilmente solidale con l'albero; l'altro, pur girando solidalmente col primo, può subire rispetto

ad esso spostamenti arbitrarî e misurabili per mezzo di un cerchio graduato, disposto dove i due tamburi si toccano.

Sulla superficie cilindrica dei tamburi trovasi una parte metallica, esattamente tornita col cilindro isolante; davanti alla parte metallica può portarsi un contatto a molla (B , B′) sostenuto da una guida laterale, di avorio; se ne può regolare la pressione sul cilindro in modo da assicurare il contatto

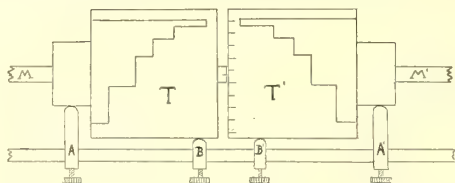



Fig. 2

periodico, senza attriti eccessivi col cilindro mobile. La parte metallica, avente la forma di una gradinata, occupa porzioni angolari differenti della intera superficie cilindrica, cosicchè, portando il contatto in presenza dei diversi gradini, si può ottenere che la frazione di giro, durante la quale permane il contatto fra la molla e il metallo, sia modificabile entro ampî limiti. Agli estremi di ciascun tamburo si trova un altro contatto a molla (A , A′) su un cilindretto continuo conduttore, che comunica col metallo della superficie. È chiaro, adunque, che ciascun tamburo consente che si stabilisca una comunicazione metallica fra le due molle di contatto A B , o A′ B′ , per una frazione di giro variabile entro ampî limiti, e con un ritardo in fase dal contatto fra A e B a quello fra A′ e B′ che si può anch'esso modificare ad arbitrio con continuità e in modo misurabile.

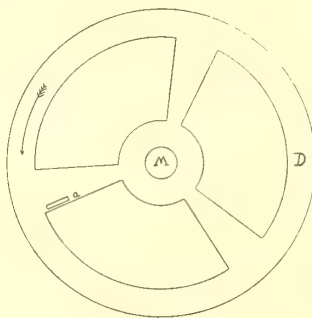



Fig. 3.

Nella prima parte delle esperienze che ci apprestiamo a descrivere ci siamo serviti di un solo contatto mobile, quello del tamburo T′, mentre la fase angolare del contatto poteva modificarsi e leggersi sul centro graduato rispetto al tamburo fisso T.

La parte ottica. — All'estremità M dell'albero trovasi una ruota D (fig. 3) a tre settori in alluminio. Noi ci siamo serviti di uno dei settori metallici del disco, per operare l'intercettamento periodico del fascio luminoso.

La disposizione ottica era la seguente: Un fascio intenso, proveniente dal sole o da una lampada ad arco a corrente continua, era concentrato (fig. 4) su una fenditura rettangolare F a contorni netti, e poi raccolto da un grande obbiettivo Zeiss O che ne produceva una piccola immagine nel piano del disco a settori D. La luce si propaga liberamente finchè il fascio non incontra uno dei tre settori; e traversa al di là un secondo obbiettivo Zeiss O′ che rende parallelo il fascio e lo fa cadere sulla cella.

In una certa posizione del disco, la immagine della fenditura è intercettata dal settore opaco, e si dipinge su di esso; è facile allora dare ai bordi della fenditura tale orientazione che la loro immagine risulti esattamente parallela all'orlo del settore nella posizione in cui ha luogo l'intercettamento. Così la estinzione si produce, durante il moto del disco, per riduzione progressiva della larghezza del fascio di luce fino a zero, con che del fascio di luce parallela emergente dal secondo obbiettivo si modifica progressivamente fino a zero la intensità, senza che se ne alteri la forma.

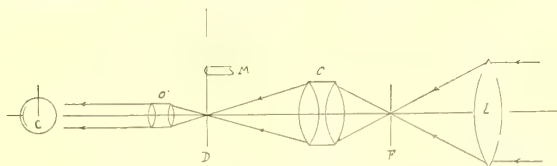



Fig. 4.

Essendo il disco solidale con l'albero, si può modificare opportunamente la fase del contatto sul tamburo T′ in modo che esso abbia luogo o subito dopo l'estinzione della luce, o dopo un intervallo angolare variabile a volontà, che si può leggere con riferimento al cerchio graduato. La durata del contatto, scegliendo opportunamente il gradino sul tamburo, si regolava in modo che esso cessasse un po' prima che la luce tornasse a cadere sulla cella; e poichè fra i gradini ce n'è alcuni di minima apertura angolare, si poteva, quando parve opportuno, far sì che il contatto durasse per una minima frazione del giro, e dopo intervalli di tempo variabili dall'istante in cui era stata interamente intercettata la luce.

Andamento di una esperienza. — Trovata la posizione del tamburo T′ per cui il contatto avvenisse *immediatamente* dopo l'intercettamento totale della luce da parte del settore, si spostava ulteriormente il tamburo, di un certo numero α di gradi.

Chiuso allora il circuito principale, si sopprimeva permanentemente la luce con uno schermo a mano, si apriva lo schermo della cella, e si osservava l'andamento del galvanometro. Questo era, secondo i casi, un Hartmann e Braun, a bobina mobile da 100 ohms, o un Siemens e Halske, pure a bobina mobile, di alta resistenza. Messo in rapida rotazione il tamburo (la velocità comunemente adoperata era di circa 20 giri al secondo), si ebbe a consta-

tare una deviazione al galvanometro, pur essendo permanentemente intercettata la luce.

Questa deviazione era dovuta al fatto che il contatto strisciante sul tamburo si riscaldava sensibilmente, non ostante le disposizioni prese per lubrificare le superfici: e quando a ogni giro, per l'avvenuto contatto, si schiudeva il circuito formato dal galvanometro e della resistenza r (fig. 1), una corrente termoelettrica passava periodicamente nel galvanometro. Si poteva anche ritenere che, essendo aperta la cella, e perciò esposta alla luce diffusa della camera, una corrente fotoelettrica permanente traversasse il circuito, e il galvanometro la rivelasse per la parte derivata in esso, sulla resistenza r, nei successivi contatti periodici. Ma fu facile di riconoscere, occultando, durante la rotazione, la cella, che questa causa produceva una deviazione minima, appena di qualche millimetro della scala.

La deviazione galvanometrica dovuta al movimento del tamburo diveniva stabile dopo che si era raggiunta una specie di regime nel riscaldamento del contatto strisciante; si poteva allora abbassare lo schermo a mano e mandare il fascio di luce sulla cella. *Una nuova deviazione venne allora constatata, che corrispondeva evidentemente alla corrente fotoelettrica residua.*

Questa traversava ancora la resistenza r; e una sua derivazione, attraverso al contatto periodico, prendeva la via del galvanometro. La deviazione ottenuta, per una data velocità di rotazione del disco, poteva, così, facilmente esser misurata per diversi valori dello sfasamento α fra l'interruzione della luce e lo stabilirsi del contatto, e quindi poteva determinarsi la corrente residua dopo intervalli di tempo diversi da quando era cessata la causa.

Per potere mettere a confronto la corrente residua osservata, con la corrente fotoelettrica normale che traversa la cella durante lo illuminamento, bastava dare una tale posizione angolare al tamburo T' rispetto al disco, da far avvenire il contatto, durante la rotazione, in piena luce, quando cioè la immagine della fenditura poteva passare liberamente attraverso a uno dei settori vuoti del disco. La deviazione ottenuta al galvanometro, mentre il tamburo girava alla stessa velocità di prima, e ricorrendo sempre alla manovra di sopprimere o ristabilisce con lo schermo a mano il fascio luminoso, forniva appunto la misura della corrente totale.

Occorre tener presente che la deviazione galvanometrica misura la totale corrente fotoelettrica (sia la normale, sia la residua), con un forte coefficiente di riduzione. Questo dipende da tre cause: anzitutto, anche per un contatto permanente a tamburo fermo, il galvanometro è traversato solo da una derivazione della corrente principale, dipendentemente dal rapporto fra le resistenze delle due branche derivate. Ma una ulteriore e più forte riduzione è apportata dal fatto che la chiusura nel ramo galvanometrico avviene solo durante una breve frazione del giro del tamburo, ciò che arreca un'altra causa

di riduzione poichè a questi bruschi passaggi di elettricità la bobina del galvanometro oppone, per la sua autoinduzione elevata, un ostacolo rilevante.

In alcuni casi abbiamo trovato opportuno, per attenuare quest'ultima causa di riduzione, shuntare la bobina del galvanometro o con una resistenza ohmica o con una capacità. Ma fu in ogni caso ritenuto necessario di dare alla resistenza r, su cui era derivato il circuito galvanometrico, un valore piccolo rispetto a R; e ciò allo scopo di evitare che la chiusura periodica del circuito derivato modificasse periodicamente in modo sensibile la resistenza totale.

A questo proposito sarà anzi utile di osservare che se la resistenza R è anch'essa troppo elevata, poichè la corrente fotoelettrica dovuta alla luce intermittente si annulla, o quasi, periodicamente, e si modifica in conseguenza la perdita di tensione ohmica lungo la resistenza R, si determinano forti oscillazioni di tensione, ai poli della cella, che è bene evitare. In considerazione di ciò, abbiamo cercato di dare a R valori piuttosto piccoli rispetto alla resistenza interna della cella: riducendola ai valori appena necessarii per garentire questa dalle eventuali correnti di corto circuito.

Risultati delle esperienze. — Fra le molte esperienze eseguite, che ci permisero fin da principio di assodare la esistenza delle correnti di isteresi, e che ci suggerirono i perfezionamenti da introdurre nella disposizione sperimentale, riferiamo i risultati di quelle fatte nelle migliori condizioni.

L'istante più prossimo a quello d'interruzione della luce per cui fu potuta misurare la corrente residua, corrisponde a una chiusura del circuito galvanometrico dopo 1.6×10^{-4} secondi dalla totale occultazione del fascio da parte del settore mobile.

Alla velocità di 10 giri al secondo del disco, ogni grado di ulteriore spostamento del tamburo corrisponde a un ritardo di 2.8 millesimi di secondo nella chiusura del contatto.

A titolo di esempio riferiamo anzitutto i dati della esperienza eseguita a 54,5 volts.

Si aveva $R = 3000$ ohms; $r = 10000$; resistenza totale del ramo galvanometrico 10000; le deviazioni osservate furono le seguenti:

Tempi dopo la cessazione totale della luce	Deviazioni galvanometriche
1.6×10^{-4} sec.	50
14×10^{-3} »	24
28×10^{-3} »	12
42×10^{-3} »	9
56×10^{-3} »	5

Nel modo sopra indicato si potè stabilire che la corrente che si sarebbe ottenuta lasciando sussistere la luce durante il contatto rotante, era misu-

rata da circa 2000 divisioni; se ne deduce che la corrente residua dopo $1,6 \times 10^4$ sec., è circa il 25 $^{00}/_{00}$ della corrente durante la illuminazione; e si riduce al 2,5 $^{00}/_{00}$ dopo 56 millesimi di secondo.

La corrente residua è molto più intensa applicando alla cella una tensione più alta; ma è allora anche assai maggiore la corrente in piena luce; è però da notare che la legge di decrescimento della corrente residua, col tempo, è molto più rapida con le tensioni più alte.

Così, con 82 volts di tensione, $R = 13000$ ohms, $r = 1000$ ohms, e resistenza totale del ramo galvanometrico eguale a 10000 ohms si ebbe:

Tempi in millesimi di secondo	Corrente
0,16	435
2,8	330
5,6	260
8,4	190
11,2	150
14,0	95
16,8	73
19,6	42
22,4	18
28,0	11
36,4	7

E si riconosce immediatamente che la corrente residua, dopo 28 millesimi di secondo, è appena il 2,5 per cento della residua dopo $1,6 \times 10^{-4}$ sec.; mentre con 54 volts, nello stesso tempo, la corrente residua si era ridotta solo al 24 per cento.

Questi, e altri risultati che ci dispensiamo dal riferire, ci permettono di trarre la seguente conclusione:

Dopo l'interruzione della luce che colpisce una cella fotoelettrica sottoposta a tensione, sussiste una corrente residua: essa è ancora constatabile dopo tempi dell'ordine di grandezza del centesimo di secondo; e decresce col tempo, tanto più rapidamente quanto più è alta la tensione applicata.

Interpretazione dei risultati. — Stabilita così l'esistenza di correnti dopo brevissimi intervalli di tempo da quando è cessata la luce, esaminiamo le possibili spiegazioni del fenomeno.

Potrebbe ammettersi, come prima ipotesi, che il metallo del catodo, irradiato da luce intensa, continui a emettere elettroni anche dopo cessata l'azione della luce; i pochi elettroni emessi, accelerati dal campo esterno, provocherebbero, come prima, la produzione di nuovi ioni, e quindi la corrente postuma osservata.

Ma può anche farsi una seconda ipotesi: si potrebbe cioè attribuire questa corrente residua agli ioni già esistenti fra gli elettrodi, e che conti-

nuerebbero a produrne dei nuovi sotto l'azione del campo, finchè, mancando la sorgente continua di produzione di elettroni al catodo, la corrente tornerebbe al valore zero.

Si riconosce, da quanto si è detto, l'interesse notevole di decidere fra le due spiegazioni: poichè la prima farebbe intervenire una tardiva emissione elettronica, da parte del metallo, come se questo possedesse una facoltà di accumulo della energia ricevuta; mentre la seconda, e cioè l'esaurimento degli ioni rimasti per via e capaci di produrne dei nuovi, darebbe una valida conferma della teoria del Townsend sulla ionizzazione per urto nei suoi particolari più delicati.

Si noti, invero, che, se la seconda ipotesi è la vera, la corrente residua non può essere spiegata se non ammettendo che anche gli ioni positivi prendano parte al processo di ionizzazione per urti, ciò che appunto suppone il Townsend nel caso in cui il campo sia abbastanza intenso. Non potrebbe, invero, la corrente residua essere spiegata se solo gli ioni negativi prendono parte al processo di rigenerazione degli ioni; poichè, se così fosse, data la loro grandissima mobilità (corrispondente al fatto che essi sono costituiti, a basse pressioni, da elettroni puri), e dato il campo intenso che è in azione, la corrente residua dovrebbe annullarsi dopo un tempo estremamente breve, di gran lunga inferiore a quello dopo il quale essa si rivela ancora sensibilissima.

Un primo tentativo per dilucidare la questione fu fatto ricorrendo a tensioni piuttosto basse, tali cioè da rendere molto tenue il processo di ionizzazione per urto. E fu così osservato che anche con 18 volts applicati ai poli della cella, e perciò con tensioni inferiori a quelle che nella caratteristica segnano la prima brusca salita, indice della intensa ionizzazione per urti, c'è una traccia del fenomeno.

Il risultato però non è sufficiente a giustificare la ipotesi che si tratti di una emissione postuma di elettroni da parte del metallo: e ciò sia per la piccolezza dell'effetto ottenuto, in quanto che non è assolutamente da escludere che esso possa esser dovuto a cause perturbatrici non riconoscibili; sia perchè anche a tensioni basse possono alcuni ioni assumere la velocità necessaria per funzionare da riproduttori, come del resto risulta dalla stessa teoria del Townsend.

Siamo quindi passati a una disposizione del tutto diversa, che, a nostro parere, permette di decidere fra le due spiegazioni.

Nel circuito principale della batteria B (fig. 5) si trovano una resistenza R, un galvanometro G_1, la cella C e un interruttore a mano A. Agli estremi del tratto galvanometro-cella è derivato un secondo circuito che comprende l'interruttore rotante D e una resistenza r, nella quale, per mezzo di un terzo circuito, una pila P invia in permanenza una corrente regolabile con la resistenza C. Quando l'interruttore D è aperto (ciò

che avviene mentre il disco rotante connesso con l'interruttore intercetta la luce) ai poli della cella agisce l'intera f. e. m. della batteria (circa 75 volts) ma non vi passa corrente poichè la cella non è illuminata Quando invece l'interruttore D è chiuso la f. e. m. ai poli della cella e del galvanometro si riduce solo a circa 4 volt, poichè la resistenza derivata r è traversata da una corrente notevole, e quindi ha luogo una forte caduta di tensione nella resistenza R assai più elevata. La stessa tensione agisce nella cella interrompendo il circuito principale in A, poichè r viene allora traversata dalla stessa corrente, prodotta dalla pila P; la resistenza ϱ, su cui è derivata la tensione che agisce ai poli r, è appunto regolata in modo che, aprendo o chiudendo il circuito principale in A, non sia per nulla modificata quella tensione; ciò che può constatarsi, con metodo di zero, ricorrendo al galvanometro G_2.

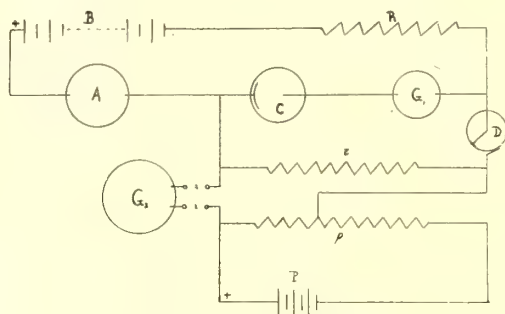



Fig. 5.

Supponiamo che la illuminazione intermittente della cella avvenga durante la chiusura dell'interruttore D, e cessi poco prima che il contatto si interrompa. Si avrà allora nel galvanometro G_1 una lieve corrente, dovuta alla tensione di circa 4 volts che agisce mentre la cella è illuminata; ma questa tensione non è sufficiente per imprimere agli elettroni la velocità necessaria a trasformarli in generatori di nuovi ioni: ed essi saranno perciò esauriti senza crearne altri per via, nel breve tempo che passa fra la cessazione della luce e quella del contatto. Interviene, subito dopo l'interruzione in D, la grande tensione di 75 volts della batteria B; e se il metallo continuasse ad emettere elettroni dopo la cessazione della luce, essi sarebbero accelerati dal campo producendo una corrente di ionizzazione per urto. Se così fosse, il fare agire o no la batteria B (ciò che può ottenersi chiudendo o aprendo il circuito principale in A) dovrebbe modificare la corrente che traversa G_1. Perchè la messa in azione della batteria B non modifichi la tensione che agisce sulla cella (4 volts) durante il contatto D è la illuminazione, occorre che siano molto accuratamente regolate le resistenze R e

ϱ. Basta per questo, come si è detto, ottenere che la chiusura in A sia senza effetto, mentre D è chiuso, sul galvanometro G_2.

Raggiunte queste condizioni furono messi in moto il disco e l' interruttore rotante D; la deviazione nel galvanometro G_1 non subiva che una lievissima variazione aprendo e chiudendo in A. Quella lieve variazione si rese impercettibile regolando le cose in modo che la tensione applicata alla cella durante il contatto D fosse di 8, anzichè di 4 volts. E poichè il tempo intercedente fra la cessazione della luce e l'azione della batteria B era di soli 5 centomillesimi di secondo, ciò dimostra, per quanto si è detto, che dopo questo intervallo di tempo non esiste ulteriore emissione di elettroni da parte del metallo.

Si può anche dire che quel tempo è sufficiente per eliminare gli elettroni moventisi nella cella sotto l'azione di soli 8 volts; senza di che, quelli rimasti per via sarebbero accelerati dal campo intenso sopravveniente, e ne creerebbero dei nuovi.

Possiamo quindi concludere che le correnti residue osservate nell'altra esperienza, sotto l'azione di *permanenti* tensioni elevate, son dovute non a una emissione postuma di elettroni da parte del metallo, ma bensì alla presenza postuma, nella cella, di ioni creati per urto, e che prima, di trasferirsi agli elettrodi, ne creano dei nuovi determinando come uno strascico nel processo di eliminazione.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Millosevich presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando una Memoria a stampa del Socio Taramelli, avente per titolo: *La traspirazione tellurica ed i terremoti nell'Appennino centrale e meridionale*; un opuscolo contenente il resoconto della *Commemorazione* di Cesare Arzelà, fatta all' Università di Bologna il 2 maggio 1915; ed una *Relazione di perizia geoidrologica sul disastro del Tritone in Roma* (con atlante), del prof. De Angelis d'Ossat.

Il Socio Volterra fa omaggio di un volume contenente le lezioni da lui impartite all' Università di Princeton *sulla teoria delle funzioni permutabili*; e fa menzione di un'opera recentemente pubblicata dal dott. Pérès, la quale tratta, con grande competenza, analogo soggetto.

Il Socio Paternò presenta una pubblicazione del prof. C. A. Garufi, accompagnandola colle seguenti parole:

Per incarico dell'autore prof. C. A. Garufi della Università di Palermo, ho l'onore di presentare all'Accademia un volume di oltre 600 pagine pub-

blicato dalla Società siciliana di Storia Patria, e relativo ai rapporti diplomatici tra Filippo V e Vittorio Amedeo II in occasione della cessione del Regno di Sicilia. Questo volume contiene 267 documenti, in gran parte inediti, raccolti dal Garufi negli Archivi di Madrid, Barcellona e Simancas, che si riferiscono al periodo che corre dal Trattato di Utrecht alla pace dell'Aja (1712-1720). Dai documenti pubblicati ora, emerge chiaro il pensiero di Vittorio Amedeo di riunire in federazione i varî Stati d'Italia e renderla indipendente da ogni straniero.

CORRISPONDENZA

Il Segretario MILLOSEVICH dà comunicazione dei seguenti telegrammi augurali scambiati tra l'Accademia delle scienze dell'Istituto di Francia e la R. Accademia dei Lincei; telegrammi la cui lettura è accolta con vivissimi applausi dall'Assemblea.

Presidente Accademia dei Lincei — ROME.

L'Académie des sciences de l'Institut de France adresse à l'Accademia dei Lincei un salut fraternel avec ses souhaits chaleureux pour le succès des armées italiennes.

Les Secrétaires perpétuels: DARBOUX, LACROIX.

Darboux, Lacroix, segretari perpetui dell'Accademia delle Scienze — PARIGI.

L'Accademia dei Lincei ricambia commossa il fraterno saluto dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Francia, augurando che gli sforzi dei popoli latini concorrano al successo ed al bene della umanità.

Il Presidente: BLASERNA.

Il Socio TODARO, il quale presiede in assenza del Senatore BLASERNA indisposto, ricorda che nella ricorrenza dello Statuto la solenne seduta accademica era onorata dalla presenza dell'Augusto nostro Sovrano; e fa la proposta, fra le acclamazioni dei presenti, che si mandi a S. M. il Re un telegramma di devozione dell'Accademia e bene auspicante alla vittoria dell'esercito nostro.

I Socî LUCIANI, NASINI, PATERNÒ, PIZZETTI, VOLTERRA e RÒITI propongono, con calde parole, che l'Accademia invii telegrammi di augurio per le armi alleate, all'Accademia delle scienze dell'Istituto di Francia, alla Società Reale di Londra, alla Imperiale Accademia di Pietrogrado, alla Reale Accademia del Belgio e alla Reale Accademia di Belgrado. La proposta dei Socî predetti è accolta con grande compiacimento dall'intiera Classe; come pure questa accoglie con vivissimo plauso la proposta del Socio Vol-

terra che si mandi un fraterno saluto a S. E. il Presidente del Consiglio, membro dell'Accademia.

Il testo dei telegrammi sopra mentovati, dei quali si affida la redazione al Segretario MILLOSEVICH, è il seguente:

A S. E. il Ministro della Real Casa.

V. E. compiacciasi comunicare a S. M. il Re che la R. Accademia dei Lincei, adunatasi nel giorno nel quale festeggiasi il ricordo del vincolo sacro che lega la Casa di Savoia al popolo italiano, mentre pugnano i nostri soldati per liberare i fratelli irredenti incoraggiati dalla presenza di Lui, fa fervidi voti per la vittoria e per il raggiungimento degli ideali dell'intera nazione.

Per il Presidente: TODARO.

A S. E. il Presidente del Consiglio dei Ministri.

Fiera l'Accademia dei Lincei di annoverare fra i suoi membri Antonio Salandra, che la storia registrerà fra i più grandi benefattori dell'Italia, oggi nell'odierna seduta di Classe, delibera di mandare un grato e riverente saluto.

Alla Società Reale di Londra.

La R. Accademia dei Lincei nella Sua prima adunanza dopo che l'Italia scese in campo a rivendicare i suoi diritti, manda un saluto alla Società Reale di Londra, augurando che il poderoso e nobile aiuto dato dall'Inghilterra alla causa degli oppressi consegua in breve ora il fine altamente umano propostosi.

Académie Sciences Institut de France — PARIS.

La R. Accademia dei Lincei, adunatasi per la prima volta dopo che l'Italia scese in campo a rivendicare i suoi diritti, manda un fraterno saluto all'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Francia, augurando che la vittoria delle armi Francesi doni nuove glorie alla Francia pugnante per la difesa degli oppressi.

A S. E. l'Ambasciatore di Russia — ROMA.

La Reale Accademia dei Lincei adunatasi per la prima volta dopo che l'Italia prese le armi per un'alta idealità, manda un saluto all'Imperiale Accademia delle Scienze di Pietrogrado, augurando che presto la grande Russia completi colla finale vittoria, la funzione altissima propostasi di tutelare i diritti delle nazioni.

A S. E. il conte van den Steen de Jehay — ROMA.

La Reale Accademia dei Lincei oggi riunitasi dopo che l'Italia scese in campo al riscatto dei suoi figli irredenti, saluta commossa la Reale Accademia di Bruxelles, augurando che nel più breve tempo possibile possa tenere una solenne seduta festeggiando riacquistata integrità territorio per valore dei suoi soldati e per plebiscito del mondo.

A S. E. il Ministro di Serbia — ROMA.

La Reale Accademia dei Lincei oggi riunitasi dopo che l'Italia prese le armi a rivendicazione dei suoi diritti, manda un saluto ai colleghi dell'Accademia di Belgrado, augurando che la Serbia, già vittoriosa, vegga realizzati gli ideali de' suoi figli.

Per il Presidente: TODARO.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 6 gennaio 1915.

Azzini F. — Filone diabasico negli scisti di Edolo. (Estr. dagli « Atti della Società toscana di scienze naturali: memorie », vol. XXX). Pisa. 1915. 8°.

De Angelis D'Ossat G. — Applicazioni della geologia. XIX: Relazione di perizia geo-idrologica sul disastro del Tritone (8 gennaio 1913) in Roma. La teoria della spinta delle terre e la geologia. (Con atlante). Roma, 1915. 8°.

De Angelis D'Ossat G. — Gli studî e le ricerche geo-idrologiche in Italia, con speciale riguardo all'agricoltura. (Estr. dal « Bollettino mensile di informazioni agrarie e di patologia vegetale », anno VI). Roma, 1915. 8°.

Favaro G. A. — Esame del cerchio graduato e dei due microscopi micrometrici nella posizione occidentale del circolo meridiano di Ertel del R. Osservatorio di Catania: correzioni di Run. (Estr. dalle « Memorie della Società degli spettroscopisti italiani », vol. IV). Catania, 1915. 8°.

Giuffrida-Ruggeri V. — Alcuni dati retrospettivi e attuali sulla antropologia della Libia. (Estr. dall' « Archivio per l'antropologia e la etnologia », vol. XLIV). Firenze, 1915. 8°.

Maire A. — L'oeuvre scientifique de Blaise Pascal: bibliographie critique e analyse de tous les travaux qui s'y rapportent. Préface par Pierre Duhem, Paris 1912. (Estr. dal « Bolleltino di bibliografia e storia delle scienze matematiche », 1915). Pavia, 1915. 8°.

Passerini N. — L' « anchilostomiasi » fra i contadini dei dintorni di Firenze. (Estr. dagli « Atti della R. Accademia dei georgofili », 5ª ser., vol. XII). Firenze, 1915. 8°.

Ronchetti V. — Piastrinopenia da benzolo. (Estr. dalla rivista « Pathologica » 1915). Genova, 1915 8°.

Taramelli T. — La traspirazione tellurica ed i terremoti nell'Appennino centrale e meridionale. (Estr. dai « Rendiconti del R. Istituto lombardo di scienze e lettere », vol. XLVIII). Pavia, 1915. 8°.

Volterra V. — The theory of permutable functions. Princeton, 1915. 8°.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

CORRISPONDENZA

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 giugno 1915.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Segue in terza pagina

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 10 luglio 1915.* **N. 12.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXII.

1915

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 giugno 1915.

Volume XXIV°. — Fascicolo 12°
e Indice del volume.

1° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1915

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

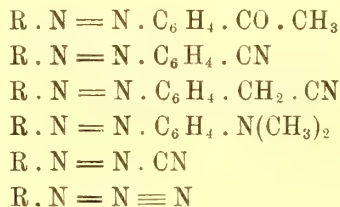
Seduta del 20 giugno 1915.

F. d'Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Chimica. — *Ossidazione di azochetoni e di azonitrili* (1). Nota del Socio A. Angeli.

Allo scopo di estendere e completare i miei studî sull'azione dell'acido peracetico sopra gli azoderivati ed i prodotti azotati in genere, ho sottoposto all'azione di questo reattivo alcuni composti della forma

$$R.N=N.C_6H_4.CO.CH_3$$
$$R.N=N.C_6H_4.CN$$
$$R.N=N.C_6H_4.CH_2.CN$$
$$R.N=N.C_6H_4.N(CH_3)_2$$
$$R.N=N.CN$$
$$R.N=N\equiv N$$

dove R rappresentano, per ora, residui aromatici.

I risultati delle varie esperienze formeranno oggetto di successive comunicazioni, limitandomi, in questa breve Nota, alle ricerche che si riferiscono ai chetoni ed ai nitrili, che sono state intraprese per vedere anche se queste due classi di azoderivati subiscono l'ossidazione normale ad azossicomposti, senza che l'ossidazione si estenda anche alle catene laterali. Sono noti infatti anche i perossidi dei chetoni e gli ossidi dei nitrili. Allo scopo

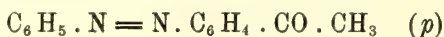
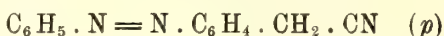
(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto di studî superiori in Firenze.

quindi di limitare l'ossidazione all'azogruppo, si è incominciato dall'operare in soluzione acetica piuttosto diluita ed a temperature non elevate.

In tal modo il chetone

$$C_6H_5 . N = N . C_6H_4 . CO . CH_3 \quad (p)$$

ed il nitrile

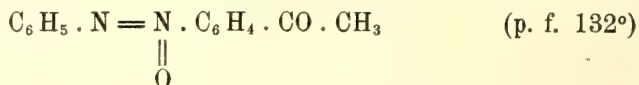
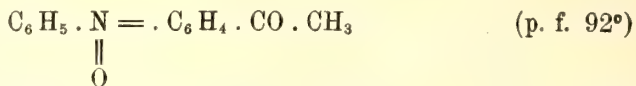
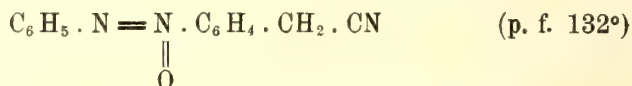
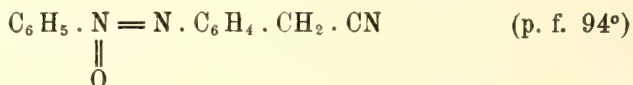
$$C_6H_5 . N = N . C_6H_4 . CH_2 . CN \quad (p)$$

hanno fornito con tutta facilità le due coppie di azossicomposti

$$\underset{\underset{O}{\|}}{C_6H_5 . N} = . C_6H_4 . CO . CH_3 \qquad (\text{p. f. } 92°)$$

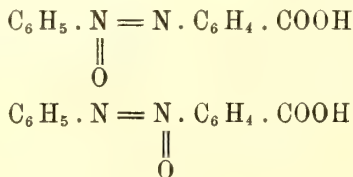
$$C_6H_5 . N = \underset{\underset{O}{\|}}{N} . C_6H_4 . CO . CH_3 \qquad (\text{p. f. } 132°)$$

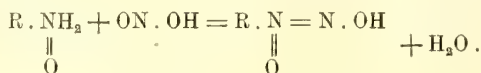
e, rispettivamente [1],

$$C_6H_5 . \underset{\underset{O}{\|}}{N} = N . C_6H_4 . CH_2 . CN \qquad (\text{p. f. } 94°)$$

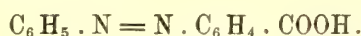
$$C_6H_5 . N = \underset{\underset{O}{\|}}{N} . C_6H_4 . CH_2 . CN \qquad (\text{p. f. } 132°)$$

La loro struttura venne determinata con tutta facilità, giacchè tutti vengono nettamente ossidati dal permanganato in soluzione alcalina; le catene laterali vengono trasformate in carbossili, ed in entrambi i casi si perviene agli acidi

$$C_6H_5 . \underset{\underset{O}{\|}}{N} = N . C_6H_4 . COOH$$

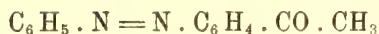
$$C_6H_5 . N = \underset{\underset{O}{\|}}{N} . C_6H_4 . COOH$$

[1] In una recente pubblicazione il prof. Eugenio Bamberger (Berl. Berichte *48* (1915), 547] asserisce che la formazione delle cosiddette nitrosoidrossilammine, partendo da fenilidrossilammina ed acido nitroso, si può meglio spiegare ammettendo che questa reagisca sotto forma di ossido:

$$\underset{\underset{O}{\|}}{R . NH_2} + ON . OH = R . \underset{\underset{O}{\|}}{N} = N . OH + H_2O .$$

È però strano che il prof. Bamberger — che da quanto ha pubblicato, e da quanto ha scritto a me privatamente, dimostra di conoscere molto bene quel poco che io ho fatto in proposito — non rammenta, o fa di non ricordare, che queste stesse considerazioni le ho fatte io qualche anno prima di lui (Angeli, *Ueber die Konstitution der Azoxyverbindungen*, Stuttgart, 1913, pag. 26), quando appunto ho dimostrato che le formole da lui proposte più non possono reggere alla stregua dei nuovi fatti da me scoperti.

che si mostrarono identici a quelli che preparammo tempo addietro [1] per diretta ossidazione dell'azoacido:

$$C_6H_5 . N = N . C_6H_4 . COOH.$$

Parte sperimentale.

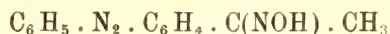
L'azochetone

$$C_6H_5 . N = N . C_6H_4 . CO . CH_3$$

venne preparato per condensazione in soluzione acetica di quantità equimolecolari di nitrosobenzolo e p-amminoacetofenone. Purificato dall'alcool, si presenta in laminette rosse, splendenti, che fondono a 115°.

gr. 0,1832 diedero cc. 18.5 di azoto a 10°.3 e 755 mm.

	Trovato	Calcolato per $C_{14}H_{12}N_2O$
N	12,67	12,50

Con idrossilammina fornisce un'*ossima*

$$C_6H_5 . N_2 . C_6H_4 . C(NOH) . CH_3$$

che, ricristallizzata da benzolo, fonde a 169°.

gr. 0.1498 diedero cc. 22 di azoto a 9°.4 e 753 mm.

	Trovato	Calcolato per $C_{14}H_{13}N_3O$
N	17,63	17,57

L'azochetone, ossidato in soluzione acetica con acqua ossigenata (peridrol Merck), si trasforma in un miscuglio di due *azossicomposti isomeri*, che si separano per la loro diversa solubilità in alcool. La forma meno solubile venne in seguito ricristallizzata da benzolo, e fonde a 132°.

gr. 0.1399 diedero cc. 14 di azoto a 11°. 5 e 764 mm.

	Trovato	Calcolato per $C_6H_5(N_2O) . C_6H_4 . CO . CH_3$
N	11,98	11,66

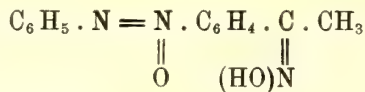
L'azossiderivato isomero, purificato da ligroina, fonde a 92°.

gr. 0.2435 diedero cc. 23.2 di azoto a 8°.3 e 760 mm.

	Trovato	Calcolato
N	11,50	11,66

[1] Angeli e Valori, in questi Rendiconti (1913), 1° sem., pag. 132.

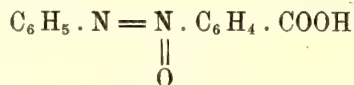
Dall'azossichetone p. f. 132° venne anche preparata una *ossima*, alla quale non può spettare che la seguente configurazione:

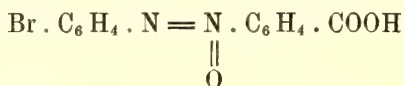
$$\begin{array}{l} C_6H_5 . N = \underset{\underset{O}{\|}}{N} . C_6H_4 . \underset{\underset{(HO)N}{\|}}{C} . CH_3 \end{array}$$

Purificata dall'alcool, fonde a 181°.

gr. 0.1162 diedero cc. 16 di azoto a 9°.8 e 753 mm.

	Trovato	Calcolato per $C_{14}H_{13}N_3O_2$
N	16,36	16,34

L'azossichetone p. f. 132° venne ossidato con soluzione acquosa di permanganato, in presenza di poca potassa; si ottiene così un liquido giallognolo, dal quale, per trattamento con acido solforico diluito, si separa l'acido

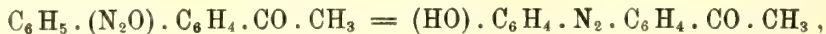
$$C_6H_5 . N = \underset{\underset{O}{\|}}{N} . C_6H_4 . COOH$$

che presenta tutti i caratteri di quello che descrivemmo due anni or sono. Allo scopo di meglio identificarlo, venne trattato con bromo; in tal modo si ottiene il p bromoacido:

$$Br . C_6H_4 . N = \underset{\underset{O}{\|}}{N} . C_6H_4 . COOH$$

che a sua volta è eguale a quello che già a suo tempo proparammo.

gr. 0.1730 diedero cc. 12.8 di azoto a 10° e 747 mm.

	Trovato	Calcolato per $C_{13}H_9N_2O_3Br$
N	8,71	8,72

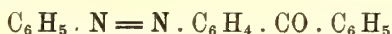
Entrambi gli azossichetoni, per azione dell'acido solforico, forniscono lo stesso p-ossiazochetone,

$$C_6H_5 . (N_2O) . C_6H_4 . CO . CH_3 = (HO) . C_6H_4 . N_2 . C_6H_4 . CO . CH_3 ,$$

colorato in rosso, solubile negli alcali e che fonde a 134°.

gr. 0.1775 diedoro cc. 17.4 di azoto a 10° e 737 mm.

	Trovato	Calcolato per $C_{14}H_{12}N_2O_2$
N	11,40	11,66

In modo analogo, per condensazione del nitrosobenzolo con il p-ammino-benzofenone, si prepara l'azochetone:

$$C_6H_5 . N = N . C_6H_4 . CO . C_6H_5$$

che, purificato dall'alcool, fonde a 106°.

gr. 0.1834 diedero cc. 15,4 di azoto a 8°.5 e 736 mm.

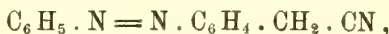
	Trovato	Calcolato per $C_{19}H_{14}N_2O$
N	9,78	9,77

Anche questo prodotto, per azione dell' acqua ossigenata, fornisce un azossicomposto che fonde a 72°. Data la piccola quantità di sostanza che avevamo a nostra disposizione, non ci fu possibile di fissarne la struttura.

gr. 0.1453 diedero cc. 11.5 di azoto a 8° e 748 mm.

	Trovato	Calcolato per $C_{19}H_{14}N_2O_2$
N	9,40	9,27

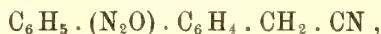
L'*azonitrile*,

$$C_6H_5 . N = N . C_6H_4 . CH_2 . CN ,$$

si prepara nello stesso modo condensando il nitrosobenzolo con il p-ammi-nonitrile. Lamine rosso-aranciate che fondono a 127°.

gr. 0.2009 diedero cc. 32 di azoto a 9°.3 e 751 mm.

	Trovato	Calcolato
N	18,93	19,00

Ossidato con acqua ossigenata, esso pure fornisce a sua volta due azossi-composti isomeri,

$$C_6H_5 . (N_2O) . C_6H_4 . CH_2 . CN ,$$

che vennero separati per successive ricristallizzazioni dal benzolo. La forma più solubile fonde a 94°.

gr. 0.2056 diedero cc. 30,6 di azoto a 10° e 759 mm.

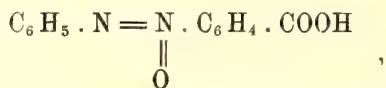
	Trovato	Calcolato
N	17,81	17,72

L'isomero meno solubile fonde a 132°.

gr. 0.1644 diedero cc. 24.2 di azoto a 10° e 766 mm.

	Trovato	Calcolato
N	17,78	17,72

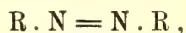
L'azossinitrile che fonde a 132° per ossidazione con permanganato fornisce a sua volta l'acido:

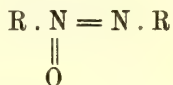
$$\begin{array}{l} C_6H_5 . N = N . C_6H_4 . COOH \\ \qquad\qquad\; \| \\ \qquad\qquad\; O \end{array} ,$$

e così rimane fissata anche la struttura di questi due isomeri.

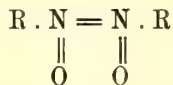
Ringrazio il dott. Pietro Saccardi per l'aiuto che mi ha prestato nella esecuzione di queste ricerche.

Chimica. — *Sopra l'ossidazione del dimetilamminoazobenzolo* (1). Nota del Socio A. Angeli.

Come tutte le numerose esperienze finora eseguite hanno dimostrato, le sostanze che contengono un azogruppo,

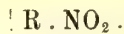
$$R . N = N . R ,$$

per azione dell'acido peracetico assumono solamente un atomo di ossigeno per trasformarsi in azossicomposti:

$$\begin{array}{l} R . N = N . R \\ \quad\;\; \| \\ \quad\;\; O \end{array}$$

Operando in condizioni più energiche, sarà anche possibile di pervenire a prodotti di ossidazione più profonda; ma certamente non al derivato

$$\begin{array}{l} R . N = N . R \\ \quad\;\; \| \quad\;\; \| \\ \quad\;\; O \quad\;\; O \end{array}$$

perchè esso rappresenta la forma bimolecolare dei nitrosoderivati

$$R . NO$$

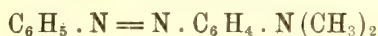
i quali, come è noto, con tutta facilità, in presenza di ossidanti anche deboli, si trasformano nei corrispondenti nitroderivati:

$$R . NO_2 .$$

Le cose procedono invece in modo diverso quando il prodotto azoico contenga un terzo atomo di azoto trivalente; se questo atomo si trova sotto forma di amminogruppo, esso subisce le solite trasformazioni degli ammino-

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto di studî superiori in Firenze.

derivati aromatici, e l'idrossilammina, che con tutta probabilità in una prima fase si forma, viene successivamente ossidata a nitroso- e nitroderivato ed in parte anche trasformata in sostanze che contengono nuovi azo- ed azossigruppi. Molto più semplice è il caso di una ammina bisostituita, giacchè l'atomo di azoto assume nettamente un atomo di ossigeno per dare il corrispondente ossido.

Per le mie esperienze ho scelto il *p*-dimetilamminoazobenzolo

$$C_6H_5 . N = N . C_6H_4 . N(CH_3)_2$$

che venne sospeso in acido acetico glaciale, ed al liquido, intensamente colorato in rosso venne aggiunto peridrol Merck, in eccesso. Riscaldando a b. m. la reazione procede molto rapida; ma in tal modo il rendimento non è soddisfacente, e perciò è preferibile di lasciare che l'ossidazione si compia a temperatura ordinaria. Dopo qualche giorno, quando il liquido è diventato giallo-bruno, si diluisce con acqua e poi si aggiunge acido solforico diluito; si separa così un abbondante precipitato costituito da laminette splendenti giallo-aranciato. Riscaldato a 156°, fonde decomponendosi; esso è il solfato della nuova base, per mettere in libertà la quale si stempra il prodotto in acqua e si aggiunge carbonato sodico in lieve eccesso. Si raccoglie quindi su filtro; poi si ricristallizza da acqua bollente. Per raffreddamento, si separano lamine dorate, che possiedono uno vivo splendore. È molto solubile nella maggior parte dei solventi, e per l'analisi venne ricristallizzato un'ultima volta da benzolo. Fonde a 127° con decomposizione:

gr. 0,1697 diedero cc. 23,8 di azoto a 17° e 748 mm.

	Trovato	Calcolato per $C_{14}H_{15}N_3O_2$
N	16,25	16,34

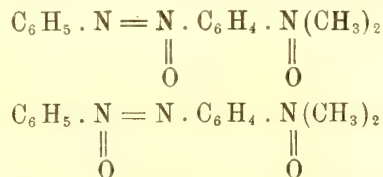
La soluzione acquosa viene ridotta a caldo dall'idrogeno solforato, e così si rigenera il dimetilamminoazobenzolo di partenza; la riduzione invece non si compie operando in soluzione acida. La soluzione acquosa viene ridotta a caldo anche dal cloridrato di idrossilammina, oppure dal solfato di idrazina. Con acido solforico diluito fornisce il solfato cui prima si è accennato.

gr. 0,1611 diedero cc. 19,2 di azoto a 16°,7 e 751 mm:

	Trovato	Calcolato per $(C_{14}H_{15}N_3O_2)_2H_2SO_4$
N	13,88	13,72

Il dimetilamminoazobenzolo, per azione dell'acqua ossigenata, ha quindi assunto due atomi di ossigeno; le possibilità sono due sole:

$$C_6H_5 . N = \underset{\underset{O}{\|}}{N} . C_6H_4 . \underset{\underset{O}{\|}}{N}(CH_3)_2$$

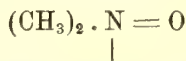
$$C_6H_5 . \underset{\underset{O}{\|}}{N} = N . C_6H_4 . \underset{\underset{O}{\|}}{N}(CH_3)_2$$

per decidere fra le quali il prodotto venne trattato con bromo, e successiva-

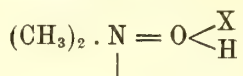
mente ridotto con stagno ed acido cloridrico. Si ottiene così una base che con cloruro di benzoile fornisce nettamente *p-bromobenzanilide*:

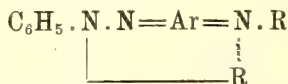
$$C_6H_5 . CO . NH . C_6H_4Br .$$

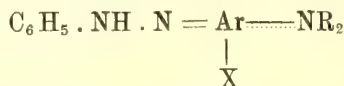
Al prodotto di ossidazione spetta quindi la struttura rappresentata dalla prima delle due formole.

Per quanto riguarda il solfato, siccome gli ordinarî azossicomposti, a parità di condizioni, non forniscono sali, si deve ammettere che l'acido sia legato al gruppo

$$\begin{array}{l}(CH_3)_2 . \underset{|}{N} = O\end{array}$$

e che con molta probabilità si tratti di un *sale di ossonio*, come suppone anche Meisenheimer [1]. Indicando l'acido con XH, il sale avrà la forma:

$$(CH_3)_2 . \underset{|}{N} = O<\begin{smallmatrix}X\\H\end{smallmatrix}$$

Come è noto, i dimetilamminoazobenzoli allo stato libero sono colorati in giallo, mentre invece i loro sali sono rossi; Hantzsch [2] attribuisce ai primi la struttura

$$\begin{array}{l}C_6H_5 . N . N{=}Ar{=}N . R\\ \quad\quad\ \ |____________\,\vdots\\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\ \ R\end{array}$$

e i sali considera invece come derivanti da isomeri di valenza:

$$C_6H_5 . NH . N = \underset{\underset{X}{|}}{Ar} \cdots NR_2$$

I prodotti da me descritti invece, tanto allo stato libero, quanto sotto forma di sali, possiedono lo stesso colore: ciò si spiega quando si pensi che in essi l'atomo di azoto, legato ai due metili ed all'ossigeno, è pentavalente, e, perciò, più non sono possibili strutture analoghe a quelle ammesse da Hantzsch per i composti da lui presi in esame.

Anche il sale sodico dell'eliantina (metilorange) viene ossidato in modo analogo per azione dell'acido peracetico: si formano cristallini gialli che a 233° fondono con decomposizione; più non arrossano con gli acidi, ed il prodotto non venne ulteriormente studiato.

Astronomia. — *La nuova zona rossa coronale, fotografata dalla Missione italiana nell'eclisse solare del 1914.* Nota del Socio A. Riccò.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(1) Berliner Berichte, *46* (1913), 1149.
(2) ibid., *48* (1915), 174.

Geometria. — *Problemi nuovi di geometria metrico-differenziale.* Nota di E. BOMPIANI, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO.

1. La geometria differenziale metrica si occupa ora quasi esclusivamente delle proprietà appartenenti al gruppo dell'applicabilità, cioè delle proprietà invariantive per una deformazione dell'ente che si studia, la quale lasci inalterati i suoi elementi lineari. Viene affatto spontanea alla mente l'idea di studiare l'effetto di quelle deformazioni nelle quali all'invarianza dell'elemento lineare dell'ente, p. es. superficie, sia sostituita l'invarianza di un certo numero di curvature di linee tracciate su di essa. È naturale che la esistenza di tali deformazioni è legata alla dimensione dello spazio in cui la superficie è immersa, e alla dimensione dello spazio su cui la si vuol applicare (uguale o distinta dalla precedente); talchè, p. es., non c'è luogo a parlare di queste nuove deformazioni nello spazio ordinario (riducendosi esse ai movimenti). Ma non appena si aumenti la dimensione dell'ambiente i nuovi problemi si presentano altrettanto naturali quanto gli antichi: ed anzi, in alcuni casi (¹), gli uni e gli altri si equivalgono.

Io non tento per ora una teoria generale: mi limito a dar alcuni resultati; e ciò faccio tanto più volentieri perchè essi si riattaccano a nozioni di geometria proiettivo-differenziale, delle quali viene nuovamente provata l'utilità. Mi servo di considerazioni infinitesimali, cioè di quelle che il Beltrami considerava come il miglior aiuto in queste ricerche.

2. Nell'applicare una superficie sviluppabile (²) (luogo delle tangenti ad una curva, cono, o cilindro) sopra un piano, rimangono inalterati gli elementi lineari delle curve tracciate su di essa; varia invece la loro curvatura, ad eccezione di quella dello spigolo di regresso, i cui angoli di contingenza rimangono invariati nell'applicazione.

Si supponga la superficie sviluppabile immersa in un S_n con $n > 3$: in tal caso è possibile di deformarla lasciando inalterati e gli elementi lineari e la prima curvatura delle curve tracciate su di essa. Basta adagiare, con successive rotazioni infinitesime intorno ai piani osculatori, gli S_3 osculatori allo spigolo di regresso sopra un S_3 fisso. Siccome ciascuno di quegli S_3 contiene due elementi lineari successivi di una qualsiasi curva tracciata sulla

(¹) Cfr. la mia Nota: *Forma geometrica delle condizioni per la deformabilità delle ipersuperficie* (Atti R. Acc. dei Lincei, vol. XVIII, 1914), n. 5.

(²) Intendiamo parlare sempre di spazî euclidei.

sviluppabile, ogni coppia rimane inalterata nella rotazione; e l'elemento lineare comune a due coppie successive, appartenendo al piano-asse di rotazione, rimane fisso. In questa operazione non mutano perciò nè gli elementi lineari nè gli angoli di contingenza di una qualsiasi curva della superficie: quindi non muta neppure la sua prima curvatura. Concludiamo senz'altro con l'osservazione :

I. *Una superficie sviluppabile può applicarsi sopra un* S_h *conservando l'elemento lineare e le prime* $h-2$ *curvature di ogni curva tracciata sulla superficie, e la* $(h-1)$*-esima dello spigolo di regresso.*

2. L'osservazione precedente è strettamente legata al fatto che due generatrici successive della rigata sono linearmente dipendenti (di carattere proiettivo), cioè che la rigata ha indice di sviluppabilità 1. Ricerchiamo il significato metrico del primo indice di sviluppabilità in generale.

Ho denominato [1] primo indice di sviluppabilità di una rigata il massimo numero di generatrici consecutive linearmente indipendenti di essa. Una rigata d'indice di sviluppabilità ν appartiene ad uno spazio di dimensione $\geqq 2\nu-1$; però la rigata dello $S_{2\nu-1}$ non è di tipo generale, e poichè appartiene di già allo spazio di minima dimensione possibile (compatibilmente col suo indice di sviluppabilità), non va considerata nella presente ricerca (di applicabilità sopra uno spazio di dimensione inferiore). Siccome lo spazio di dimensione minima per una rigata di tipo generale è un $S_{2\nu}$, bisognerà prendere in esame quelle appartenenti a spazii di dimensione $>2\nu$.

Siccome $\nu+1$ generatrici consecutive sono linearmente dipendenti, esse individuano un $S_{2\nu}$; gli $S_{2\nu-1}$, contenenti ν generatrici successive, riescono perciò osculatori ad una curva σ [2] (non appartenente in generale alla rigata); il punto d'intersezione di una generatrice con lo spazio delle ν precedenti descrive una curva, γ, appartenente alla rigata.

Ciò premesso, consideriamo due $S_{2\nu}$ consecutivi e lo $S_{2\nu-1}$ loro intersezione; possiamo far rotare uno dei due $S_{2\nu}$ intorno allo $S_{2\nu-1}$ sino a farlo coincidere con l'altro. Vediamo che cosa rimane invariato in questa operazione: evidentemente gli elementi contenuti nello $S_{2\nu}$, cioè gli elementi di ordine ν, E_ν [3], di tutte le curve tracciate sulla rigata. Gli elementi di una curva fino a quello d'ordine ν ne definiscono le prime $\nu-1$ curvature: queste dunque rimangono invariate insieme coll'elemento lineare nella trasformazione fatta. La curva γ, com'era prevedibile per analogia col caso $\nu=1$, si comporta in modo eccezionale. Infatti essa gode della proprietà

[1] Nella mia Memoria: *Alcune proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di rette negli iperspazî* (Rend. Circ. matem. di Palermo, tom. XXXVII, 1914), § 3.

[2] *Alcune proprietà* ecc., loc. cit., § 2.

[3] *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero* (Atti R. Accad. delle scienze di Torino, vol. XLVIII, 1912-1913), n. 2.

caratteristica seguente (¹): i suoi S_ν osculatori sono immersi negli $S_{2\nu-1}$ sopra nominati, e quindi un $S_{2\nu}$ contiene un $S_{\nu+1}$ osculatore a γ; perciò nell'applicare nel modo indicato la rigata sopra un $S_{2\nu}$, la curva mantiene inalterate le sue prime ν curvature. S'intende che la curva σ, che ha per $S_{2\nu}$ osculatori quelli nominati, mantiene inalterate nella deformazione tutte le $2\nu - 1$ prime curvature.

Ora si può ragionare più in generale come s'è fatto nel caso delle sviluppabili ordinarie; si giunge con ciò al resultato:

II. *Una rigata d'indice di sviluppabilità ν, immersa in uno spazio qualsiasi S_n $(n > 2\nu)$, può sempre applicarsi sopra un S_h $(n > h \geq 2\nu)$ mantenendo inalterati gli elementi lineari e tutte le curvature, fino alla $(h - \nu - 1)$-esima inclusa, di ogni curva tracciata sulla superficie. Esiste su di essa una curva (la γ) che mantiene inalterata anche la $(h - \nu)$-esima curvatura. La deformazione si opera facendo ruotare gli S_h, individuati da $h - \nu + 1$ generatrici successive, intorno agli S_{h-1} in essi contenuti e individuati da $h - \nu$ generatrici: la rotazione dev'esser tale da portare tutti gli S_h a coincidere.*

3. Cerchiamo d'invertire la proprietà ora trovata per le rigate di indice di sviluppabilità ν: il caso $\nu = 1$ ci avverte in che modo dovrà farsi quest'inversione. Infatti in tal caso si dimostra (ciò che Monge riteneva superfluo) che, se una superficie di S_3 è applicabile sul piano, essa è rigata con indice di sviluppabilità 1. Qui si vede comparire una limitazione nella dimensione dell'ambiente, a cui la superficie deve appartenere, che non figura nel teorema diretto: e questa limitazione è essenziale, perchè una superficie di S_4 applicabile sul piano può anche non esser rigata (²). Si prevede dunque che il teorema che abbiamo in vista, posto che sia vero, potrà enunciarsi così:

III. *Le superficie rigate di $S_{2\nu+1}$ applicabili sopra un $S_{2\nu}$ in modo che si conservino gli elementi lineari e le prime $\nu - 1$ curvature di qualsiasi curva tracciata su di esse, hanno necessariamente il primo indice di sviluppabilità ν.*

S'è dovuta enunciare esplicitamente anche la condizione che la superficie sia rigata, perchè essa non è conseguenza della dimensione dello spazio d'immersione e delle condizioni d'applicabilità (al contrario di ciò che accade nello spazio ordinario); vale infatti il teorema (del quale il precedente è un corollario immediato):

IV. *Condizione necessaria e sufficiente perchè una superficie di $S_{2\nu+1}$ sia applicabile sopra un $S_{2\nu}$ in modo da conservare gli elementi lineari e le prime $\nu - 1$ curvature di qualsiasi curva tracciata su di essa, è che*

(¹) Per $\nu = 2$, cfr. *Alcune proprietà*.., loc. cit., n. 3; e poi ibidem n. 7.

(²) Cfr. Killing: *Nicht-Euklidische Geometrie in analytischer Behandlung.*

la superficie possegga ∞^1 *sezioni negli* S_ν *osculatori ad una curva* (*coi casi degeneri*).

È appunto ciò che ora vogliamo provare.

4. Per rendere più chiara la dimostrazione, riprendiamo quella per lo spazio ordinario [1]: nel corso del ragionamento vedremo quali sono le nozioni da estendere per trasportare la dimostrazione al caso generale, negli iperspazî.

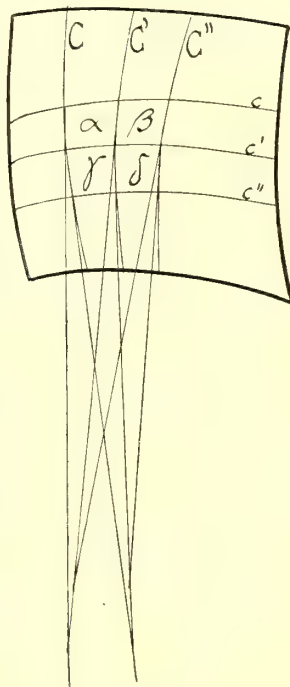



Fig. 1.

Sia dunque una superficie in S_3: tracciamo su di essa un sistema semplicemente infinito di linee (curve c) e costruiamo il sistema coniugato (curve C). Consideriamo la curva c passante per un punto P: la striscia infinitesima di superficie compresa fra la c e la curva infinitamente vicina c' può applicarsi sopra un piano che rotoli sulla sviluppabile circoscritta alla superficie lungo c. Supponiamo, ora, che tutta la superficie sia applicabile sul piano: consideriamo gli elementi di superficie vicini a P e compresi fra le curve c, c', c'', e C, C', C'', denotiamoli, come in figura, con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Se l'intersezione dei due elementi superficiali γ e δ non coincide con quella dei piani di α e β (cioè se γ e δ non appartengono alla svilup-

[1] Non conosco una dimostrazione sintetica semplice di questo teorema; l'averlo Monge ritenuto evidente, ha forse distolto i geometri della sua scuola dall'occuparsene. Quanto alle dimostrazioni analitiche, invece, esse abbondano.

pabile anzidetta), non è possibile far ruotare questi due piani fino a sovrapporli, senza alterare gli elementi lineari, se non si staccano gli elementi γ e δ lungo la loro linea d'intersezione.

Si facciano ora ruotare γ e δ in modo da portarli sullo stesso piano su cui si sono adagiati α e β: i lembi del taglio eseguito per staccare γ da δ ruotano anch'essi e, data l'arbitrarietà delle linee c (o, se si vuole, delle C), non vengono a sovrapporsi di nuovo sul piano: sicchè si avrà o una duplicatura o uno strappo della superficie nelle adiacenze di P. Ciò si evita solo se gli elementi superficiali γ e δ appartengono alla sviluppabile detta, cioè se la nostra superficie coincide con essa. c. d. d.

Per questa dimostrazione è essenziale di notare:

1) che una superficie di S_3 è divisibile in elementi (infinitesimi) piani mediante un doppio sistema coniugato;

2) come devono esser saldati questi diversi elementi lungo le linee di un sistema perchè possa farsi l'applicazione richiesta.

5. Per estendere questa dimostrazione al caso che abbiamo in vista, occorre trovare sulle superficie di $S_{2\nu+1}$ un sistema di curve definito da una proprietà analoga a quella che serve a definire i sistemi coniugati in S_3.

Consideriamo a tal fine una curva tracciata regolarmente sulla superficie e i piani tangenti a questa in $\nu+1$ punti infinitamente vicini della curva. Siccome ciascun piano tangente contiene il punto di contatto del successivo, lo spazio di ν piani tangenti consecutivi è un $S_{2\nu}$ che taglia il $(\nu+1)$-esimo piano tangente lungo una retta passante per il punto di contatto di questo piano: questa tangente può considerarsi come coniugata all'elemento d'ordine ν, E_ν (individuato da $\nu+1$ punti successivi) di curva assegnato.

Sicchè, dato sulla superficie un sistema semplicemente infinito di curve c, rimane definito un sistema semplicemente infinito di curve C (inviluppate dalle tangenti costruite) che potrà dirsi coniugato d'ordine ν col precedente; però, appena ν superi l'unità, non c'è reciprocità fra i due sistemi di curve c e C. Si estende invece quella proprietà dei sistemi coniugati che ci è servita nella dimostrazione:

Le tangenti coniugate agli elementi d'ordine ν di una curva formano una rigata d'indice di sviluppabilità ν (¹); il che è incluso nella definizione stessa di quelle tangenti.

6. Ciò posto, è facile di estendere la dimostrazione; supponiamo, per semplificare il linguaggio, $\nu=2$. Si ha dunque in S_5 una superficie che si sa essere applicabile sopra un S_4 in modo da conservare inalterata la prima curvatura di tutte le sue curve. Tracciamo ad arbitrio, su di essa, un sistema ∞^1 di curve c, e le loro coniugate di second'ordine, C. Si conside-

(¹) Mentre la rigata generale dello $S_{2\nu+1}$ ha il primo indice di sviluppabilità $=\nu+1$.

rino gli elementi superficiali contigui disposti come in figura. Si fa presto ad applicare la striscia di superficie $c\,c'$ sopra un S_4 in modo da soddisfare alle condizioni volute.

Infatti basta applicare sopra un S_4 la rigata d'indice di sviluppabilità 2 circoscritta alla superficie lungo c (ciò è possibile nelle condizioni richieste, per il teor. II): in questa deformazione le coppie di elementi su-

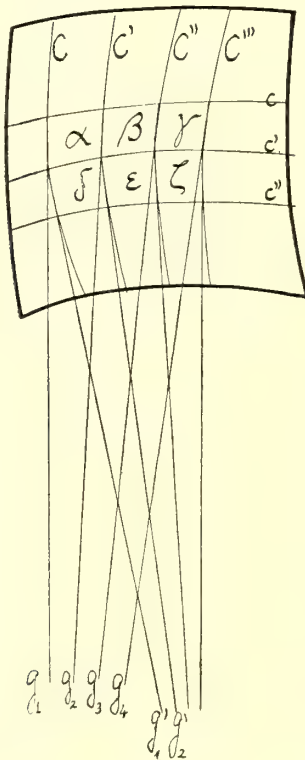



Fig. 2.

perficiali contigui si muovono come se fossero rigidamente connessi, e quindi si conserva la prima curvatura di ogni curva della striscia. Ora pensiamo alle striscie successive. Per la stessa ragione la deformazione precedente dev'esser tale da lasciar rigide le coppie di elementi superficiali (δ, ε), (ε, ζ).... ; ciò non è possibile se non quando gli S_3, come $(g_1\,g_2)$ e $(g'_1\,g'_2)$, coincidono.

Si consideri infatti l'elemento lineare comune a β ed ε, che indicheremo con β/ε: quando si fa rotare lo S_4 $(g_1\,g_2\,g_3)$ intorno allo S_3 $(g_1\,g_2)$, l'elemento β/ε assume ∞^1 posizioni, e altrettanto accade se si fa rotare lo S_4 $(g'_1\,g'_2\,g'_3)$ intorno allo S_3 $(g'_1\,g'_2)$; se questi due S_3 non coincidono le due serie di ∞^1 posizioni assunte da β/ε non hanno in comune se non la posizione iniziale: ciò che porta di necessità uno strappamento della superficie nella

deformazione da eseguire. Sicchè intanto si ricava come condizione necessaria per l'applicabilità nel senso definito, che siano coincidenti gli S_3 $(g_1\, g_2)$ e $(g'_1\, g'_2)$, ecc.: da ciò segue che le curve C debbono essere nei piani osculatori ad una curva (e casi proiettivamente degeneri), altrimenti la superficie starebbe tutta in S_3.

La condizione trovata è anche sufficiente. Infatti si consideri la curva alla quale quegli S_3 sono osculatori, e gli S_4 ad essa osculatori: con opportuna rotazione di questi S_4 intorno agli S_3 in essi contenuti si possono portare tutti gli S_4 a coincidere; e poichè ogni S_4 contiene almeno due elementi successivi di qualsiasi curva della superficie, il teorema IV è dimostrato (per $\nu = 2$).

Analogamente si procede per ν qualsiasi.

7. Se la superficie è rigata le sue generatrici (curve C) sono immerse negli S_ν osculatori ad una curva: è questa una proprietà caratteristica delle rigate d'indice di sviluppabilità ν (1). È così provato anche il teorema III.

Matematica. — *Una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di soluzioni nell'equazione integrale di 1ª specie.* Nota di Attilio Vergerio, presentata dal Socio V. Volterra.

1. In una mia Nota, apparsa recentemente in questi Rendiconti (2), ho dimostrato che, data l'equazione, a nucleo simmetrico,

$$g(s) = \int_a^b \mathrm{K}(st)\, h(t)\, dt\,, \tag{1}$$

posto

$$\mathrm{V}_n = \int_a^b [g_n(s)]^2\, ds \quad ; \quad \frac{\mathrm{V}_{n+1}}{\mathrm{V}_n} = \mathrm{C}_n\,,$$

si ha

$$\lim_{n=\infty} \mathrm{C}_n = \mathrm{C}\,,$$

dove C è una quantità finita, positiva e diversa da zero; ed inoltre che l'essere le costanti C_n $(n = 0\,,1\,,2\,,\ldots)$ tutte eguali tra loro, ovvero (ciò che è lo stesso) l'essere soddisfatta l'eguaglianza $g(s) = \frac{g_2(s)}{\mathrm{C}_0}$ è condizione *sufficiente* perchè la (1) ammetta soluzioni; in tale caso, una di queste è data da

$$h(t) = \frac{g_1(t)}{\mathrm{C}_0}\,.$$

(1) *Alcune proprietà* ecc., loc. cit., n. 5.

(2) *Sull'equazione integrale di 1ª specie* (seduta dell'8 nov. 1914).

In questa breve Nota, mi propongo di esporre una condizione necessaria e sufficiente, in un caso particolare abbastanza esteso, dalla quale verrà anche messo in luce il legame esistente tra le costanti C_n, da me introdotte nella Nota citata, e le costanti γ_n di cui lo Schmidt si è valso per dimostrare l'esistenza degli autovalori e delle corrispondenti autofunzioni.

2. Richiamo anzitutto alcuni risultati dello Schmidt (1).

Supposto che il nucleo $K(st)$ sia simmetrico, si ponga

$$U_n = \int_a^b K_n(ss)\, ds .$$

Ne segue:

$$U_{\mu+\nu} = \int_a^b \int_a^b K_\mu(sr)\, K_\nu(sr)\, dr\, ds$$

$$U_{2\nu} = \int_a^b \int_a^b [K_\nu(sr)]^2\, dr\, ds .$$

Applicando la disuguaglianza dello Schwarz alla prima delle due precedenti uguaglianze, dopo aver fatto in essa $\mu = n + 1$, $\nu = n - 1$, si ha:

$$U_{2n}^2 \leq U_{2n+2}\, U_{2n-2} ,$$

da cui

$$\frac{U_{2n}}{U_{2n-2}} \leq \frac{U_{2n+2}}{U_{2n}} .$$

Posto ora

$$\frac{U_{2n+2}}{U_{2n}} = \gamma_n ,$$

sarà

$$\gamma_{n-1} \leq \gamma_n .$$

Lo Schmidt dimostra, poi, che

$$\lim_{n=\infty} \gamma_n = \gamma ,$$

dove γ è una quantità finita positiva e diversa da zero; ed inoltre che

$$(\alpha) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{K_{2n}(st)}{\gamma^n} = H(st) ,$$

dove $H(st)$ rappresenta una funzione finita, continua e positiva, che non può essere identicamente nulla, in s ed in t.

(1) Math. Ann., Bd. LXIII.

3. Ciò premesso, si supponga che la $K(st)$, oltre ad essere simmetrica, sia tale che tutte le costanti γ_n ad essa relative siano tutte eguali tra loro; sia γ il loro valore comune.

Si dimostra allora facilmente che dovrà essere, qualunque sia n,

$$K(st) = \frac{K_{2n+1}(st)}{\gamma^n}. \tag{2}$$

Si ha infatti

$$\int_a^b \int_a^b \left[K(st) - \frac{K_{2n+1}(st)}{\gamma^n}\right]^2 ds\,dt = \int_a^b \int_a^b [K(st)]^2\,ds\,dt -$$
$$- 2\int_a^b \int_a^b K(st)\,\frac{K_{2n+1}(st)}{\gamma^n}\,ds\,dt + \int_a^b \int_a^b \left[\frac{K_{2n+1}(st)}{\gamma^n}\right]^2 ds\,dt.$$

E poichè si ha identicamente, qualunque sia n,

$$\frac{U_{2+n2}}{\gamma^n} = \frac{U_{2n+2}}{\gamma_1\,\gamma_2 \cdots \gamma_n} = \frac{U_{2n+2}}{\frac{U_{2n+2}}{U_2}} = U_2,$$

ed ancora

$$\int_a^b \int_a^b [K(st)]^2\,ds\,dt = U_2,$$

$$\int_a^b \int_a^b \left[\frac{K_{2n+1}(st)}{\gamma^n}\right]^2 ds\,dt = \frac{U_{4n+2}}{\frac{U_{4n+2}}{U_2}} = U_2,$$

$$2\int_a^b \int_a^b K(st)\,\frac{K_{2n+1}(st)}{\gamma^n}\,ds\,dt =$$
$$= \frac{2}{\gamma^n}\int_a^b \int_a^b K(st)\,ds\,dt \int_a^b K_n(sr)\,K_{n+1}(rt)\,dr =$$
$$= \frac{2}{\gamma^n}\int_a^b \int_a^b K_{n+1}(rt)\,dr\,dt \int_a^b K(ts)\,K_n(sr)\,ds =$$
$$= \frac{2}{\gamma^n}\int_a^b \int_a^b K_{n+1}(rt)\,K_{n+1}(tr)\,dr\,dt =$$
$$= \frac{2}{\gamma^n}\int_a^b \int_a^b [K_{n+1}(rt)]^2\,dr\,dt = 2\,\frac{U_{2n+2}}{\gamma^n} = 2U_2,$$

sarà

$$\int_a^b \int_a^b \left[K(st) - \frac{K_{2n+1}(st)}{\gamma^n}\right]^2 ds\,dt = U_2 - 2U_2 + U_2 = 0.$$

La (2) rimane quindi, con ciò, dimostrata.

4. Dalla (2) si ha l'eguaglianza

$$\gamma K_{2n-1}(st) = K_{2n+1}(st)$$

la quale, moltiplicata per $g(t)$ ed integrata, dà

$$\gamma g_{2n-1}(s) = g_{2n+1}(s) .$$

Si moltiplichino ambo i membri di quest'ultima per $g_1(s)$, e si integri nuovamente. Ricordando che (ved. mia Nota cit., n. 3)

$$\int_a^b [g_n(s)]^2 ds = \int_a^b g_{n-r}(s)\, g_{n+r}(s)\, ds ,$$

si ottiene

$$\gamma \int_a^b [g_n(s)]^2 ds = \int_a^b [g_{n+1}(s)]^2 ds ,$$

e quindi $\gamma = \frac{V_{n+1}}{V_n}$; cioè

$$C_n = \gamma \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) . \tag{3}$$

Si osservi che la (3) sarà sempre verificata, *ammetta o no la* (1) *soluzione.*

Dalla (2) si ha ancora

$$\gamma K(st) = K_3(st)$$

la quale, *se la* (1) *ammette soluzione*, moltiplicata per $h(t)\, dt$ ed integrata, dà l'eguaglianza

$$\gamma g(s) = g_2(s) ,$$

dalla quale, mediante moltiplicazione per $g(s)$ ed integrazione, si ottiene l'altra (ricordando che $\int_a^b [g(s)]^2 ds = V_0$)

$$\gamma = \frac{V_1}{V_0} = C_0 . \tag{4}$$

La condizione $C_0 = \gamma$ è quindi *necessaria*. Essa è anche *sufficiente*; infatti dalle (3) e (4) si deduce, allora, che le costanti C_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ saranno *tutte* eguali tra loro; il che è condizione sufficiente, come venne ricordato al num. 1.

Evidentemente la condizione $C_0 = \gamma$ equivale all'altra $C_0 = C_1$, che talora può tornare più comoda nella pratica.

Possiamo quindi affermare che

Se le costanti γ_n, relative al nucleo simmetrico dell'equazione integrale di 1ª specie, sono tutte eguali ad una quantità γ, condizione necessaria e sufficiente affinchè la (1) *ammetta soluzioni è che sia soddisfatta l'uguaglianza $C_0 = \gamma$, ovvero (ciò che è lo stesso) l'altra $C_0 = C_1$.*

Possiamo anche aggiungere:

in ogni caso, sotto le stesse ipotesi, sarà valida l'uguaglianza (3) [1].

5. Uno dei casi, in cui la condizione relativa alle costanti γ_n è soddisfatta, si presenta quando il nucleo ha la seguente forma:

$$K(st) = \alpha \varphi(s) \varphi(t),$$

dove α è una costante qualunque.

Infatti, in tal caso, si ha

$$K_2(st) = \alpha^2 \int_a^b \varphi(s) \varphi(r) \cdot \varphi(r) \varphi(t) \, dr = \alpha^2 \varphi(s) \varphi(t) \int_a^b [\varphi(r)]^2 \, dr$$

$$K_3(st) = \alpha^3 \varphi(s) \varphi(t) \left\{ \int_a^b [\varphi(r)]^2 \, dr \right\}^2$$

. . . .

e così via. Da queste uguaglianze si vede subito che γ_n è indipendente da n, e che inoltre è

$$\gamma = \alpha^2 \left\{ \int_a^b [\varphi(r)]^2 \, dr \right\}^2 .$$

Naturalmente, l'essere tutte eguali tra loro le costanti γ_n dipende dalla natura della funzione $K(st)$; però dipende anche dai limiti tra cui si integra. Per es., per la funzione $K(st) = s + t$, le costanti γ_n non sono eguali tra loro, se si integra tra 0 ed a (a qualunque); mentre lo sono, se l'integrazione viene eseguita tra $-a$ e $+a$.

6. Nel caso che il nucleo $K(st)$ non sia simmetrico, si ponga

$$\int_a^b K(rs) \, g(r) \, dr = g'(s)$$

$$\int_a^b K(rs) \, K(rt) \, dr = K'(st) \, ;$$

si ottiene così l'equazione a nucleo simmetrico

$$g'(s) = \int_a^b K'(st) \, h(t) \, dt \, ,$$

alla quale saranno applicabili i risultati suesposti, nel caso che le costanti relative al nuovo nucleo siano tutte eguali tra loro.

7. Voglio da ultimo mostrare la relazione che lega tra loro le costanti $C = \lim_{n=\infty} C_n$ e $\gamma = \lim_{n=\infty} \gamma_n$, nel caso generale.

[1] Si noti che, se è vero che l'uguaglianza della γ_n richiede quella delle C_n, non è per questo detto che debba verificarsi l'inverso; cioè che, se le costanti C_n sono eguali tra loro, lo debbano essere di conseguenza anche le γ_n: la (5) del n. 7 ne offre un esempio.

Presa una funzione qualunque integrabile $g(s)$, se ne cerchino le funzioni iterate $g_n(s)$, operando col nucleo simmetrico $K(st)$. Si ha così la successione

$$g_1(s) = \int_a^b K(st)\, g(t)\, dt$$

$$g_2(s) = \int_a^b K_2(st)\, g(t)\, dt$$

. . . .

$$g_n(s) = \int_a^b K_n(st)\, g(t)\, dt$$

. . . .

. . . .

Indichiamo con γ_n le costanti relative alla $K(st)$, e sia $\lim_{n=\infty} \gamma_n = \gamma$.

Si divida per γ^n la $2n^{ma}$ uguaglianza; si ottiene

$$\frac{g_{2n}(s)}{\gamma^n} = \int_a^b \frac{K_{2n}(st)}{\gamma^n}\, g(t)\, dt .$$

Passando al limite per $n = \infty$ (supposto che siano verificate le condizioni volute per l'inversione dei due simboli di limite e d'integrale), avremo, ricordando la (α) del n. 2,

$$\lim_{n=\infty} \frac{g_{2n}(s)}{\gamma^n} = \int_a^b H(st)\, g(t)\, dt .$$

E poichè il secondo membro è una funzione determinata e finita di s, tale dovrà essere anche il primo; potremo perciò porre

$$\lim_{n=\infty} \frac{g_{2n}(s)}{\gamma^n} = G(s) .$$

Si osservi che la $g(s)$, arbitraria, può sempre essere scelta in modo che si abbia $G(s) \neq 0$; infatti, perchè ciò accada, è sufficiente che la $g(s)$ non sia soluzione dell'equazione

$$\int_a^b H(st)\, \theta(t)\, dt = 0 .$$

Si consideri ora l'equazione

$$G(s) = \int_a^b K(st)\, h(t)\, dt , \tag{5}$$

e si cerchino le funzioni iterate $G_n(s)$ di $G(s)$, operando col nucleo $K(st)$. Si ha

$$G_1(s) = \lim_{n=\infty} \frac{g_{2n+1}(s)}{\gamma^n} \; ; \; G_2(s) = \lim_{n=\infty} \frac{g_{2n+2}(s)}{\gamma^n} \; ; \ldots$$

Indichiamo con Γ_n le costanti, relative alle $G_n(s)$, e con C_n quelle relative alle $g_n(s)$; abbiamo

$$\Gamma_0 = \frac{\int_a^b [G_1(s)]^2 ds}{\int_a^b [G(s)]^2 ds} = \lim_{n=\infty} \frac{\int_a^b [g_{2n+1}(s)]^2 ds}{\int_a^b [g_{2n}(s)]^2 ds} = \lim_{n=\infty} \frac{V_{2n+1}}{V_{2n}} = \lim_{n=\infty} C_{2n} = C$$

$$\Gamma_1 = \frac{\int_a^b [G_2(s)]^2 ds}{\int_a^b [G_1(s)]^2 ds} = \lim_{n=\infty} \frac{\int_a^b [g_{2n+2}(s)]^2 ds}{\int_a^b [g_{2n+1}(s)]^2 ds} = \lim_{n=\infty} \frac{V_{2n+2}}{V_{2n+1}} = \lim_{n=\infty} C_{2n+1} = C$$

. . . .

e così via; sarà quindi $\Gamma_n = C$, qualunque sia n.

Per quanto venne ricordato al n. 1, sarà allora necessariamente

$$G(s) = \frac{G_2(s)}{C} .$$

E poichè

$$\frac{G_2(s)}{C} = \frac{1}{C} \lim_{n=\infty} \frac{g_{2n+2}(s)}{\gamma^n} = \frac{\gamma}{C} \lim_{n=\infty} \frac{g_{2n+2}(s)}{\gamma^{n+1}} = \frac{\gamma}{C} G(s) ,$$

potremo dire che dovrà essere

$$C = \gamma .$$

Naturalmente, questo risultato è affatto indipendente dall'esistenza di soluzioni nell'equazione (1).

Riassumendo:

Il limite per $n = \infty$ *delle costanti* γ_n, *relative ad una funzione simmetrica* $K(st)$, *e quello delle costanti* C_n, *relative ad una funzione* $g(s)$ [non soddisfacente all'equazione $\int_a^b H(st)\,\theta(t)\,dt = 0$] *ed alle sue funzioni iterate, ottenute operando con* $K(st)$, *sono eguali tra loro.*

Astronomia. — *Sui valori del termine z nel problema della variazione delle latitudini.* Nota di E. BIANCHI, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

1. Nella precedente mia Nota [1] sulla *latitudine di Roma negli anni 1912-13 e l'ipotesi di Hirajama*, dopo aver riportato i valori del terzo termine z quali risultano da un biennio di osservazioni fatte su zenitali assolute, ne concludevo la inattendibilità di quella ipotesi.

Dicevo, poi, che dal paragone dei valori z osservati con quelli forniti dal Servizio internazionale delle latitudini, mi ripromettevo di concludere un secondo risultato del lavoro riassunto nella precedente Nota, risultato che, parmi, prospetta ormai secondo direttive diverse il problema in parola. Di ciò appunto mi occupo nella presente comunicazione.

Nella seguente tabella I sono riportati, di decimo in decimo d'anno, i valori z osservati; accanto ad essi (colonna 3ª) i corrispondenti z internazionali; infine nell'ultima colonna le differenze $z_{oss.} - z_{int.}$

TABELLA I.

EPOCA	z		$z_{oss} - z_{int}$
	osservati	internaz.	
1911.95	+ 0″0.4	+ 0′.05	− 0″.01
1912.0	+ .04	+ .06	− .02
.1	.00	+ .04	− .04
.2	− .06	+ .03	− .09
.3	− .10	− .01	− .09
.4	− .04	− .03	− .01
.5	+ .04	.00	+ .04
.6	+ .09	+ .03	+ .06
.7	+ .11	+ .05	+ .06
.8	+ .11	+ .04	+ .07
.9	+ .07	+ .02	+ .05
1913.0	+ .03	+ .03	.00
.1	− .01	+ .04	− .05
.2	− .04	+ .03	− .07
.3	− .06	.00	− .06
.4	− .05	− .01	− .04
.5	− .01	.00	− .01
.6	+ .04	+ .03	+ .01
.7	+ .07	+ .05	+ .02
1913.8	+ 0.10	+ 0.07	+ 0.03

[1] Rendiconti Accademia Lincei, 1° semestre del 1915, n. 11.

Mentre adunque i dati delle colonne 2ª e 3ª confermano la conclusione tratta nella precedente Nota, dell'inattendibilità cioè dell'ipotesi del Hirajama, in quanta gli z osservati col noto programma di zenitali assolute risultano d'ammontare e d'andamento all'incirca eguali a quelli degli z internazionali, i dati della colonna ultima dimostrano che le differenze fra i valori dei due sistemi di z non hanno carattere accidentale ma periodico, con periodo annuo, e con ammontare dello stesso ordine, fors'anche superiore, di quello degli stessi z.

2. Questo fatto — che naturalmente coincide in sostanza con l'altro, già messo in luce, del non soddisfaciente accordo fra le latitudini medie ottenute dalle istantanee osservate applicando a queste le riduzioni internazionali al polo medio — può pur concludersi con un terzo procedimento, concettualmente identico ai precedenti e che è riassunto nella tabella II.

Si applichino, cioè, al valore concluso per la latitudine media (53″,47), le riduzioni internazionali al polo istantaneo complete:

$$x \cos \lambda + y \sin \lambda + z ;$$

se ne hanno le latitudini istantanee *calcolate* della colonna 2ª; queste, paragonate colle latitudini *osservate* e perequate, dànno luogo al sistema di residui della colonna 4ª, naturalmente identici a quelli esprimenti le differenze $z_{oss.} - z_{int.}$ di tabella I.

TABELLA II.

EPOCA	$\varphi_0 + (x . \cos \lambda + y . \sin \lambda + z) = \varphi_{calc}$	φ_{oss}	$\varphi_{oss} - \varphi_{calc}$
1911.95	53″.76	53″.75	− 0″.01
1912.0	.75	.73	− .02
.1	.66	.62	− .04
.2	.54	.45	− .09
.3	.39	.30	− .09
.4	.31	.30	− .01
.5	.33	.37	+ .04
.6	.38	.44	+ .06
.7	.41	.47	+ .06
.8	.45	.52	+ .07
.9	.50	.55	+ .05
1913.0	.56	.56	.00
.1	.61	.56	− .05
.2	.63	.56	− .07
.3	.61	.55	− .06
.4	.57	.53	− .04
.5	.54	.53	− .01
.6	.51	.52	+ .01
.7	.48	.50	+ .02
.8	53.45	53.48	+ 0.03

Vale a dire:

Le osservazioni di Roma non sono soddisfacentemente rappresentate dai valori x, y, z del Servizio internazionale, in quanto presentano, rispetto a questi, scarti che, già per il loro ammontare, e tanto più poi per il loro regolarissimo andamento, non sono assolutamente spiegabili, nè con eventuali incertezze residue nelle latitudini osservate e perequate, nè con quelle ascrivibili ai valori x, y, z di riduzione usati.

3. Diciamo subito che, se questo fatto risultasse insito nelle *sole* osservazioni di Roma, ben basterebbe ad infirmarle tanto radicalmente, da togliere ogni validità ad una qualunque conclusione tratta dai risultati del presente lavoro.

Ma invece la cosa trova sicura e decisiva conferma anzitutto da parte di altre serie di osservazioni di latitudine indipendenti da quelle internazionali; non solo, ma pur anche, come del resto è noto, da parte delle osservazioni di alcune delle stazioni internazionali stesse, di osservazioni cioè che proprio concorsero direttamente alla conclusione dei valori x, y, z che si dimostrano impotenti ad una rigorosa rappresentazione (entro limiti logici) delle osservazioni stesse.

Le serie di misure da me compulsate, da questo punto di vista, sono:

1°) le osservazioni fatte con coppie alla stazione internazionale australe di *Oncativo* da 1906,4 a 1909,0 (e che *non* concorsero alla deduzione dei corrispondenti x, y, z) (¹);

2°) le osservazioni fatte con coppie a *Pulkova* da 1908,3 e 1911,3 (riduzione definitiva del *Semenow*) (²);

3°) le osservazioni di *Pulkova* fatte sulla zenitale δ Cassiopeiae da 1905,8 a 1908,0 (³);

4°) le osservazioni internazionali di Carloforte da 1901,5 a 1906,0 (⁴).

Se per le serie d'osservazioni di Oncativo e Pulkova si fa la deduzione delle latitudini istantanee calcolate e il paragone con le osservate, si hanno i dati φoss. — φcalc. della tabella III, che contiene pure i valori analoghi per Carloforte, riportati dalle pubblicazioni citate dell'Ufficio centrale della Commissione geodetica internazionale.

(¹) *Resultate des int. Breitendienstes*, Band IV.
(²) *Publications de l'Observatoire Nicolas*, vol. XVIII, 1911.
(³) *Mitteilungen Pulkowo.* Band III, pag. 178.
(⁴) *Resultate des int. Bretendienstes*, Band. III.

TABELLA III.

Oncativo		Pulkova - coppie		Pulkova - d. Cass.		Carloforte	
Epoca	$\varphi_{oss} - \varphi_{calc}$	Epoca	$\varphi_{oss} - \varphi_{calc}$	Epoca	$\varphi_{oss} - \varphi_{calc}$	Epoca	$\varphi_{oss} - \varphi_{calc}$
1906.40	+ 0″.02	1908.35	+ 0″.01	1905.85	— 0″.01	1901.5	0″.00
.55	— .02	.55	+ .09	1906.05	+ .04	.7	+ .03
.71	— .04	.75	+ .13	.25	+ .07	.9	+ .04
.87	— .03	.95	.00	.45	— .03	1902.1	— .01
1907.02	— .03	1909.15	— .06	.65	— .04	.3	— .03
.20	+ .02	.35	— .03	.85	— .03	.5	— .01
.39	+ .04	.55	— .02	1907.05	— .02	.7	+ .02
.56	— .03	.75	— .01	.25	+ .11	.9	.00
.71	— .05	.95	— .03	.45	+ .03	1903.1	— .04
.87	— .01	1910.15	— .06	.65	— .04	.3	— .06
1908.02	+ .05	.35	— .10	.85	— .01	.5	— .01
.20	+ .04	.55	— .07	1908.05	— .02	.7	.00
.40	+ .03	.75	.00			.9	— .01
.56	+ .03	.95	— .07			1904.1	— .03
.71	— 05	1911.15	— .13			.3	+ .02
.86	+ .01	1911 35	— .14			.5	+ .03
1908.97	+ .02					.7	+ .03
						.9	— .01
						1905.1	+ .01
						.3	+ .02
						.5	+ .06
						.7	+ .06
						1905.9	+ 0.05

Quando non si dimentichino le per ora inesplicabili variazioni delle latitudini *medie annue* già messe in luce dalle osservazioni delle stazioni internazionali, dai dati della precedente tabella III, da quelli analoghi che porgono altre serie di osservazioni qui per brevità non trattate, e da tutto quanto abbiamo sopra succintamente detto, appare ben giustificata la seguente conclusione:

Le osservazioni di latitudine, tanto del tipo internazionale come d'altro tipo, dimostrano, in generale, l'esistenza di residui di rappresentazione con andamento annuo tali da doverne dedurre che, indipendentemente dagli errori accidentali d'osservazione, gli x, y, z internazionali hanno la sola potenzialità di rappresentare le osservazioni in modo approssimato, nel senso di lasciare incertezze rispetto alla realtà osservata

dell'ordine del decimo di secondo d'arco ($0'',10$), *mentre il grado di loro esattezza, puramente formale, è dell'ordine del centesimo di secondo d'arco e fors'anche meno.*

4. È questa conclusione appunto che, a parer nostro, consiglia di prospettare ormai il problema generale della variazione delle latitudini secondo nuove direttive, specie se si ponga mente a quelle fra le ipotesi avanzate per spiegare il termine z che dobbiamo ancora ritenere come degne di attendibilità.

Messa da parte l'ipotesi del Hirajama; esclusa quella dello Chandler riflettente le parallassi stellari; ritenuta come ancora non provata quella del Courvoisier sulla refrazione cosmica, possiamo dire che non restano ormai in campo se non due sole ipotesi, e cioè:

1°) il termine z esprime l'effetto della componente, lungo l'asse terrestre, di un eventuale spostamento periodico annuo del centro di gravità della terra (Kimura-Schumann);

2°) il termine z null'altro esprime se non l'effetto di anomalie refrazionali atmosferiche vizianti con periodo annuo le osservazioni (Bakhuyzen).

Ma non ci pare, dopo quanto abbiamo messo in luce, che il problema in parola debba prospettarsi nel senso di dover decidere fra l'una o l'altra delle due ipotesi precedenti.

Ci pare invece che, nel suo complesso, il problema generale della variazione delle latitudini debba ormai affrontarsi secondo direttive tendenti a stabilire se il fenomeno che esso studia sia l'espressione dell'uno o piuttosto dell'altro di questi due sistemi di fatti:

I) Una variazione di latitudine osservata, $\Delta\varphi$, esprime l'effetto complessivo di *due* fenomeni diversi concomitanti; precisamente:

a) di una oscillazione dell'asse terrestre, parte preponderante, espressa analiticamente dal noto binomio

$$x \, . \cos \lambda + y \, . \sin \lambda \, ;$$

b) di anomalie refrazionali locali rappresentate dai residui

$$\Delta\varphi - (x \, . \cos \lambda + y \, . \sin \lambda) \, .$$

In tal caso il così detto termine z, fornito dalle stazioni internazionali, è l'espressione *soltanto* di ciò che v'ha di *comune* per le 6 stazioni stesse nelle anzidette anomalie, mentre la parte residua

$$\Delta\varphi - (x \, . \cos \lambda + y \, . \sin \lambda + z)$$

sta a rappresentare ciò di cui, per ciascuna stazione, le anomalie refrazionali locali si differenziano dall'anzidetto valore medio comune.

Oppure:

II) Una variazione di latitudine osservata, $\Delta\varphi$, esprime l'effetto complessivo di *tre* fenomeni diversi concomitanti; precisamente:

a) di una oscillazione dell'asse terrestre, parte preponderante, espressa analiticamente dal binomio

$$x \cdot \cos\lambda + y \cdot \sin\lambda\,;$$

b) di uno spostamento annuo del centro di gravità terrestre; e di esso misuriamo l'effetto locale z della componente ξ lungo l'asse, essendo

$$z = \xi \cdot \cos\varphi\,;$$

c) di anomalie refrazionali locali d'ammontare all'incirca eguale e fors'anche superiore a quello dello stesso termine z, con grande probabilità diverse da luogo a luogo, con carattere però generale di periodicità annua.

5. E se così s'imposta il problema, occorre vedere se valga o meno la pena di tentarne la soluzione.

Se non vogliamo andar più oltre, se ci accontentiamo cioè dello stato attuale di approsimazione che gli x, y, z internazionali lasciano nelle latitudini con essi ridotte da medie ad istantanee o viceversa, a che mai mantenere qual'è l'attuale Servizio internazionale che, non ostante l'enorme mole di lavoro d'osservazione e di calcolo ch'esso richiede, conduce a risultati sì di un elevatissimo grado di precisione, ma puramente formale rispetto alla realtà altrove osservata?

I fatti hanno ormai esuberantemente dimostrato che, con buoni osservatori, buoni strumenti e buon programma, un numero di stazioni *molto minore* dell'attuale ha la potenzialità indubbia di seguire il moto del polo e l'eventuale moto del centro di gravità terrestre con tutta la sicurezza e precisione che sono consentite dalla natura del problema e che le esigenze pratiche richiedono.

Che, se, invece, come l'ansia scientifica domanda, vogliamo tentare la soluzione del problema, allora non è chi non veda che una modificazione dell'attuale Servizio delle latitudini s'impone, e per l'indagine di una eventuale effettiva esistenza del termine z quale espressione dell'accennato moto di va e vieni del centro di gravità terrestre, e per la contemporanea indagine sulle cause e manifestazioni di eventuali anomalie refrazionali locali.

Per l'un scopo s'impone, cioè, l'attuazione di stazioni equatoriali e boreali alte. Quanto poi all'indagine sulle anomalie refrazionali, trattasi, è vero, di questione anch'essa delicata, ma che devesi affrontare con la serena fiducia che inspirano appunto quei problemi dei quali è stata dimostrata la probabile genesi fisica ed è pur stata posta almeno una prima elabora-

zione teorica. Chè devesi ricordare qui una Memoria del dott. Shinzo [1] nella quale appunto è sottoposta a disamina teorica (appunto per spiegare il termine z) l'influenza che, sotto forma di anomalia refrazionale, sulle osservazioni possono avere anche tenui gradienti di temperatura e pressione nei pressi del luogo d'osservazione. L'autore conchiude appunto questa parte del suo lavoro emettendo il voto che si instituiscano minute e rigorose ricerche sulla distribuzione della temperatura nei dintorni della stanza d'osservazione, mentre vi si effettuano le misure di latitudine.

Tutto quanto abbiamo detto intorno alle stazioni internazionali non deve naturalmente suonare come una critica di esse. Ben ricordando tutto il mirabile lavoro che si è fatto e si fa in questi Istituti davvero benemeriti della scienza, noi abbiamo voluto soltanto mettere in luce dei fatti che s'impongono all'attenzione dello studioso e fors'anche impongono nuove direttive; queste, come dissi altrove [2], vanno serenamente affrontate senza preoccuparsi del quanto di lavoro e di pensiero siano costate le precedenti ricerche, ma solo ricordando che il meglio da fare non deve mai farci rimpiangere il bene fatto.

Fisica. — *Altre ricerche sul fenomeno di Stark-Lo Surdo nell'elio.* Nota di RITA BRUNETTI, presentata dal Corrispondente A. GARBASSO.

Chimica. — *Influenza del nucleo pirrolico sulla formazione della clorofilla.* Nota preliminare di GINO POLLACCI e BERNARDO ODDO, presentata dal Socio GIOVANNI BRIOSI.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

[1] *Memoirs of the College of science* ecc. ecc. Kyoto University, vol. IV, n. 2, 1912.

[2] Bollettino della Mathesis anno V, 1913.

Fisica. — *Determinazione indiretta dello spettro solare.* Nota del prof. A. AMERIO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Le mie ricerche *Sullo spettro e sulla temperatura della fotosfera solare* [1], sono in parte fondate sulla determinazione degli spettri di alcuni punti del disco solare, convenientemente scelti.

Precisamente gli spettri, che ho determinati sperimentalmente, sono quelli che corrispondono al centro del disco solare e ai punti che ne distano angolarmente di 15°, 30°, 45°, 60°, 75°.

Sono così complessivamente sei spettri determinati in ognuna delle quattro stazioni nelle quali feci le osservazioni. Da essi si possono dedurre gli spettri zenitali per le quattro località e, infine, gli spettri normali fuori dell'atmosfera terrestre.

Nelle ricerche sopracitate la tavola V contiene gli spettri zenitali del centro del disco solare, dedotti nelle singole stazioni e lo spettro fuori dell'atmosfera terrestre, dedotto per extrapolazione, e avrei potuto anche disegnare gli spettri degli altri punti, in modo analogo a quanto è contenuto nella fig. B della tav. III, che dà gli spettri dei varî punti del disco solare, alla Capanna Regina Margherita, se ciò non fosse stato esuberante, dato lo scopo della ricerca.

La tabella seguente contiene gli spettri dei sei punti sopra detti, *fuori dell'atmosfera terrestre.*

Distribuzione dell'energia negli spettri di alcuni punti del disco solare.

(con gli errori dovuti alle riflessioni)

λ	centro	15°	30°	45°	60°	75°
0,400	94,0	89,0	80,0	69,0	55,0	37,0
0,430	129,0	123,5	112,0	98,0	79,5	55,0
0,497	148,5	143,2	134,0	118,2	97,2	70,2
0,537	149.5	145,0	136,4	122,4	102,2	74,0
0,589	146,0	142,8	135,2	123,0	104,8	80,6
0,710	130,0	127,5	122,0	112,4	98,6	80,0
0,785	117,6	115,2	111,0	103,0	92,0	75,4
1,035	73,0	71,7	69,5	65,3	60,0	51,5
1,24	47,0	46,3	44,9	42,8	39,4	35,0
1,72	19,0	18,7	18,3	17,6	16,4	14,7
2,14	9,5	...	...	8,9	...	7,6
2,91	3,0	...	...	...	...	2,4

[1] Memorie della Reale Accademia dei Lincei, 1914 (9).

Essi sono legati tra loro in modo che i rapporti tra i numeri di una stessa riga, che sono proporzionali alle energie corrispondenti a una data lunghezza d'onda, per ognuno di detti spettri, con il valore che si ha nello spettro del centro per la stessa lunghezza d'onda, sono i numeri contenuti nella tabella della pag. 60 della citata Memoria. Questi numeri, infatti, dànno i rapporti tra l'energia emergente da uno dei punti studiati del disco con quella proveniente dal centro.

Sia ora ϱ la distanza del punto che si considera dal centro, espressa in frazione del raggio del disco preso come unità, e sia q_ρ l'energia irradiata in questo punto dall'unità di superfice.

Se si fa un ragionamento già esposto nella Memoria citata, e che mi ha servito, sia per dedurre la costante solare dalle *costanti relative* ai varî punti del disco, sia gli assorbimenti dell'atmosfera solare, si avrà che la corona circolare di raggi ϱ e $\varrho + d\varrho$ irradierà l'energia:

$$2\pi\varrho q_\rho d\varrho$$

e tutto il disco:

$$\int_0^1 2\pi\varrho q_\rho d\varrho .$$

In media quindi il disco, poichè la sua area è π, irradierà

$$\int_0^1 2\varrho q_\rho d\varrho .$$

Se quindi si costruiscono le curve che hanno per ascisse i valori di ϱ e per ordinate quelli di $2\varrho q_\rho$, le aree elementari comprese tra le ordinate corrispondenti ai raggi ϱ e $\varrho + d\varrho$, l'asse delle ascisse e la curva, hanno precisamente il valore $2\varrho q_\rho d\varrho$. Per conseguenza le aree comprese tra le curve (che passano per l'origine), l'asse delle ascisse e l'ordinata corrispondente al bordo del disco solare ($\varrho = 1$), sono proporzionali alle quantità di energia che il disco solare irradia complessivamente per le singole onde.

Le curve che si ottengono sono simili alle A della tavola III della Memoria. Non sto quindi a riprodurle.

Le loro aree, misurate col planimetro di Amsler, hanno dato per le energie irradiate i valori seguenti, espressi in unità arbitrarie:

$\lambda =$	0 400	0.430	0.497	0.537	0.589	0.710	0.785	1.035	1.24	1.71	2.14	2.91
$q =$	55.3	78.7	94.3	98.0	98.3	91.0	83.4	53.9	38.9	14.7	7.7	2.5.

Se si prendono i valori di queste aree come ordinate, mentre per ascisse si prendono le lunghezze d'onda, si ha la curva I della fig. I, che rappresenta lo *spettro solare fuori dell'atmosfera terrestre*, quale sarebbe dato da un apparecchio spettrobolometrico nel quale, come nel mio, si avessero cinque riflessioni su argento, due su salgemma e due su fluorina.

A questi dati, applicando le correzioni relative a queste riflessioni, e già determinate mediante la curva A della tav. I della Memoria, si ottiene lo *spettro normale solare fuori dell'atmosfera terrestre*, che è rappresentato dalla curva 2ª della fig. I e dalla tabella seguente:

$\lambda =$	0.400	0.430	0.497	0.537	0.589	0.710	0.785	1.035	1.24	1.71	2.14	2.91
$q =$	153	177	183	181	171	144	127	75.5	49.3	19.3	9.9	3.1

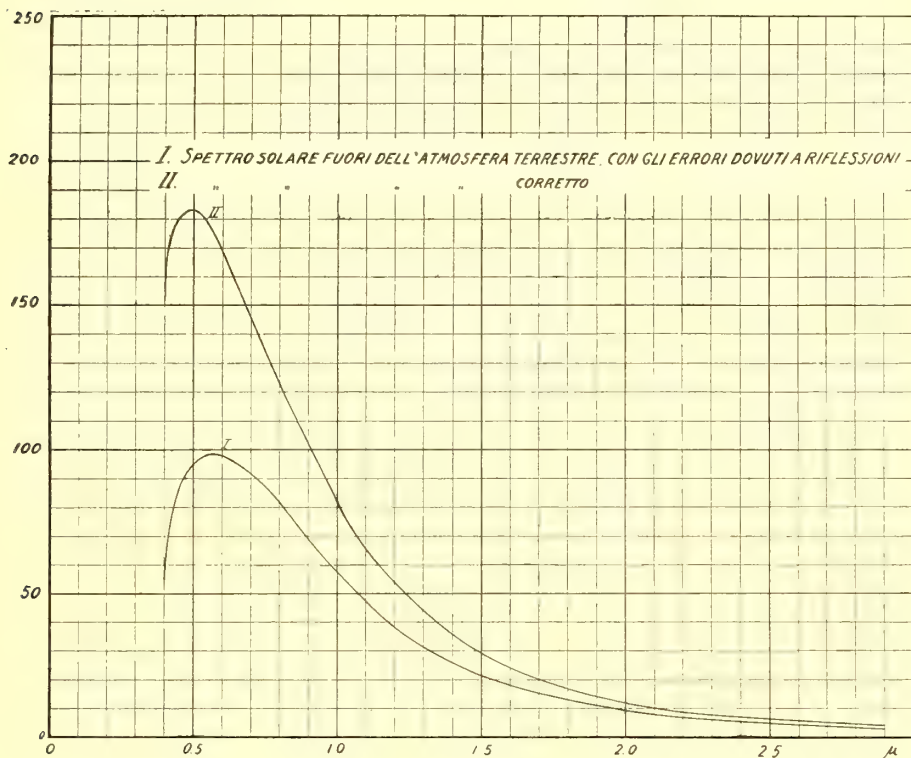



Fig. 1.

Si osservi che il massimo di questo spettro si ha per $\lambda = 0{,}49\ \mu$.

Il Lanyley (¹) assegna questo massimo a $0{,}51\ \mu$.

C'è dunque una notevole concordanza.

Si pensi, infatti, quanto ardue siano le extrapolazioni che servono ad eliminare gli effetti dell'assorbimento dell'atmosfera terrestre; che inoltre le correzioni sono numerose e notevoli, e che io ho pure tenuto conto delle riflessioni sul salgemma costituente il prisma.

Una certa differenza collo spettro normale solare di Langley c'è in quanto quello da me dedotto scende dalla parte delle onde maggiori dapprima un po' meno rapidamente.

(¹) *Researches on solar Heat,* 1884.

Dal lato del Langley sta l'autorità grande del nome; ma bisogna pur tener conto che non avendo egli potuto fare misure bolometriche alle grandi altezze, le sue extrapolazioni sono assai più incerte; dal lato mio sta il grande numero di misure fatte durante tre anni, anche su una delle più alte vette del M. Rosa.

Fig. 2.

D'altra parte se si tien conto dello spettro che, *dalle misure stesse del Langley*, deduce il Rizzo [1] con un'extrapolazione più rigorosa, la coincidenza è notevolmente migliore, non solo in quanto che il massimo si ha per $\lambda = 0{,}50\,\mu$, ma anche perchè le differenze nelle altre parti dello spettro sono pure inferiori a quanto si sarebbe potuto attendere.

2. Se si applicano ai sei spettri della prima tabella le correzioni dovute alle riflessioni, come si è fatto per passare dallo spettro 1 allo spettro 2 della fig. I, si ottengono le curve della fig. 2. Esse rappresentano gli spettri dei sei punti studiati del disco solare, fuori dell'atmosfera terrestre e corretti da ogni errore.

[1] *Sopra le recenti misure della costante solare.* Acc. Torino, 1898.

I loro massimi si hanno rispettivamente a

$\lambda = 0.45\,\mu$	per lo spettro	del centro,		
0.46	» »	dei punti a	15°	dal centro,
0.47	» »	»	30°	»
0.48	» »	»	45°	»
0.51	» »	»	60°	»
0.56	» »	»	75°	»

Se le emissioni dei punti del disco solare seguissero le leggi del corpo nero, ai sei punti corrisponderebbero rispettivamente le temperature di 6500°, 6370°, 6230°, 6100°, 5750°, 5230°.

Queste sarebbero le *temperature apparenti* dei punti studiati dedotte dalle posizioni dei massimi (legge di Wien).

Analogamente, il corpo nero il cui spettro presentasse il massimo a 0.49, come lo spettro solare della curva II della fig. I, avrebbe la temperatura di 6000° che sarebbe la *temperatura apparente* del sole.

D'altra parte, ammesso che la costante solare abbia il valore 2.09 da me trovato, si può calcolare un'altra temperatura apparente: quella che si può dedurre applicando la legge di Stefan, nell' ipotesi che la radiazione complessiva del sole la segua. Ne risultano 5900°.

Se poi si tien conto che le *costanti solari relative* ai varî punti esaminati sono:

		pel	centro	2.51
pei punti a	15°	dal	»	2.48
» »	30°	»	»	2.37
» »	45°	»	»	2.17
» »	60°	»	»	1.89
» »	75°	»	»	1.45

se ne deducono per gli stessi le seguenti rispettive temperature apparenti: 6170°, 6150°, 6080°, 5950°, 5750°, 5370°.

Le notevoli differenze che si hanno tra queste due serie dipendono appunto dal fatto che le emissioni delle varie regioni del disco solare non sono nere, in seguito agli assorbimenti esercitati dall'atmosfera solare.

È poichè le emissioni sono tanto più ricche di radiazioni molto rifrangibili, quanto più prossime al centro del disco solare sono le loro sorgenti, così le temperature apparenti, dedotte dalle posizioni dei massimi, *devono* superare quelle dedotte dalla legge di Stefan, verso il centro, e devono esserne inferiori verso il bordo, conformemente ai risultati ottenuti e alle previsioni fatte nelle mie ricerche precedenti. Queste previsioni si possono riassumere dicendo che mentre alla radiazione della fotosfera sono applicabili le leggi dei corpi neri, ciò non è possibile per le radiazioni dei singoli punti del disco solare.

Fisica terrestre. — *La frequenza nelle repliche del terremoto italiano (13 gennaio 1915)* (¹). Nota di G. Martinelli, presentata dal Socio E. Millosevich.

Colla presente Nota mi propongo soltanto di fare conoscere l'andamento della frequenza nelle repliche del terremoto italiano del 13 gennaio, registrate da un sismografo a pendoli orizzontali in funzione al pianoterra del nostro Istituto (²).

Lo studio dell'andamento, sotto ogni riguardo, delle così dette *repliche* di un grande terremoto e la determinazione di leggi in proposito sono, per universale consenso, di massima importanza e implicano questioni non meno urgenti di altre, in quanto toccano da vicino il problema fondamentale delle cause prossime determinanti il fenomeno sismico. Premetterò quindi alle notizie qualche considerazione di indole generica.

Poco sappiamo sull'argomento, intorno al quale, di veramente notevoli, si hanno solo i ben conosciuti lavori dell'Omori, dell'Enya, del Kusàkabe e quello recente dell'Oddone (³).

Il problema delle repliche presenta una singolare difficoltà, dovuta, credo, in grande parte, ad una specie di indeterminazione del problema stesso che si vuole risolvere. La difficoltà è invero comune a molte fra le questioni inerenti alla geofisica, ove spesso uno stesso fenomeno può essere prodotto da cause immediate diversissime, donde mancanza, al ripetersi del fenomeno, di quella costanza nell'andamento necessaria per risalire dalle osservazioni ad una legge.

Nel caso particolare delle repliche sismiche vi è indeterminazione non solo circa la causa immediata di ciascuna scossa, ma anche circa la causa generale che dà luogo al *fenomeno delle repliche*.

Per gli autori ricordati e per altri molti, quali lo Knott ed il Kövesligethy, le repliche non devono considerarsi come un fenomeno distinto dalla scossa principale e dalle, così dette, scosse premonitorie. Nello stesso modo come ad es., noi consideriamo quale unico processo fenomenico i cambiamenti di stato di una sostanza al variare della temperatura, così, analogamente in qualche senso, la grande scossa, le premonitorie e le repliche sono da riguardarsi come manifestazioni successive dello stato di tensione assunto dalla

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto centrale di Meteor. e Geod. di Roma, giugno 1915.
(²) Vedi per la descrizione del sismografo: Boll. Soc. Sismol. ital., vol. XII, pag. 345.
(³) Boll. Soc. Sismol. ital., vol. XVIII, pag. 356.

materia in un unico processo. Il Kusakabe esprime con ogni chiarezza tale concetto quando vuole sia dato il nome di « *aftershocks* » solo alle scosse dovute ad un disturbo residuo dello stato di tensione dei materiali [1], tensione, le cui variazioni vanno quindi riguardate quale causa unica ed immediata di tutte le manifestazioni precedenti e seguenti la scossa principale, e di questa stessa. L'Oddone, nel lavoro sopra citato, aderendo completamente alla teoria che riunisce in un solo fenomeno tutte le scosse di un periodo sismico, cerca la spiegazione del fatto in una causa plutonica, illustrando le leggi del Kusakabe, coll'attribuire le repliche ad azione diretta di gas interni in tensione decrescente per processi esplosivi.

Se male non interpreto i concetti degli autori citati, la spiegazione proposta consiste quindi nel considerare una porzione della crosta terrestre (quella circostante la regione geografica sede del fenomeno sismico) come un *sistema limitato*, nel cui interno le variazioni della tensione si trasformerebbero in fenomeni di moto. Naturalmente la limitazione del sistema, la cui tensione vien presa in considerazione, non vieta di ricercare le cause, che hanno prodotto lo stato di tensione, esternamente al sistema stesso.

Ho detto un *sistema limitato*, chè altrimenti *non avrebbe significato* parlare di variazioni di tensione e di fenomeni d'isteresi, mentre la limitazione permette la discussione analitica di quelle variazioni, nel sistema stesso in funzione del tempo, e ha reso possibili i lavori teorici del Kövesligethy e dell'Oddone.

Ora a me sembra che il fenomeno delle repliche potrebbe apparire ad altri come avente origine diversa da quella così generalmente accettata o, se non diversa, almeno più complessa, nel senso che, ammesso anche che una certa scossa si verifichi quando in una limitata porzione della crosta i limiti di elasticità sono superati, a partire da questo istante, è probabile che nelle repliche (o, meglio, nelle *successive scosse*) siano interessate altre porzioni della crosta esterna a quella le cui variazioni di tensione originarono il fenomeno. La possibilità, o, secondo me, la probabilità, che porzioni di crosta, dapprima non affatto interessate nel giuoco delle tensioni, entrino ora in azione, rende meno solido il fondamento delle ricerche teoriche, cui sopra accennavo.

Mi si permetta chiarire il mio concetto.

Allorchè i limiti di elasticità sono superati, avviene nel materiale una rottura che implica evidentemente un più o meno grande spostamento di masse. Tali spostamenti, per piccoli che siano, è estremamente probabile che generino compressioni e deformazioni nelle porzioni della crosta vicina ed esterna al sistema ove il sisma ha maturato, dando origine a stati di

[1] The Journal of the Coll. of Sc., Tokio, vol. XXI, pag. 4.

tensione del tutto nuovi e che non possono considerarsi come valori assunti dalla *funzione tensione* già sottoposta a calcolo.

Si pensi al doppio scorrimento verificatosi nel terremoto di S. Francisco, e si dica se non è probabile che un tale spostamento di massa abbia generato stati di nuove tensioni in porzioni della crosta vicina, tensioni quindi solo accidentalmente collegate con le preesistenti.

Sotto tale punto di vista, le scosse che seguono anche immediatamente una scossa notevole saranno secondo ogni probabilità fenomeni legati al primo solo come effetti di una causa occasionale; sarebbe difficile di vedervi un unico processo fenomenico, nel senso da principio accennato.

L'Omori ha ricercato in fenomeni meteorologici e cosmici la causa delle deformazioni a carattere periodico che si riscontrano sulla iperbole delle repliche; e il Kövesligethy riconosce la sovrapposizione, sulla iperbole, di una altra curva spesso indeterminabile e contenente la storia della tensione nel sistema considerato.

Secondo l'opinione sopra accennata, per la quale è da spezzare l'unità fenomenica fra una grande scossa e le seguenti, la irregolarità della curva delle repliche troverebbe una possibile spiegazione nella sovrapposizione, al fenomeno principale, di fenomeni secondarî verificantisi fuori del sistema originalmente considerato, nel senso che, ammesso anche come assolutamente dimostrato che una grande scossa debba essere seguìta da altre con frequenza iperbolica, a questa iperbole principale se ne sovrapporranno altre a causa delle nuove tensioni originatesi nelle porzioni circostanti della crosta, non interessate prima al fenomeno.

La ipotesi emessa, e che, pure se non così esplicitamente, fu forse anche da altri accennata, complica certamente lo studio del fenomeno delle repliche e rende difficile la discussione di esso in forma analitica, introducendo nel problema dati imprecisabili, quali sarebbero le nuove tensioni eventualmente originate dagli spostamenti di massa concomitanti alla prima scossa, ma mi sembra che ci avvicini, più che l'altra, alla realtà e che ci offra almeno una giustificazione delle molte deviazioni fra gli andamenti osservati e quelli teorici. Il problema si complica, ma tale complicazione è in natura, e la semplicità dell'altra ipotesi è forse un po' artificiosa e quindi troppo lontana dalla realtà dei fenomeni.

La statistica delle repliche, desunta sia da informazioni di scosse avvertite, sia da istrumenti, mette solo in evidenza quelle deviazioni, ma non offre la dimostrazione assoluta della ipotesi sopra formulata.

Può farsi questione se in ricerche di questo genere sia più utile di rilevare il numero delle repliche assumendo informazioni sulle scosse avvertite da persone, o rilevandole dalle registrazioni di un sismografo. Non esito a giudicare preferibile quest'ultimo procedimento, che (a parità di altre condizioni) esclude il coefficiente personale dei varii informatorii e prescinde dalle inevitabili omissioni di questi; che se poi non si abbia nella zona

maggiormente colpita un assai bene organizzato servizio di informazioni e ci si debba limitare a utilizzare solo le scosse, delle quali si ha notizia con gli ordinarii mezzi, la ricerca perde ogni valore. Penso che le discordanze che hanno indotto in alcuni casi a negare ogni generalità all'andamento iperbolico, trovato dall'Omori, devono appunto attribuirsi, almeno in parte, all'avere fondato i calcoli su notizie assolutamente deficienti.

Anche per le scosse ricavate dai sismografi sorgono le questioni della sensibilità degli apparecchi e della distanza dal centro del terremoto; ma tali difficoltà devono, penso, incoraggiare e non distogliere dall'analisi dei dati di un determinato istrumento, chè i risultati ottenuti in una stazione, di limitata importanza se isolati, possono essere utilizzati nel confronto con quelli altrove ottenuti.

Esporrò ora quanto ho potuto ricavare dalle registrazioni del nostro sismografo.

Dopo il terremoto a $7^h 53^m$ c. del 13, il sismografo registrò numerosissime scosse di vicina origine, molte delle quali coincidenti con moti sismici avvertiti dalle persone in Roma e nella Marsica. L'esame di tali registrazioni di aspetto caratteristico e costante ha dato ben presto il mezzo (anche a prescindere dalla durata della fase preliminare) di riconoscere con buona probabilità le registrazioni di origine marsicana. Ciò non vuol dire che nel conto di tali repliche non si possa essere incorsi in qualche errore (assumendo come repliche del terremoto del 13 registrazioni di altra pure vicina origine); ma è da pensare che, escluse quelle di origine lontana, e quelle di origine vicina, ma notoriamente diversa, pochi e trascurabili, nel computo generale, possono essere gli errori.

È solo da osservare come la prima replica rilevata (dopo la scossa principale a $7^h 52^m 53^s$) fu intorno a $8^h 4^m$, essendo le precedenti irriconoscibili nel lungo sismogramma della scossa principale, costituito al certo dalle registrazioni di questa e delle prime repliche, la cui completa perdita sarebbe in parte almeno evitata, con l'uso di razionali sistemi di smorzamento applicati ai sismografi, che, è necessario riconoscerlo, presentano, sotto tal punto di vista, una dannosa deficienza.

Nella tabella I, nelle tre linee orizzontali è indicato il numero delle scosse verificatesi nei successivi intervalli di 1 ora, dalle 8^h di ciascun giorno alle 8^h del giorno successivo, e ciò per i primi tre giorni. Nella tabella II è dato il numero delle scosse registrate nei successivi intervalli di 24 ore, da 8^h del giorno 13 gennaio a 8^h del 1° febbraio [1].

[1] Il numero delle scosse fu rilevato, sui sismogrammi originali, dai sigg. F. Castriota e L. Taffara calcolatori nel nostro Istituto. In tale rilievo si è tenuto conto delle registrazioni ben certe e non di quelle rilevabili solo perchè coincidenti con registrazioni altrove ottenute. Dato il carattere della ricerca mi è sembrato che ciò fosse opportuno per dare al computo una certa omogeneità.

TABELLA I.

	h h 8-9	h h 9-10	h h 10-11	h h 11-12	h h 12-13	h h 13-14	h h 14-15	h h 15-16	h h 16-17	h h 17-18	h h 18-19	h h 19-20
13-14	12	10	9	5	2	4	5	3	1	4	6	3
14-15	5	2	2	2	1	1	3	1	1	2	1	3
15-16	2	2	0	1	0	2	1	1	0	0	0	0

	h h 20-21	h h 21-22	h h 22-23	h h 23-0	h h 0-1	h h 1-2	h h 2-3	h h 3-4	h h 4-5	h h 5-6	h h 6-7	h h 7-8
13-14	3	4	6	4	2	3	5	2	3	5	1	1
14-15	1	5	0	1	1	2	6	2	3	2	2	0
15-16	0	1	0	1	1	0	1	0	1	2	2	3

TABELLA II.

	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24	24-25	25-26	26-27	27-28	28-29	29-30	30-31	31-1
8^h-8^h	103	49	21	13	18	10	13	7	11	12	14	2	3	3	4	5	5	7	7

Adoperando i 19 valori della tabella II, ho calcolato col metodo dei minimi quadrati le costanti x ed y della nota formula

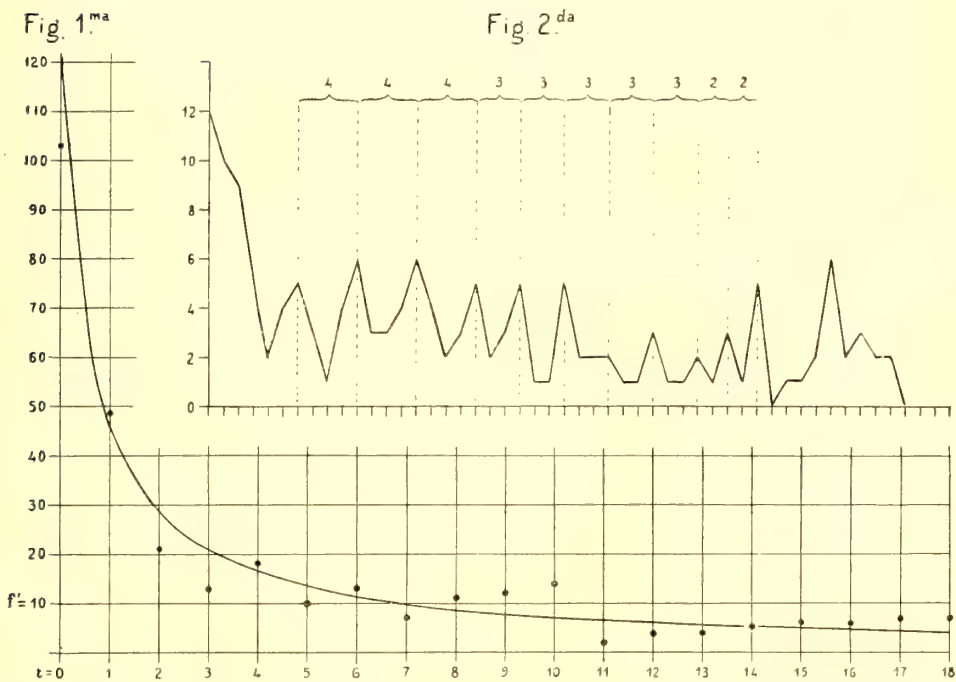
$$f = \frac{x}{t + y}$$

ed ho ottenuto

$$x = 77{,}03 \qquad y = 0{,}6371.$$

Nella tabella III sono riportati nella colonna f i valori delle frequenze osservate in corrispondenza ai tempi t; nella colonna f' le frequenze calcolate con la formula citata.

TABELLA III.

(8^h - 8^h)	t	f	f'	$f'-f$	(8^h - 8^h)	t	f	f'	$f'-f$
13-14	0	113	120.9	+ 7.9	23-24	10	14	7.2	— 6.8
14-15	1	49	47.0	— 2.0	24-25	11	2	6.6	+ 4.6
15-16	2	21	29.2	+ 8.2	25-26	12	3	6.0	+ 3.0
16-17	3	13	21.1	+ 8.1	26-27	13	3	5.6	+ 2.6
17-18	4	18	16.6	— 1.4	27-28	14	4	5.2	+ 1.2
18-19	5	10	13.6	+ 3.6	28-29	15	5	4.9	— 0.1
19-20	6	13	11.6	— 1.4	29-30	16	5	4.6	— 0.4
20-21	7	7	10.0	+ 3.0	30-31	17	7	4.3	— 2.7
21-22	8	11	8.9	— 2.1	31-1	18	7	4.1	— 2.9
22-23	9	12	7.9	— 4.1					

La curva della figura 1ª rappresenta l'iperbole equilatera

$$f' = \frac{73,03}{t + 0,6371},$$

e i punti contrassegnati (•) i valori della frequenza (f) osservati.

Gli scostamenti dei valori osservati, da quelli calcolati, sono notevoli.

In alcuni punti la differenza f'-f è, in valore assoluto, superiore ad f; risulta quindi evidente che l'iperbole disegnata non può assumersi quale curva della frequenza, nel senso di indicatrice del numero delle scosse verificatesi nei singoli intervalli di 24^h, nè tanto meno può servire per estrapolare i valori corrispondenti agli intervalli seguenti.

Un tale risultato era prevedibile dal semplice esame dei numeri della tabella II che rivelavano la mancanza di un andamento regolarmente assintotico al crescere dei tempi.

Il tentativo quindi di rappresentare con una iperbole l'andamento della frequenza *giornaliera*, tendeva solo a verificare se una iperbole poteva rappresentare la curva media nel diagramma delle frequenze.

Il diagramma della fig. 2ª, tracciato utilizzando i dati delle due prime linee della tabella I, mette in evidenza la complessità del fenomeno e suffraga ai concetti sopra esposti, rispetto alla forse eccessiva semplicità delle ipotesi poste a base delle ricerche teoriche sulle repliche dei terremoti.

Nel diagramma si nota spiccatissimo un andamento a periodo decrescente (i massimi si osservano dapprima ad ogni quattro intervalli orarî, poi ad ogni tre ed infine ad ogni due), che è da ritenersi però del tutto casuale.

Chimica generale. — *Equilibrio chimico ed azione dei sali neutri.* Nota di G. Poma e di G. Albonico, presentata dal Socio G. Ciamician.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sui borati*: *sistema* $(NH_4)_2O - B_2O_3 - H_2O$ a 60° (1). Nota III di U. Sborgi e F. Mecacci, presentata dal Socio R. Nasini.

Lo studio del sistema $(NH_4)_2O - B_2O_3 - H_2O$ dal punto di vista della regola delle fasi fu iniziato per la temperatura di 30° da uno di noi (2), e fu detto allora come questo sistema sarebbe stato studiato anche a temperature diverse da 30° non solo, ma anche sarebbe stato completato per alcuni punti non bene chiari del diagramma ottenuto a 30° dopochè gli studi a temperature diverse ci avessero messo in grado di procedere con maggior speditezza là dove erano state trovate alcune difficoltà.

Nella presente Nota pubblichiamo i resultati a 60°, resultati che abbiamo ottenuti completi, e cioè tali da fornire un diagramma senza discontinuità.

Stiamo frattanto completando con ricerche in corso il diagramma a 30°; dopodichè inizieremo le esperienze a temperature diverse da 30° e 60°, perchè è nostra intenzione studiare a fondo questo sistema.

Non crediamo opportuno di ritornare ancora sui metodi sperimentali adottati, poichè abbiamo avuto luogo di parlarne diffusamente e ripetutamente in tutte le precedenti Note sui borati (3), ed in particolare poi per i borati di ammonio nelle due Note prima citate: i metodi furono qui esattamente gli stessi allora descritti.

Riportiamo perciò senz'altro nella seguente tabella i resultati ottenuti, i quali non hanno bisogno di altre delucidazioni oltre quelle altre volte date: ricordiamo solo che le notazioni numeriche dell'ultima colonna si riferiscono, come al solito, al numero delle molecole successivamente di $(NH_4)_2O$, B_2O_3, H_2O.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Pisa.

(2) U. Sborgi, *Sui borati*. Questi Rendiconti, vol. XXI, serie 5a, 2° sem., fasc. 12, pag. 855; vol. XXII, serie 5a, 1° sem., fasc. 2, pag. 90.

(3) Confronta questi Rendiconti dall'anno 1912 all'anno 1915.

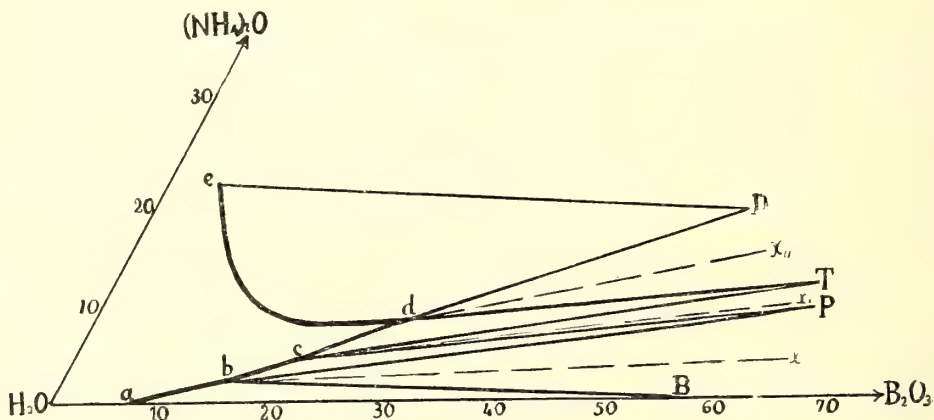
TABELLA.

N. d'ordine	SOSTANZE poste a reagire	Tempo di agitazione	SOLUZIONE $(NH_4)_2O$ °/o	SOLUZIONE B_2O_3 °/o	SOLUZIONE H_2O °/o	RESTO $(NH_4)_2O$ °/o	RESTO B_2O_3 °/o	RESTO H_2O °/o	
		giorni							
1	Acido borico + acqua	6	—	7.39	92.61	—	—	—	H_3BO_3
2	Idem + NH_4OH + acqua	8	0.78	12.12	87.10	0.32	38.14	61.54	»
3	idem	7	1.39	15.09	83.52	0.73	40.83	58.44	»
4	idem	6	1.40	15.05	83.55	2.57	39.25	58.18	H_3BO_3 + 1-5-8
5	idem	2	1.41	15.58	83.01	4.54	46.98	48.48	»
6	idem	7	1.42	15,29	83.29	1.11	43.70	55.19	»
7	idem	6	1.44	16.08	82.48	1.77	44.33	53 90	»
8	idem	4	1.70	15 29	83.01	5.71	40.91	53.38	1-5-8
9	idem	15	1.95	15.14	82.91	6.80	47.37	45.83	»
10*a*)	1-5-8 + acqua	2	2.70	16.41	80.89	—	—	—	
b)		6	2.51	16.36	81.13	7.43	50.29	33.28	»
11*a*)	Ac. bor. + NH_4OH + acqua	3	3.19	18.02	78.79	—	—	—	
b)		6	3.20	18.41	78.39	—	—	—	
c)		8	3.23	18.60	78.17	6.52	43.29	50.19	»
(*) 12	idem	17	3.86	20.31	75.83	—	—	—	
13*a*)	idem	2	4.22	20 63	75.15	—	—	—	
b)		5	4.02	20 38	75.60	7.29	43.22	49.49	1-5-8 + 1-4-6
(*) 14	idem	5	3.95	19.86	76.19	—	—	—	1-4-6
15*a*)	1-4-6 + acqua	2	4.03	20.41	75.56	—	—	—	
b)		5	4.12	21·14	74.74	9.30	46.08	44.62	»
16	Ac. bor. + NH_4OH + acqua	3	4.21	20.68	75 51	9.28	46.96	43.76	»
(*) 17	idem	2	4.33	20.56	75 11	12.68	62.94	24.38	
18	idem	2	4.45	21 20	74.34	7.49	37.35	55 16	»
19*a*)	idem	11	4.88	21.72	73.40	—	—	—	
b)		20	4.95	21.94	73.11	8.71	41.02	50.27	»
20*a*)	idem	4	5.27	22.21	72 52	—	—	—	
b)		6	5.26	22.03	72.71	8 49	39.03	52.48	»
21*a*)	idem	3	5.40	23.24	71 36	—	—	—	
b)		16	5.44	23.68	70.88	—	—	—	
c)		24	5.41	22 63	71.96	9.21	43.71	47.08	»
22*a*)	idem	4	5.86	23.56	70.58	—	—	—	
b)		7	5.90	23.02	71.08	9.18	45.89	44.93	»
23	idem	12	6.01	23.92	70.07	10.68	57.19	32.13	»
24*a*)	idem	3	6.48	24.49	69.03	—	—	—	
b)		14	6.41	24.32	69.27	9.21	41 18	49.61	»

(*segue* TABELLA).

N. d'ordine	SOSTANZE poste a reagire	Tempo di agitazione	SOLUZIONE $(NH_4)_2O$ %	SOLUZIONE B_2O_3 %	SOLUZIONE H_2O %	RESTO $(NH_4)_2O$ %	RESTO B_2O_3 %	RESTO H_2O %	
		giorni							
25*a*)	Ac. bor. + NH_4OH + acqua	4	6.69	24.90	68.41	—	—	—	
b)		6	6.63	25.42	67.95	9.51	43.07	47.42	1-4-6
26	idem	7	6 70	25.59	67.71	7.83	32.86	59.31	»
27	idem	6	7.05	26.41	66.54	9.11	39.17	51.72	»
28*a*)	idem	5	7.83	26.87	65.30	—	—	—	
b)		6	7.90	27.31	64.79	11.01	41.58	47.11	1-4-6 + 1-2-4
29*a*)	idem	4	7.89	28 09	64.02	—	—	—	
b)		21	7.97	27.97	64.06	11.40	43.79	44.81	»
30	idem	2	7.83	26.76	65.41	13.40	40.47	46.13	1-2-4
31	idem	5	7.66	25.44	66.90	14.08	43.76	42.16	»
32	idem	7	7.74	25.21	67.05	15.12	43.05	41.83	»
33	idem	2	7.50	22.84	60.66	14.80	41.65	43.55	»
34*a*)	1-2-4 + acqua	3	7.83	21.81	70.36	—	—	—	
b)		4	7.82	21.67	70.51	12.08	39.27	48.65	»
35	Ac. bor. + NH_4OH + acqua	4	7.24	20.66	72.10	—	—	—	
36	idem	3	7.91	17.57	74.52	15 21	40.19	44.60	»
(*) 37	idem	2	7.63	17.17	75.20	—	—	—	
38	idem	2	8.73	14.73	76.54	15.10	36.38	48.52	»
39	idem	3	9.30	13.68	77 02	16.20	40.20	43.60	»
40	idem	5	9.57	13.56	76.87	17.52	46.01	36 47	»
41	idem	2	10.54	12.45	77.01	16.08	36 04	47.88	»
42	idem	5	10.80	12.03	77.17	16.63	36.80	46.57	»
43	idem	4	11.10	11.58	77.32	16.61	35.88	47.51	»
44	idem	4	15.43	8.33	76.24	19.02	35.56	45.42	»
45	idem	5	15.68	7.46	76 86	19.20	33.22	47.58	»
46	idem	2	16.41	7.62	75.95	19.20	38 52	42.28	»
47	idem	9	18.76	7.11	74.13	20.39	33.83	45.72	
48	idem	2	19.47	5.92	74.61	21.14	37.19	41.49	»
49	idem	5	20.51	5.58	73.91	21.74	33 92	44.34	»
50	idem	2	21.00	5.35	73 65	—	—	—	
(*) 51	1-2-4 + NH_4OH	2	21.34	4 81	73.85	21.01	53.07	25.92	»
(*) 52	Ac. bor. + NH_4OH + acqua	3	22.57	4.47	72.96	—	—	—	

Nelle esperienze segnate di asterisco il corpo di fondo fu analizzato direttamente, cioè dopo separato ed asciugato.

Esprimendo i risultati di questa tabella coi soliti metodi grafici, si ottiene il diagramma della figura (¹) seguente, nella quale *a b* è la curva di solubilità dell'acido borico, *b c* quella del composto 1-5-8 (pentaborato ottoidrato), *c d* quella del composto 1-4-6 (tetraborato esaidrato), *d e* quella del composto 1-2-4 (diborato tetraidrato). E il diagramma termina nel punto *e* che è il punto di massima concentrazione in ammoniaca che si possa ottenere, comunque si saturi la soluzione in presenza di qualunque quantità di acido borico.

Le linee tratteggiate sono le divergenti rispondenti a dati sperimentali che si trovano nella tabella:

Come si vede, i composti stabili a 60° sono tre. L'1-5-8 fu già trovato a 30° ed è un composto ben noto (²). Secondo quanto si trova nella letteratura, sembra che sia la forma di combinazione più frequente che si ottiene quando reagisce molto acido borico con poca ammoniaca. Si ottiene anche quando si trattano con acqua altri borati, per esempio la larderellite (³).

Il composto 1-4-6 non fu trovato a 30°, nè furono trovati a 30° altri tetraborati.

Ma il diagramma a 30° nella zona di passaggio dal pentaborato al diborato rimase incompleto perchè le esperienze presentavano alcune difficoltà che, come si disse nella Nota sopra citata, si preferì di risolvere dopo effettuato lo studio del sistema ad altre temperature; quindi non è escluso che tetraborati esistano anche a 30°.

(¹) La figura riproduce soltanto quella parte del triangolo che contiene tutto il diagramma.

(²) Atterberg [Bull. soc. chim. (2), *22*, 351]; Rammelsberg Poggendorf's Ann., R. IV, Bd. V, pag. 199 etc.; D'Achiardi, Annali delle Università toscane, tomo XXIII.

(³) D'Achiardi, loc. cit.

Il terzo composto stabile a 60° è il diborato tetraidrato. Un diborato fu trovato anche a 30° e ne fu fissata la curva di solubilità; ma a 30° fu trovato un diborato diversamente idratato, e su questo fatto torneremo tra poco. Tutti e tre i composti ora indicati possono esistere inalterati a 60° in presenza di acqua pura: ciò resulta colle solite indagini grafiche dal diagramma e dai resultati della tabella. Ma il punto di soluzione dell'1-4 in acqua pura si trova (sulla curva *c d*) vicinissimo al punto *c* invariante, cioè vicinissimo al punto in cui l'1-4 verrebbe decomposto dall'acqua per dare un miscuglio di due borati; sicchè può darsi che non sia lontana da 60° la temperatura in cui questo si verifica. Frattanto la solubilità dei 3 composti in acqua pura è la seguente:

La solubilità del composto 1-5 è data da 23,25 di sale anidro in 100 parti di acqua; quella del composto 1-4 da 33,79, e quella dell'1-2 da 41,81, sempre riferendosi ai sali anidri ed a 100 parti di acqua: questi valori, ottenuti sperimentalmente, concordano con quelli che si possono ricavare colle note regole dal diagramma.

Per quanto riguarda la composizione dei corpi di fondo essa fu non soltanto individuata graficamente osservando l'intersezione delle varie linee di coniugazione, ma — come questo metodo praticamente è in certi casi fallace specialmente per quanto concerne il grado di idratazione — si cercò di separare il corpo di fondo ed analizzarlo dopo lavato ed asciugato rapidamente.

(L'esame delle curve ci aveva fatto conoscere che era possibile lavare con acqua pura, senza pericolo di decomposizione del corpo di fondo). Preparavamo di solito una grande quantità di borato in termostato a 60°; asportavamo la soluzione, e, con o senza preliminare lavaggio con acqua, asciugavamo tra carta da filtro. Quindi analizzavamo. In generale ottenevamo resultati vicini ai teorici soltanto dopo lavato con acqua, cosa prevedibile, ma che notiamo espressamente per quei casi in cui occorra analizzare senza lavare, per quanto in questi casi si tenti con ogni mezzo di asportare tutta la soluzione che imbeve il precipitato asciugandolo e comprimendolo tra carta da filtri.

Per il composto 1-5-8 trovammo come media di diverse analisi:

	$(NH_4)_2O$ 9,68 %	B_2O_3 64,97 %	H_2O 25,35 %
Teoricamente	» 9,52 %	» 64,10 »	» 26,38 %

Per il composto 1-4-6:

	$(NH_4)_2O$ 12,19 %	B_2O_3 63,96 %	H_2O 23,85 %
Teoricamente	» 11,82 »	» 63,64 »	» 24,54 »

Per il composto 1-2-4 dobbiamo fare una distinzione. Analizzando il composto ottenuto in presenza di una soluzione ad alto contenuto in ammoniaca, cioè nel ramo di curva in vicinanza di *e*, ottenevamo resultati ad alta

percentuale in ammoniaca rispetto ai teorici; se il composto era ottenuto in presenza di una soluzione posta nel ramo di curva vicino a d, ottenevamo valori vicini ai teorici per l'1-2-4. E così nel 1° caso:

$(NH_4)_2O$ 21,58 % B_2O_3 54,32 % H_2O 24,10 % (Esper. A)

Nel 2° caso:

	$(NH_4)_2O$ 19,54 %	B_2O_3 53,17 %	H_3O 27,29 %	(Esper. B)
Teoricamente	» 19,70 %	» 53,03 »	» 27,27 %	

Anche le linee di coniugazione, che si ottenevano in alto, indicavano sempre un alto contenuto in ammoniaca; ed il fascio di linee di coniugazione alte e quello più basso, partenti tutte dalla curva $e\ d$, si riunivano non nel punto rispondente all'1-2-4, ma nel punto rispondente all'1-2-2 $^1/_5$ (2-4-5) come fu trovato a 30°: tantochè per questa via indiretta si dovrebbe concludere per l'esistenza del composto 1-2-2 $^1/_2$, sia a 30° sia a 60°. Invece l'analisi diretta, come si è visto sopra, dava, per 60°, o resultati quasi teorici per l'1-2-4 (Esperienze B), o resultati distanti un po' dall'1-2-4 (Esperienze A); ma, in ogni caso, nemmeno coincidenti con quelli teorici per l'1-2-2 $^1/_2$ che sarebbero 21,94 % $(NH_4)_2O$, 59,07 % B_2O_3, 18,98 % H_2O Si poteva pensare che, essendo il corpo di fondo l'1-2-2 $^1/_2$, esso rimanesse commisto colla soluzione da cui si era separato, ricchissima in ammoniaca, e da questo si originassero le divergenze osservate; ma per avvicinarsi ai valori trovati nelle esperienze A, sarebbe occorso, per quanto riguarda il B_2O_3 e l'acqua, che fosse rimasto nei cristalli il 10 % circa di soluzione, mentre noi ottenevamo una polvere cristallina finissima e secca. Provammo anche a prendere dei cristalli della composizione trovata nelle esperienze B, cioè cristalli di 1-2-4, ed a tenerli in termostato in presenza di soluzioni sature di ammoniaca. Analizzando allora direttamente il corpo di fondo (cioè dopo separato ed asciugato), ottenemmo i resultati della esperienza 51 della tabella, in cui l'ammoniaca è aumentata, ma in cui il B_2O_3 è rimasto 53,07 %, cioè quanto se ne ha nel composto 1-2-4, e 6 % meno di quanto se ne ha nel composto 1-2-2 $^1/_2$.

Tutti questi fatti si spiegherebbero ammettendo che il composto della curva $d\ e$ fosse l'1-2-4 e che ad esso rimanesse aderente, quando si forma da soluzioni fortemente ammoniacali, una certa quantità di ammoniaca. Noi propendiamo per questa interpretazione, ed in base a questo abbiamo notato l'1-2-4 nella tabella e nella figura. Ma questo affermiamo colle riserve derivanti dalle cose ora esposte, mentre ci ripromettiamo di indagare la questione attraverso lo studio del sistema ad altre temperature.

Comunque, non si ha dubbio che si tratta qui di un diborato: la questione verte tutta sulla sua acqua di cristallizzazione (o che si ammette essere di cristallizzazione), rimanendo del resto inalterati tutti gli altri resultati

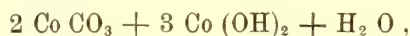
ricavabili da queste ricerche (tipo del composto formantesi, sua curva di solubilità, etc. etc.).

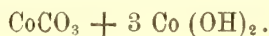
Anche rimandiamo a quando siano compiute altre ricerche a temperature diverse tutto quanto concerne la relazione tra i borati di ammonio preparati in laboratorio ed esistenti come composti ben definiti, ed un borato di ammonio naturale, la larderellite.

Mineralogia. — *Su di una modificazione alla reazione differenziale di Meigen fra calcite ed aragonite* [1]. Nota di E. Quercigh, presentata dal Corrispondente E. Artini.

È ben conosciuta la semplice reazione che W. Meigen suggerì per distinguere rapidamente la calcite dall'aragonite [2], traendo partito dal fatto che l'aragonite, in polvere, per breve ebollizione con una soluzione acquosa e diluita di nitrato di cobalto, assume una decisa colorazione lilla, mentre la polvere di calcite, a parità di trattamento, rimane inalterata, diventando più o meno azzurrastra solo col prolunguarsi dell'ebollizione, come avvertì il dott. Gino Panebianco [3].

Queste colorazioni sarebbero prodotte, secondo ulteriori ricerche di Meigen a questo proposito [4], dalla formazione di diversi carbonati basici di cobalto alla superficie dei granuli dei due minerali: sull'aragonite, in seno a soluzioni concentrate di nitrato di cobalto, si formerebbe un lieve deposito lilla avente la composizione

$$2\,Co\,CO_3 + 3\,Co\,(OH)_2 + H_2\,O\ ,$$

mentre il precipitato azzurrastro che si forma sulla calcite, avrebbe la composizione

$$CoCO_3 + 3\,Co\,(OH)_2\,.$$

Qualunque possa essere la costituzione, ignota finora, di questi prodotti di reazione, la cui stessa composizione bruta è con tutta probabilità

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di mineralogia della R. Università di Torino, diretto dal prof. Ferruccio Zambonini.

(2) W. Meigen, *Eine einfache Reaktion zur Unterscheidung von Aragonit und Kalkspath*, Centralbl. f. Min. Geol. u. Pal. (1901) 577.

(3) Gino Panebianco, *Sopra una reazione cromatica della calcite e della aragonite*, Riv. di min. e crist. italiana, *28* (1902), 5.

(4) W. Meigen, *Beiträge zur Kenntnis des kohlensauren Kalkes II und III*, Ber. d. Narturf. Gesellschaft zu Freiburg i. Br., *15* (1905), *38*; Ref. Zeitschr. f. Kryst. *44* (1908) 312.

influenzata dalle condizioni di esperienza, era interessante verificare il fatto messo in evidenza da Kreutz [1], secondo cui essi si comporterebbero diversamente rispetto alle soluzioni di cloruro ammonico. Infatti, secondo Kreutz, mentre il carbonato azzurrastro depositatosi sulla calcite sarebbe facilmente solubile in questo reattivo, quello lilla dell'aragonite vi rimarrebbe quasi insolubile.

Se ciò si avverasse realmente, sarebbe in nostro possesso un vantaggioso mezzo per rendere più netta la distinzione fra aragonite e calcite, modificando opportunamente la reazione primitiva di Meigen.

Esperienze eseguite a questo proposito mi hanno però convinto che se una differenza, fra la velocità di soluzione dei due carbonati basici di cobalto, esiste, essa è troppo poco sensibile e troppo influenzabile dalle modalità con cui i composti si formarono, per permettere una utilizzazione pratica del fenomeno.

Infatti, io presi della polvere di spato d'islanda che feci bollire per circa mezz'ora con una soluzione di nitrato di cobalto al 5 °/₀ (in peso), e, d'altra parte, sottoposi della polvere di aragonite di Sicilia ad una breve ebollizione con un'identica soluzione. Lavai accuratamente queste due sostanze; quindi varie porzioni di esse furono sottoposte all'azione di soluzioni di cloruro ammonico a varie concentrazioni, da quella comune (2 N) dei reattivi a quella satura a temperatura ordinaria.

La velocità di soluzione fu seguita colorimetricamente prelevando a determinati intervalli di tempo, dei campioncini di liquido e aggiungendovi poche gocce di solfuro ammonico: l'intensità della colorazione nera, ottenuta per le varie concentrazioni e le varie durate di azione, fu poco sensibilmente diversa per le due fasi cristalline del carbonato di calcio.

Da ciò mi dovetti persuadere che le esperienze di Kreutz, se hanno valore conclusivo per i sali basici che lui ebbe tra mano, non ne hanno uno accettabile per il caso generale, e, ad ogni modo, la differenza di comportamento verso il cloruro ammonico non può essere utilizzata con risultati pratici in queste condizioni.

A caldo la solubilità è molto più rapida e completa per i due precipitati; e su questo punto i miei risultati concordano con quelli di Kreutz.

Dato l'interesse che, senza dubbio, presenta la distinzione rapida dei due minerali in parola, è ben naturale che molti sperimentatori si sieno occupati della ricerca di reazioni cromatiche differenziali a tale proposito; ma un esame accurato dei risultati ottenuti porta inevitabilmente alla conclusione che, fra tutte, le sole consigliabili, al presente, sieno quella ac-

[1] Stephan Kreutz, *Ueber die Reaktion von Meigen*, Tschermak min. Mitt., N. F., *28* (1909) 487.

cennata, di Meigen, e quella, proposta ultimamente da St. J. Thugutt [1], che utilizza un'osservazione di Lemberg [2], correggendone l'errata interpretazione ad essa data da quest'ultimo: essa consiste nel trattare la polvere dei minerali con soluzione $\frac{N}{10}$ di nitrato d'argento, e successivamente con soluzione di bicromato potassico; nel caso dell'aragonite la polvere assume il colore rosso intenso caratteristico del cromato d'argento, mentre la calcite resta inalterata.

Anche qui, come nella reazione di Meigen, la differenziazione si fonda sulla maggiore velocità di soluzione, e quindi di reazione, della fase meno stabile.

Non credo perciò superfluo esporre qui un miglioramento di cui è suscettibile la reazione di Meigen, miglioramento a cui pervenni in occasione di alcune ricerche sulle fasi cristalline del carbonato di calcio, che renderò note tra breve.

I lati deboli della reazione di Meigen sono principalmente due:

1°) di non essere efficace quando si tratta di miscele di aragonite e di calcite; nel qual caso, come ebbe a notare Gino Panebianco [3], anche le miscele di una sola parte di aragonite con 19 di calcite potrebbero venire scambiate, per la tinta lilla assunta dall'insieme, senz'altro per pura aragonite;

2°) di riuscire evidente solo quando i minerali sono incolori o debolmente colorati, in modo da non mascherare la colorazione lilla, essendo, com'è ovvio, assai problematica la constatazione di tale mutamento di colore su materiali colorati abbastanza intensamente in giallo od in bruno, come spesso accade di molti calcari.

Questi fatti, mentre da un lato limitano l'applicazione del metodo di Meigen, dall'altro rendono conclusivi soltanto i risultati affermativi per la calcite, poichè sarà sempre possibile dubitare che, nei casi in cui si ottiene la reazione dell'aragonite, questa, anzichè sola, si trovi commista a più o meno rilevanti quantità di calcite.

In realtà io ho sottoposto alla reazione di Meigen la polvere di cristalli di aragonite di Sicilia più o meno parzialmente trasformata in calcite, ottenendo sempre nettissima la reazione dell'aragonite; ed ho constatato l'impossibilità di accorgersi, con tale metodo, che la sostanza impiegata contenesse della calcite, anche quando quest'ultima si trovava in discreta proporzione.

[1] St. J. Thugutt, *Ueber chromatische Reaktionen auf Calcit und Aragonit*, Centralblatt f. Min. Geol. u. Pal. (1910) 786.

[2] J. Lemberg, *Zur mikrochemischen Untersuchung einiger Minerale*, Zeitschr. d. deutsch. Geol. Ges. *44* (1892) 224.

[3] Gino Panebianco, loc. cit., pag. 8.

Se, d'altra parte, si considera che una reazione cromatica differenziale sarebbe particolarmente utile appunto nei casi in cui i due minerali, anzichè presentarsi incolori e ben cristallizzati, sono gialli, od in altro modo fortemente colorati, e compatti, devono sembrare maggiormente opportuni i tentativi di estendere anche a questi casi l'efficacia della reazione di Meigen.

Il mio, rivolto ad ovviare ai due inconvenienti sopra esposti, consiste nel trasformare in solfuro il carbonato basico di cobalto che si deposita sul minerale in esame; con ciò si ottiene una colorazione decisamente nera nel caso dell'aragonite, che avendo una notevole velocità di reazione, fa precipitare alla sua superficie una forte quantità di sale basico; mentre nel caso della calcite questa rimarrà quasi invariata assumendo solo un tono leggermente grigiastro o cinereo, poichè, per la sua velocità di reazione molto minore, si troverà ricoperta, a parità di condizioni sperimentali, soltanto da piccolissime quantità di carbonato di cobalto.

Nelle miscele delle due fasi i granuli dell'una sono facilmente distinguibili da quelli dell'altra, sia ad occhio nudo, sia per mezzo di lente.

La riuscita della reazione dipende dalle condizioni d'esperienza, che devono essere le seguenti:

La quantità di sostanza da impiegarsi è evidentemente arbitraria; si può consigliare l'uso di un decigrammo o due, ma, occorrendo, qualche milligrammo ed anche un solo granuletto sono sufficienti.

La grossezza della polvere non deve essere superiore a 0,2-0,4 mm.; si deve parimenti evitare una troppo spinta suddivisione, il che si raggiunge facilmente avendo cura di decantare, nei lavaggi, le porzioni che si depositano per ultime, appunto perchè sono le più piccole.

La concentrazione della soluzione di nitrato di cobalto deve essere al 5 % in peso del sale ordinario esaidrato; l'ebullizione, in provetta ordinaria, deve durare mezzo minuto, e non più.

La concentrazione della soluzione di solfuro sodico, o, in sua mancanza, di quella di solfuro ammonico, è arbitraria: perciò si possono impiegare le soluzioni solite dei reagentarî.

Operando in questo modo, io ho potuto ottenere indubbia reazione da molte varietà di calcare che, per la colorazione propria, non permettevano di trarre alcuna conclusione col metodo originario di Meigen.

Ho potuto altresì rapidamente decidere della natura di varii campioni esistenti nel Museo di mineralogia della R. Università di Torino.

Così, ad es., il campione n. 1716 che porta l'indicazione « *calcite* di Karlsbad », si manifesta nettamente per *aragonite* con la reazione di Meigen modificata, mentre la reazione di Meigen primitiva non dà, per la forte colorazione gialla del campione, alcun risultato. La determinazione del peso specifico col metodo dei liquidi pesanti confermò la mia conclusione.

Analogamente trovai che il campione n. 13337, classificato come « *aragonite* stalattitica del Laurion (dono Ponzio) », è invece costituita da *calcite*, come dimostra anche la determinazione del peso specifico.

Così pure il campione n. 1735, indicato come *calcite*, è costituito, al contrario, da *aragonite*; anche qui la densità conferma questa conclusione, e la reazione di Meigen (primitiva) sarebbe insufficiente a dare un'indicazione precisa.

Il Meigen aveva eseguito numerose esperienze per determinare se varî calcari di origine animale e vegetale fossero costituiti da aragonite o, non piuttosto, da calcite; le sue conclusioni sono, però, come è ovvio, sicure soltanto nei casi in cui egli ebbe nettamente la reazione della calcite; negli altri non si può escludere, *a priori*, la presenza anche della calcite assieme con l'aragonite.

Io ho fatto alcune esperienze con poche specie di conchiglie che ho a mia disposizione: ma siccome sarebbe opportuno uno studio sistematico, possibilmente completo dei carbonati di calcio di origine biologica, per poterne mettere in evidenza anche le eventuali relazioni fra la loro natura e le condizioni di formazione, attendo di avere a mia disposizione un ricco materiale di studio.

Per mettere in evidenza come sia facile il differenziare l'aragonite dalla calcite quando si trovano commiste, ho eseguito la reazione su una faccia di {110} previamente levigata e pulita, di un grosso cristallo poligeminato di aragonite di Sicilia, parzialmente trasformato in calcite. Con tale procedimento, prolungando però l'azione del nitrato di cobalto, in essa si distinguono nettamente le porzioni già trasformate nella fase trigonale, che si presentano molto chiare, da quelle rimaste ancora costituite dalla fase rombica, che sono molto più scure. Noto che la reazione riesce meno evidente su cristalli o frammenti di dimensioni notevoli, per il fatto che l'aumento di superficie influisce direttamente sulla quantità di solfuro di cobalto originatosi e, quindi, sulla forza del tono nero che esso conferisce al minerale. Inoltre la velocità di reazione è diversa nelle varie direzioni, e precisamente in quella di {110} è molto minore che in altre.

Per queste ragioni si deve sempre adoperare il materiale polverizzato, poichè dei cristallini intieri, nel tempo indicato, darebbero la reazione soltanto su alcune facce appartenenti a determinate forme, come esporrò dettagliatamente in altro lavoro.

Il trattamento con solfuro sodico si può, evidentemente, adottare come modificazione anche alla reazione di Thugutt ove il caso consigli preferibile questo reattivo al cromato potassico, rendendo cioè, per la natura del materiale in esame, al color nero maggior risalto che non al rosso del cromato d'argento.

Teratologia. — *Di alcune anomalie nella Beta vulgaris* L. Nota II di O. MUNERATI e T. V. ZAPPAROLI, presentata dal Socio R. PIROTTA.

In questa breve esposizione (¹) segnaliamo le deviazioni da noi riscontrate nelle radici.

Radici degeneri. — Un numero maggiore o minore di bietole completamente staccantisi dal tipo normale per la forma caratteristica prismatica,

FIG. 1. — Radici a forma prismatica, bitorzolute, degeneri.

a coste o a bitorzoli, con testa più o meno sporgente (l'unita riproduzione fotografica ne dà un'idea sufficientemente esatta), ci occorse di trovare fra i discendenti di parecchie famiglie (O-10; O-38; O-49; O-50; O-98; O-104; O-206; O-209; B-13; B-22; B-56; B-63; B-66; B-88; B-94; B-159; B-357; B-359; B-906; B-1122; B-1946). Assai di frequente i soggetti teratologici in parola, senz'essere legnosi e pur provvisti di fogliame abbon-

(¹) Ved. prima Nota sulle anomalie della parte aerea in questi Rendiconti, vol. XXXIV, 1° sem., fasc. 11°, pag. 1150.

dante, presentavano un contenuto zuccherino molto più basso di quello delle bietole normali appartenenti alle rispettive famiglie.

Nelle diverse famiglie il numero di bietole presentanti le sopra descritte caratteristiche era assai variabile: mentre nella maggior parte si riscontrarono pochi soggetti, in alcune famiglie se ne ebbe una percentuale elevata (nella O-38 il 2 %; nella O-98 l'8 %; nella O-209 il 15 %; nella B-22 il 25 %).

Per quanto dal contesto non appaia ben chiaro, presumiamo che radici di forma simile, tra i discendenti di autofecondate, abbiano trovato Andrlik,

Fig. 2. — Caso di rizomania.

Bartos e Urban [1], ma gli AA. vi accennano solo per incidenza, e senza offrire dati analitici.

Da escludere, ad ogni modo, ogni e qualsiasi correlazione tra la manifestazione teratologica in parola e le varie note deformazioni di natura batterica (crown-gall, tubercolosi, ecc.).

Rizomania. — Fenomeni di rizomania ci vennero offerti da tre soggetti di una famiglia di bietole selvagge in selezione (A-IV-24). Sopra tutto una delle tre radici presentava l'anomalia in forma singolarissima, come appare dalla fotografia qui riprodotta (fig. 2). Questa radice e un'altra

[1] *Der Einfluss der Selbstbefruchtung auf Degenerierung der Zuckerrübe,* Zeitschrift für Zuckerindustrie in Böhmen, XXXIII Jahrgang (1908-1909), Heft 7, pag. 409.

ad essa molto simile non furono analizzate per non sciuparle, data anche la loro piccolezza: la terza, in cui l'anomalia si presentava però in forma meno evidente, aveva una ricchezza in zucchero non diversa da quella degli individui normali della stessa famiglia.

Melanismo corticale. — Alcune radici a pelle scura, bluastra, riscontrammo nelle famiglie M-130, B-999 [1]. Come risulta dall'unito specchietto, il melanismo corticale non ha influito notevolmente sulla ricchezza zuccherina: in generale però le radici presentanti l'anomalia erano meno sviluppate di quelle normali.

Esame 2 settembre 1914 (An. Mezzadroli).

	Numero	Peso	Sacc. °/₀
Famiglia M-130		*a pelle bianca*	
	1	650	9,9
	2	600	12,8
	3	575	11
		a pelle nera	
	4	475	12,2
	5	320	11,3
	6	350	10
Famiglia B-999		*a pelle bianca*	
	2	550	15
	3	480	14
	4	510	12,5
		a pelle nera	
	1	439	12,8

Radici tristiche e tetrastiche. — Radici a tre solchi notammo nelle famiglie O-38, O-40, O-98, O-196. Nella famiglia B-350 abbiamo riscontrato una radice a quattro solchi bene evidenti. Neppure queste radici anomale mostravano sensibili e nette differenze, sia per la ricchezza, sia per il peso, da quelle normali delle medesime famiglie.

Come avremo modo di dimostrare in una Nota ulteriore, le radici a tre solchi derivano da soggetti tricotili; non siamo ancora in grado di affermare se le tetrastiche derivino da tetracotili o, non piuttosto, da emitetracotili.

[1] de Vries (*Die Mutationstheorie,* II, pag. 664) parla di bietole di color bruno riscontrate dal dott. Raatz a Kleinwanzleben. Si tratterà della stessa manifestazione? Ci riserbiamo di accertarcene.

Altre anomalie. — Fenomeni di nanismo e di gigantismo, di soggetti a testa sporgentissima e sottile (da non confondersi con le così dette « rosette »), a doppia testa e a testa multipla ecc., vennero da noi registrati per parecchie famiglie.

Fig. 3. — Radice a tre solchi, scollettata.

Anche varii di detti soggetti abbiamo conservato per studiare il comportamento dei loro discendenti.

Fisiologia vegetale. — *Sulla presenza, nelle piante, di composti ematoidi di ferro* (¹). Nota I del dott. G. Gola, presentata dal Socio O. Mattirolo.

Alcune esperienze di Petit (²) hanno dimostrato la possibilità di estrarre dall'orzo geminante un composto organico di ferro contenente azoto; tale composto fu ritenuto un nucleoproteide. Pure un composto di ferro organico, da ritenersi analogo all'ematogene, studiato da Bunge nell'uovo di gallina, fu trovato da Stoklasa nella cipolla (³); infine un composto organico di ferro, solubile nell'alcool acido per HCl fu estratto da Tarbouriech (⁴) e Saget dal *Rumex obtusifolius.*

(¹) Lavoro eseguito nel R. Orto botanico di Torino,

(²) *Distribution et état du fer dans l'orge.* Compt. rend. *2115,* 1892, pag. 246.

(³) *Fonction physiologique du fer dans l'organisme de la plante.* Compt. rend., *27,* 898, pag. 282.

(⁴) *Sur une variété de fer organique végétal.* Compt. rend., *148,* 1909, pag. 1517.

Come si vede, non sono mancate le esperienze vòlte a ricercare quale fosse la natura dei composti di ferro nelle piante. Io stesso, in ricerche di alcuni anni or sono [1], potei dimostrare l'esistenza in moltissime piante acquatiche, di composti organici di ferro, associati ad altri nettamente inorganici, o aventi caratteri di composti col ferro lassamente legato alla molecola organica.

Ho voluto estendere questo indirizzo di ricerca, e sono riuscito ad estrarre, da molti vegetali, dei composti organici di ferro aventi tutti delle spiccate affinità fra loro, e la cui diffusione nei tessuti e negli organismi più svariati mi ha permesso di arrivare a delle ipotesi, per ora appena abbozzate, sulla funzione fisiologica e sulla natura dei composti organici di ferro.

Le ricerche finora compiute, ed i relativi risultati, si possono coordinare in tre fasi distinte.

I.

Per evitare gli inconvenienti che avrebbero potuto eventualmente essere determinati dalla presenza di clorofilla, ho dapprima trattato dei tessuti privi di tale pigmento; poi, avendo potuto constatare come, operando nel modo seguìto nella prima fase, non si abbiano inconvenienti di sorta, ho trattato anche organi vegetali verdi.

Si pone a macerare con idrato sodico al 3 $^{0}/_{00}$ alquanta segatura di legno di abete, di pioppo; si separa per spostamento l'estratto ottenuto, si aggiunge acqua al materiale residuo, si mescolano i due estratti e poi, per acidificazione con acido acetico, si separa un precipitato, nel quale, previa incinerazione, si può constatare la presenza di molto ferro. Risultati migliori ho ottenuto adoperando come liquido per l'estrazione una soluzione di carbonato, invece che di idrato sodico; in tal modo si disciolgono sostanze estranee in misura assai minore, e il precipitato, per acidificazione, diventa assai meno impuro. La concentrazione della soluzione alcalina da usarsi varia secondo l'acidità della sostanza da estrarre.

Con questo metodo ho potuto estrarre non solo dalla segatura di legno, ma anche dalla corteccia di pioppo e di ontano, dalle foglie di *Parietaria officinalis*, dall'erba di prato essiccata e non fermentata, dal lievito di birra, dal *Lactarius controversus*, dal *Penicillum glaucum*, una sostanza bruna amorfa, ricca di ferro, e questo riconoscibile solo previa incinerazione.

Tale sostanza, evidentemente impura, contiene la parte ferrifera che è solubile in soluzioni di bicarbonato sodico, di borato sodico, cioè negli alcali deboli, e che da questi riprecipita per acidificazione; onde è possibile di riaverla meno impura. Il riscaldamento con soluzioni alcaline acquose ne stacca

[1] *Studii sulla funzione respiratoria nelle piante aquatiche e palustri.* Annali di botanica. Roma 1907, vol. V, pag. 441.

facilmente il ferro, e così pure le alterne e ripetute acidificazioni e alcalinizzazioni.

Nell'alcool, etere, cloroformio, e nei solventi organici neutri, la parte ferrifera è insolubile; l'alcool acido etilico o amilico ne scioglie in misura piccolissima; è pure poco solubile, e con alterazione parziale, nell'acido acetico bollente; una alterazione un po' più profonda sembra si abbia quando si diluisce con acqua la soluzione acetica.

In piridina è molto, ma non totalmente solubile, ciò che dimostra essere la sostanza ferrifera non omogenea.

Affatto caratteristica è la proprietà di dare, colle soluzioni alcooliche o eteree di acido pirico, una combinazione bruna solubilissima nei solventi organici neutri, insolubile in acqua.

Scaldata per 3-5 ore con soluzione alcoolica di potassa, la sostanza si decompone mettendo in libertà ammoniaca; ma tale sviluppo è da attribuirsi, con tutta probabilità, anche alle sostanze proteiche frammiste.

Anche elevando la temperatura, adoperando alcol amilico (verso i 130°), si può constatare che la stabilità del composto di ferro non rimane gran che alterata; e una parte del composto ferrifero passa nella soluzione alcoolica.

Avrei voluto intensificare le ricerche su questo indirizzo, valendomi delle soluzioni alcoliche di potassa a temperatura e pressioni molto elevate, come ha operato Willstätter per la clorofilla, e come, contemporaneamente alle mie ricerche, ha operato sull'emina [1]. Ma non avendo a disposizione i mezzi adatti a ciò, mi sono limitato a far agire a 200°-240° la potassa sul materiale di studio, operando in crogiuolo d'argento in bagno d'aria. Per evitare l'eventuale azione dell'ossigeno atmosferico, ricoprivo di un alto strato di petrolio purificato la massa in fusione; il periodo di riscaldamento durava 5-7 ore.

Dopo raffreddamento, la massa alcalina veniva estratta con alcool assoluto a caldo, con che la maggior parte del composto di ferro passava in soluzione; della porzione residua, solo una minima parte conteneva ferro riconoscibile agli ordinarii reattivi.

La soluzione alcoolica, addizionata di un pò di glicerina anidra, veniva mescolata con 1 $^{1}/_{2}$ vol. di etere; si aveva allora la separazione di uno strato prevalentemente glicerico, di colore intensamente bruno, e relativamente povero di potassa; mediante centrifugazione si completava la separazione, e si aveva così nella soluzione glicerica la maggior parte del composto ferrifero.

Questo veniva acidificato con acido acetico glaciale, e addizionato con due vol. di etere; mediante centrifugazione si asportava con l'etere la maggior parte dell'acido in eccesso; con nuovo etere si eliminava tutto l'acido, e si aveva così un composto bruno amorfo, quasi insolubile nei solventi neutri, e solubile solo in piridina.

(1) Zeitschr. f. Physiol. Chemie 1913.

Anche questo corpo amorfo dà con le soluzioni di acido picrico un picrato solubilissimo, e questo serve assai utilmente per separare il composto ferrifero dalle traccie di combinazioni potassiche che potessero trovarvisi; l'eccesso di acido picrico può poi venire lentamente eliminato con etere di petrolio saturato di alcool, nella quale miscela l'acido è un pò solubile, mentre il picrato non lo è.

Anche il picrato si ha come una massa bruna amorfa, che fonde facilmente, e brucia con lieve deflagrazione dando una fiamma luminosa.

Il picrato può venire decomposto, sia per azione dell'acqua, dalla quale è facilissimamente idrolizzabile, sia, meglio ancora, per azione della piridina. Questa scioglie il picrato, ma ne sposta l'acido; allora, per aggiunta di etere, si precipita il composto di ferro; con successive dissoluzioni in piridina e riprecipitazioni con etere si può eliminare l'acido pirico, ed avere una sostanza bruna amorfa, solubile in piridina con colorazione rosso-bruna, e che contiene ferro in grande quantità; scaldata su lamina di platino, lascia un residuo costituito unicamente da ossido di ferro.

Scaldato in tubo con zinco, svolge vapori alcalini, probabilmente ammoniacali, nonchè vapori pirrolici riconoscibili alla nota reazione della scheggia di pino.

L'azione degli alcali acquosi stacca rapidamente il ferro dalla molecola organica; così pure gli acidi un pò forti, come l'acido acetico (non l'acido picrico), in presenza di acqua, staccano lentamente il ferro dando luogo, in capo a 4-5 giorni, alla separazione di un deposito violaceo-porporino ricchissimo di ferro, solubile nell'alcool che però, trattato con HCl dilutissimo, dà la reazione col prussiato giallo.

La porzione rimasta insolubile in alcool dopo la fusione con potassa, veniva estratta con acido acetico glaciale nel quale la massima parte si scioglie; è da osservare che rapidamente però questa porzione solubile subisce una trasformazione, che la rende parzialmente insolubile nell'acido stesso.

La soluzione acetica viene trattata con etere per eliminare l'acido; poi picratata, come si disse più sopra; e si ha così un residuo analogo a quello ottenuto trattando la parte solubile in alcool.

Anche la porzione insolubile in acido acetico glaciale, o divenuta insolubile, come si è testè accennato, dà col solito trattamento con etere, poi con acido picrico, ecc., una terza porzione di ferro organico avente gli stessi caratteri dei due composti sopra descritti.

Rimangono poi traccie di composti anorganici di ferro.

Non so se questi composti di ferro (quello solubile in alcool alcalino, quello in acido acetico glaciale, quello insolubile e quello anorganico) debbano ritenersi corrispondenti a quattro diversi composti esistenti originariamente nella pianta, o siano invece il risultato di una incompleta azione della fusione con potassa. Spero di chiarire il quesito nelle ulteriori ricerche.

I caratteri dei composti così ottenuti, la tecnica che ha dato questi risultati, fanno subito pensare che il metallo si trovi legato in questi composti in modo assai analogo, se non identico, a quello che costituisce il nucleo fondamentale dell'ematina del sangue.

Alcune obbiezioni possono essere fatte contro l'accettazione, senz'altro, di tale ipotesi.

Anzitutto la reazione del pirrolo mediante la scheggia di pino non è sola dei composti pirrolici, ma altresì p. es. dell'indolo; e l'indolo poteva trovarsi nelle impurezze frammisto alla sostanza messa a reagire colla potassa in fusione. La presenza di questo corpo, o di triptofano, e conseguentemente la possibilità di avere del pirrolo, si poteva anche arguire *a priori* dall'odore che si svolgeva dalla sostanza, quando la si lasciava a sè in soluzione acquosa acida.

Inoltre i caratteri spettroscopici non erano affatto netti, quantunque fosse evidente un assorbimento nella zona del giallo-verde.

La non cristallizzabilità non costituisce un argomento contrario, perchè anche Willstätter ottenne sempre composti amorfi dall'emina, finchè non aggiunse alla soluzione alcolica, agente in autoclave, della piridina, colla quale ottenne una idrogenazione del composto ferrifero; i miei mezzi di lavoro non mi permisero di eseguire tale idrogenazione.

Ulteriori esperienze, delle quali spero di poter rendere conto prossimamente, mi hanno fornito nuovi argomenti a conferma dell'ipotesi emessa.

Le esperienze da me sopra riferite, frutto di numerosissimi saggi, furono eseguite di confronto con sangue di bue. Anche il composto di ferro del sangue venne estratto dapprima con soluzioni alcaline, e reso quindi di tipo ematinico; poi trattato come per gli estratti vegetali. Operando a bassa temperatura (120°-130°), la combinazione ferrica conserva ancora caratteri spettroscopici spiccati, ed ha una spiccata solubilità nei solventi organici neutri; ma, operando a temperatura elevata, queste differenze dal composto ferruginoso vegetale si fanno meno evidenti.

La massima parte del materiale, che mi servì per dette esperienze, fu tratto dalla segatura di pioppo, della quale lavorai un quintale estraendone 170 gr. di composto di ferro grezzo; e dall'erba secca, un quintale della quale mi fornì gr. 430 di prodotto grezzo.

Botanica. — *Sull'embriologia di Senecio vulgaris* L. [1]. Nota del dott. E. CARANO, presentata dal Socio R. PIROTTA.

Nel 1913 il Winge pubblicò in una breve Nota i risultati, a prima giunta molto interessanti, di alcune sue osservazioni sulla megasporogenesi e sulla costituzione del gametofito femmineo di *Senecio vulgaris* e di una varietà di questo, *S. v.* var. *radiatus* [2].

In verità il genere *Senecio* non era fino allora sfuggito alle ricerche embriologiche, chè già si possedevano i dati dello Strasburger [3] e del Mottier [5], nonchè quelli un po' meno esatti, come vedremo, del Warming [4] e del Vesque [6].

Però l'interpretazione data dal Winge alle cose da lui osservate non poteva non richiamare la mia attenzione, occupandomi proprio allora dell'embriogenesi delle Asteracee. E benchè fra le piante da me esaminate non vi fosse nessuna specie appartenente al genere *Senecio*, mi convinsi tuttavia, sia per l'esperienza personale acquistata nello studio di altri generi, sia per l'evidente contrasto fra le affermazioni dello Strasburger e del Mottier e quelle del Winge, che quest'ultimo autore fosse involontariamente caduto in errore, interpretando per megaspore sterili quelle cellule che in realtà non erano che le antipodi del gametofito maturo. Questa convinzione espressi in una nota a piè di pagina in un mio lavoro pubblicato or sono pochi mesi [7].

Senonchè in seguito mi sorprendeva la lettura di due recentissime Memorie del Palm, nelle quali l'opinione del Winge veniva non solo accettata senza controllo, ma anche sostenuta per altri generi di Asteracee [8].

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto botanico di Roma.

(2) Winge O., *Oogenesis hos Senecio.* Botanisk Tidsskrift, Bd. 33, 1913, pag. 245.

(3) Strasburger E., *Die Angiospermen und die Gymnospermen.* Jena, 1879, pag. 9.

(4) Mottier D. M., *On the embryo-sac and embryo of « Senecio aureus* L. ». Bot. Gazette, vol. XVIII, 1893, pag. 245.

(5) Warming E., *De l'ovule.* Annales des sciences naturelles, bot., série VI, tom. V. 1878, pag. 177.

(6) Vesque J., *Développement du sac embryonnaire des Phanérogames angiospermes.* Annales des sciences naturelles, bot., VI série, tom. VI, 1879, pag. 246.

(7) Carano E., *Ricerche sull'embriogenesi delle Asteracee.* Annali di botanica, vol. XIII, 1915, pag. 251.

(8) Palm B., *Zur Embryologie der Gattungen Aster und Solidago* (Acta Horti Bergiani, tom. V, n. 4, 1914); id., *Ueber die Embryosackentwicklung einiger Kompositen* (Vorlaufige Mitteilung) [Svensk Botanisk Tidskrift, Bd. 8, 1915, pag. 447].

In vista di tale disparità di pareri mi è sembrata cosa utile di stabilire il vero stato delle cose, almeno per ciò che riguarda il *Senecio vulgaris*.

Per questa pianta dunque il Winge sostiene che delle quattro megaspore provenienti dalla doppia divisione della cellula madre, contrariamente alla regola, non sia l' inferiore o calazale quella fertile, bensì la superiore o micropilare, ed inoltre che le altre tre megaspore non si distruggano subito, come succede in generale, ma persistano alla base della megaspora fertile, mostrando anzi un certo incremento, rilevabile dal fatto che spesso esse dividono il loro nucleo e non di rado anche il citoplasma, per cui al posto di una primitiva megaspora si possono in taluni casi formare due nuove cellule. La megaspora fertile, sempre secondo il Winge, germina e produce, mediante le consuete tre divisioni successive del suo nucleo, un gametofito femmineo, nel quale, a differenza della grandissima maggioranza delle Asteracee, le antipodi, anzichè costituirsi in cellule ben individualizzate e fornite ciascuna di propria membrana, con una posizione determinata in fondo al sacco embrionale, andrebbero più o meno presto a male e sarebbero rappresentate, prima di scomparire definitivamente, da tre masse vaganti nella cavità del sacco, di solito rintracciabili in prossimità del nucleo secondario.

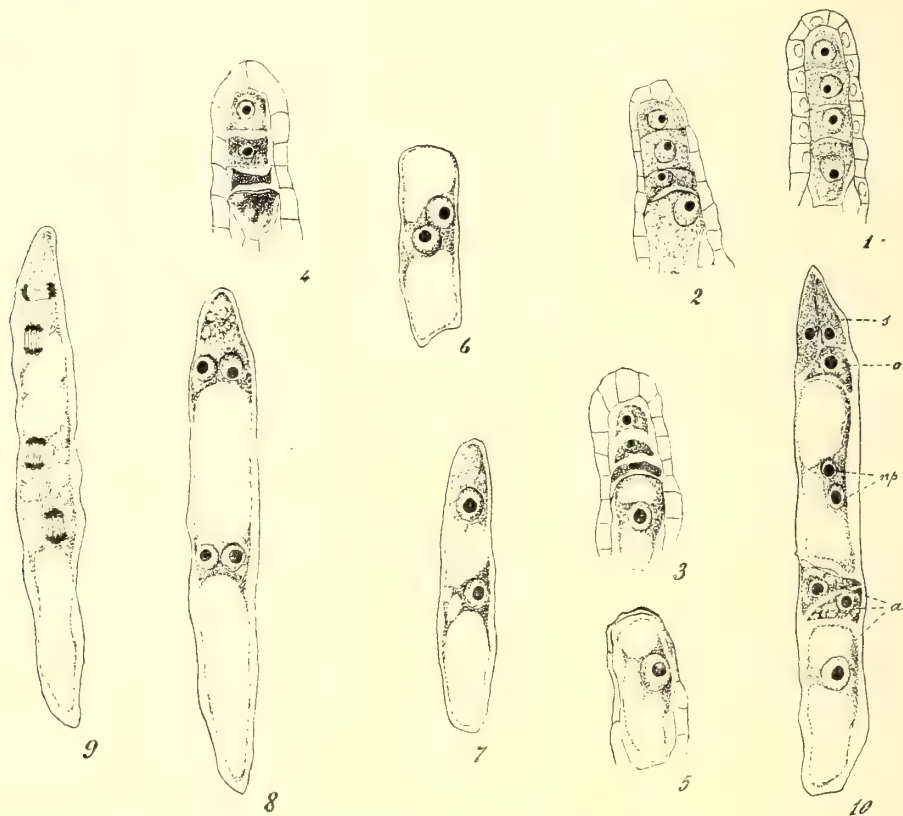
Un comportamento presso a poco conforme a quello di *Senecio vulgaris* mostrerebbero, secondo le osservazioni del Palm, *Solidago serotina* e altre specie, in cui cioè vi sarebbe una speciale tendenza allo sviluppo ulteriore di più di una megaspora.

Tenendo anche conto delle conferme del Palm, rimane il fatto che le osservazioni del Winge urtano contro quelle dello Strasburger, le quali, benchè eseguite con metodi primitivi in confronto di quelli, molto più perfezionati, di oggidì, sanno ancora, dopo circa quarant'anni, di tale scrupolosità ed esattezza da meritare tutta la nostra attenzione. Lo Strasburger dice che la megaspora inferiore prende il sopravvento e schiaccia le altre, generando un gametofito con tre antipodi rivestite di membrana e sovente binucleate, di cui la più interna è anche la più grande. Ponendo a confronto le figure dello Strasburger con quelle del Winge, la corrispondenza è perfetta, tranne che le cellule indicate come antipodi dall'uno sono le megaspore sterili dell'altro.

Il Mottier ha studiato *Senecio aureus*, una specie molto diffusa nell'America settentrionale; però, come egli stesso afferma, non si è occupato dei primi stadî di sviluppo, bensì a cominciare dal sacco embrionale quasi maturo; tuttavia egli concorda con lo Strasburger circa quanto ha attinenza con le antipodi.

Le brevi indicazioni del Warming rispetto a *Senecio vulgaris* hanno per noi un valore molto limitato, non accennando se non alla divisione della cellula madre delle megaspore in cinque (?) cellule figlie, le più interne delle quali, a giudicare da quanto è riferito nel testo a pagina 249 e dalle figure 11 e 12 (tav. 12), costituirebbero la parte inferiore del sacco (!). Nè maggior

valore hanno le indicazioni del Vesque, facendo egli derivare il sacco embrionale maturo dal concorso di tutte e quattro od anche talora cinque (?) « cellule madri speciali », di cui la superiore produrrebbe una sinergide ed un'oosfera, mentre le altre diverrebbero le « cellue anticline ». Curioso il fatto che anche il Vesque dice di non aver visto « vere antipodi ».

Il materiale di *Senecio vulgaris* è molto facile ad allestirsi ed a studiarsi, sicchè non ho durato fatica a procurarmi tutti gli stadî necessarî ed a stabilire la verità dei fatti.

La cellula madrisporigena, che occupa l' intera cavità della nucella, attraversando gli stadî caratteristici della divisione riduzionale, si scinde prima in due, dopo in quattro cellule, le megaspore, sempre disposte in pila, e da principio ad un dipresso delle medesime dimensioni (fig. 1). Ben presto però la più interna incomincia ad ingrandire a detrimento delle altre (fig. 2), che man mano vengono schiacciate e ridotte, prima di essere completamente riassorbite, a tre masse informi (fig. 3). Fra i numerosi casi osservati di tetradi di megaspore, due sole eccezioni mi si sono offerte, una delle quali è riportata nella figura 4: come vedesi, le due megaspore inferiori sono pressochè schiacciate, ed accenna ad andare a male anche la terza, mentre la

superiore, col suo aspetto perfettamente normale, mostra di voler continuare a svilupparsi (fig. 4).

Epperò, sia nel caso generale in cui la megaspora fertile è l'inferiore, sia nei casi eccezionali in cui sembra sia la superiore, quel che sempre si constata si è che una sola megaspora persiste e non tutte e quattro come ammette il Winge.

La megaspora fertile, continuando ad ingrandire, digerisce, oltre che le megaspore sterili, anche le cellule epidermiche della nucella (fig. 5), e in tal modo viene a contatto con lo strato più interno del tegumento.

In questo stadio essa germina per produrre il gametofito femmineo; perciò divide il suo nucleo in due nuclei figli, i quali non si portano subito alle estremità della cellula, come succede generalmente, ma si trovano per un po' di tempo più o meno avvicinati verso il centro (fig. 6). Questo stadio corrisponderebbe a quello illustrato dal Winge nella figura 4; però, mentre nella mia figura non si scorge più alcuna traccia delle altre megaspore, in quella del Winge, invece, al disotto dal sacco binucleato le altre tre megaspore persistono intatte.

In seguito i due nuclei si slontanano, andando l'uno all'estremità micropilare, e l'altro rimanendo presso a poco a metà della lunghezza del sacco, mentre l'estremità inferiore è occupata da un grosso vacuolo (fig. 7).

Ciascuno dei due nuclei, intanto che il sacco embrionale aumenta di dimensioni, torna a dividersi, sicchè se ne formano quattro, dei quali i due inferiori, come nello stadio precedente, rimangono separati dall'estremità del sacco per mezzo del grosso vacuolo che persiste tuttora (fig. 8).

I quattro nuclei si dividono un'ultima volta; ed io ho avuto l'opportunità di sorprenderli proprio in una fase della loro divisione (fig. 9). Come conseguenza si ha la formazione di otto nuclei, due dei quali muovono verso il centro del sacco per fondersi e originare il nucleo secondario (*np*, fig. 10), mentre gli altri sei, dominando ciascuno una porzione di citoplasma, si costituiscono in sei cellule, ossia le due sinergidi *s* e l'oosfera *o* all'estremità micropilare, le tre antipodi *a* all'estremità calazale. Di queste ultime, l'inferiore è la più grande perchè include il primitivo vacuolo dell'estremità del sacco.

La figura 10 rappresenta un gametofito che non ha ancora raggiunto il suo aspetto e le sue dimensioni definitive; esso infatti è capace di crescere ulteriormente e di assumere la forma indicata nelle figure 5-7 del Winge e 37-38 (tav. III) dello Strasburger.

Le antipodi, appena costituite, posseggono un unico nucleo; ma possono in seguito, per divisione di questo, divenire binucleate; anzi, talvolta, alla divisione nucleare segue quella cellulare, ed allora il numero delle antipodi aumenta, divenendo di quattro ed anche di cinque, come ho constatato in qualche caso.

Non ho mai scorto nei miei preparati, per quanto ne abbia fatto ricerca accurata, i tre corpicciuoli indicati dal Winge come le tre antipodi.

Concludendo, da quanto ho riferito risulta che in *Senecio vulgaris* le cose procedono in modo perfettamente normale e che realmente il Winge ha interpretato per megaspore le antipodi del sacco maturo. Perciò l'ipotesi da lui formulata, di un accenno a polisporia in *Senecio*, non ha alcun fondamento.

Botanica. — *Di alcune anomalie della Beta vulgaris.* Nota del dott. E. Carano, presentata dal Socio Pirotta.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Biologia. — *Correlazioni e differenziazioni: ricerche sullo sviluppo degli Anfibii Anuri* [1]. Nota I di Giulio Cotronei, presentata dal Socio B. Grassi.

Introduzione. Formulazione dei quesiti. Il metodo.

È dai primi tentativi di morfologia causale che è stato posto il problema dei rapporti tra correlazioni e differenziazioni; e non è raro di trovare nella letteratura scientifica degli ultimi anni, come le ulteriori ricerche sperimentali dimostrarono, che le dipendenze prima affermate della differenziazione di un organo dallo stimolo esercitato da un altro organo non erano esatte.

A questo proposito è assai istruttivo di ricordare il problema della differenziazione del cristallino. Posto sperimentalmente nel 1891 dall'italiano Colucci [2], il quale dimostrava che si può rigenerare una nuova lente da altre parti dell'occhio, la differenziazione del cristallino venne poi considerata nella sua vera essenza causale.

Secondo lo Speman [3] (1901) e secondo l'Herbst [4], la lente cristallina si origina dall'ectoderma soltanto quando si verifica uno stimolo di contatto da parte della vescicola ottica.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto d'anatomia comparata della R. Università di Roma.

[2] Colucci V. I., *Rigenerazione parziale nell'occhio dei tritoni*, Memorie Accad. Bologna, serie 5ª, vol. I, 1891.

[3] Speman H., *Ueber Correlationen in der Entwickelung des Auges.* Verhand. der Anat. Gesellsch., 1901.

[4] Herbst C., *Formalive Reize in der thiereschen Ontogenese.* Leipiz, H. Georg., 1901.

Pareva che il fatto messo in luce dallo Speman, ampliato e rafforzato dalle ricerche di Lewis (1) (1904), dovesse essere per sempre accettato e considerato come fondamentale, quando, pochi anni dopo, gli esperimenti della King (2) (1905) dimostrarono che le osservazioni dello Speman non potevano considerarsi di valore generale; perchè essa aveva ottenuto lo sviluppo della lente indipendentemente da ogni contatto della vescicola ottica.

Ancora prima della King, in un embrione mostruoso di *Salmo salar*, il Mencl (3) (1903) aveva descritto nella testa da un lato il cristallino diviso da mesenchima dal cervello, mentre dall'altro lato la lente era in rapporto con la parete del cervello, senza che vi fosse nessuna traccia di vescicole ottiche: veniva quindi a delinearsi il quesito dell'indipendenza di sviluppo del cristallino.

In ulteriori lavori Speman (4) (1905), Le Cron (5) (1907), Lewis (6) (1907) ammisero ancora il concetto di correlazione. Speman affermava che era necesario il contatto durevole della vescicola ottica per la formazione delle fibre della lente.

Le ricerche di Barfurth (7), del 1902, risentono evidentemente dell'influenza teorica esercitata dal primo lavoro di Speman. Per quanto Barfurth trovasse fra i suoi reperti un cristallino in contatto soltanto con l'ectoderma e non con la vescicola ottica, egli tuttavia cercò di spiegare tale fatto ammettendo che v'era stato un momento in cui la vescicola ottica, avvicinatasi all'ectoderma, aveva prodotto la differenziazione del cristallino: in seguito tale contatto era sparito, ed il reperto non era dunque in contrasto con la dottrina di Speman.

Ma nel 1907 lo stesso Speman (8), operando su embrioni di *Rana esculenta* in modo da asportare l'area dell'abbozzo ottico, riuscì a trovare un reperto nel quale, pur mancando la vescicola ottica, esisteva un cristallino

(1) Lewis W. H., *Experimental studies on the development of the eye in Amphibia*. I. *On the origin of the lens*. « *Rana palustris* », Am. Journ. anat., vol. III, 1904.

(2) King. H. D., *Experimental studies on the eye of the frog*. Arch. f. Entw. Mec., Bd. XIX, 1905.

(3) Mencl E., *Ein Fall von beiderseitiger Augenlinsen ausbildung während der Abwesenheit von Augenblasen*. Arch. f. Entw. Mec., Bd. XVI, 1903.

(4) Speman H., *Ueber Linsenbildung nach experimenteller Entferung der primären Linsebildungzellen*. Zool. Anz., Bd. XXXI, 1905.

(5) Le Cron W. L., *Exsperiments on the origin and differentiation of the lens in Amblystoma*. Am. Journ. anat., vol. VI, 1907.

(6) Lewis W. H., *Experimental studies on the development of the eye in Amphibia*, III. Am. Journ. anat., vol. VI, 1907.

(7) Barfurth D. und Dragendorff, *Versuche ueber Regeneration des Auges und der Linse beim Hübner-embryo*. Werh. d. Anat. Gesellsch., Halle 1902.

(8) Speman H., *Neue Tatsachen zum Linsen problem.*, Zool. Anz., Bd. XXXI, 1907.

con le fibre ben formate; perciò Speman dovette concludere che nella *Rana esculenta* la formazione e la differenziazione del cristallino erano indipendenti dal contatto della vescicola ottica.

Subito dopo, le ricerche dello Stockard ([1]) sull'azione dei sali nello sviluppo dei pesci convalidavano, in modo che pare oramai definitivo, il concetto dell'indipendenza di sviluppo del cristallino.

Tra i tanti casi ai quali avrei potuto accennare, io non senza ragione ho voluto scegliere quello dianzi riportato, perchè ci mostra, con un chiaro esempio, come i varii metodi di ricerca (esame di una mostruosità, aggressioni meccaniche, azioni dei sali) abbiano tutti servito alla analisi causale di un fatto morfologico. Non bisogna tuttavia credere che, perchè questo e infiniti altri casi (anche per opera di altri moderni mezzi di ricerca) hanno lasciato scorgere tanti esempî di differenziazioni indipendenti, il problema delle armonie correlative di sviluppo, anche dal punto di vista morfologico, possa considerarsi come meno importante nella valutazione dei fatti che si presentano al biologo.

Già il Roux aveva distinto lo sviluppo organogenetico dell'auto-differenziazione da quello successivo funzionale, nel quale predomina la correlazione. E Giardina ([2]), a tal proposito, fa notare come questo passaggio deve essere stabilito caso per caso con ricerche apposite. Si può anzi ritenere, senza tema che io esprima un concetto azzardato, che in molti casi non esista una distinzione assoluta.

Ma è nello stesso caso del problema, o, meglio dei problemi inerenti alla differenziazione del cristallino, che io credo si possa valutare dal punto di vista morfologico l'importanza dei fattori correlativi.

Da reperti brevemente riferiti da Stockard ([3]) (1910), e da reperti sperimentali molto istruttivi da me ottenuti, si rileva che bastano (secondo la mia interpretazione) modificate condizioni spaziali perchè l'occhio non diventi armonicamente completo, con l'adattamento opportuno dei differenti abbozzi oculari.

Nei reperti ora accennati si tratta, in ultima analisi, di vescicole oculari nelle quali non si riscontra il cristallino; ma la valutazione teorica del fatto, dopo i sopra riferiti risultati sull'indipendenza di sviluppo del cristallino, dev'essere considerata secondo un altro punto di vista. Il cristallino può

([1]) Stockard C. R., *The artificial production of a single median cyclopean eye in the fish embryo by means. of sea water solution of magnesium chloridr.* Arch. f. Entw. Mec., Bd. XXIII, 1907. (Segue dello stesso autore tutta una serie di interessanti lavori).

([2]) Giardina A., *I muscoli metamerici delle larve di anuri e la teoria segmentale di Loeb.* Arch. f. Entw. Mec., Bd. XXIII, 1907.

([3]) Stockard C. R., *The indipendent origin and development of the crystalline lens.* Amer. Journ. of. anat., vol. X, 1910.

potenzialmente differenziarsi indipendentemente (auto-differenziazione): ma, se si verificano modificazioni spaziali nella regione cefalica, vengono a modificarsi anche quelle condizioni per le quali è soltanto possibile l'armonica produzione dell'occhio con tutte le sue parti.

Secondo i risultati sperimentali ottenuti dallo Stockard nei pesci, in casi nei quali la cupola ottica non raggiunge la parete del corpo, non si riscontra la produzione della lente, per quanto possa ottenersi la differenziazione degli strati retinici e di altre parti dell'occhio (1910, pag. 45).

Anche io ho ottenuto casi (*Bufo vulgaris*) nei quali i due occhi, per quanto distinti, si trovano migrati medialmente, e lontani dall'ectoderma: essi non si completano col cristallino. Se il cristallino è, per il suo sviluppo, indipendente, bisogna ritenere, nei casi ora ricordati, che intervengano *altri* fattori inibitori per cui l'occhio è disarmonico. A suo tempo illustrerò meglio questi interessanti casi.

Quanto precede serve, in ultima analisi, alla formulazione di un primo quesito dell'argomento fondamentale che ci occupa e che è scaturito dall'esame storico e logico dei reperti che si ottengono nella sola regione dell'occhio; ma tutta una serie di quesiti si presentano al biologo che in condizioni sperimentali studii la regione cefalica degli Anfibii.

Fino a che punto lo sviluppo della regione boccale e nasale è correlato con tutto l'insieme cefalico? Di quale natura sono queste correlazioni? Perchè certe regioni risentono meno determinate azioni modificatrici? In tutti questi quesiti di studio bisognerà sempre tener presenti le proprietà potenziali dei varî organi studiati in relazione coi fattori correlativi. Vale assai poco l'asserire genericamente che esistono delle correlazioni. Le affermazioni di tal genere possono essere vane. Bisogna illustrare con opportune condizioni sperimentali o comparative, con metodo analitico, tutta una serie di reperti che si possono realizzare: è dall'analisi delle graduali modificazioni della forma, fino ai casi di inibizioni di sviluppo, che si può sperare di contribuire a studiare i problemi di correlazione e di differenziazione.

Lo studio da me compiuto si rivolge ancora e in relazione a quanto precede a ricercare le direzioni di accrescimento, e quindi le condizioni di sviluppo nelle quali determinati organi compiono la loro evoluzione: le direzioni di accrescimento, alle quali io in altre ricerche ho cercato di ricondurre in gran parte le condizioni meccaniche delle masse organiche, sono naturalmente esse stesse il riflesso di altre condizioni; ma tuttavia rappresentano, quando sono studiate, il modo di illustrare tanti fenomeni il cui esame ci sfuggirebbe. Non si tratta dunque, come una critica superficiale potrebbe asserire, di volere aridamente spostare i problemi, ma bensì di metterli in una luce tale da trovare e da realizzare nuove cognizioni.

Alle ricerche di morfologia causale eseguite con metodi di aggressioni meccaniche è stata spesso mossa l'obbiezione che il metodo poteva essere criticabile perchè riesce difficile in molti casi a esperimentare in maniera da aggredire soltanto i punti desiderati: così, ad es., si può intaccare l'ectoderma soprastante, quando si vorrebbe estirpare soltanto la vescicola ottica (Stockard 1910, pag. 396). Usando altri metodi, cioè determinate sostanze in soluzioni, come sali di magnesio e di litio, molti anestetici ecc., è riuscito allo Stockard di realizzare, nei pesci, importanti risultati nello studio soprattutto dei problemi inerenti allo sviluppo dell'occhio: ma già dai suoi numerosi lavori si scorge, per quanto egli non ne abbia fatto oggetto di analisi, che altre modificazioni in concomitanza con quelle dell'occhio avvengono in altre parti della testa.

Il Leplat [1] ha recentemente usato negli Anfibii anuri il cloruro di litio, ottenendo la produzione di occhi ciclopici, il cui studio ha formato l'oggetto diretto delle sue ricerche. Anche io, per le mie ricerche con indirizzo più vasto, ho utilizzato l'azione dei sali nello sviluppo degli Anfibii anuri. Certo, su tale azione esiste una letteratura molto estesa; ma non è il caso di ricordare tutti i lavori che riguardano problemi delle prime fasi di sviluppo, della gastrulazione, dell' influenza della pressione osmotica, dell'azione chimica dei varî ioni. Questi argomenti non formano oggetto dei miei studî: io, invece come ho dianzi accennato, mi son servito dell'azione dei sali come metodo sperimentale di ricerca morfologica.

Le mie ricerche sono state compiute su due specie di Anuri: il *Bufo vulgaris* e la *Rana esculenta*.

I sali da me adoperati in soluzione sono stati: il cloruro di sodio, il cloruro di litio, il cloruro di potassio, il cloruro di magnesio, il solfato di litio.

Il cloruro di litio, per le mie ricerche, si è mostrato il più energico. Anche il solfato dello stesso sale dà buoni risultati. Dopo molti tentativi, una sol volta il cloruro di sodio ha prodotto risultati notevoli per il mio scopo; tuttavia io credo che, ripetendo ancora gli esperimenti, modificando la concentrazione molecolare, da molti sali differenti si potranno ottenere risultati della stessa natura.

Per la titolazione delle soluzioni madri son lieto di ringraziare, per la gentile collaborazione, il prof. Plate e la dott.ssa B. Divizia.

Per il cloruro di litio la soluzione (da riferisi sempre a soluzioni molecolari) più spesso adoperata era $\frac{m}{10}$. Gli stadî, nei quali bisogna speri-

[1] Leplat G., *Localisation des premières ébauches oculaires chez les vertébrés. pathogénie de la cyclopie*. Anat. Anz., Bd. 46, 1914.

mentare per ottenere i resultati che saranno descritti nelle successive Note, vanno dai primi stadî di segmentazione alla riduzione del tappo vitellino. Il tempo d'esperimento varia in relazione con lo stadio e, quindi, con la velocità di sviluppo delle uova.

Fisiologia. — *Sul metabolismo degli aminoacidi nell'organismo.* Nota VIII. *Azione del tessuto epatico sugli aminoacidi aggiunti al liquido di Ringer circolante.* Nota del dott. UGO LOMBROSO e di CORRADO LUCHETTI, presentata dal Socio L. LUCIANI.

Nelle ricerche eseguite da uno di noi ([1]) sull'azione di varî tessuti di fronte agli aminoacidi, fu dato di osservare che essa è assai differente a seconda che gli aminoacidi siano sciolti in sangue od in liquido di Ringer.

Riusciva quindi interessante di completare le osservazioni fatte nella precedente Nota sull'azione del fegato di fronte agli aminoacidi sciolti nel sangue, con corrispondenti indagini di fronte ad amino-acidi sciolti in liquido di Ringer. Ciò appariva tanto più necessario, se si considera che alcune discordanze nelle ricerche di precedenti autori potevano appunto venir giustificate da questa differenza nella disposizione sperimentale.

Così, ad esempio, van Slyche ([2]) sostiene che il fegato distrugge rapidamente i varî aminoacidi che ad esso giungono col circolo sanguigno.

Invece Buglia e Costantino ([3]), esperimentando con poltiglia di fegato e liquido di Ringer, affermano che gli aminoacidi esperimentati non si modificano.

G. Bostok ([4]), nelle sue ricerche su varî aminoacidi ed estratti di fegato, giunse alla conclusione che alcuni di essi erano disamidati e profondamente, altri meno.

Buona parte delle presenti ricerche furono eseguite su cani digiunanti da più giorni (avendo interesse a seguire il comportamento del glicogeno): altre, invece, su cani alimentati. Il che è probabilmente la causa delle variazioni grandi constatate nel contenuto iniziale di aminoacidi e di NH_3 nel fegato.

Le presenti ricerche furono eseguite con la stessa tecnica usata nelle precedenti per la determinazione degli aminoacidi, NH_3, corpi acetonici. Non sempre però questi ultimi vennero dosati; e così pure venne abbandonata l'indagine dell'urea nel liquido circolante, dopo che le prime determinazioni ci dimostrarono che l'azoto liberato dall'ipobromito era, nella quasi totalità, ammoniacale.

([1]) Lombroso, Rend. Reale Acc. Lincei, vol. XXIV, pag. 57, 149.
([2]) Journ. of biol. chem. vol. XVI, pag. 187.
([3]) Zentralbl. Physiol. vol. XXVI, pag. 1178, 1913.
([4]) Biochem. Journ. vol. VI, pag. 48, 1912.

I.

Cane maschio, kg. 4. — Fegato posto a circolare gr. 110. Dopo circolazione gr. 185. α-alanina gr. 3 in 500 cc. soluzione di Ringer. Durata 50 minuti. Velocità 30-50 cm.^{3} al minuto. Pressione 30-40 mm. Hg. Campione fegato gr. 32. Campione soluzione cc. 65.

Liquido	Aminoacidi in 15 cc.	prima = 8,2 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n* dopo = 7,6 » »	NH_3 per 435 cc.: dopo = 13,5 cc. H_2SO_4 $^1/_{50}$ *n*	
Organo	Aminoacidi per tutto l'organo	prima = 22 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n* dopo = 56 » »	NH_3 per tutto l'organo	prima = 19,6 cc. H_2SO_4 $^1/_{50}$ *n* dopo = 68,6 » »

Urea ed acetone non vengono determinati. Complessivamente sono scomparsi dal liquido circolante aminoacidi per cc. 55,4 Na OH $^1/_{10}$ *n*. Aumentano nel fegato per 34 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. Aumento complessivo dell' NH_3 = 62,5 cc. H_2 SO_4 $^1/_{50}$ *n*.

II.

Cane femmina, kg. 4,500. Fegato posto a circolare gr. 60. Dopo circolazione 81. α-alanina gr. 3 in 500 cc. soluzione Ringer. Durata 2 ore. Velocità 40-50 cc. al minuto. Pressione 40-50 mm. Hg. Campione fegato gr. 24. Campione soluzione cc. 60.

Liquido	Aminoacidi in 15 cc.	prima = 8,1 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n* dopo = 6,8 » »	NH_3 per 440 cc.: dopo = 9 cc. H_2 SO_4 $^1/_{50}$ *n*	
Organo	Aminoacidi per tutto l'organo	prima = 14 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n* dopo = 38,8 » »	NH_3 per tutto l'organo	prima = 30,4 cc. H_2 SO_4 $^1/_{50}$ *n* dopo = 40,5 » »

Acetone per tutto l'organo { prima = 48 cc. I $^1/_{10}$ *n*; dopo = 6,4 » »

Acetone per il liquido: dopo = 5,4 » »

Non viene determinata l'urea.

Complessivamente sono scomparsi dal liquido circolante aminoacidi per 47,8 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. *Deficit* assoluto per 23 cc. NaOH $^1/_{10}$ *n*. Aumento complessivo dell' NH_3 = = 19,1 cc. H_2 SO_4 $^1/_{50}$ *n*.

III.

Cane maschio, kg. 4,100. Fegato posto a circolare gr. 135. Dopo circolazione 190 gr. Asparagina gr. 3 neutralizzata con 20 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n* in 500 cc. soluzione Ringer. Durata 1 ora. Velocità 50-60 cc. al minuto. Pressione 40-50 mm. Hg. Campione fegato gr. 32. Campione soluzione cc. 60.

Liquido	Aminoacidi in 15 cc.	prima = 5 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n* dopo = 3,5 » »	NH_3 per 440 cc.: dopo = 44 cc. H_2 SO_4 $^1/_{50}$ *n*	
Organo	Aminoacidi per tutto l'organo	prima = 30 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n* dopo = 70,3 » »	NH_3 per tutto l'organo	prima = 38 cc. H_2 SO_4 $^1/_{50}$ *n* dopo = 41 » »

Acetone per tutto l'organo { prima = 155 cc. I $^1/_{10}$ *n*; dopo = 22,8 » »

Acetone per il liquido: dopo = 10,1 cc. I $^1/_{10}$ *n*

Complessivamente sono scomparsi dal liquido circolante aminoacidi per 56,8 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. Aumentano nel fegato per 40,3 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. *Deficit* assoluto per 16,3 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. Aumento complessivo dell' NH_3 = 47 cc. H_2 SO_4 $^1/_{50}$ *n*.

IV.

Cane maschio, kg. 20. Fegato posto a circolare gr. 380. Dopo circolazione gr. 450. Asparagina gr. 6 neutralizzata con 30 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$, in 800 cc. soluzione Ringer. Durata 1 ora. Velocità 50 cc. al minuto. Pressione 30-4 mm. Hg. Campione fegato gr. 120. Campione soluzione 100 cc.

Liquido — Aminoacidi in 15 cc. { prima = 8,2 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$; dopo = 5,9 » »

Organo — Aminoacidi per tutto l'organo { prima = 96 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$; dopo = 108,9 » » — NH_3 per tutto l'organo { prima = 100,8 cc. H_2SO_4 $^1/_{10}\,n$; dopo = 150 » »

Acetone per tutto l'organo { prima = 34,2 cc. I $^1/_{10}\,n$; dopo = 18 » »

Acetone per il liquido: dopo = 4,1 » »

Complessivamente sono scomparsi dal liquido circolante aminoacidi per 166,9 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$. Aumentano nel fegato per 12,9 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$. *Deficit* assoluto per 154 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$.

V.

Cane femmina kg. 6. Fegato posto a circolare gr. 175. Dopo circolazione gr. 220. Leucina gr. 2,5 in 350 cc. soluzione Ringer. Durata 30 minuti. Velocità 15-20 cc. al minuto. Pressione 50-70 mm. Hg. Campione fegato gr. 45. Campione soluzione 50 cc.

Liquido — Aminoacidi in 15 cc. { prima = 5,9 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$; dopo = 5,2 » » — NH_3 per 300 cc.: dopo = 59 cc. H_2SO_4 $^1/_{50}\,n$

Organo — Aminoacidi per tutto l'organo { prima = 52,2 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$; dopo = 81,7 » » — NH_3 per tutto l'organo { prima = 63,8 cc. H_2SO_4 $^1/_{50}\,n$; dopo = 87,6 » »

Acetone per tutto l'organo { prima = 54,2 cc. I $^1/_{10}\,n$; dopo = 7,4 » »

Acetone per il liquido: dopo = 5,1 » »

Complessivamente sono scomparsi dal liquido circolante aminoacidi per 13,8 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$. Aumentano nel fegato per 29,5 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$. Rimane quindi un eccesso per 15,7 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$. Aumento complessivo dell' NH_3 = 83,3 cc. H_2SO_4 $^1/_{50}\,n$.

VI.

Cane maschio, kg. 10. Fegato posto a circolare gr. 150. Dopo circolazione gr. 215. Glicocolla gr. 2 in 500 cc. soluzione Ringer. Durata 1 ora. Velocità 30-40 cc. al minuto. Pressione 40-50 mm. Hg. Campione fegato gr. 45. Campione soluzione cc. 50.

Liquido — Aminoacidi in 15 cc. { prima = 7,5 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$; dopo = 5,7 » » — NH_3 per 450 cc.: dopo = 7,7 cc. H_2SO_4 $^1/_{50}\,n$

Organo — Aminoacidi per tutto l'organo { prima = 91,5 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$; dopo = 122,5 » » — NH_3 per tutto l'organo { prima = 45 cc. H_2SO_4 $^1/_{50}\,n$; dopo = 46 » »

Complessivamente sono scomparsi dal liquido circolante aminoacidi per 79,1 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$. Aumentano nel fegato per 31 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$. *Deficit* assoluto per 48,1 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$. Aumento complessivo dell' NH_3 = 8,7 cc. H_2SO_4 $^1/_{50}\,n$.

VII.

Cane maschio, kg. 5. Fegato posto a circolare gr. 135. Dopo circolazione gr. 185. Asparagina gr. 3 neutralizzata con 14 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$, in 500 cc. soluzione Ringer. Durata 1 ora. Velocità 30-40 cc. al minuto. Pressione 30-50 mm. Hg. Campione fegato gr. 45. Campione soluzione cc. 50.

Liquido	Aminoacidi in 15 cc.	prima = 5 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$ dopo = 3,6 » »	NH_3 per 450 cc.:	dopo = 197 cc. H_2SO_4 $^1/_{50}\,n$
Organo	Aminoacidi per tutto l'organo	prima = 28,6 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$ dopo = 43,7 » »	NH_3 per tutto l'organo	prima = 95 cc. H_2SO_4 $^1/_{50}\,n$ dopo = 187 » »

Complessivamente sono scomparsi dal liquido circolante aminoacidi per 44,3 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$. Aumentano nel fegato per 15,1 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$. *Deficit* assoluto per 29,2 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$. Aumento complessivo dell' NH_3 = 199 cc. H_2SO_4 $^1/_{50}\,n$.

VIII.

Cane maschio, kg. 5,500. Fegato posto a circolare gr. 165. Dopo circolazione gr. 220. Soluzione Ringer cc. 500. Durata 1 ora. Velocità 50-60 cc. al minuto. Pressione 20-30 mm. Hg.

Liquido	Aminoacidi in 500 cc.	dopo = 14,5 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$	NH_3 per 500 cc.:	dopo = 5 cc. H_2SO_4 $^1/_{50}\,n$
Organo	Aminoacidi per tutto l'organo	prima = 19,8 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$ dopo = 10,4 » »	NH_3 per tutto l'organo	prima = 36,3 cc. H_2SO_4 $^1/_{50}\,n$ dopo = 22,0 » »

Acetone per tutto l'organo: prima = 52,3 cc. I $^1/_{10}\,n$; dopo = 22 » »

Acetone per il liquido: dopo = 22,5 » »

Complessivamente sono scomparsi dal fegato aminoacidi per 9,4 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$. Aumenta nel liquido per 14,5 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$. Aumento assoluto per 5,1 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$. Diminuzione dell' NH_3 nel fegato = 14,3. Aumento dell' NH_3 nel liquido = 25 cc. H_2SO_4 $^1/_{50}\,n$. Aumento assoluto dell' NH_3 = 10,7 cc. H_2SO_4 $^1/_{50}\,n$.

IX.

Cane maschio, kg. 5,200. Fegato posto a circolare gr. 115. Dopo circolazione gr. 170. Glucosio gr. 2 in 500 cc. soluzione di Ringer. Durata 1 $^3/_4$ ora. Velocità 40 cc. al minuto. Pressione 20-40 mm. Hg. Campione fegato gr. 40. Campione soluzione cc. 50.

Liquido	Aminoacidi in 450 cc.	dopo = 16,1 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$	NH_3 per 450 cc.:	dopo = 37,4 cc. H_2SO_4 $^1/_{50}\,n$
Organo	Aminoacidi per tutto l'organo	prima = 15,0 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$ dopo = 27,6 » »	NH_3 per tutto l'organo	prima = 28 cc. H_2SO_4 $^1/_{50}\,n$ dopo = 41 » »

Acetone per tutto l'organo: prima = 25,3 cc. I $^1/_{10}\,n$; dopo = 5,7 » »

Acetone per il liquido: dopo = 3,1 » »

Complessivamente sono aumentati nel liquido e nel fegato aminoacidi per 27,8 cc. Na OH $^1/_{10}\,n$. Aumento totale dell' NH_3 = 41,4 cc. H_2SO_4 $^1/_{50}\,n$.

Dalle riferite esperienze emerge che:

I. Facendo circolare nel fegato isolato di cane varî aminoacidi sciolti in liquido di Ringer, si avverte una loro diminuzione nel liquido circolante, in misura assai differente a seconda dell'aminoacido usato. Essa è massima nelle esperienze con asparagina; minima in quella con leucina; media con glicocolla ed alanina. Nel caso della leucina l'aumento nel contenuto in aminoacidi del tessuto è superiore a quanto bastava per giustificare la lieve scomparsa di leucina; nel caso, invece, dell'asparagina, l'aumento di aminoacidi nel tessuto è minimo: così chè risulta sempre più manifesta la differente attività del fegato di fronte ai varî aminoacidi.

II. In tutte queste ricerche la quantità di NH_3 rinvenuta nel liquido circolante e nel tessuto dopo la circolazione fu assai elevata; tale da giustificare in gran parte, se non completamente, il *deficit* di aminoacidi. Sotto questo punto di vista il risultato ottenuto nelle esperienze con sangue, si differenzia notevolmente da quello ottenuto con liquido di Ringer: infatti, nelle prime ricerche, l'aumento di NH_3, pure essendo rilevante, non era così cospicuo, anche quando il *deficit* assoluto di aminoacidi, essendo superiore, poteva farci attendere una assai maggiore produzione di ammoniaca. Inoltre esso si differenzia dal risultato ottenuto nelle esperienze su altri organi, nelle quali per lo più il contenuto di NH_3 nel tessuto dopo la circolazione era in diminuzione e non in aumento.

III. Facendo circolare nel fegato isolato di cane soluzione di Ringer senza aminoacidi, una certa quantità di aminoacidi viene dal tessuto versata nel liquido circolante. In una esperienza diminuì nel contempo la quantità di aminoacidi nel tessuto; nell'altra (nella quale al liquido circolante si era aggiunto glucosio) si ottenne pure un aumento notevolissimo degli aminoacidi nel tessuto.

IV. In tutte le esperienze eseguite, sia in quelle con aminoacidi o senza, sia in quelle col fegato di animali da lungo tempo digiunanti od alimentati, sempre si osservò che il contenuto in sostanze cetogene (assai vario a seconda delle condizioni sperimentali) del tessuto epatico, diminuisce profondamente. Tale diminuzione non può giustificarsi semplicemente col riversarsi dei corpi cetogeni nel liquido circolante, dato chè in questo se ne ritrovano sempre piccole quantità.

Emerge quindi la capacità del tessuto epatico di consumare detti corpi anche quando non coopera l'azione ossidante del sangue.

Dal complesso delle presenti ricerche si rileva che il tessuto epatico è capace di distruggere, ed in notevole quantità, aminoacidi sciolti nel liquido di Ringer circolante: a differenza di quanto avviene per gli altri tessuti (muscolo-intestino) nei quali o non si distruggono affatto o soltanto in misura assai lieve, molto minore che non nelle corrispondenti esperienze con amino-

acidi sciolti nel sangue. Mentre poi nelle esperienze con circolazione sanguigna nel fegato prevalgono, a carico degli aminoacidi aggiunti, i fenomeni sintetici, nelle esperienze con liquido di Ringer invece, prevalgono i fenomeni disintegrativi con produzione di NH_3.

CORRISPONDENZA

Il Presidente Blaserna presenta un piego suggellato inviato dall' ing. Sabino Cilenti, perchè sia conservato negli archivi accademici.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 20 giugno 1915.

Annuario dell'Istituto di storia del diritto romano, voll. XIII-XIV. Catania, 1914-1915. 8°.

Ashby Th. — Le diverse edizioni dei « Vestigi dell'antichità di Roma » di Stefano Du Pérac ». (Estr. dalla « Bibliofilia », vol. XVI). Firenze, 1915. 8°.

Bianchi A. — Su un possibile nuovo mezzo di estinzione degli incendi. (Estr. dal « Politecnico », 1914). Milano, 1914. 8°.

Commissione reale per il personale delle ferrovie dello Stato. Relazione del presidente a S. E. il Ministro dei LL. PP. sui lavori della Commissione (dicembre 1914; con appendice, gennaio 1915). Roma, 1915. 8°.

Commissione reale per il personale delle ferrovie dello Stato: seconda Relazione del presidente a S. E. il ministro dei LL. PP. sui lavori della Commissione (aprile 1915). Roma, 1915. 8°.

D'Ovidio F. — Benvenuto da Imola e la leggenda virgiliana. (Estr. dagli « Atti della R. Accad. di arch., lett. e belle arti », vol. IV). Napoli, 1915. 8°.

D'Ovidio F. — L'origine della presente guerra (discorso). Roma, 1915. 8°.

Fregni G. — Della legge X delle dodici tavole *De iure sacro*. Modena, 1915. 8°.

Fregni G. — Su la razza slava e su le terre irredente. Modena, 1915. 8°.

Longàs P. — Vida religiosa de los Moriscos. Madrid, 1915. 8°.

Marti P. — Pagine di propaganda civile. Lecce, 1915. 8°.

Mazzini U. — L'anfiteatro romano di Luni illustrato e descritto. (Estr. dalle « Memorie della R. Accad. delle scienze di Torino », ser. II, vol. LXV). Torino, 1915. 8°.

Merlani A. — In memoria di Cesare Arzelà. Bologna, 1915. 8°.

Notiziario archeologico: anno I, fasc. 1°-2°. Roma, 1915. 8°.

Papers of the british School at Rome; vol. VIII. London, 1914. 8°.

INDICE DEL VOLUME XXIV, SERIE 5ª. — RENDICONTI

1915 — 1º Semestre.

INDICE PER AUTORI

A

N

O

P

T

V

Z

INDICE PER MATERIE

G

M

ERRATA-CORRIGE

A pag. 241, ultima riga dell'annotazione:	giunge	giunse
» 243, intestazione della tabella:	veloci	velocità
» 245, tabella:	Graz 54 30	Graz 53 59

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-XXIV. (1892-1915). Fasc. 12°. Sem. 1°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XXIII. (1892-1914).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-XI. Fasc. 2.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XII.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

[illegible]I DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino e Firenze.*

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa e Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 giugno 1915.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

CORRISPONDENZA

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretar*[illegible] *nsabile.*

Abb[illegible]ostale.